ゼータ関数から見た代数体と関数体の類似の歴史

黒川信重（東大・数理）

§0. はじめに

表題は「ゼータ関数を通して見た，類似の歴史」あるいは「ゼータ関数自身が見た，類似の歴史」とも考えられるが，ここでは前の意味での歴史を簡単に概観したい。

体（非可換も含めて）K_1, K_2 に対して ゼータ関数 $\zeta_{K_1}(s)$, $\zeta_{K_2}(s)$ が何らかの方法で構成できたとき K_1 と K_2 の類似を $\zeta_{K_1}(s)$ と $\zeta_{K_2}(s)$ の類似から見たい。 ここで取り挙げるのは

§1. 代数体および代数体上の関数体のゼータ関数

§2. 有限体上の関数体のゼータ関数

§3. 複素数体上の関数体のゼータ関数

§4. 非可換（関数）体のゼータ関数

である。今回は 全体的な比較が容易になるように詳細な記述は避ける。またL-関数も扱っていない。別の機会に「L関数の歴史」として議論したい。

§1. 代数体および代数体上の関数体のゼータ関数

① 有理数体 $\mathbb{Q}$ のゼータ関数

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s)=\prod_{p:\text{素数}}(1-p^{-s})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

は オイラー（1737）[1a]，リーマン（1859）[1b] により研究され解析接続と関数等式が証明された。これを用いて1800年代末までに素数定理

$$\pi(x) = \#\{p: 素数 \mid p \leqq x\} \sim \frac{x}{\log x}$$

が証明された。 また，ディリクレ（1837）[1c] が"L-関数"

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s, \chi) = \prod_{p:素数} (1-\chi(p)p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

を導入し，ディリクレの素数定理（等差数列内の素数分布）を証明した。

② 一般の代数体 K（有理数体上の有限次拡大体）のゼータ関数 $\zeta_K(s)$ は デデキント（1877）[1d] によって

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1-N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} N(\mathfrak{a})^{-s}$$

と構成された。ここで，$\mathcal{O}_K$ は K の整数環，$\mathfrak{p}$ は $\mathcal{O}_K$ の零でない素イデアル全体（つまり極大イデアル全体）を動き $\mathfrak{a}$ は $\mathcal{O}_K$ の零でないイデアル全体を動く。$N(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$ はノルムである。デデキントは $s=1$ における有名な留数公式を得た。

このデデキント・ゼータ関数を用いて素イデアル定理

$$\pi_K(x) = \#\{\mathfrak{p} \mid N(\mathfrak{p}) \leqq x\} \sim \frac{x}{\log x}$$

は ランダウ（1903）[1e] によって $\zeta_K(s)$ の $\mathrm{Re}(s) > 1 - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}$ における様子を調べることにより示された。全平面への解析接続と関数等式はヘッケ（1917）[1f] が証明し，後に1950年代初頭，岩沢およびテイトがアデール解析をもちいて再構成した。岩沢の方法については

詳細は未発表であったが，文献［1g］を参照されたい。（この文献は岩沢からデュドネへの1952年4月8日付の手紙であり，岩沢の方法が詳しく書かれている。類数の有限性とディリクレの単数定理を含めて岩沢の証明法はヴェイユの"Basic Number Theory" 1967に用いられた。［1g］が出版されたのは1992年12月であり，デュドネは直前の11月29日に86歳で亡くなった。）

③ Kを代数体上の（有限次元）関数体とするとゼータ関数 $\zeta_K(s)$ はハッセとヴェイユにより1940年代に考案され，現在ではハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数と呼ばれている。歴史的事情（ハッセが楕円関数体の場合にゼータ関数を提案して解析接続を学生に課題として提出したこと――この問題は現在でも解けていない）に関しては，このゼータ関数についての最初の出版物であるヴェイユ（1952）［1h］および全集における注記（杉浦光夫・訳『数学の創造』日本評論社）を参照されたい。

ハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数の定義はグロタンディーク（1965）［1i］がスキームおよびそのゼータ関数を導入することにより明確にされた。（セール（1965）［1j］にわかりやすい解説がある。）そのためにはKを関数体とするスキーム X（Spec $\mathbb{Z}$ 上有限型）を取ってきて

$$\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\prod_{\substack{x\in X \\ \text{閉点}}}\left(1-N(x)^{-s}\right)^{-1}$$

と定義する。つまり，イデアルで言えば極大イデアル全体

にわたる積をとる。ここでは，素イデアルと離れてくる。ディリクレ級数としての解釈は形式的な展開である

$$\zeta_K(s) = \sum_{c:\,\mathfrak{O}\text{-サイクル}} N(c)^{-s}$$

はあるが実質的な意味は定かでない。このため解析接続および関数等式の証明は非常に困難であり，ごく一部のKに対してしか示されていない。残りの部分はハッセ・ヴェイユ予想，谷山（－ヴェイユ）予想，ラングランズ予想…などと呼ばれている。Kが$\mathbb{Q}$上の楕円関数体のときに$\zeta_K(s)$の解析接続と関数等式（谷山予想）ができれば有名なフェルマー予想が証明されることは1980年代末に示されている。

§2. 有限体上の関数体のゼータ関数

① 有限体$\mathbb{F}_p$上の有理関数体$K=\mathbb{F}_p(T)$において平方剰余の相互法則をはじめとする類似を証明したのはデデキント（1857）[2a]であった。（さらにさかのぼれば有限体論の最初であるガロアの"Sur la théorie des nombres" 1830年やガウスの遺された「高次合同式論」にたどりつく。）彼の仕事を進めゼータ関数を最初に構成し計算した人はドイツのコルンブルム（1890－1914）である。コルンブルムは論文をまとめる前に第1次世界大戦において24歳でなくなってしまったが，遺稿はランダウにより

編集され論文(1919)[2b]として出版された。([5b]を参照されたい。)定義はデデキント(1877)[1d]にならって，Kの整数環 $\mathcal{O}_K=\mathbb{F}_p[T]$ に対して

$$\zeta_K(s)=\prod_{\substack{\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K\\ \text{極大イデアル}}}(1-N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K\\ \text{イデアル}}}N(\mathfrak{a})^{-s}$$

とした。Kを関数体とするスキームは $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K=\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p[T]$ である。コルンブルムは $\zeta_K(s)$ を次のように計算した：

$\mathcal{O}_K$ は単項イデアル整域であるから

$$\zeta_K(s)=\sum_{\substack{f\in\mathbb{F}_p[T]\\ \text{モニック}}}N(f)^{-s}$$

となり $(N(f)=p^{\deg(f)})$，$s>1$ とすると

$$\begin{aligned}\zeta_K(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{f\in\mathbb{F}_p[T]\\ \text{モニック}\\ \deg(f)=n}}N(f)^{-s}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}p^n(p^n)^{-s}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(p^{1-s})^n\\ &=(1-p^{1-s})^{-1}.\end{aligned}$$

この結果はオイラー積の方から直接に

$$\zeta_K(s) = \prod_{\substack{h \in \mathbb{F}_p[T] \\ \text{既約モニック}}} (1 - N(h)^{-s})^{-1}$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty} (1-(p^m)^{-s})^{-a(m)},$$

$$a(m) = \#\{h \mid h \in \mathbb{F}_p[T],\ \text{既約モニック},\ \deg(h)=m\}$$

を計算しても得られる。この方法ではデデキント(1857)[2a]による結果

$$a(m) = \frac{1}{m}\sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) p^d$$

