

コンクリート微視構造の破壊解析のための 有限要素解析手法

東京工業大学総合理工学研究科環境物理工学専攻

永井 学志

平成 12 年 3 月

要旨

本論文は、「コンクリート微視構造の破壊解析のための有限要素解析手法」と題し、近年の計算力学の発展と計算機の高性能化を背景として、コンクリート材料の非線形力学挙動のメカニズム解明のための新たな有限要素解析手法を提案した論文であり、以下に示す全7章で構成されている。

第1章「序論」では、最初に、コンクリート材料はいくつもの代表スケールを持つ多相複合材料であることを述べた後、その基本的な力学特性について概説し、その非線形力学挙動の本質的な主要因のひとつは材料内部の不均一性に起因する局所的な引張破壊の累積であることを述べた。また、巨視的な破壊、特に圧縮破壊を取り扱うためには、コンクリート材料を粗骨材とモルタルからなる2相複合材料とするモデル化が妥当であることを論じた。その後、本論文の目的を、コンクリート材料の非線形力学挙動を詳細に説明することのできる有限要素解析手法の提案であると位置付けた。最後に、このような視点に基づいた既往のさまざまな数値解析手法について、本論文では粗骨材 - モルタルの幾何学構造を十分に反映するようにモデル化することが詳細な応力解析のために重要であるとの考えから、主に幾何学的なモデル化の見地からこれらの手法の問題点について論じた。

第2章「デジタル画像に基づく有限要素解析手法」では、粗骨材 - モルタルの幾何学構造に対する従来の有限要素分割手法の問題点を述べた後、現実の粗骨材 - モルタルの三次元幾何学構造を反映しうる詳細な応力解析を行うために、実在するコンクリート材料の三次元デジタル画像を画像処理により直接的に直交固定格子による有限要素分割とする考え方を提案した。その後、コンクリート材料の三次元デジタル画像の撮影方法と画像処理手法について具体的に述べた。このようにして得られた粗骨材 - モルタル構造の直交固定格子による有限要素分割に対して均質化法を用いた線形解析を行い、従来の有限要素分割でその制約から用いられることの多かった簡略な幾何学モデルの線形解析結果と比較することにより、デジタル画像に基づく有限要素解析手法の優位性を示した。

第3章「デジタル画像に基づく有限要素解析のための連立一次方程式の高速解法」では、複雑

な三次元幾何学形状を細かい要素分割でモデル化することに由来する膨大な自由度数の方程式を直交固定格子の特徴を生かして効率的かつ高速に解く反復解法を提案した。さらに、数値実験により本解法の反復回数は要素分割数には殆ど依存しないことを確認した後、 320^3 有限要素分割 (約 1 億自由度) の大規模な線形解析例を示した。

第 4 章「粗骨材 - モルタル界面の高精度モデル化有限要素」では、既往の研究から粗骨材 - モルタル界面の破壊をモデル化することが重要であること、一方でデジタル画像に基づく有限要素解析手法では直交固定格子による有限要素分割を用いることから幾何学形状が階段状に近似される問題があることを論じた後、骨材 - モルタル界面を直交固定格子とは全く独立に要素内部に定義できる混合型の有限要素を提案した。この有限要素は、ひずみ補正型混合法に基づくものであり、異種材料の存在に起因するひずみの不連続性とひび割れに起因する変位の不連続性を要素内部の任意の位置で表現できるものである。続いて、このような界面を要素内部に含む混合型有限要素の積分評価に対する工夫について述べた後、二次元および三次元の場合の要素特性を固有値解析により示すことで、粗骨材 - モルタル界面を高精度に表現できることを確認した。

第 5 章「粗骨材 - モルタル界面の高精度モデル化有限要素のためのデジタル画像処理」では、直交固定格子による有限要素分割において、複雑な幾何学形状を要素内部の界面として定義する場合のデジタル画像処理手法について述べた。その中心的なデジタル画像処理手法はモルフォロジー処理と離散データからの等値面作成手法であるが、それらを有限要素分割という視点から述べた。

第 6 章「非線形問題による本解析手法の検討」では、本論文で提案した一連の手法を用いて、粗骨材 - モルタル界面の引張破壊のみを簡単な構成則でモデル化し、コンクリート材料の巨視的な一軸圧縮破壊の二次元及び三次元解析を行い、その内部の微細な引張破壊のみの累積により圧縮荷重下におけるコンクリート材料の非線形力学挙動を表現できることを示した。

第 7 章「結論及び展望」は、本研究の結論と展望である。

なお、論文題目の欧文名は、Finite Element Procedure for Failure Simulation of Mesoscopic Structure in Concrete Materials である。

目次

第 1 章	序論	
1.1	本研究の背景	1
1.2	本研究の目的	6
1.3	本研究に関連した既往の数値解析的研究	7
第 2 章	デジタル画像に基づく有限要素解析手法	
2.1	はじめに	11
2.2	従来の有限要素分割とデジタル画像に基づく有限要素分割	12
2.3	三次元デジタル画像を用いた有限要素モデルの作成	15
2.3.1	コンクリート供試体の作成	15
2.3.2	破壊検査による三次元デジタル画像化	17
2.3.3	画像処理によるモデル作成	19
2.4	マルチスケール問題としての定式化	22
2.5	線形計算による解析モデルの比較	25
2.6	まとめ	30
第 3 章	デジタル画像に基づく有限要素解析のための連立一次方程式の高速解法	
3.1	はじめに	32
3.2	前処理付き共役勾配法	33
3.3	多次元高速スペクトル変換を用いた前処理因子	35
3.3.1	多次元高速スペクトル変換	35
3.3.2	前処理因子の構成	37
3.3.3	並列計算	40
3.4	数値実験による収束性の比較	41
3.4.1	平面ひずみ問題による比較	41
3.4.2	三次元問題の線形計算例	42

3.5	まとめ	45
第 4 章	粗骨材 - モルタル界面の高精度モデル化有限要素	
4.1	はじめに	47
4.2	粗骨材 - モルタル界面のモデル化方法の検討	48
4.3	粗骨材 - モルタル界面を含む有限要素の混合型弱定式化	50
4.3.1	変位関数の構成	50
4.3.2	ひずみ補正型混合法による弱定式化	53
4.4	要素剛性の評価法	58
4.4.1	要素剛性の展開	58
4.4.2	要素剛性の数値積分	60
4.5	要素特性の検討	64
4.5.1	固有値解析	64
4.5.2	平面ひずみ問題の数値実験	70
4.6	まとめ	74
第 5 章	粗骨材 - モルタル界面の高精度モデル化有限要素のためのデジタル画像処理	
5.1	はじめに	76
5.2	階層型デジタル画像に基づく有限要素分割	77
5.2.1	モルフォロジー理論の概要	77
5.2.2	有限要素分割とする階層型デジタル画像に対する構成条件	79
5.2.3	二次元デジタル画像処理例	82
5.3	等値面作成アルゴリズムを用いた界面を含む有限要素の領域の単体分割	84
5.4	まとめ	91
第 6 章	非線形問題による本解析手法の検討	
6.1	はじめに	93
6.2	粗骨材 - モルタル界面の構成則	94
6.3	平面ひずみ問題の一軸圧縮	96
6.4	均質化法による三次元問題の一軸圧縮	99
6.5	まとめ	106

第 7 章	結論及び展望	
7.1	結論	108
7.2	展望	111
	参考文献	114
	研究に関連して筆者が発表した論文	119
	謝 辞	

第 1 章 序論

1.1 本研究の背景

コンクリート材料は、主に粗骨材・細骨材・水・水硬性セメントペースト・空気からなる複合材料であり、この材料構成のうち粗骨材を除いた複合材料のマトリクスとなる部分を特にモルタルと呼び習わしている。このモルタル中にも微視視点から細骨材や気泡、より微視的視点からは硬化したセメントペースト中に各種の水和物結晶を見ることができる。このようにコンクリート材料は様々なスケールの異なる材料が入り混じった複雑な多相複合材料であり、本論文では、コンクリート構造物からその構成材料に至る代表スケールを図 1.1 に示すように、巨視、メゾ、微視の各スケールに分類して考えることにする。

このような材料構成を持つコンクリート材料の力学挙動を、メゾ構造の粗骨材を幾つか含む領域以上、つまり均質と見なせる巨視的なスケールで観察すると、普通コンクリートの場合、図 1.2 に示すような均質化された非線形な応力 - ひずみ関係を描く。そ

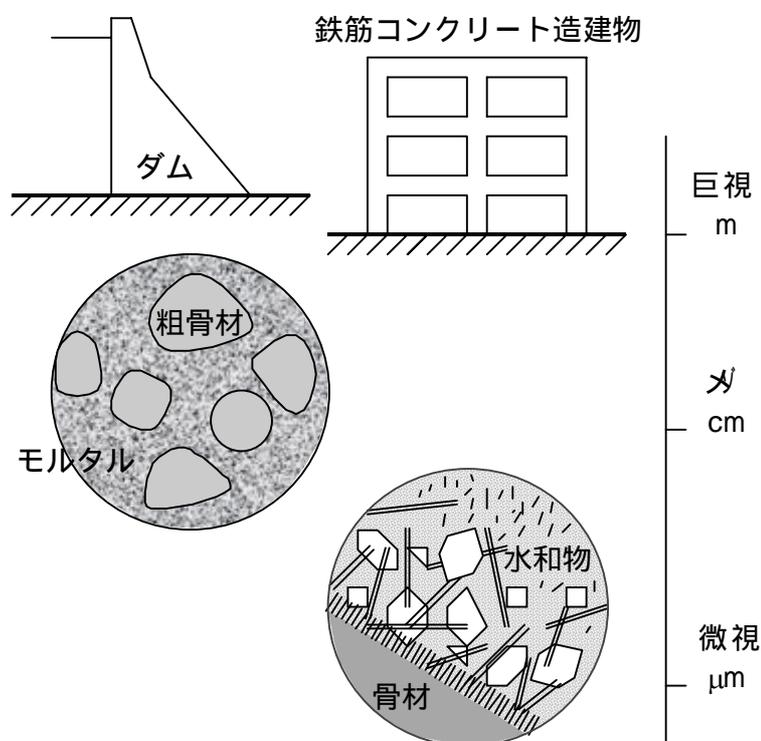


図 1.1 コンクリート構造物からコンクリート材料に至る各代表スケール

の大きな特徴として、圧縮には強く引張には弱い性質が挙げられる。また、圧縮・引張ともに、最小・最大応力に達した後には変形が進むに従い応力が低下する軟化という性質を持っている。ここで、コンクリート材料が強度を発現する根源は、微視的な視点において、水和反応により硬化したセメントペースト中の固体表面間に働く分子間力などの物理的結合力や、粒子相互の化学的結合力、さらには粒子同士の幾何学的な噛み合いであると考えられている(戸祭 1999)。したがって、図 1.2 に示したような非線形力学挙動は、微視的な結合が引張力によって順次切断され、それらが累積、相関した結果の積分量であると定性的には説明されている。巨視スケールである構造物全体の力学応答を工学的に予測することが目的である場合には、このような応力 - ひずみ関係を構成則として、できれば力学的に整合したモデル化の方が望ましいものの、現象論的にあってもより精度良くモデル化できれば十分であると考えられる。しかしながら、コンクリート材料の非線形力学挙動自体を力学的に整合しつつ詳細に説明することを目的とする場合には、引張力による破壊を考えることが必須である。

このようなコンクリート材料の非線形力学挙動自体の解明を目的とした研究は、現在までに数多く行われている。巨視的な引張破壊については、微視的な引張破壊と比較的に直接に対応付けることができることから巨視視点から均質材料として扱うことがで

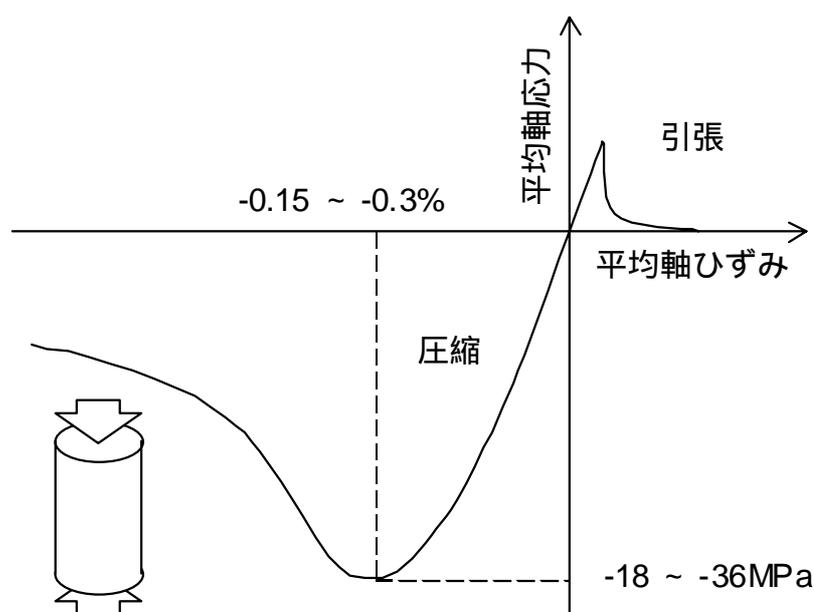


図 1.2 一軸載荷試験の平均軸ひずみ - 平均軸応力

きるために、主に破壊力学の手法を用いて、直接引張試験や曲げ試験などによる引張破壊に関して数値解析・実験ともに多くの研究が報告され一定の成果を上げている。一方で、巨視的な圧縮破壊については、引張破壊に比べると研究の数が少ない。なぜならば、巨視的な圧縮破壊は見掛けの現象に過ぎず(例えば、内田・市之瀬 1999 による解説)、本質的現象である微視的な引張破壊から取り扱うためには、局所的な引張が生じることになる材料の不均一性を考えて複合材料として取り扱うことが必須であるからである。さらに、巨視的な引張破壊に比べて、微視的な引張破壊は空間的に広範囲かつ複雑に分布することになる。これらのことから明らかなように、コンクリート材料の引張に対する力学挙動についても未解明な点は多いが、それ以上に圧縮に対する力学挙動には未解明な点が多く残されている。

微視的な引張破壊によるコンクリート材料の巨視的な圧縮破壊の力学挙動を詳細に解明しようとする場合には、上述したように局所的な引張破壊を考慮する必要からコンクリート材料を複合材料として取り扱うことが必須となるが、実質的なコンクリート材料の強度に関しては、破壊力学における寸法効果から比較的大きな空隙や初期欠陥により決まると考えられている。したがって、巨視スケール側から視点を細かくして、モルタルを均質材料と仮定して粗骨材とモルタルのレベルのメゾ構造で取り扱うことが妥当であると考えられる。なお、冒頭で述べた粗骨材と細骨材の分類は主に作業性を考えた人為的な取り決めに過ぎないが、硬化したコンクリート材料の力学特性は区別できることが報告されている。(Cordon and Gillespie 1963, 川上 1969)。つまり、粗骨材と細骨材を分ける直径 5mm 程度を境として、5mm 以下の骨材は圧縮強度にはそれほど影響を及ぼさないが、5mm 以上の骨材はその最大径に応じて圧縮強度が低下する。このことから、コンクリート材料を複合材料として考える場合には、粗骨材 - モルタルの 2 相複合材料としてモデル化することが適していると考えられる。既往の同じような目的の研究においても、この 2 相複合材料の仮定を出発点にしていることが多い。

ところで、このような研究を行う場合には幾つかの研究手法が既にあり、谷川ら(1975)の分類にしたがって述べる。彼らの分類は、理想化モデル粗骨材とモルタルに仮定するモデル解析法、実際の骨材を用いたコンクリートに進展するひび割れを顕微鏡や X 線で観察する直接法、超音波やアコースティック・エミッションによる間接法である。この分類は、主に実験的手法の場合を念頭においたものであるが、ここでは数値解析的手法にも当てはめて述べることにする。

まず、現在までの数値解析を用いた研究では、コンクリート材料のあるスケールにおける2相複合材料を模擬した二次元での単純なモデル解析が多い。要因を切り分けるという意味においてこのような解析法は有効であるものの、最近の破壊エネルギーによる正規化を行ったもの以外、こういった数値解析では実際のコンクリートとの間に明確な対応が見出せないため、その挙動は曖昧な関係を持つに留まる。一方で、直接法による実験では、様々な知見を得ることが出来るが、三次元的に広がるひび割れはある切断面のみ、ひずみは数箇所のゲージ貼付点のみであり、不均質材料の力学挙動の観察には難しさが内在していることが分かる。また、間接法による実験では、その手法の性格から内部破壊のある一側面しか捉えられない。