を用いることになる。

コルンブルムは同じ論文[2b]において，タイトルにあるようにディリクレの素数定理の $\mathbb{F}_p(T)$ における類似を証明している。このために，ディリクレのL関数の類似

$$\zeta_{\mathbb{F}_p(T)}(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{P} \subset \mathbb{F}_p[T]} (1-\chi(\mathfrak{P})N(\mathfrak{P})^{-s})^{-1}$$

$$= \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathbb{F}_p[T]} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$$

を導入し，χ が単位指標でないときに $\zeta_{\mathbb{F}_p(T)}(1,\chi)$ が有限なこと（$s=1$ が極でないこと）を示している。

有限体上の1変数関数体のゼータ関数はコルンブルムの研究を追って1920〜40年代にアルチン(1924)[2c]，シュミット(1931)[2d]，ハッセ(1936)[2e]，ヴェイユ(1941)[2f]によって研究され，関数等式，"素数定理"(正確には対数積分のp版を用いる)，リーマン予想など各類似物が証明された。とくに，シュミットによって関数等式とリーマン・ロッホの定理が同値であることが明確にされたことはゼータ関数の理解に大きく寄与した。

② 有限体上の多変数関数体のゼータ関数はヴェイユ(1949)[2g]によって導入され，グロタンディエク(1965)[1i]によって行列式表示，関数等式など基本的枠組がスキーム論の整備とともに構築された。後にドリーニュ(1974)はリーマン予想の類似(ヴェイユ予想)を証明した。

§3. 複素数体上の関数体のゼータ関数

① 複素数体$\mathbb{C}$上の1変数関数体Kは種数が2以上のときコンパクト・リーマン面X(Kを関数体とする$\mathbb{C}$-スキームの実解析化)を対応させることにより

$$\zeta_K(s)=\zeta_X^{\mathrm{Selb}}(s)$$

としてゼータ関数が定義される。ここで，$\zeta_X^{\mathrm{Selb}}(s)$はセルバーグ(1956)[3a]によって導入されたセルバーグ・ゼータ関数

$$\zeta_X^{\mathrm{Selb}}(s)=\prod_{p\in \mathrm{Prim}(X)}(1-N(p)^{-s})^{-1}$$

である：$\mathrm{Prim}(X)$ は X の素な閉測地線全体を動き $N(p)=\exp(\mathrm{length}(p))$ をノルムとする。収束域は $\mathrm{Re}(s)>1$ である。このときも素元定理

$$\pi_K(x)=\#\{p\in \mathrm{Prim}(X) \mid N(p)\leqq x\}$$

$$\sim \frac{x}{\log x}$$

が成立する。

なお，いまコンパクトでないリーマン面

$$X=SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$$

と，その関数体 K（コンパクト化すれば有理関数体 $\mathbb{C}(T)$）を考えるとゼータ関数

$$\zeta_K(s)=\zeta_X^{\mathrm{Selb}}(s)$$

は同様に定義され素元定理

$$\pi_K(x)\sim\frac{x}{\log x}$$

も成立するが，この場合には，さらに

$$\zeta_K(s) = \prod_{F:\text{実2次体}} \left(1 - \left(\varepsilon(F)^2\right)^{-s}\right)^{-h(F)}$$

となっており（$\varepsilon(F)$ は基本単数，$h(F)$ は類数），

$$\pi_K(x) = \sum_{\substack{F:\text{実2次体} \\ \varepsilon(F)^2 \leqq x}} h(F) \sim \frac{x}{\log x}$$

という，古典的整数論では予想もされない結果が得られる：セルバーグ（1954）[3b]。

② 複素数体上の多変数関数体 K に対しては一般には明確なゼータ関数は知られていない。しかし，特別な場合として K が代数多様体 $X = \Gamma \backslash SU(1,n)/SU(n)$ の関数体（Γ は $SU(1,n)$ の離散部分群）のときには再びセルバーグ型ゼータ関数 $\zeta_X^{Selb}(s)$ を用いて

$$\zeta_K(s) = \zeta_X^{Selb}(s)$$

として $\zeta_K(s)$ を構成できる。ここで $\zeta_X^{Selb}(s)$ はセルバーグの元の構成と同様に $Prim(X)$ 上のオイラー積であるが，解析接続，関数等式および素元定理まで含めてガンゴリ（1977）[3c] によって成された。

簡明なオイラー積および行列式表示はルエル(1976)[3d]が提起しフリード(1986)[3e]が整理した。

一般の多変数関数体 K に対しては K を関数体とする複素代数多様体 X を取ったとき X を実解析的リーマン多様体とみなしてそのセルバーグ型ゼータ関数(セルバーグ・ルエル・ゼータ関数とも呼ばれる)

$$\zeta_X^{Selb}(s) = \prod_{p \in Prim(X)} \left(1 - N(p)^{-s}\right)^{-1}$$

を考えると($Prim(X)$ は X の素な閉測地線全体,
$N(p) = exp(length(p))$ 　$\zeta_K(s) = \zeta_X^{Selb}(s)$ とおくことにより $\zeta_K(s)$ は一応定義できる。このときは全平面への解析接続と素元定理は証明できるが,関数等式は X が局所対称空間とは限らない一般の場合には不明であり不成立と思われている。この意味で,一般の場合に,この $\zeta_K(s)$ が適切なものかどうかは明確でない。なお,X が局所対称空間の場合には $\zeta_X^{Selb}(s)$ はラプラス作用素をもちいた行列式表示ができリーマン予想の類似が成立するが,一般の場合にはルエル作用素をもちいた行列式表示によって解析接続を行うことしか知られていず(したがって局所対称空間の場合には2種類の行列式表示がある)リーマン予想の類似は不明であり不成立と見られている。

§4. 非可換(関数)体のゼータ関数

① 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上有限次元の非可換体("多元体") K のゼータ関数は $\mathbb{Q}$ 上のオイラー積として ヘイ (1929)[4a] によって導入され

$$\zeta_K(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K \\ \text{左イデアル}}} N(\mathfrak{a})^{-s}$$

となること ($\mathcal{O}_K$ は極大整環) や解析接続および関数等式が証明された。(先行する仕事としてはリプシッツやフルビッツによる4元数体の整数論があった: R. Lipschitz "Untersuchungen über die Summen von Quadrat" 1886 および A. Hurwitz "Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen" 1919 にまとめられている。これらの仕事は応用としてラグランジュの4平方和の定理を扱っている。)

これを用いて ツォルン (1933)[4b] は多元環に関するハッセ・ブラウアー・ネーターの基本定理 (1932)[4c] およびハッセの相互法則の別証を与えた。基本となるのはゼータ関数の関数等式である。関数等式 ⟺ 相互法則 (双対性) のテーマがここでも現れている。この関連で特筆されるべきことはこの相互法則の証明により類体論が導かれることであり、実際、このツォルンの方法はそのまま ヴェイユの "Basic Number Theory" (1967) において類体論の証明に使われた。

② 有限体上の1変数関数体k上有限次元の非可換多元環Kのゼータ関数はヴィット(1934)[4d]により同様に構成されツォルンの結果の類似を超えて(ハッセ・ブラウアー・ネーターの基本定理の類似ー関数体版ーは証明されていなかったためヴィットによるゼータ関数の関数等式を用いた証明が最初であった)"非可換関数体"のリーマン・ロッホの定理まで証明された。これはゼータ関数なしには考えられない，非可換代数幾何の先駆であり，他の非可換代数幾何学者に取り挙げられるようになったのは半世紀後の1980年代になってからであった：[4e]参照。

①②：Kを"関数体"とする空間X(非可換スキーム)の研究は現在活発に行なわれている。マニンによる単行本[4f](1991)などを参照されたい。

$\zeta_K(s)$を拡張して"L-関数"まで含めた一般的な扱いはゴドマン＋ジャッケ(1972)[4g]を見られたい。また，佐藤幹夫の概均質ゼータ関数の一例としても捉えることができる(佐藤文広)。