このような現状において、実験観察の困難さを補完し現象の理解を助ける道具として、数値解析がますます有効であることは述べるまでもない。しかしながら、上述したようにコンクリート材料のメゾ構造の破壊解析に関しては、数値解析的研究は専ら簡略化されたモデル解析法に限定されてきた。直接法や間接法による実験に十分に対応できるような三次元での詳細な数値解析は、主に数値解析モデルの作成が困難であるという理由から、これまでは殆ど行われることはなかった。したがって、詳細な数値解析モデルの作成を出発点として三次元での応力解析が可能となれば、より実現象を説明することのできるコンクリート材料の破壊挙動の数値解析が可能となると考える。さらには、このような数値解析が可能になると、コンクリート材料の構成則のモデル化に対する情報を与えることもできると考える。

1.2 本研究の目的

前節1.1で述べたように、コンクリート材料の非線形力学挙動は、微視的な視点での引張破壊が累積することにより生じると考えられている。本研究は、このように本質的な破壊形態であると考えられている局所的な引張破壊から、構造物レベルの巨視的視点において観察される破壊現象、特に圧縮破壊現象を説明することを目標として、粗骨材・モルタルのメゾ構造の破壊挙動を詳細にモデル化することのできる有限要素解析手法を提案するものである。

このとき、実際のコンクリート材料メゾ構造の幾何学構造は三次元であることから、コンクリート材料の破壊を詳細に表現するためには、三次元問題としての取り扱いが必須であり、メゾ構造内の粗骨材の配置と形状が重要な因子であると考えられる。したがって、本研究は、二次元だけでなく実際のコンクリート材料の三次元メゾ構造に対しても一律に適用できる解析手法を提案するものである。

巨視的な引張破壊現象については、本解析手法が巨視的な圧縮破壊現象を良く説明できるものであれば、付随的に説明できると考える。なお、本研究では、原則として普通コンクリートの低側圧下における圧縮破壊挙動について取り扱うものとする。

1.3 本研究に関連した既往の数値解析的研究

コンクリート材料の破壊現象は、粗骨材・モルタルのメゾ視点までは、連続体から不連続体への幾何学的位相の連続的な変化であるとの認識に大きな問題はないと考える。したがって、粗骨材・モルタルのメゾ構造に着目した数値解析的研究では、破壊の開始側から考える場合には、連続体仮定の固体の応力解析で一般的な有限要素法を用いることが多い。逆に最終的な破壊形態から考える場合には、個別要素法などの離散的な解析手法を用いて全体挙動を表現することが多い。この両極の間に、様々な解析手法が提案されている。本節では、これらの手法をコンクリート材料に適用した研究について概説するが、いずれの手法を用いた場合にもメゾ・微視的視点において引張のみでなく圧縮でも破壊を許容するような構成則を用いたものが多い。また、これらの手法は二次元問題に特化していたり、二次元問題のみの計算例を示しているものが多い。たとえば、離散モデル化の概念と計算手法は三次元問題に適用可能であっても、具体的に幾何学構造のメッシュ分割が必要となる手法の多くは、実際には三次元問題への適用は困難なものが多いと考える。

1) 有限要素解析

コンクリート構造もしくは部材に対する有限要素解析と同じである。コンクリート材料のメゾ構造もひとつの構造の力学問題であり、幾何学構造の複雑さの程度が異なるだけである。したがって、コンクリート材料のメゾ構造を粗骨材とモルタルの 2 相複合材料と仮定した研究の多くも、局所的な引張破壊を Goodman の接合要素などの 2 重節点を設ける離散ひび割れモデルを用いて考慮したり(例えば、梶川 1985)、分散ひび割れモデルを用いて考慮することになる(例えば、Saito and Kawamura 1986, 椿 1995, Mark 1998)。

このような研究の殆どは、その時点での計算機性能の問題もあるが二次元問題として取り扱っている。また、メゾ構造の幾何学形状を計算機上に創出し、かつ幾何学形状の境界に沿うような有限要素分割を行うという一般的な有限要素分割の考え方をを用いている。この考え方に基いて有限要素モデルを作成する場合には、任意の複雑な有限要素モデルを自動的に作成できる決定的な手法が存在していないこと、それ以前の問題として、現実に存在するコンクリート材料のメゾ構造の幾何学形状をどの程度精確に反映しているのか、という問題点がある。このような問題のため、二次元ならまだしも三次

元では現実のメゾ構造の幾何学構造を十分に反映した有限要素モデルを作成することは、困難を極めることになる。

現実の三次元幾何学構造を十分に反映することのできる有限要素解析手法としては、Wang and Chen(1999)の提案する手法を挙げることができる。彼らは、乱数を用いて粗骨材をランダム配置した円柱シリンダーモデルに対してメゾ構造の幾何学形状とは無関係に有限要素分割を行い、数値積分法を工夫した有限要素を用いることにより三次元問題としての圧縮破壊解析を行っている。その他、近年の研究では三次元有限要素解析を行ったものもあるが、有限要素分割モデルの幾何学形状はコンクリート材料のメゾ構造を十分に表現しているとは言い難い(例えば、七田 1997)。

2) スプリングネットワーク

スプリングネットワークは、全て連続体への明らかな類似として離散的なバネの接続網によるモデル化・数値解析手法である。このモデル化は、元来の個別要素法の考え方に近いが、そのバネの接続方法の自由度が高いために、研究者独自の解釈によるバネの接続法が提案されている(例えば、椿ら 1994, 荒井ら 1995)。

このようなモデル化の中でも、解析領域中に粒子を適当に配置し、これらの粒子をバネで相互接続した粒子モデルや格子モデルと呼ばれる手法が比較的素直であり、注目を集めている。粒子モデルは、粒子を相互に軸バネあるいはせん断バネも含めてつないだモデルであり、破壊は粒子間のバネの切断もしくは劣化により表現する。ただし、粒子モデルにはポアソン比がある値に固定されてしまう問題がある。格子モデルは、自由度を高めるために粒子間の曲げ伝達も考慮し、粒子間に曲げを考慮した剛性マトリクスで相互接続したものであり、簡単には梁要素が用いられる。格子モデルを粗骨材 - モルタル - 界面の領域に重ね合わせることでモデルを作成する。粒子とスプリングネットワークの配置は規則配置が最も簡単であるが、規則配置には方向依存性があるためにランダム配置が多く用いられている。Schlangen(1995)は、格子モデルを複合材料としてのコンクリート材料の二次元デジタル画像に重ね合わせて、矩形領域の圧縮破壊解析を行っている。スプリングネットワークを中心とする手法については、森泉(1998)が解説しているが、その解説に出てくる研究は殆ど二次元問題としての取り扱いである。スプリングネットワークなどでは乱数を用いて球体粗骨材の発生を比較的自由に行うことのできる長所がある。

3) 剛体バネモデル

個別要素法的なモデル化の幾何学的な精度を上げたと解釈できるものに、川井(1991)が提案した剛体バネモデルがある。この剛体バネモデルを用いたコンクリート材料のメゾ構造の圧縮破壊解析として、例えば Liu ら(1995)のものがある。また、複合材料の破壊解析ではあるが、李・都井(1998)のものがある。但し、いずれの解析も二次元問題のみを扱っている。剛体バネモデルでは高精度な計算結果を得るためには幾何学形状を制約条件とするボロノイ分割を必要とすることから、どちらにしろ有限要素法と同様に幾何学構造を分割する必要がある。李・都井(1998)のように、この制約条件を無視するならば、三次元問題に適用できると考える。また、スプリングネットワークに比べて剛体バネモデルでは、幾何学的なモデル化の意味付けがよりはっきりすることから、バネ定数、特にせん断のバネ定数の与え方が問題となってくる。

このように現在までに、コンクリート材料の破壊現象を理解し説明することを目的として、主に二次元解問題で幾つかの幾何学的な離散モデル化手法と、それに対する計算手法が提案されている。しかしながら、実際の複合材料としてのコンクリート材料は三次元的な幾何学構造を有しているために、二次元解析では詳細に説明することに限界があることに注意しておくべきである。

第 2 章 デジタル画像に基づく有限要素解析手法

2.1 はじめに

破壊力学の寸法効果から、コンクリート材料のメゾ構造を粗骨材とモルタルからなる 2 相複合材料と仮定して、巨視的な圧縮破壊挙動を局所的な引張破壊からモデル化する場合には、メゾ構造の幾何学的な構造を精確にモデル化することが重要であると考えられる。しかしながら、従来の有限要素分割手法では、三次元で複雑な幾何学構造の有限要素モデルを作成することは極めて困難であった。一方で、計算機環境は飛躍的な高速化・大容量化が進んでおり、今後ともその勢いは衰えそうにない。このような中で Hollister and Kikuchi(1994) は、従来の手法では数値解析モデルの作成が困難であるような対象に対して、代替手法として CT スキャナーなどの非破壊検査装置から得たデジタル画像を直接に用いたモデル作成の概念を提案している。この概念は、複雑な形状を持つ産業部品や複合繊維の応力解析、あるいは実測することの困難な生体骨の海綿組織の成長などに適用され、その有効性が示されている。

このようなデジタル画像に基づくモデル作成の概念は、三次元で複雑な構造を持つ 2 相複合材料としてのコンクリート材料に対しても、有効であると考えられる。そこで本章では、デジタル画像に基づくコンクリート材料の三次元数値解析モデルの作成手法を示す。また、コンクリート材料をマルチスケール材料であると考えて、均質化法による線形計算を行い、デジタル画像に基づく有限要素解析モデルの有効性を示す。

2.2 従来の有限要素分割とデジタル画像に基づく有限要素分割

従来のコンクリート材料のメゾ構造に対する数値解析モデル作成の困難さは、粗骨材の形状と配置という幾何学構造の作成から出発することにあった。特に有限要素モデルの場合は、図 2.1 に示すように格子を粗骨材とモルタルの界面に適合させながら作成するという制約が付加されるため、一層の困難さがあった。二次元ならまだしも三次元では、空間を埋め尽くす要素分割と節点番号の要素への対応づけは大変な作業である。したがって三次元の要素分割については、なんらかの自動分割アルゴリズムによることが

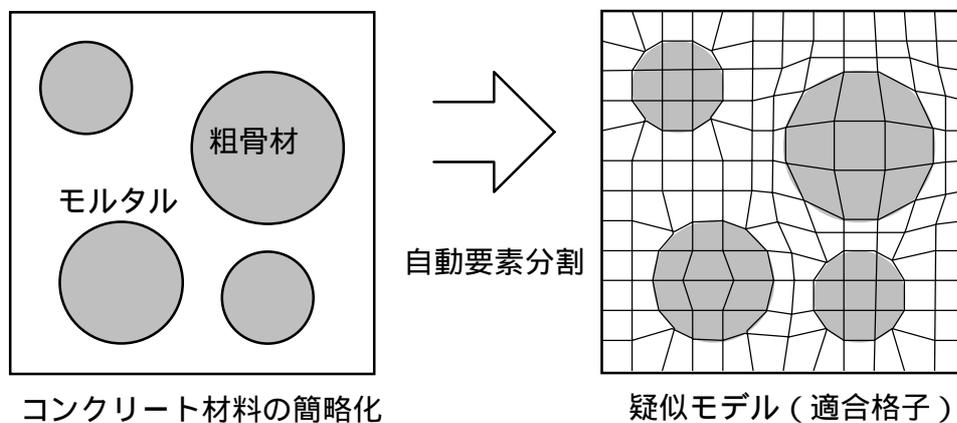


図 2.1 従来のコンクリート材料のモデル化例

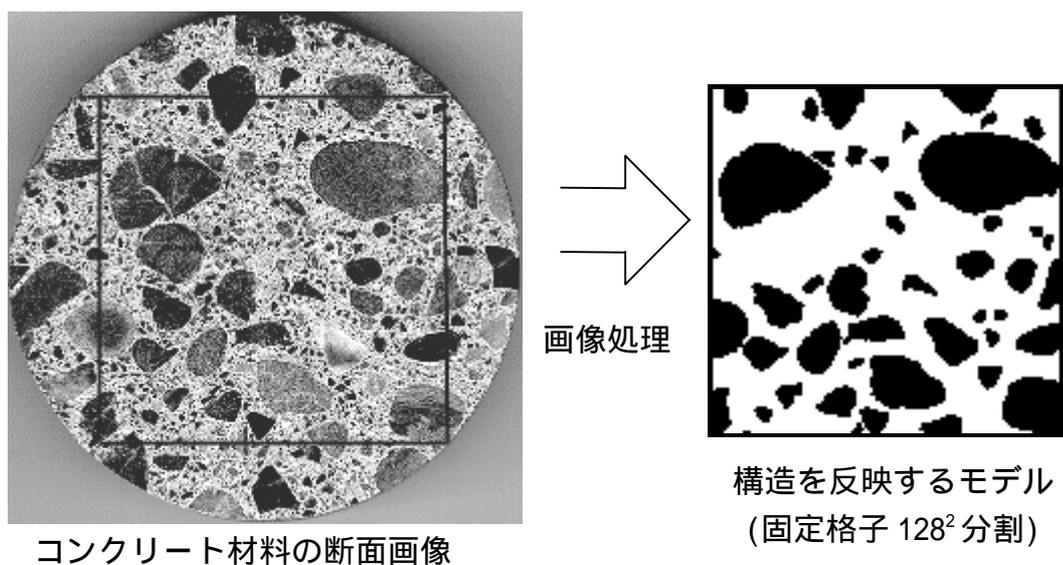


図 2.2 画像に基づくコンクリート材料のモデル化

多かった。このような手法では、さらにアルゴリズム上の制約が付加され、比較的高い密度で詰まっている粗骨材を幾何学構造まで制御しながらモデル化することは難しい。例えば七田(1996)による弾性変形を利用した自動分割では、粗骨材の形状は球体に限定されると同時に、その体積含有率は20%程度が限界となっていた。これは実際の粗骨材含有率が35~45%であることを考えると、現実に即したものとは言えない。

本章では、上に述べたような困難さを回避するために、粗骨材の幾何学情報が得られるデジタル画像データから、有限要素解析モデルを直接に構築する手法を提案する。図 2.2 に示すような計算機上に取り込んだコンクリート断面のデジタル画像から粗骨材を抽出することを目的として、デジタル画像処理(例えば、周藤 1995)を施すことにより、粗骨材の幾何学情報を得ることができる。一般にデジタル画像は、色情報などを均等に張られた格子点上で標本化・量子化したもので、可視化のために各格子点から等しい距離にある線で囲まれる微少な要素で定義される。この微少な要素を画素(pixel)と呼び、直交に張られた格子の場合、正方形となる。粗骨材の幾何学情報は、ある色濃度をしきい値とする on と off の2値画像に変換すれば、on 画素の集合として得られる。ここで二次元画像の代わりに三次元画像を用いれば、立体的な幾何学情報が得られる。

この幾何学情報から有限要素分割を行う手法としては、デラウニー分割法や八分木分割法などが考えられる。しかし本章においては、三次元デジタル画像との直接的な対応と簡便さを目的として、画像の一画素をひとつの8節点六面体要素とみなす。この手法

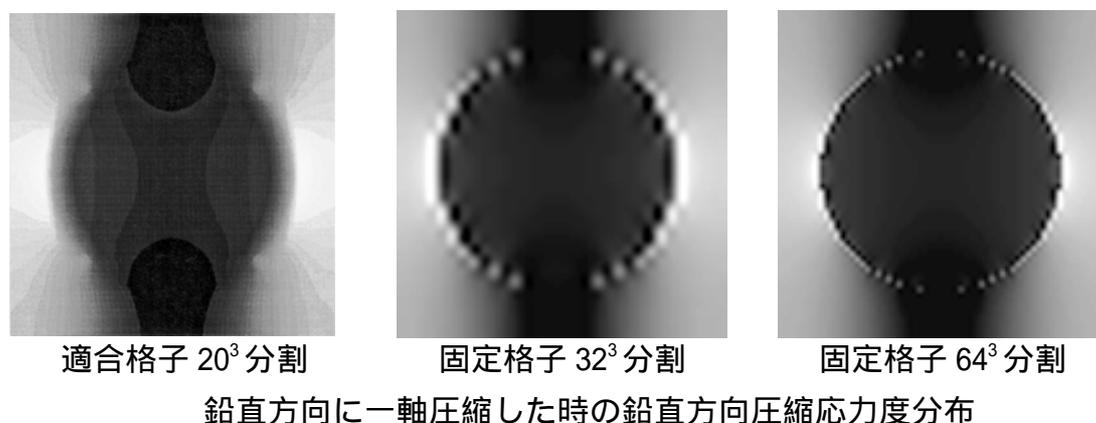


図 2.3 近似解の要素分割法への依存性

によると、有限要素解析モデルの作成はデジタル画像処理のみで可能となる。したがって画像処理をいかに行うかが、モデル作成の要点となる。

しかしながら、このモデル作成手法の場合には界面は階段状に近似されることから、数値解にはなんらかの影響が生じると考えられる。これを検証するために、解析領域にモデル粗骨材を中央にひとつ配置した解析モデルを例として、図 2.3 に要素分割法の違いによる線形解析の応力度分布を示す。画素を有限要素とした固定格子では界面近傍の要素に局所的な数値振動が生じているが、その界面近傍の要素を除いては、界面に要素分割を適合させた適合格子との応力状態の違いは見られない。それゆえ、線形解析の場合には固定格子でも十分に細かい要素分割を行えば、適合格子に比べて遜色のない近似解が得られると考えられる。この階段状の近似を改善する手法については、第4章にて述べる。

本解析において最も重要なことは、幾何学形状を問わずに一律に正確な数値解析モデルを作成できるという点にある。

2.3 三次元デジタル画像を用いた有限要素モデルの作成

コンクリート材料に対して x 線 CT 撮影を行えば、ある程度は粗骨材 - モルタルのメゾ構造の断面画像（画像処理分野では断層画像と呼ばれる）を得ることができる。しかし、x 線は基本的に材料の密度差を利用するものであるが、コンクリート材料においては粗骨材とモルタル部の密度はほぼ同じであるので、造影剤を混入しない限りコントラストの高い画像を得ることは困難である。そこで、本節では、三次元画像の標本化は、コンクリート材料は破壊可能な対象であることから、高解像度な断面画像を得やすい破壊検査によって行った。三次元画像は、連続する断面画像を重ねあわせることにより得ることができる。

2.3.1 コンクリート供試体の作成

粗骨材として、図 2.4 に示す天然川砂利を用いる。粗骨材と細骨材の粒度分布を図 2.5 に示す。これを用いて、表 2.1 に示す調合により 15x30cm シリンダー供試体を作成する。これらは画像に基づく解析モデルの作成にあたり、粗骨材 - モルタルの構造特性を決定する直接要因となる。画像処理のため、カラーコンクリートを用いることにする。白色普通ポルトランドセメントを用いて、もっとも発色が良いとされる顔料として酸化鉄（赤色）をセメント重量に対して 9% 混入した（笠井・小林 1993）。なお、彼らにより顔料混入による強度とフローはほとんど影響を受けないことが報告されているので、粗骨材 - モルタルの構造特性はほぼ乱されていないと推察される。



図 2.4 解析モデルとなる粗骨材

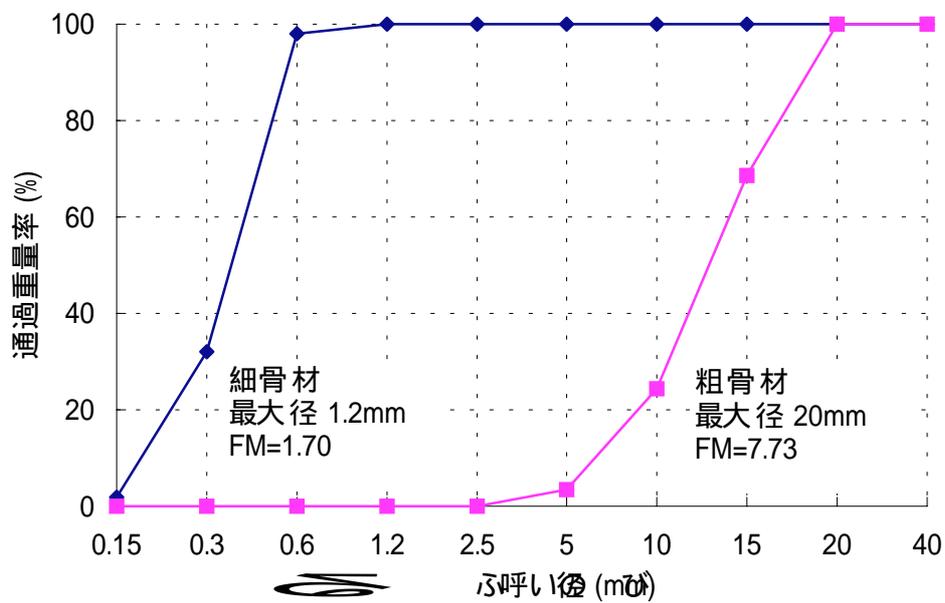


図 2.5 骨材の粒度分布曲線

表 2.1 調合条件

セメント	白色普通ポルトランドセメント
調合強度	35MPa
スランプ	18cm
水セメント比	55%
粗骨材	0.43 m ³ /m ³ , 川砂利, 最大径 20mm
細骨材	0.22 m ³ /m ³ , 粗粒率 1.7, 最大径 1.2mm
顔料	酸化鉄 (赤色) をセメントの 9% 重量添加

2.3.2 破壊検査による三次元デジタル画像化

破壊検査は、図 2.6 に示すように強度試験用供試体端面研磨仕上げ機(マルイ社製「ハイケンまつるつる」)で研磨により行う。また、連続した画像取り込み精度を考慮して、供試体の側面が直角になるように2面を切断し、標本化領域を100mm 立方とした。断面方向には0.5mm づつ研磨するので、合計200枚の断面画像を得ることになる。

この供試体を研磨しながら順次スキャナーで直接デジタル化し、連続した断面画像を得る。スキャナーによるデジタル化にあたっては、濃度分布と位置ができるだけ一定に保たれるように注意した。また、高彩度化するために断面を湿潤状態として、十分に濡らした。スキャナーは、パソコン用のフラットベッドスキャナー(光学解像度0.0635mm)であり、供試体の重量と防水のために読み取り面を治具付きの亚克力版に取り替えている。この破壊検査においては、供試体の打ち込み上面から研磨を行ったために、粗骨材下面がブリージングの影響で付着が弱いことから、研磨途中で粗骨材が抜け落ちることがあった。この抜け落ちた穴は黒色ダーマートグラフ鉛筆にて着色した。以降は、打ち込み下面からの研磨が望ましいと考える。

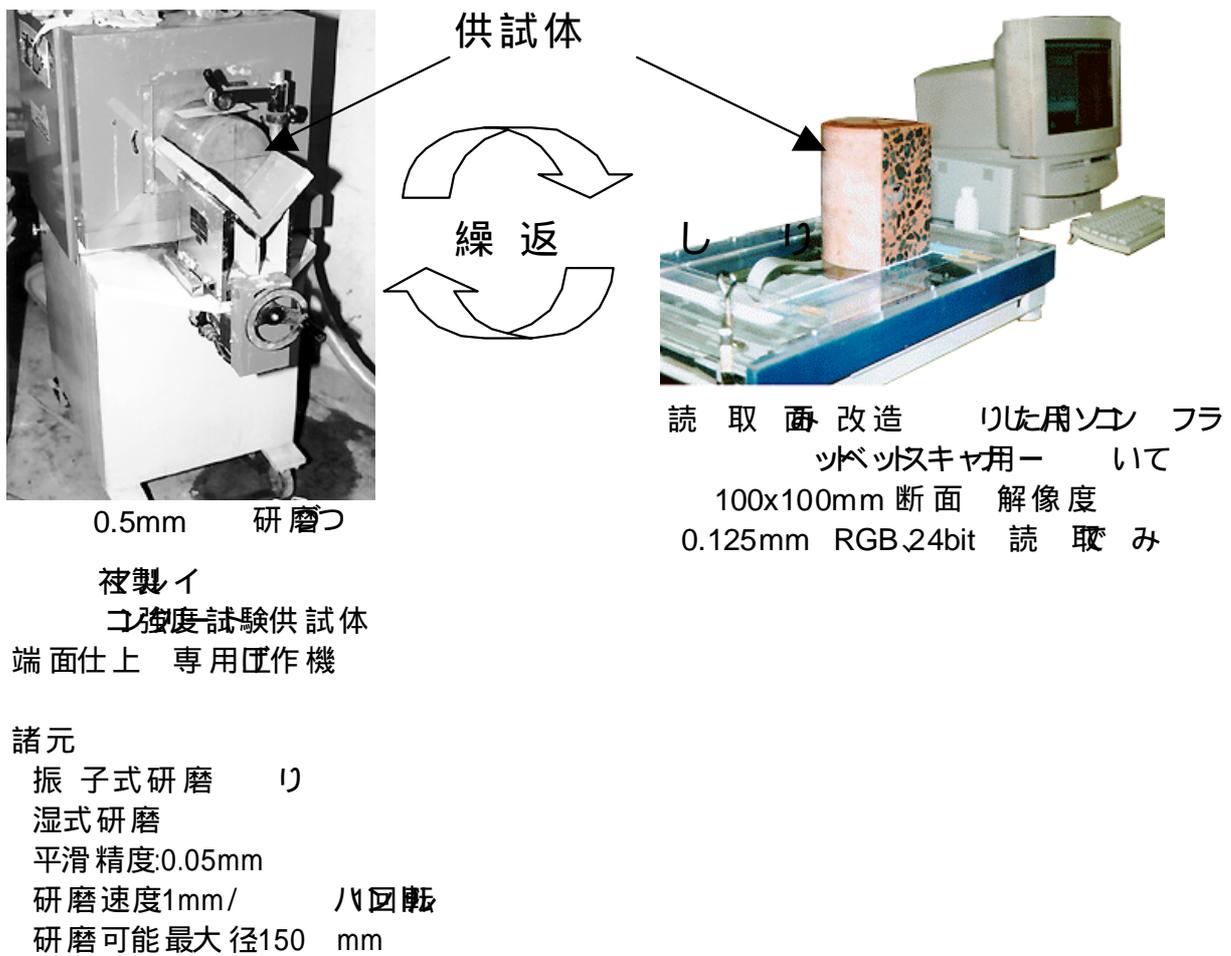


図 2.6 コンクリート供試体の三次元デジタル画像撮影

2.3.3 画像処理によるモデル作成

図 2.7 に画像処理手順を示す。細骨材の最大径1.2mm に対して断面画像間の解像度を0.5mm としたので、画像処理は各断面ごとに独立して行うことができる。

コンクリート供試体を高彩度の赤色に着色しているため、RGB24bit 画像の赤色成分だけを取り除けば、比較的容易に粗骨材と細骨材だけを分離できる。しかし、R チャンネルだけでは白色などの粗骨材を抽出できないので、RGB チャンネルを操作する必要がある。ここでは、R チャンネルを基準に、G チャンネルと B チャンネルの差分をとり、同時にしきい値処理を施すことにより、鮮明な8bit 階調画像を得ている。この強調操作におけるしきい値 min_{rg} , min_{rb} と on 画素集合の最小画素数のしきい値は、試行により定めた。

この8bit 階調画像の濃度ヒストグラムは著しい双峰性を示すことになるので、しきい値を設けて画素を on,off とする2値画像を作成する。この2値画像に対して、骨材を表す on 画素集合にそれぞれ名前(labeling)をつける。その後、各集合の面積算定を行い、所定面積以下の on 画素集合は細骨材であるとみなし、これを除去する。

ところで、この断面画像の画像処理では、粗骨材近傍の細骨材が粗骨材画像の髭として認識されてしまうデジタル処理特有の問題がある。この問題を回避するために、あらかじめ高い解像度0.125mm で処理した後、解像度を0.25mm に下げている。また、断面内の解像度に比べると研磨厚で決まる断面間の解像度は低いために、各次元の解像度が等しい三次元画像の構成には、4-近傍距離画像に非線形変換した後に平均化することで補間した(周藤 1995)。三次元画像の構成のときに、このような距離画像を用いた画像補間法は一般的であるようである。ここで、このような濃淡のはっきりとした画像間を補間する場合、それらの画像を直接に用いて平均化したものを用いると、補間された画像にはドーナツ状の輪郭が生じるので好ましくない。なお、距離画像への変換、各粒子の名前づけ(labeling)は基本的なデジタル画像処理手法であり、図 2.7 中に概説している。

図 2.7 の手順によって得られた三次元2値画像中の粗骨材含有率は、49%であった。調合条件に比べて6%大きくなっているのは、打設時に予め捨てモルタルを行わなかったことが主な原因であると考えられる。

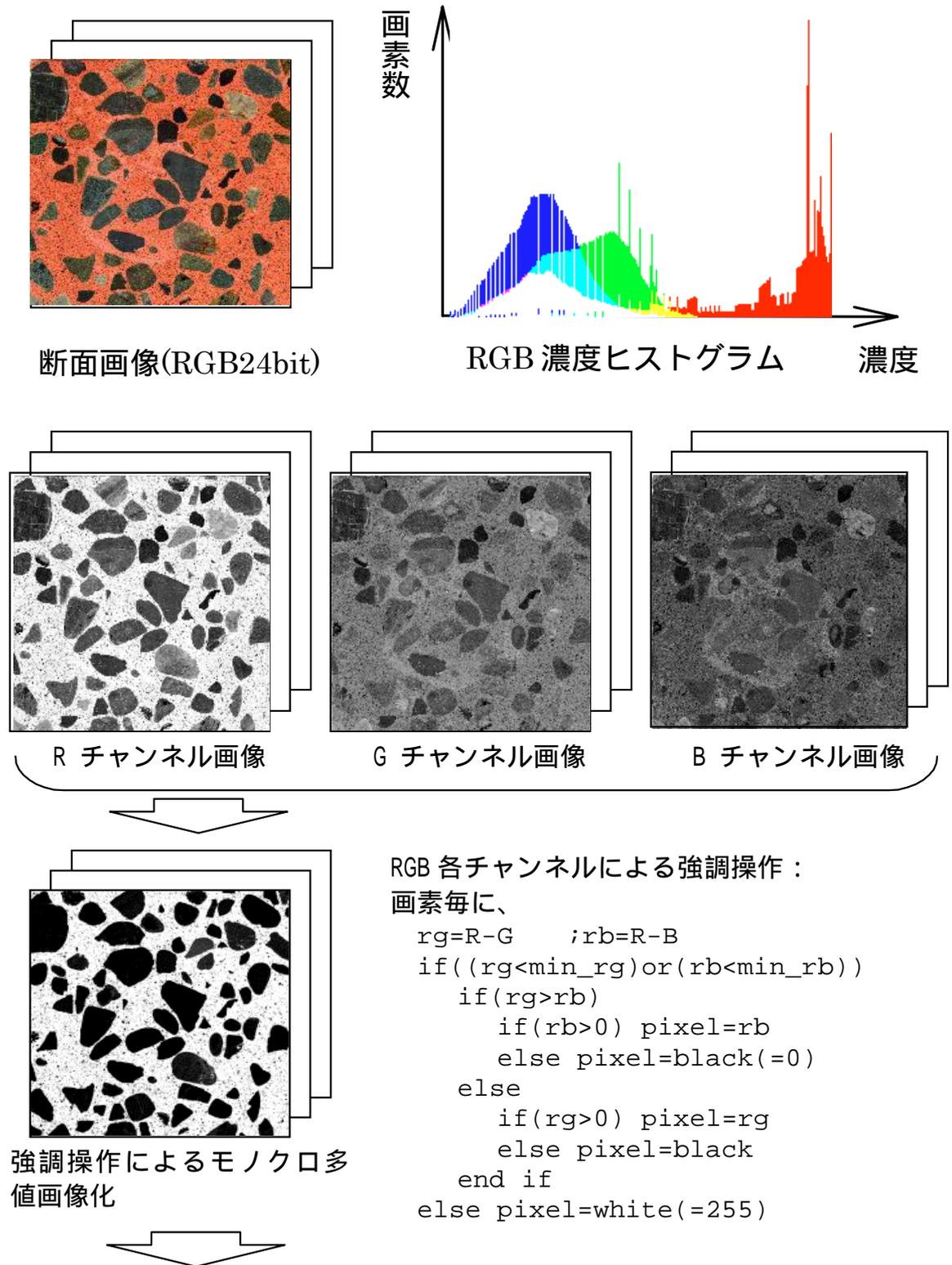
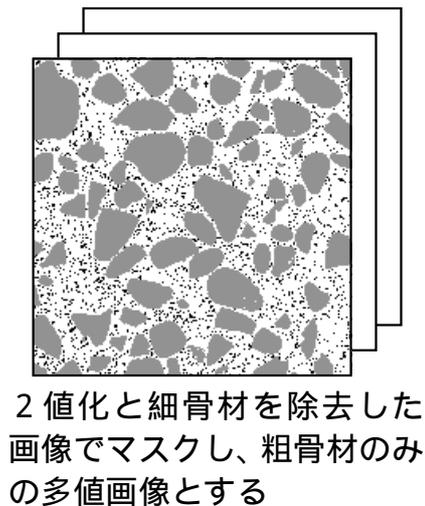