素数定理の類似(極大左イデアルの分布)についてはブッシュネル＋ライナー(1982)[4h]を参照されたい。

③ 複素数体上の非可換体Kのゼータ関数の例として1変数超関数体Kのゼータ関数$\zeta_K(s)$が超リーマン面Xのセルバーグ型ゼータ関数$\zeta_X^{Selb}(s)$としてマニン達(1987)[4i]によって超弦理論との関りで導入された。

§5. 類似比較

§1－§4 の類似を簡単に比較すると次の表のようになる

体 K	§1：代数体 および代数体上の関数体	§2：有限体上の関数体	§3：複素数体上の関数体	§4：非可換(関数)体
空間X (KはXの関数体)	スキーム (Spec $\mathbb{Z}$上有限型) [実解析化]	スキーム (Spec $\mathbb{F}_p$上有限型)	スキーム (Spec $\mathbb{C}$上有限型)の実解析化	"非可換スキーム"
ガロア群, 基本群Γ	ガロア群* (代数的基本群)	ガロア群 (代数的基本群)	基本群	ガロア群 基本群
ゼータ関数の構成	オイラー積 $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$	オイラー積 $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$	オイラー積 $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$	オイラー積 $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$
素元	閉点 $\mathrm{Prim}\,K=\mathrm{Prim}\,X=\mathrm{Prim}\,\Gamma$	閉点 $\mathrm{Prim}\,K=\mathrm{Prim}\,X=\mathrm{Prim}\,\Gamma$	$\mathrm{Prim}\,K=\mathrm{Prim}\,X=\mathrm{Prim}\,\Gamma$ 素測地線＝素共役類	$\mathrm{Prim}\,K=\mathrm{Prim}\,X=\mathrm{Prim}\,\Gamma$
素元定理	対数積分で成立	p-対数積分で成立	対数積分で成立	対数積分(p-対数積分)で成立
関数等式	ポアソン和公式 (双対性) [ポアンカレ双対性?]	ポアンカレ双対性 (レフシェッツ跡公式)	双対性 (セルバーグ跡公式)	双対性 ● 非可換リーマン・ロッホ ⇔ 相互法則(類体論) ● 跡公式
行列式表示(作用素)	予想	グロタンディエック (フロベニウス作用素)	セルバーグ (ラプラス作用素)	§4①は予想 §4②はグロタンディエック §4③はマニン達
リーマン予想の類似	予想	ドリーニュ (ヴェイユ予想の証明)	セルバーグ	一般には不明 (予想)

いずれも数論的対象M（前頁の表では体K，空間X，基本群Γ）から

$$M \xrightarrow[\text{分解}]{} \underset{\text{素元}}{p} \longrightarrow \zeta_{M_p}(s)=\zeta_p(s) \xrightarrow[\text{合体}]{} \underset{\text{大域ゼータ}}{\zeta_M(s)=\prod_p \zeta_p(s)}$$

という局所大域原理的な構成法を用いてゼータ関数が定義されており，得られたゼータ関数の性質に数論的対象物の大域的な性質が反映している。とくに素元の分布を示す「素元定理」はゼータ関数を用いて得られる重要な結果であり，ゼータ関数の零点や極の分布と直接関係している。またゼータ関数の関数等式には数論的対象物の「双対性」が現れている。これはゼータ関数を用いてはじめて捉えられる場合（§4②の「非可換リーマン・ロッホ」など参照）も少なくない。

体Kのゼータ関数はKを関数体とする空間Xを用いてXのゼータ関数として定義される：$\zeta_K(s)=\zeta_X(s)$。したがって体の（ゼータ関数の）類似は空間の（ゼータ関数の）類似と言い換えられる。ゼータ関数は $\zeta_K(s)=\zeta_X(s)=\zeta_\Gamma(s)$ と基本群（ガロア群）Γからも捉えることがL-関数の扱いを含めて重要であるが，記述を簡単にするために，$\zeta_\Gamma(s)$ からの見方はここでは略する。