図 2.7 画像処理による有限要素モデルの作成手順 (その 1)



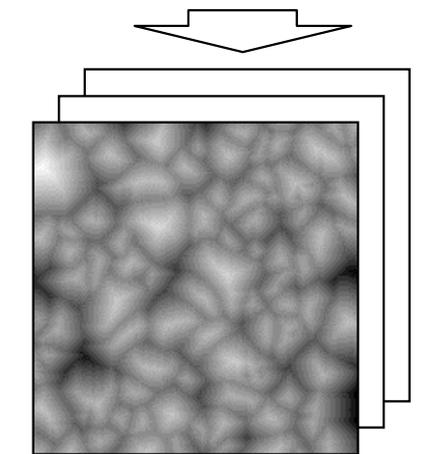
しきい値による 2 値化 :

画素毎に、

```
thresh=min(min_rg,min_rb)
if(pixel<thresh) mask_pixel=on
else mask_pixel=off
```

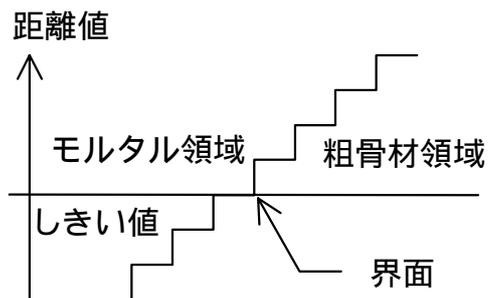
細骨材の除去 :

ひとつあたりの on 画素集合についてそれぞれ名前を付けて(labeling)、それらの on 画素集合の面積を算定。所定画素数以下の集合を細骨材とみなし消去。



距離画像 :

濃度値を、4-近傍画素における界面からの最短経路画素数で定義



解像度を落とした後、2 値化、さらに距離画像に非線形変換

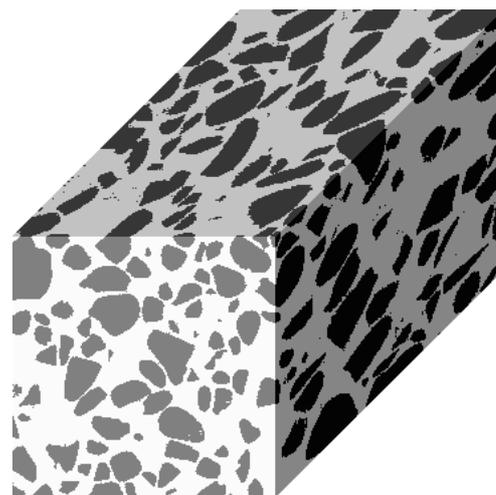
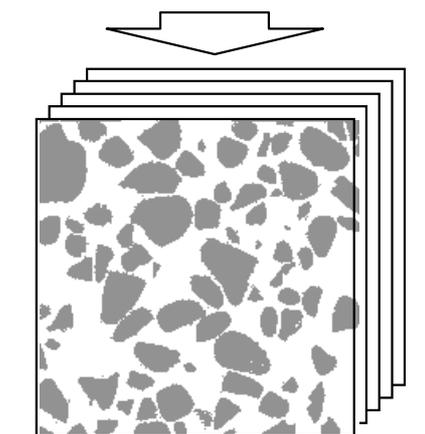


図 2.7 画像処理による有限要素モデルの作成手順 (その 2)

2.4 マルチスケール問題としての定式化

コンクリート材料を均質と見なすことのできる巨視構造(構造物全体)のスケールと、粗骨材 - モルタルのメゾ構造のスケールでは、まったく大きさが異なる。このようにスケールのオーダーが全く異なる問題に対しては、変位の漸近展開に基づく均質化法による定式化(Guedes and Kikuchi 1990)が有効である。

今、座標系 X で表される巨視構造と座標系 Y で表されるメゾ構造のスケール比 ε として、両者の座標系の関係を

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} / \varepsilon \quad (2.1)$$

と表す。これを用いて巨視構造の変位場に対して次の漸近展開形を仮定する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (2.2)$$

巨視構造内部のメゾ構造が周期的な構造を持つことを仮定して、式 (2.2) を弾性体の支配方程式に代入し の低次項に関して整理すると、最終的に均質化法による次のアルゴリズムを得る。

特性関数の求解

メゾ構造の周期的な変位 $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と巨視的変位 $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ の関係は、次式で表現できる。

$$\mathbf{u}^1 = \chi^{ij} e_{ij}^x(\mathbf{u}^0) \quad (2.3)$$

ここに、 $e^x(\cdot)$ は巨視構造の変位から \mathbf{x} に関するひずみを求める作用素であり、 χ は特性関数と呼ばれている。

特性関数 χ は、次のメゾ構造に関する弱形式から求めることができる。

$$\int_Y C_{ijkl}(\mathbf{y}) e_{ij}^y(\mathbf{v}) e_{kl}^y(\mathbf{p}^{mn} + \chi^{mn}) d\mathbf{y} = 0 \quad (2.4)$$

$$p_i^{mn} = \delta_{im} y_n \quad (2.5)$$

ここに、 \mathbf{C} はメゾ構造の弾性テンソル、 $e^y(\cdot)$ はメゾ構造の変位から \mathbf{y} に関する微小ひずみを求める作用素、 δ はクロネッカーのデルタ記号である。また、 \mathbf{p} は特性関数の各モードに対する強制変位と解釈できる。

均質化

得られた特性関数 χ を用いて、次式によって巨視的弾性定数 \mathbf{C}^H を算出する。

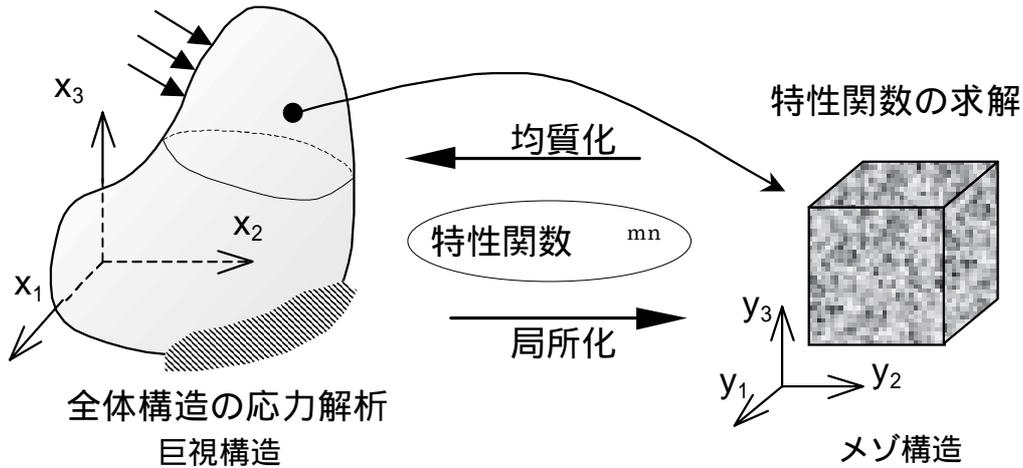


図 2.8 均質化法による求解手順

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y C_{ijkl}(\mathbf{y}) \{ \delta_{km} \delta_{ln} + e_{kl}^y(\boldsymbol{\chi}^{mn}) \} dy \quad (2.6)$$

全体構造の応力解析

巨視的弾性定数を用いて通常の構造物全体の応力解析を行い、巨視的変位 \mathbf{u}^0 を得る。

局所化

巨視的変位 \mathbf{u}^0 および特性関数 $\boldsymbol{\chi}$ を用いて、メゾ構造内におけるひずみと応力を次式で評価する。

$$e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) = e_{ij}^x(\mathbf{u}^0) + e_{ij}^y(\boldsymbol{\chi}^{kl}) e_{kl}^y(\mathbf{u}^0) \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) \quad (2.8)$$

なお、式 (2.7) は、式 (2.5) から $e_{kl}^y(\mathbf{p}^{mn}) = \delta_{km} \delta_{ln}$ であることが分かるので、

$$e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) = e_{ij}^y(\mathbf{p}^{kl} + \boldsymbol{\chi}^{kl}) e_{kl}^y(\mathbf{u}^0) \quad (2.9)$$

と表記することもできる。

以上の手順を図 2.8 に示す。式 (2.6) の均質化された材料定数 C^H は、非線形解析の場合には、コンクリート材料の構成則であると考えられる。メゾ構造の基本周期領域の大きさについては、前川ら(1994)のコントロールボリュームの取り方の考え方に従い、最大粗骨材直径の数倍を基準とする。具体的には基本周期領域の有限要素モデルとして、

2.3節で述べた三次元画像データから任意領域を切り出すことになる。このとき、一般に画像データを用いる限り、領域の境界において周期性を厳密に満足できない。しかしながら、周期境界条件で得られる挙動は一様応力境界条件と一様ひずみ境界条件で得られる挙動によって挟まれることが証明(堀 1997)されており、力学的に妥当な境界条件のひとつであると考えられる。

2.5 線形計算による解析モデルの比較

次に示す 3 種類のメゾ構造について均質化法による線形計算を行い比較した。つまりメゾ構造について、2.3 節で得られた三次元デジタル画像から一辺 64mm の立方体領域を切り出し 256^3 分割 (5000 万自由度) した画像モデル A、同じ立方体領域を 128^3 分割 (630 万自由度) した画像モデル B、および球体の理想化骨材を含む立方体領域を固定格子で 128^3 分割した疑似モデルである。疑似モデルの体積含有率は、七田(1997)が用いた自動有限要素分割法の上限であった 20% とした。図 2.9 (a)、図 2.10 (a) に、画像モデル A と疑似モデルから粗骨材のみを表示した要素分割図を示す。材料定数は、梶川ら(1985)を参考にして、いずれのモデルについても表 2.2 に示すように与えた。収束判定条件は、荷重ベクトルに対する残差のノルム比を 10^{-6} 以下とした。計算は、東京工業大学情報処理センターに設置されている DEC 社製 Alpha Server 8400 (21164A 437MHz 12CPU, 8GB memory) を 6CPU 並列で行った。

画像モデル A の巨視的弾性定数は、

$$\mathbf{C}^H = \begin{bmatrix} 39.01 & 8.09 & 8.09 & -0.03 & 0.01 & 0.02 \\ 8.09 & 38.99 & 8.07 & -0.02 & -0.03 & 0.00 \\ 8.09 & 8.07 & 38.99 & 0.01 & -0.04 & 0.01 \\ -0.03 & -0.02 & 0.01 & 15.43 & 0.01 & -0.02 \\ 0.01 & -0.03 & -0.04 & 0.01 & 15.40 & -0.00 \\ 0.02 & 0.00 & 0.01 & -0.02 & -0.00 & 15.42 \end{bmatrix}$$

(GPa)であり、画像モデル B との差は最大 1% であった。 \mathbf{C}^H には、軸力とせん断力の交叉効果はほとんどなく、等方的である。

画像モデル A と疑似モデルについて、それぞれ巨視構造の x_3 方向に 10MPa の純一軸圧縮を作用させたとき、メゾ構造内に生じる主応力度分布を図 2.9 (b,c)、図 2.10 (b,c) に示す。また画像モデル B と疑似モデルについて、粗骨材領域とモルタル領域別にそれ

表 2.2 材料定数

	ヤング係数 (GPa)	ポアソン比
粗骨材	52.9	0.15
モルタル	23.5	0.19

それぞれの総画素数で正規化した、有限要素内の主応力度の出現頻度率を図 2.11 に、主応力度の y_3 軸に対するオイラー角を図 2.12 に示す。以上より、粗骨材の含有率、形状、配置などの違いが、その応力状態に明確な違いを生じることが分かる。したがって、複合材料としてのコンクリート材料の数値解析には、現実に即したコンクリートの幾何学構造を反映することが重要であると考えられる。

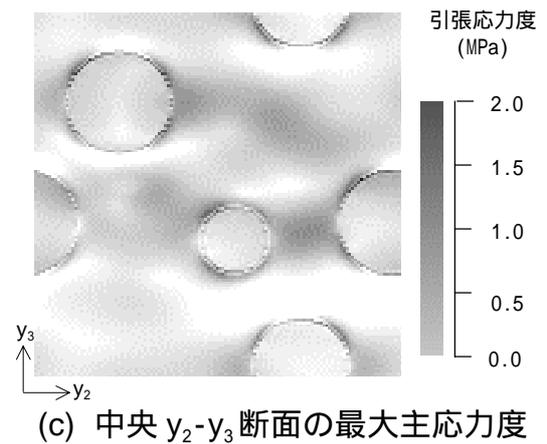
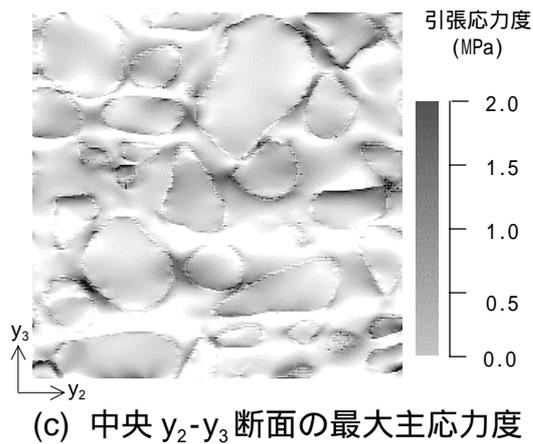
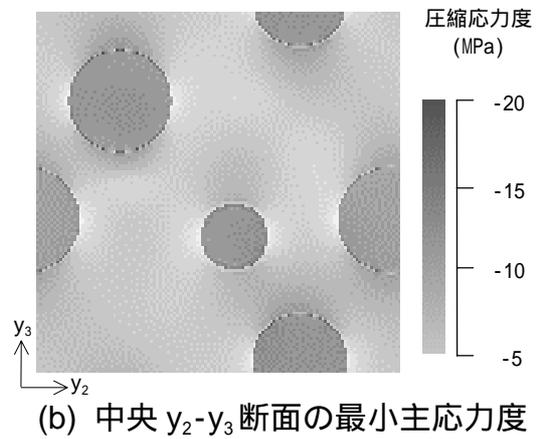
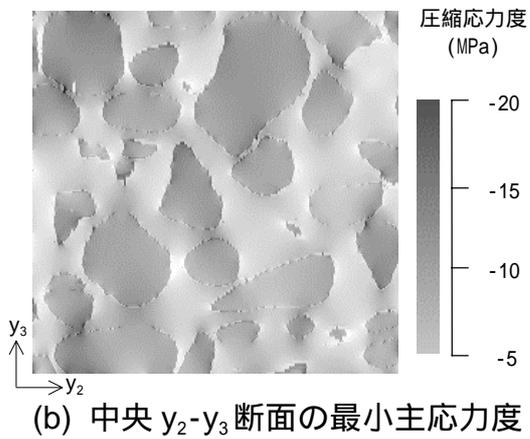
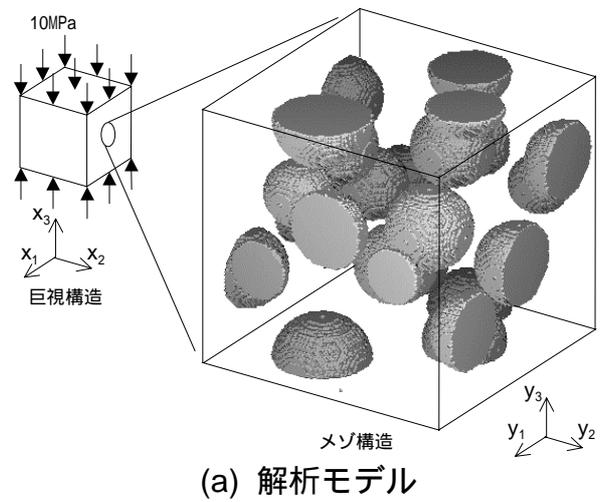
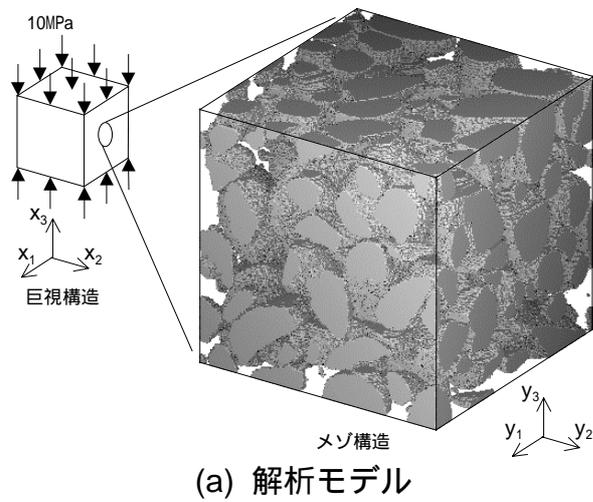


図 2.9 画像モデル A 256^3 分割

図 2.10 疑似モデル 128^3 分割

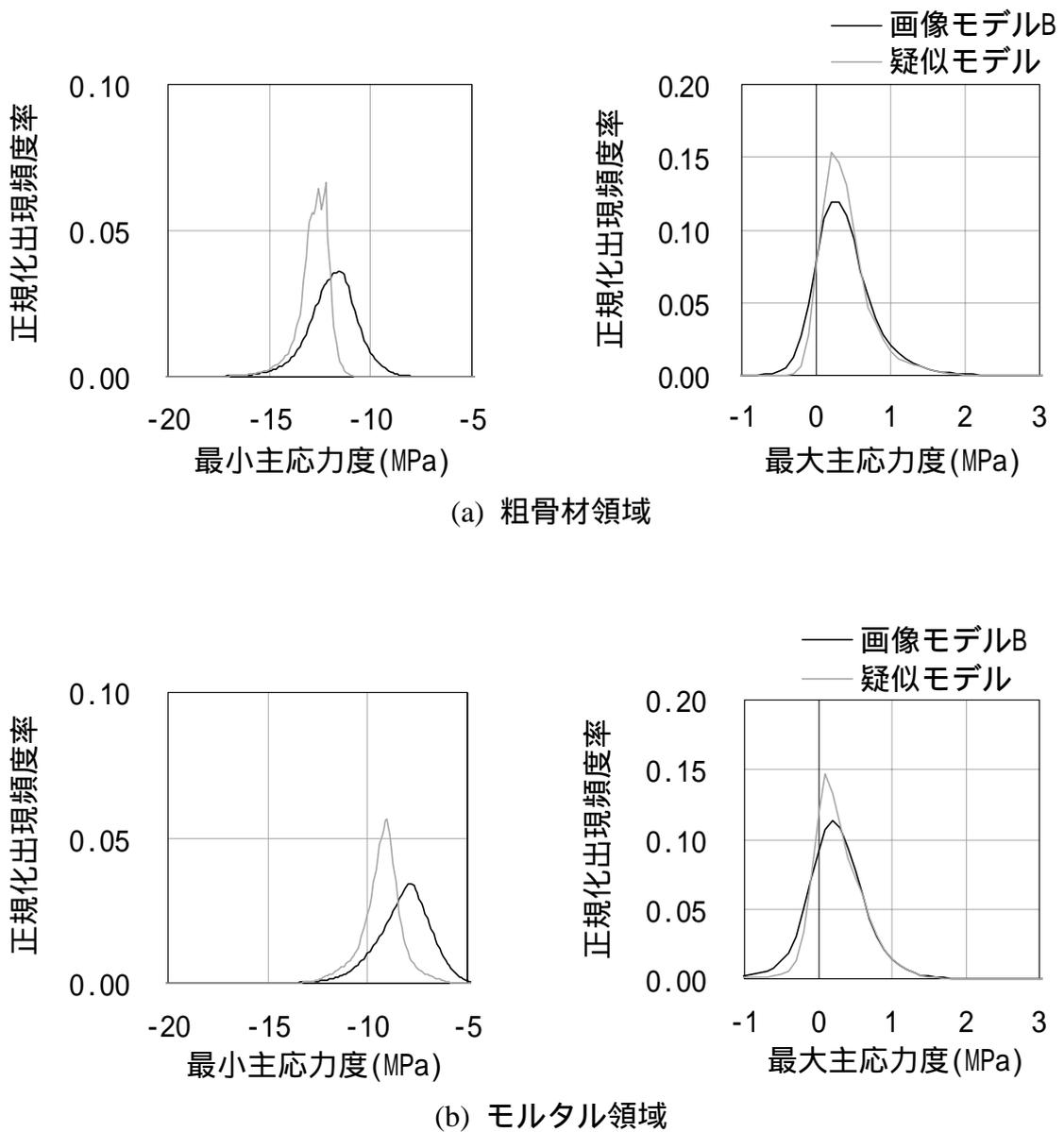
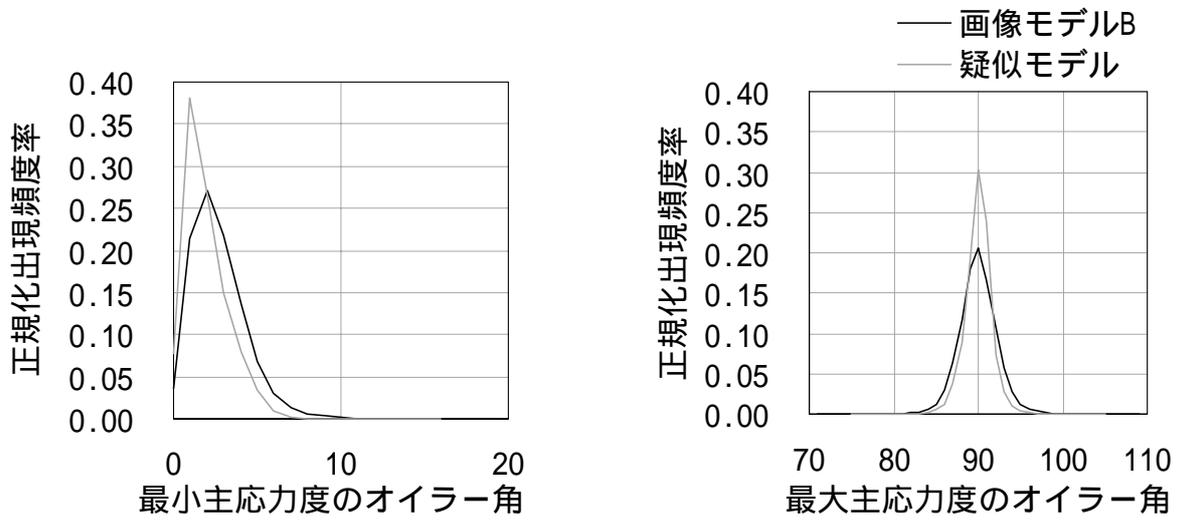
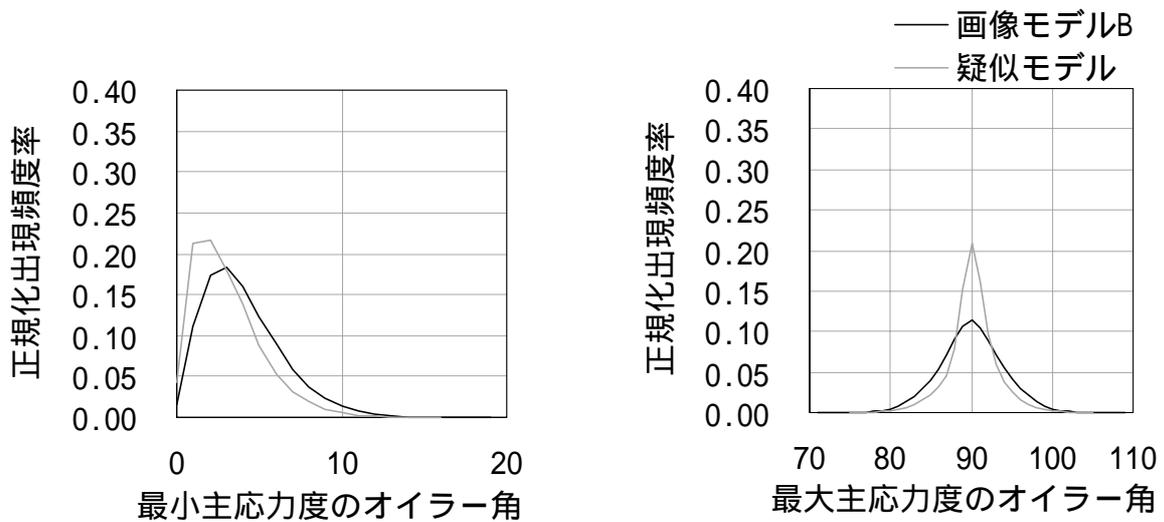


図 2.11 主応力度の正規化出現頻度率



(a) 粗骨材領域



(b) モルタル領域

図 2.12 主応力度の y_3 軸に対するオイラー角の正規化出現頻度率

2.6 まとめ

巨視的な圧縮破壊の力学挙動を局所的な引張破壊から説明するためには、コンクリート材料を複合材料として考慮する必要がある。これを数値解析によって説明する場合には、まずコンクリート材料を複合材料とする幾何学的に精確な数値解析モデルを作成しなければならない。本章では、デジタル画像を直接に用いた三次元有限要素解析モデルの作成手法を提案し、コンクリート材料をマルチスケール材料と考えて均質化法を適用した。画像モデルと疑似モデルとの線形解析の比較により、本手法の有効性を確認した。

第3章 デジタル画像に基づく有限要素解析 のための連立一次方程式の高速解法

3.1 はじめに

幾何学的に精確な三次元有限要素解析モデルを作成するためにデジタル画像を直接に用いた場合、弾性体の方程式を離散化して最終的に得られる連立一次方程式の未知数は、非常に大きくなる。例えば、一次元辺りの有限要素分割数がわずか 256 分割であったとしても、三次元解析における変位ベクトルの未知数は 3×256^3 5000 万自由度、変位ベクトルのみでも計算機に記憶しておくためには倍精度で 384M バイトが必要である。したがって、実際の計算機資源と計算時間の殆どは、大規模な連立一次方程式の求解に費やされることになる。

このような大規模な連立一次方程式の求解には、反復解法系の解法である共役勾配法を用いることが多い。このときに、共役勾配法になんらかの前処理を施して所定誤差までの反復回数の低減を行い、求解の高速化を図ることが一般的である。一般的な三次元有限要素解析においても大規模な連立一次方程式を解く必要が生じるが、デジタル画像に基づく有限要素解析では有限要素分割が均一な直交格子で定義されているので、これを連立一次方程式の求解に利用することを考える。

本章では、共役勾配法の前処理因子として、デジタル画像処理により生成された均等な直交格子と均質化法から課せられるメゾ構造の周期領域条件を利用して、スペクトル変換を用いた支配方程式の微分作用素の近似的な逆作用素を構成する手法を述べる。

3.2 前処理付き共役勾配法

大規模な連立一次方程式の求解には、演算量と記憶容量の観点から直接法より反復法を用いることが適している。反復法による解法のなかでも前処理付き共役勾配法は、前処理因子の構成を工夫することで所定誤差に収束するまでの反復回数を大きく減少できることが知られており、効率的な解法のひとつである。この前処理付き共役勾配法のアルゴリズムを次に示す。

$$\text{連立一次方程式 } \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

初期化

初期値 \mathbf{x}_0

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{x}_0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_0 \quad (3.3)$$

反復

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{K} \mathbf{p}_k \quad (3.4)$$

$$\alpha_k = (\mathbf{z}_k, \mathbf{r}_k) / (\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{q}_k \quad (3.7)$$

収束判定

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{k+1} \quad (3.8)$$

$$\beta_k = (\mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}) / (\mathbf{z}_k, \mathbf{r}_k) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k \quad (3.10)$$

所定誤差に収束するまでの反復回数は、 κ を前処理済みの剛性行列 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ の条件数として、 $\sqrt{\kappa}$ に比例することが知られている。要素分割数の増加に伴い条件数は大きくなるので、反復回数は増加する。ここで、前処理因子の逆行列 \mathbf{M}^{-1} を剛性行列の逆行列 \mathbf{K}^{-1} をできる限り近似するように構成すると、少ない反復回数を達成できる。ただし、効率性の観点から、式 (3.8) における前処理因子の逆行列 \mathbf{M}^{-1} を構成して残差ベクトル \mathbf{r} に作用させる演算量・計算時間は、式 (3.4) における剛性行列 \mathbf{K} と方向ベクトル \mathbf{p} との行列・ベクトル積の演算量・計算時間と同程度もしくはそれ以下であることが望まし

い。

なお、デジタル画像に基づく有限要素解析の要素分割は直交格子となることから、剛性行列 \mathbf{K} は規則的なブロック三重対角となる。したがって、これの非ゼロ要素のみを記憶する。これに必要となる記憶容量は、均質化法のメゾ構造の要素分割数を L, M, N とし、変位ベクトル ($3 \cdot L \cdot M \cdot N$ 要素) の約 81 倍である。また、式 (3.4) の演算量は、加減乗算を 1 回として、約 $486 \cdot L \cdot M \cdot N$ 回となる。特に線形計算の場合、デジタル画像の構成要素である画素を直接に有限要素とする有限要素解析では有限要素は全て同一の立方体に限定されるので、材料定数の種類分の要素剛性行列のみを記憶しておき、行列・ベクトル積の式 (3.4) を Element by element 法により計算することができる。この場合、剛性行列 \mathbf{K} を記憶しておく必要は無いが、行列・ベクトル積の式 (3.4) の演算量は $1152 \cdot L \cdot M \cdot N$ 回と剛性行列を記憶しておく場合に比べて 2 倍強に増える。また具体的には、剛性行列 \mathbf{K} に対しては均質化法による周期化を行わずに、変位ベクトル \mathbf{x} と外力ベクトル \mathbf{f} に対して周期化に伴う処理を行った。

3.3 多次元高速スペクトル変換を用いた前処理因子

均質化法のメゾ構造は直交格子上で離散化 (分割数 L, M, N) されるので、格子点を標本点と見なすと、式(2.4) はスペクトル・ガラーキン法(例えば、Canuto 1988)により弱定式化することができる。今、式(2.4) の特性関数 χ を近似するために、次の 2 種類の一次元スペクトル関数の直積を考えることにする。

3.3.1 多次元高速スペクトル変換

1) 有限フーリエ級数

三次元問題の特性関数 χ を次式で近似する。

$$\chi(y_1, y_2, y_3) \cong \sum_{p=0}^{L-1} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{N-1} \mathbf{c}_{p,q,r} \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(y_3), \quad \mathbf{c}_{0,0,0} = 0 \quad (3.11)$$

$$\phi(y_1) = e^{\sqrt{-1} p y_1}, \quad \phi(y_2) = e^{\sqrt{-1} q y_2}, \quad \phi(y_3) = e^{\sqrt{-1} r y_3} \quad (3.12)$$