有限体上の関数体のゼータ関数（§2）および複素数体上の関数体のゼータ関数（§3）の研究の深化を動機付けた大きな原因はリーマン予想であった。代数体および代数体上の関数体（§1）のリーマン予想は現在も不明であり，§2，§3のゼータ関数においては行列式表示をもとに零点や極が作用素の固有値として解釈されることを用いてリーマン予想の類似が証明されていることと較べると後に構成された類似物の方が研究が進んでいることがわかる（[5a][5c]参照）。さらに，関数等式の根拠を考察するためにも背後にひそむ作用素を用いた行列式表示が重要となってくる：ゼータ関数の局所因子 — ガンマ因子を含めて — の行列式表示はデニンガー（ハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数）および黒川（セルバーグ・ゼータ関数）により知られている（[5d]参照）。

最近マニン[5e]は§1のゼータ関数（リーマン，デデキント，ハッセ・ヴェイユ）も$\mathbb{Q}$をその仮想的“係数体”$\mathbb{F}_1$（“1元体”）上の関数体とみなすことによって§2，§3と同様に扱え，したがって，ゼータ関数の行列式表示が与えられるのではないかと提唱し，“絶対モチーフ”を導入した。（スキーム論の枠内には収まらない。ここで再び「リーマン・ゼータ関数$\zeta(s)$の表わす空間は何か？」という根本問題に当る。いずれにせよ，スキーム$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$や“数論的空間”$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$を越えねばならない。）

マニンの研究は「Spec $\mathbb{Z}$ × Spec $\mathbb{Z}$ を2次元のものとして見よう」という問題提起（黒川[5f][5g]；前回の本研究集会報告「三角関数の一般化をめぐって」『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報告 第4号：近現代数学』1992年，p.1-25 を参照されたい）から出発している。

このマニンの視点は，これら（§1-§4）のゼータ関数はすべて関数体のゼータ関数となり，類似の根拠をはっきりさせるとともに，代数体と関数体の類似という古くからの主題にも画期的な解明を与えると思われる。

ゼータ関数を通してみた代数体と関数体の類似は，ここではその一部しか概観できなかったが，これからも様々な示唆の源泉として重要な役割を果していくであろう。

文献

[1a] L. Euler : "Varie observationes circa series infinitas" Comm. acad. Scient. Petropolitanae 9 (1737) 160–188（全集 I-14, p. 216–244）.

[1b] B. Riemann : "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"『ベルリン学士院月報』1859年11月号, p. 671–680（出版は1860年）.

[1c] P.G.L. Dirichlet : "Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält" Abh. Akad. Berlin (1837) 45–71.

[1d] R. Dedekind : "Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers" 1877（55頁）（全集 I, p. 105–158）

[1e] E. Landau : "Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes" Math. Ann. 56 (1903) 645–670.

[1f] E. Hecke : "Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper" Göttingen Nachrichten 1917, p. 77–89.

[1g] K. Iwasawa : "Letter to J. Dieudonne (April 8, 1952)" Advanced Studies in Pure Math. vol 21 (1992) p. 445–450, "Zeta Functions in Geometry" (eds., N. Kurokawa and T. Sunada), Kinokuniya, Tokyo.

[1h] A. Weil: "Jacobi sums as "Grössencharaktere" " Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952) 487-495.

[1i] A. Grothendieck: " Cohomologie l-adique et fonctions L" SGA 5, 1965; Springer Lect. Notes in Math. 589 (1977).

[1j] J.-P. Serre: " Zeta and L-functions": in "Arithmetical Algebraic Geometry" (ed. O.F.G. Schilling) p. 82-92, Harper and Row 1965.

[2a] R. Dedekind: " Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus" Crelle J. 54 (1857) 1-26 (全集 I, p. 40-66).