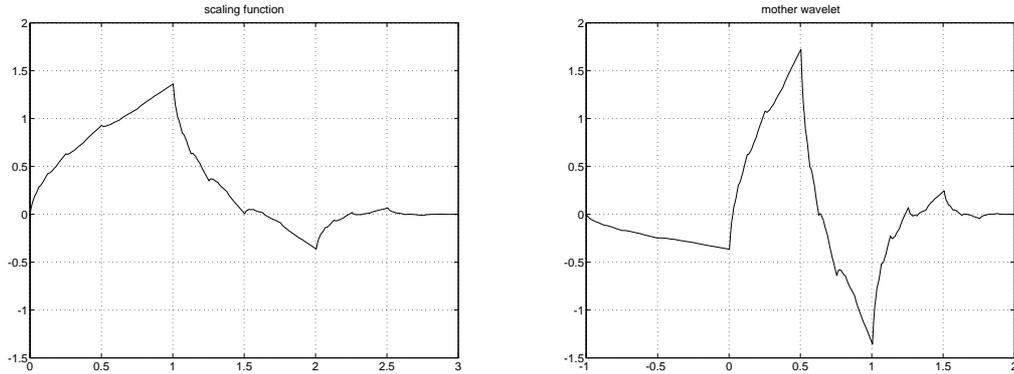
ここに、 (p, q, r) は三次元フーリエ空間における波数である。 $\phi(y_1)$ の m 階の導関数は、

$$\frac{d^m}{dy^m} \phi(y_1) = (\sqrt{-1} p)^m \phi(y_1) \quad (3.13)$$

であり、 $\phi(y_2), \phi(y_3)$ も同様である。式 (3.11) の係数 $\mathbf{c}_{p,q,r}$ は、三次元高速実数フーリエ変換により効率良く解くことが可能である。標本点数 N に対する一次元高速実数フーリエ変換の演算回数は対称性を利用することにより約 $5/2 N \log_2 N$ 回であるので、三次元高速実数フーリエ変換の演算回数は約 $5/2 L * M * N * (\log_2 L + \log_2 M + \log_2 N)$ となる。高速フーリエ変換は、信号処理や理工学の多くの問題において用いられる変換であり、多くの効率的なパッケージを用いることができる利点がある。例として、Figro and Johnson (1998) が作成した FFTW パッケージは、任意の基数の組合せ (特に小さな基数 2,3,5,7,11,13 に対して高速) による多次元高速実数フーリエ変換が可能となっている。本論文では、この FFTW パッケージを用いた。

2) 有限ウェーブレット級数

ウェーブレット変換には多くの変換があるが、本章では代表的な直交ウェーブレット変換である Daubechies のウェーブレット族を用いた変換を考える。Daubechies のウェー



(a) スケーリング関数

(b) マザー関数

図 3.1 Daubechies(DN=2) ウェーブレット

レット族は、消失モーメント次数 DN によって体系付けられている。L=2^l, M=2^m, N=2ⁿ として、三次元問題の特性関数 χ を次式で近似する。

$$\begin{aligned} \chi(y_1, y_2, y_3) \cong & \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{s}_{i,j,k}^{l,m,n} \varphi_{p,i}(y_1) \varphi_{q,j}(y_2) \varphi_{r,k}(y_3) \\ & + \sum_{p=1}^l \sum_{q=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{d}_{i,j,k}^{p,q,r} \psi_{p,i}(y_1) \psi_{q,j}(y_2) \psi_{r,k}(y_3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{s}_{i,j,k}^{l,m,n} = 0$$

ここに、解像度 p のスケーリング関数は次式で定義される。

$$\varphi_{p,i}(y_1) = 2^{(l-p)/2} \varphi_{p,i}(2^{l-p} y_1 - i) \quad (3.15)$$

解像度 p のスケーリング関数 φ とマザー関数 ψ は、それぞれ次式で与えられる。

$$\varphi_{p,i}(y_1) = \sum_{s=0}^{2DN-1} h_s \varphi_{p-1,2i+s}(y_1) \quad (3.16)$$

$$\psi_{p,i}(y_1) = \sum_{s=0}^{2DN-1} g_s \varphi_{p-1,2i+s}(y_1) \quad (3.17)$$

ここに、 $\{h_s\}, \{g_s\}$ は Daubechies ウェーブレットの係数列であり、 (p,q,r) は三次元ウェーブレット空間における多重解像度レベル、 (i,j,k) は各次元におけるダイレーションである。

例として、Daubechies(DN=2)ウェーブレットのスケーリング関数とマザー関数を、図 3.1 に示す。

続いて、マザー関数 ψ の m 階の導関数は、存在すれば、

$$\frac{d^m}{dy_1^m} \psi_{p,i}(y_1) \cong (\psi_{p,i}(y_1))^{(m)} = 2^{(l-p)m} \psi_{p,i}^{(m)}(y_1) \quad (3.18)$$

である。式 (3.14) の係数 $\mathbf{d}_{p,q,r}$ は、三次元ウェーブレット変換により効率的に求めることができる。標本点数 N に対する一次元ウェーブレット変換の演算回数は $8 \cdot DN \cdot N$ であるので、三次元ウェーブレット変換の演算回数は $24 \cdot DN \cdot L \cdot M \cdot N$ となる。ウェーブレット変換においては、2 のべき乗以外の標本点数に適用する場合には、より高度なウェーブレット変換もしくは、フィルターバンクが必要となる。

有限フーリエ変換、有限 Daubechies ウェーブレット変換ともに、順変換と逆変換をそれぞれ行列 \mathcal{F} , \mathcal{F}^{-1} で表す。ここに、両変換ともに直交変換であるので、 $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^T$ である。

3.3.2 前処理因子の構成

フーリエ・ガラーキン法、あるいはウェーブレット・ガラーキン法により式(2.4) を離散化すると、次の行列・ベクトル表現による方程式を得る。

$$\mathbf{F}_{3 \times 3}^{-1} \mathbf{D}_{3 \times 6} \mathbf{F}_{6 \times 6} \mathbf{C} \mathbf{F}_{6 \times 6}^{-1} \mathbf{D}_{6 \times 3} \mathbf{F}_{3 \times 3} \boldsymbol{\chi}^{mn} = \mathbf{f}^{mn} \quad (3.19)$$

ここに、 \mathbf{f} は均質化法の固有変形モード mn に対する自己釣り合い力と解釈できる外力である。また、特性関数ベクトル $\boldsymbol{\chi}$ は、

$$\boldsymbol{\chi}^{mn} = \begin{Bmatrix} \chi_1^{mn} \\ \chi_2^{mn} \\ \chi_3^{mn} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

の 3 成分から成り、 $\mathbf{F}_{3 \times 3}$, $\mathbf{F}_{3 \times 3}^{-1}$ はそれぞれ三次元スペクトル変換 \mathcal{F} , \mathcal{F}^{-1} からなるブロック対角行列である。すなわち、

$$\mathbf{F}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \mathcal{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{F} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{F}_{3 \times 3}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{F}^{-1} \end{bmatrix}$$

(3.22)

$\mathbf{F}_{6 \times 6}, \mathbf{F}_{6 \times 6}^{-1}$ も同様である。 $\mathbf{D}_{6 \times 3}$ は 1 階の空間微分作用素の離散近似である三種類の行列 \mathcal{D} からなるブロック行列である。

$$\mathbf{D}_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{D}_2 & \mathbf{0} & \mathcal{D}_3 \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}_2 & \mathbf{0} & \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{D}_3 & \mathbf{0} & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

式 (3.19) を直接に応力解析に用いることも考えられるが、予備解析を行った結果、応力場に数値振動が発生することを確かめている。これは、弾性係数 \mathbf{C} が階段関数となっているためであると考えられる。(なお、Moulinec and Suquet (1997) によると、Green の応力関数の有限フーリエ級数展開を用いて、最高次周波数成分の取り扱いに注意することで振動は生じないと述べている。彼らのフーリエ変換による手法で応力解析を行うことも可能であるが、標本点間以上の解像度はない。一方で、第 4 章以降で述べる粗骨材 - モルタル界面を高精度にモデル化する有限要素を用いると、部分的に解像度を上げることが可能となる。)

本章では、前処理因子を構成することを目的としているので、弾性係数をメゾ構造内部で一定として領域平均値とする。

$$\bar{C}_{ijkl} = \frac{1}{\int_Y dy} \int_Y C_{ijkl} dy \quad (3.24)$$

上式 (3.24) を考慮すると、式 (3.19) は次式のように変形できる。

$$\mathbf{F}_{3 \times 3}^{-1} \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F}_{3 \times 3} \boldsymbol{\chi}^{mn} = \mathbf{f}^{mn} \quad (3.25)$$

ここに、

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1111} \mathcal{D}_1^2 + \bar{C}_{1212} \mathcal{D}_2^2 + \bar{C}_{1313} \mathcal{D}_3^2 & (\bar{C}_{1122} + \bar{C}_{1212}) \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 & (\bar{C}_{1133} + \bar{C}_{1313}) \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_3 \\ (\bar{C}_{2211} + \bar{C}_{2121}) \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 & \bar{C}_{2121} \mathcal{D}_1^2 + \bar{C}_{2222} \mathcal{D}_2^2 + \bar{C}_{2323} \mathcal{D}_3^2 & (\bar{C}_{2233} + \bar{C}_{2323}) \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_3 \\ (\bar{C}_{3311} + \bar{C}_{3131}) \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_1 & (\bar{C}_{3322} + \bar{C}_{3232}) \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_2 & \bar{C}_{3131} \mathcal{D}_1^2 + \bar{C}_{3232} \mathcal{D}_2^2 + \bar{C}_{3333} \mathcal{D}_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

である。演算量の観点から、 \mathcal{D} を対角行列とすることができれば、次の行列を前処理因子 \mathbf{M} として選ぶことができる。

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_{3 \times 3}^{-1} \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F}_{3 \times 3} \quad (3.27)$$

式 (3.8) における前処理因子の逆行列 \mathbf{M}^{-1} を残差ベクトル \mathbf{r} に作用させる演算量は、式 (3.4) における剛性行列 \mathbf{K} と方向ベクトル \mathbf{p} との行列・ベクトル積の演算量に対して、次に述べるように数分の一となっていることが分かる。

1) 高速実数フーリエ変換

フーリエ空間において空間微分作用素の近似離散化行列 \mathcal{D} は、対角項のみが波数 (p, q, r) で構成される非ゼロ項となっている。波数 (p, q, r) に対する $\bar{\mathbf{D}}$ の要素は、

$$\bar{\mathbf{D}}_{(p,q,r)} = - \begin{bmatrix} \bar{C}_{1111} p^2 + \bar{C}_{1212} q^2 + \bar{C}_{1313} r^2 & (\bar{C}_{1122} + \bar{C}_{1212}) pq & (\bar{C}_{1133} + \bar{C}_{1313}) pr \\ & \bar{C}_{2121} p^2 + \bar{C}_{2222} q^2 + \bar{C}_{2323} r^2 & (\bar{C}_{2233} + \bar{C}_{2323}) qr \\ & sym. & \bar{C}_{3131} p^2 + \bar{C}_{3232} q^2 + \bar{C}_{3333} r^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

となり、 3×3 の行列である $\bar{\mathbf{D}}_{p,q,r}$ の逆行列は容易に求めることができる。なお、メゾ構造の 3 つの剛体並進変位を表す係数 $c_{0,0,0}$ は固定しておく必要がある。 N^3 の要素分割に対して、式 (3.4) と式 (3.8) の演算量の比は、 $1:1/25 * \log_2 N$ である。

2) Daubechies ウェーブレット変換

ウェーブレット級数の場合、微分行列 \mathcal{D} は疎な対角行列であり、完全な対角行列ではない。そこで、対角項のオーダーのみを用いることにする。多重解像度レベル (p, q, r) における $\bar{\mathbf{D}}$ は近似的に、

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}}_{(i,j,k)}^{(p,q,r)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{1111} 2^{2(l-p)} + \bar{C}_{1212} 2^{2(m-q)} + \bar{C}_{1313} 2^{2(n-r)} & (\bar{C}_{1122} + \bar{C}_{1212}) 2^{l-p} 2^{m-q} & (\bar{C}_{1133} + \bar{C}_{1313}) 2^{l-p} 2^{n-r} \\ & \bar{C}_{2121} 2^{2(l-p)} + \bar{C}_{2222} 2^{2(m-q)} + \bar{C}_{2323} 2^{2(n-r)} & (\bar{C}_{2233} + \bar{C}_{2323}) 2^{m-q} 2^{n-r} \\ & sym. & \bar{C}_{3131} 2^{2(l-p)} + \bar{C}_{3232} 2^{2(m-q)} + \bar{C}_{3333} 2^{2(n-r)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

となり、高速フーリエ変換の場合と同様に $\bar{\bar{\mathbf{D}}}_{(i,j,k)}^{(p,q,r)}$ の逆行列は容易に求めることができる。なお、ポアソン方程式に対してこのような前処理因子を構成して用いた場合には、Beylkin(1992)と Jaffard(1992)により、所定誤差までの反復回数は、 κ を前処理済みの剛性

行列 $M^{-1}K$ の条件数として、要素分割数に無関係なある一定値で押さえられることが証明されている。 N^3 の要素分割に対して、式 (3.4) と式 (3.8) の演算量の比は、 $1:1/8*DN$ である。

3.3.3 並列計算

デジタル画像に基づく有限要素解析ではメソ構造の要素分割が直交格子になることから、並列計算は比較的容易である。しかし、3.2節において示した前処理付き共役勾配法のアルゴリズムにおいて、式 (3.8) のスペクトル変換に要するプロセッサ間の all to all の通信が最も問題となる。したがって、この通信を最小化するために、プロセッサ数が一次元当たりの要素分割数よりも少ない場合には、ある一次元方向についてのみ領域分割を行うことが適していると考えられる。さらに三次元解析を行う場合には、ある一次元方向にのみ領域分割することで、三次元スペクトル変換の演算と通信を重複して行うことが可能になり (渡邊・清水 1997) 非同期通信を行うことで見かけ上通信を隠蔽できる。

3.4 数値実験による収束性の比較

高速実数フーリエ変換と Daubechies ウェーブレット変換(WT)を用いた前処理付き共役勾配法の所定誤差までの反復回数を比較する。

3.4.1 平面ひずみ問題による比較

メゾ構造の有限要素モデルとして、図 3.2 に示す正方形領域の二次元デジタル画像を用いる。粗骨材とモルタルの材料定数は表 2.2 の値を用いた。収束判定は、外力 f に対して残差力 r の L2 ノルム比が 10^{-6} 以下に達したときとする。Daubechies ウェーブレットは、消失モーメント次数 $DN=2, 3, 5$ のものを用いる。

図 3.3 に要素分割数と第一の特性関数の求解に要した反復回数との関係を示す。なお、2 種類のスペクトル変換を用いた前処理との比較のため、まったく前処理を施していないものと対角スケーリングのみの前処理を施したものを合わせて示す。図中の FFT は高速実数フーリエ変換、DN は Daubechies ウェーブレット族であることを表す。また、「diag.」は、微分行列 \bar{D} と $\overline{\bar{D}}$ の非対角要素の反復回数への寄与は少ないと考えて、前処理因子として対角要素のみ用いたことを表す。対角項のみを用いた前処理因子を追加した主な理由は、この場合には各次元方向の変位成分を独立して処理できるということによる。

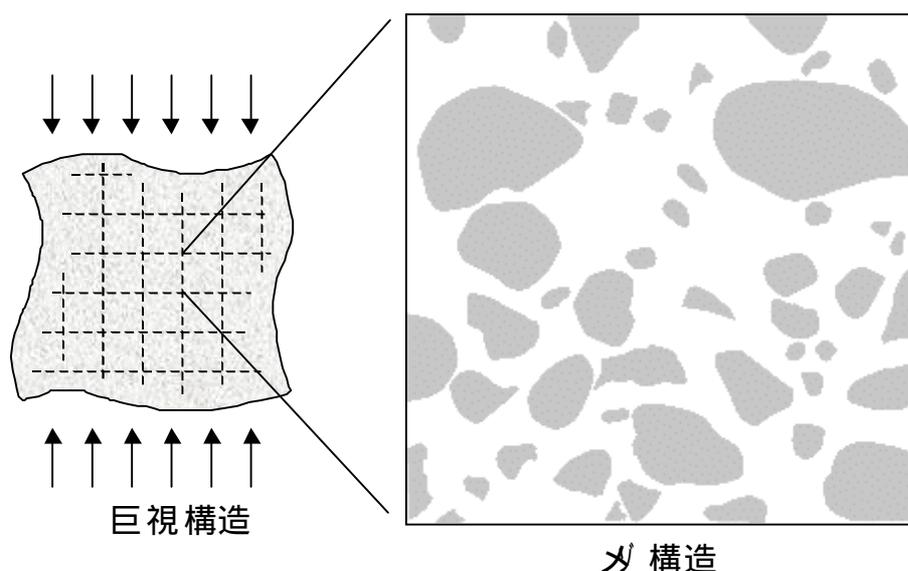


図 3.2 平面ひずみ問題の解析モデル

図 3.3より、2 種類のスペクトル変換を用いた前処理因子ともに、前処理なしのものと同角スケーリングのものに比べて、非常に少ない反復回数で収束することが分かる。また、スペクトル変換を用いた前処理因子では、要素分割数に殆ど依存しない反復回数となっている。特に、高速実数フーリエ変換を用いた前処理因子が最も少ない反復回数で、最も要素分割数に依存することなく収束している。高速実数フーリエ変換においては、非対角項の反復回数への寄与は殆どない。一方で、ウェーブレット変換の場合は、いずれの消失モーメント次数 DN のものについても対角項のみを用いる方が、若干反復回数が少なくなっている。ウェーブレット変換は消失モーメント次数 DN が大きくなるほど反復回数が減少するが、それに伴い演算量が増えるので、ある適した消失次数が存在すると考える。

3.4.2 三次元問題の線形計算例

対角項のみによる三次元高速実数フーリエ変換を前処理に選び、剛性行列を記憶しない element by element 法にて線形計算を行った。計算機の記憶容量の制約からメゾ構造の要素分割数を 320^3 (1 億自由度) とした。図 3.4 上段にメゾ構造の三次元デジタル画像と、その中に含まれる粗骨材を示す。粗骨材とモルタルの材料定数は表 2.2 の値を用いた。引張を正として、巨視構造に 10MPa の圧縮応力を作用させたときの最小・最大主応力分布を図 3.4 下段に示す。計算は、東京工業大学情報処理センターに設置されている DEC 社製 Alpha Server 8400 (21164A 437MHz 12CPU, 8GB memory) を 12CPU 並列で行った。12CPU で 6 個の特性関数全ての求解に要した実計算時間は約 5 時間であり、反復回数は平均で 48 回であった。式 (3.4) と式 (3.8) の計算速度は、それぞれ 1.6Gflops (flops: 毎秒当たりの浮動小数点演算回数) と 0.45Gflops であった。式 (3.8) の計算速度が遅い主な理由として、指示子挿入型の HPF(High Performance Fortran)言語を用いたために、スペクトル変換部分の all to all の通信が言語仕様上隠蔽できなかったことが挙げられる。

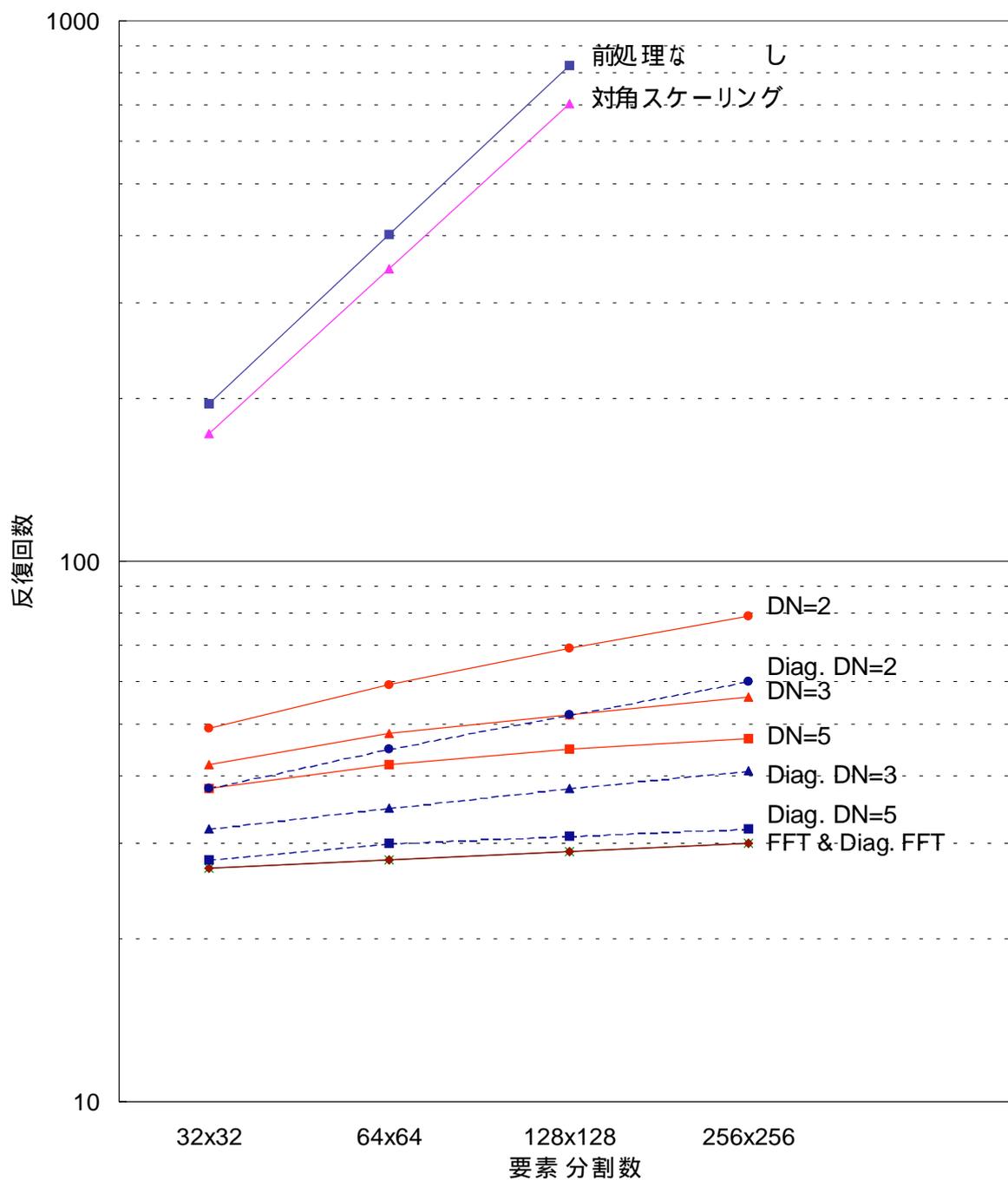


図 3.3 要素分割数と前処理付き共役勾配法の反復回数の関係

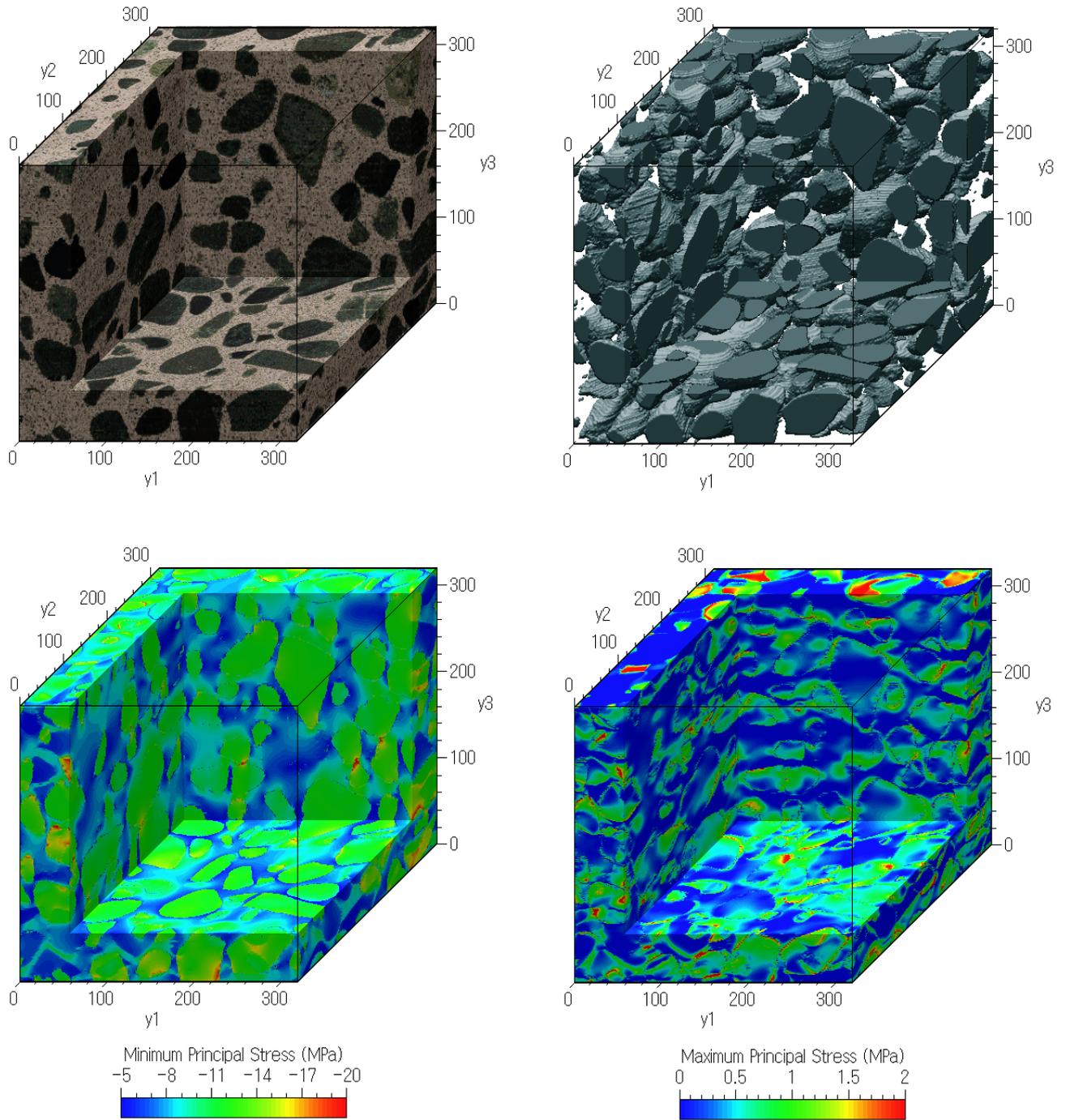


図 3.4 320^3 要素分割モデルの線形解析

3.5 まとめ

コンクリート材料のメゾ構造としてデジタル画像に基づく有限要素モデルを用いる場合、大規模な連立一次方程式の求解が問題となる。本章では、この問題に対して、前処理付きの共役勾配法を、方程式とデジタル画像に基づく有限要素分割の特徴を利用した前処理因子を構成し用いる手法を示した。つまり、剛性行列の近似的な逆行列を高速に求めることのできる前処理因子を、均質化法の周期領域条件と直交格子上で離散化されることを利用して、スペクトル変換を用いることにより構成した。

数値実験により、本論文が対象としている問題に対しては、前処理因子中のスペクトル変換としては高速実数フーリエ変換が最も適していると考えられる。しかしながら、超並列計算においては、並列化の自由度が大きいウェーブレット変換やフィルタバンク、さらにはマルチグリッド法がより適している可能性がある。また、本章では領域中で平均した材料定数を用いて前処理因子を構成しているため、メゾ構造内部の各材料定数のオーダーが大きく異なる場合には収束性が悪化することが予想できる。このような場合にも、空間方向に対しても分解能のあるウェーブレット変換やマルチグリッド法が適している可能性がある。いずれにせよ、問題の特性に応じて前処理因子を構成することが重要である。

第 4 章 粗骨材 - モルタル界面の高精度 モデル化有限要素

4.1 はじめに

普通コンクリートの場合、粗骨材 - モルタル界面には、疎な結晶構造をもつ薄層の遷移帯が存在していることが知られている。これが脆弱であることから、特に粗骨材 - モルタルの付着が問題となり、コンクリート材料の非線形な力学挙動を支配する主要因のひとつであると考えられている(森野 1992, 和泉ら 1980)。また、断面の観察ではあるが、ひび割れの総延長を指標としたときに、粗骨材 - モルタル界面の引張破壊は非線形挙動の初期段階ばかりでなく、圧縮強度に至るまでモルタル内部の引張破壊より先行し続けることを、Shah and Chandra (1968)が報告している。したがって、コンクリート材料の局所的な引張破壊を考慮する場合には、粗骨材 - モルタル界面の引張破壊挙動を評価することは重要であると考えられる。細骨材 - セメントペースト界面の引張破壊については、粗骨材に比べて細骨材は小さいために寸法効果が期待できて相対的に強度が増すことから、評価する必要はないと考える。これは、同一水セメント比のコンクリート材料において、粗骨材の最大径が大きいほど圧縮強度が低下するという Cordon and Gillespie(1963)と川上(1969)による実験的事実に対応している。

このような現象の考察から、コンクリート材料を粗骨材とモルタルの 2 相複合材料と仮定した研究の多くは、有限要素法を用いたアプローチを行う場合には、粗骨材 - モルタル界面の引張破壊を Goodman の接合要素などの離散ひび割れモデル(例えば、梶川ら 1985) や、薄い有限要素層を設けて仮想ひび割れ帯とする分散ひび割れモデル(例えば、Saito and Kawamura 1986, 椿 1995, Mark 1998)によって評価している。一方で、第 2 章において提案したデジタル画像に基づく三次元有限要素解析手法は、線形問題に対するものであるため、本解析手法を非線形問題に適用するためには粗骨材 - モルタル界面を考慮する必要がある。しかしながら、本解析手法では固定格子により要素分割を行うことから、任意形状の物体は境界において必ず階段状に離散近似された幾何学形状となり、任意の位置で任意の方向を向いた界面を精度良くモデル化することは困難となる。そこで本章では、三次元非線形有限要素解析への適用を目的として、粗骨材 - モルタル界面を精度良くモデル化することができる混合型の有限要素を提案する。

4.2 粗骨材 - モルタル界面のモデル化方法の検討

第2章において示したデジタル画像に基づく有限要素解析手法は、デジタル画像処理により粗骨材部分を on として残りのモルタル部分を off とした2値化画像について、1画素をそのまま1有限要素とみなすことにより均一な直交固定格子上でまったく同一形状な要素に分割し、有限要素解析を行うものである。したがって、通常すべての要素形状は二次元の場合には4節点正方形、三次元の場合には8節点立方体となる。このことから明らかのようにこの解析手法は、粗骨材 - モルタル界面の良好な近似を犠牲にする代わりに、従来手法では有限要素分割が極めて困難であった複雑な三次元幾何学構造を有する対象物に対しても、対象物の適切なデジタル画像を得ることさえできれば、一律かつ容易に要素分割を行うことができるという長所を持っている。また、第3章に示したように、直交固定格子を用いることから、連立一次方程式の求解に高効率な前処理を施した反復解法が適用可能であること、プログラムの並列計算機への実装が比較的容易であることなど、多くの数値解析上の長所を持っている。

このような長所を持つデジタル画像に基づく有限要素解析手法を三次元非線形問題へ適用することを目的として、粗骨材 - モルタル界面のひび割れをモデル化することを考える。まず離散ひび割れモデルは、重複節点を用いることから要素分割の位相の変更が不可避となるために、本解析手法には適さないと考えられる。次に分散ひび割れモデルを用いることを考える。ここで、仮想ひび割れ帯の幅 h と有限要素の代表長さ L の大小