[2b] H. Kornblum: " Über die Primfunktionen in einer arithmetische Progression" (Landau 編) Math. Zeit. 5 (1919) 100-111.

[2c] E. Artin: " Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen (I, II)" Math. Zeit. 19 (1924) 153-246 (全集 p. 1-94).

[2d] F. K. Schmidt: "Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p" Math. Zeit. 33 (1931) 1-32.

[2e] H. Hasse: " Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper (I, II, III)" Crelle J. 175 (1936) 55-62, 69-88, 193-208.

[2f] A. Weil: "On the Riemann hypothesis in function-fields" Proc. Nat. Acad. Sci. USA 27 (1941). 345-347.

[2g] A. Weil: "Numbers of solutions of equations in finite fields" Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 497-508.

[3a] A. Selberg: "Harmonic analysis and discontinuous groups on weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series" J. Indian Math. Soc. 20 (1956) 47-87.

[3b] A. Selberg: "Harmonic Analysis" Göttingen Lecture Notes 1954 (全集 vol. I).

[3c] R. Gangolli: "Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one" Illinois J. Math. 21 (1977) 1-41.

[3d] D. Ruelle: "Zeta-functions for expanding maps and Anosov flows" Invent. Math. 34 (1976) 231-242.

[3e] D. Fried: "Zeta functions of Ruelle and Selberg (I)" Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986) 491-517.

[4a] Käte Hey: "Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen" Diss. Hamburg 1929.

[4b] M. Zorn : "Note zur analytischen hyperkomplexer Zahlentheorie" Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 9 (1933) 197-201.

[4c] H. Hasse, R. Brauer, and E. Noether : "Beweis eines Hauptsatzen in der Theorie der Algebren" Crelle J. 167 (1932) 399-404.

[4d] E. Witt : "Riemann-Rochser Satz und Z-Funktionen in Hyperkomplexen" Math. Ann. 110 (1934) 12-28.

[4e] F. van Oystaeyen and A. Verschoren : "Non-commutative Algebraic Geometry" Springer Lecture Notes in Math. 887 (1981).

[4f] Yu. I. Manin : "Topics in Noncommutative Geometry" Princeton Univ. Press 1991.

[4g] R. Godement and H. Jacquet : "Zeta Functions of Simple Algebras" Springer Lecture Notes in Math. 260 (1972).

[4h] C. J. Bushnell and I. Reiner : "Prime ideal theorem in non-commutative arithmetic" Math. Zeit. 181 (1982) 143-170.

[4i] H.A. Baranov, Yu. I. Manin, I.V. Frolov and A.S. Shvarts : "A super analog of Selberg trace formula and multi-loop contributions for fermionic strings" Comm. Math. Phys. 111 (1987) 373-392.

[5a] 黒川：「オイラー積の250年」『数学セミナー』1988年9月号(p.84-91), 10月号(p.67-74)；『現代数学のあゆみ・4』日本評論社(1992) p.13-27に再録。

[5b] 黒川：「類似の魅力」『数学セミナー』1990年9月号(p.54-55).

[5c] 黒川：「リーマン予想の現在と将来」『数学セミナー』1992年4月号(p.22-26).

[5d] 黒川：「ゼータ関数の行列式表示とテンソル積」『代数解析学と整数論』数理解析研究録 810 (1992) 305-317.

[5e] Yu. I. Manin: "Lectures on Zeta Functions and Motives" (Harvard-MSRI-Yale-Columbia 1991-1992); Max Planck Institute preprint 1992.

[5f] N. Kurokawa: "On some Euler products (I)" Proc. Japan Acad. 60A (1984) 335-338.

[5g] N. Kurokawa: "Multiple zeta functions: an example" Advanced Studies in Pure Math. vol. 21 (1992) p.219-226, "Zeta Functions in Geometry" (eds., N. Kurokawa and T. Sunada) Kinokuniya, Tokyo.