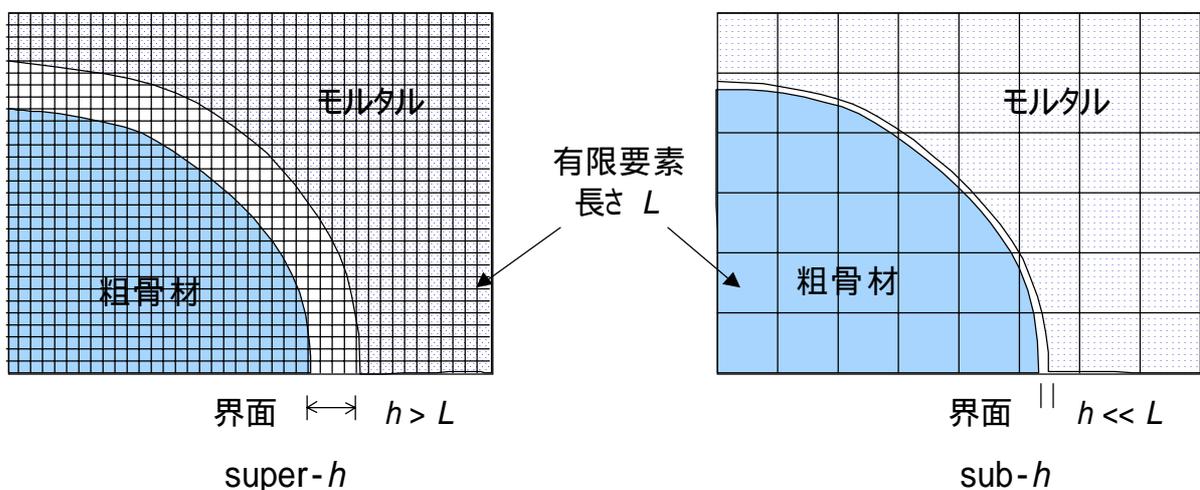


図 4.1 界面のモデル化方法

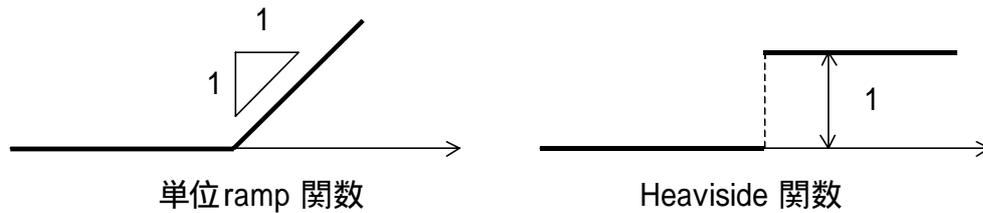


図 4.2 非適合モード関数

関係に着目した Belytschko et al.. (1988)の分類法を用いて説明する。彼らは、に示すように $h > L$, $h \approx L$, $h < L$ の場合を、それぞれ *super-h*, *iso-h*, *sub-h* と呼んでいる。最も簡単なモデル化方法は、1要素幅で界面ひび割れを表現する *iso-h* である。しかしながら、Rots(1988)により *iso-h* では要素分割方向への依存性や、変位の適合条件による変形のロッキングが指摘されていることから、これを用いることは好ましくない。また、いくつかの要素幅で界面ひび割れを表現する *super-h* は、非局所理論を用いて取り扱うことができるが、もともと非常に多くの自由度を持った本解析手法がますます大規模になるので実用的でない。

一方で、*sub-h* に属する要素として、1980年代の終わりから軟化材料のひずみや変形の局所化による不連続性を高精度に扱うために、不連続要素と呼ばれる混合要素が数多く提案(例えば、Belytschko et al.. 1988, Oliver 1996, 呉 1998, Garikipati and Hughes 1999)されており、その多くを Jirásek(1998)が一覧にしている。これらは、図 4.2 に示すように、非適合変形モードとして単位 ramp 関数を付加、もしくは仮想ひび割れ帯の幅 h を $h \rightarrow 0$ の意味において正規化あるいは $h=0$ として Heaviside 関数を付加したものである。これらの要素は、要素サイズと要素分割方向に対する依存性はほとんどないことが示されている。

これらの要素は、要素内部で不連続面の位置を問わないことから本解析に応用すれば、粗骨材 - モルタルの幾何学構造を直交固定格子の要素分割に一切依存せずに、要素内部に定義できると考える。本論文では、このように要素内部で粗骨材・モルタル・粗骨材 - モルタル界面を高精度にモデル化することができる有限要素を、**界面要素**と呼ぶことにする。

4.3 粗骨材 - モルタル界面を含む有限要素の混合型弱定式化

本節で示す不連続性を考慮した有限要素の混合型弱定式化の手続きは、従来の不連続要素に対するものと同様であるが、意図している応用という点において従来とは異なったものである。すなわち、これらの研究において付加される不連続な非適合モードはほとんど1種類であり、いずれにしる単純形状の均質材料中のひずみや変形の局所化を扱うことを目的としていた。一方で本論文では、ひび割れを扱うためだけではなく三次元解析領域の幾何学形状と有限要素分割とを分離して、高度に複雑な幾何学形状の問題に適用することを目的としている。

本論文では、界面要素の弱定式化は、Simo and Rifai (1990) のひずみ補正型混合法に基づく Oliver (1996) の弱定式化手続きに従う。Simo and Rifai (1990) のひずみ補正型混合法は、変位、ひずみ、応力の3変数場を独立とする変分原理から、応力に関して条件を課すことによりこれを消去して導かれるものである。Oliver (1996) の弱定式化は、仮想ひび割れ帯の幅 $h \rightarrow 0$ の意味において取り扱うものであり、本論文で扱う微小な幅をもつ界面に適合した定式化であると考えられる。

界面要素には、非適合モードとして同一要素中で粗骨材とモルタルを表現するために単位 ramp 関数を、粗骨材 - モルタル界面のひび割れを表現するために Heaviside 関数を付加する。この意味において、Garikipati and Hughes (1999) が提案している、有限要素レベルで表現できない現象を非適合変形モードとして単位 ramp 関数と Heaviside 関数を考慮してサブスケールで扱うという視点に類似している。以下に示す混合型弱定式化は二次元・三次元を問わずまったく同一であるので、本節では二次元の場合を考える。

4.3.1 変位関数の構成

今、簡単のために界面に幅が存在しないものとして考える。図 4.3 に示すように、粗骨材とモルタルの領域を、それぞれ Ω^- と Ω^+ で表す。この粗骨材 - モルタル界面を、十分に滑らかであると仮定して S で表し、粗骨材領域 Ω^- からモルタル領域 Ω^+ 方向への単位法線ベクトル n で定義する。解析領域 $\Omega^- \cup \Omega^+$ に直交固定格子による有限要素分割を重ね合わせたとき、界面 S を含む有限要素つまり界面要素の集合を Ω_b で表す。 Ω_b は、界面 S を境として粗骨材領域 Ω^- とモルタル領域 Ω^+ に分割するものとする。

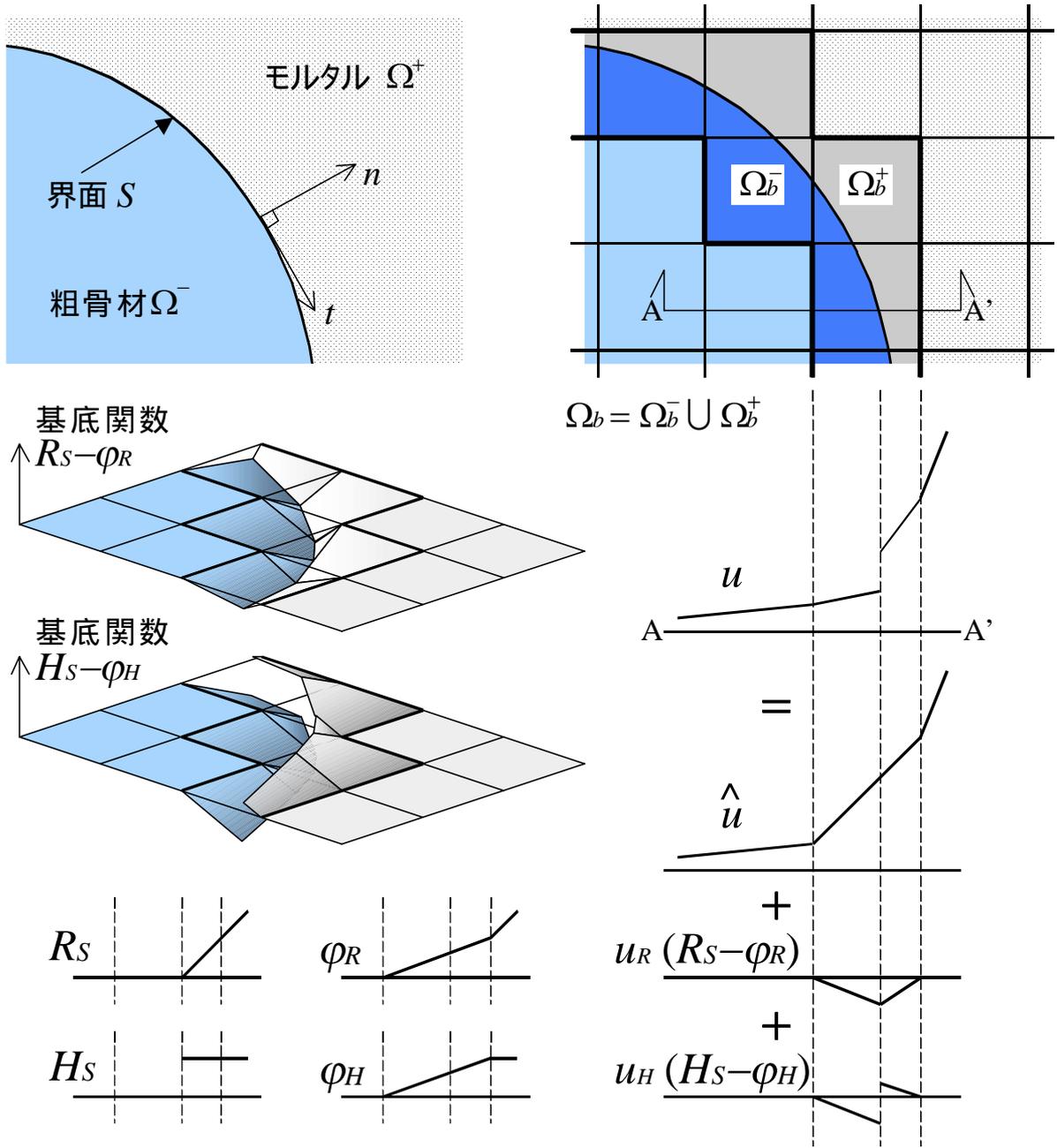


図 4.3 領域の定義と変位場の構成 (二次元)

今、解析対象領域 $\Omega^- \cup \Omega^+$ の変位場を

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + R_S \mathbf{u}_R + H_S \mathbf{u}_H \quad (4.1)$$

と構成する。ここに、 $\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_H$ はいずれも滑らかな関数であり、 R_S, H_S は、

$$R_S = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^- \\ f & x \in S, \partial f / \partial n = 1 \\ 0 & x \in \Omega_b^+ \text{近傍} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$H_S = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^- \\ 1 & x \in \Omega^+ \end{cases} \quad (4.3)$$

それぞれ多次元の単位 ramp 関数と Heaviside 関数である。 \bar{u}, u_R, u_H は、それぞれ物理的に、全領域を Ω^- の粗骨材のみで構成した場合の変位、 Ω^+ にモルタルが存在することによる変位の勾配差、界面 S における変位差を表している。

一方、もうひとつの変位関数

$$\hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} + \varphi_R \mathbf{u}_R + \varphi_H \mathbf{u}_H \quad (4.4)$$

を考える。ここに、 φ_R, φ_H はともに滑らかな関数であり、それぞれ界面要素集合 Ω_b を除いた領域では R_S, H_S に一致している。すなわち、

$$\varphi_R = \begin{cases} \text{任意} & x \in \Omega_b \\ R_S & x \in \setminus \Omega_b \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\varphi_H = \begin{cases} \text{任意} & x \in \Omega_b \\ H_S & x \in \setminus \Omega_b \end{cases} \quad (4.6)$$

である。

式 (4.4) を用いて、式 (4.1) から \bar{u} を消去すると、変位場は

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + (R_S - \varphi_R) \mathbf{u}_R + (H_S - \varphi_H) \mathbf{u}_H \quad (4.7)$$

と表現できる。図 4.3 に示すように、 $R_S - \varphi_R, H_S - \varphi_H$ は、それぞれ粗骨材とモルタルの変位を表現する基底関数、ひび割れを表現する基底関数であり、両者とも界面要素中でのみ非ゼロとなっている。関数 $\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_H$ はそれらの係数であると解釈できる。

よって、式 (4.7) から、ひずみ場は、

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} \equiv (\nabla \mathbf{u})^s &= (\nabla \hat{\mathbf{u}})^s + (R_S - \varphi_R)(\nabla \mathbf{u}_R)^s + (H_S - \varphi_H)(\nabla \mathbf{u}_H)^s \\
 &+ \left\{ H_S (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}_R)^s - (\nabla \varphi_R \otimes \mathbf{u}_R)^s \right\} \\
 &+ \left\{ \delta_S (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}_H)^s - (\nabla \varphi_H \otimes \mathbf{u}_H)^s \right\}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる。ここに、 ∇ はベクトル微分演算子、 δ_S は Dirac のデルタ関数であり、 $(\cdot)^s$ は (\cdot) の対称成分であることを表す。

4.3.2 ひずみ補正型混合法による弱定式化

ひずみ補正型混合法では、ひずみを

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_c}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{enhanced}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_c = \nabla^s \mathbf{u}_c \tag{4.9}$$

として、適合変位 \mathbf{u}_c によるひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ に、初期ひずみと解釈できる補正項 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ を付加して考える。但し、補正項 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ に含まれる各成分はそれぞれ独立でなければならない (Simo and Rifai 1990)。式 (4.7) において、 $\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_H$ を要素毎に区分定数関数で近似すると、

$$\mathbf{u}_c = \hat{\mathbf{u}} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left\{ H_S (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}_R)^s - (\nabla \varphi_R \otimes \mathbf{u}_R)^s \right\} \\
 &+ \left\{ \delta_S (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}_H)^s - (\nabla \varphi_H \otimes \mathbf{u}_H)^s \right\}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

と置くことができる。 $x \in \setminus \Omega_b$ において $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$ であることは明らかであり、通常の有限要素による近似となるので、以後の弱定式化では界面要素のみに注目する。

仮想仕事の原理から、

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_c^* : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = W_{ext}(\mathbf{u}_c^*) \tag{4.12}$$

ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon}_c^* (= (\nabla \mathbf{u}_c^*)^s)$ は重み関数、 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ は式 (4.9) のひずみから求まる応力であり、右辺の W_{ext} は外力に関する項である。以後、行列・ベクトル表現で述べる。

離散近似のために、要素寸法に比べて十分に微小な幅 k_e の界面が界面要素領域 Ω_{be} 毎に 1 本のみ含まれると仮定し、これを S_{be} で表す。ここに、下添字 e は界面要素の番号を表す。さらに、図 4.4 のように、この界面 S_{be} を中心線 S_e で分割し、それぞれ S_{be}^-, S_{be}^+ で表す。但し、 $\Omega_{be}^- \cap S_{be}^- = \emptyset, \Omega_{be}^+ \cap S_{be}^+ = \emptyset$ とする。このとき、 H_S, δ_S を要素毎に次式で近似する。

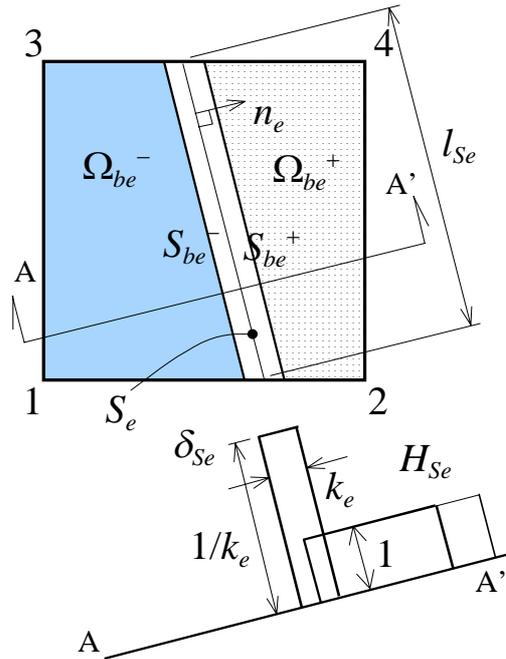


図 4.4 界面要素内での界面の定義とひずみ関数（二次元）

$$H_{Se} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega_{be}^- \cup S_{be}^- \\ 1 & x \in \Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+ \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\delta_{Se} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega_{be}^- \cup \Omega_{be}^+ \\ 1/k_e & x \in S_{be} \end{cases} \quad (4.14)$$

ここに、式 (4.13) は領域 $\Omega_{be}^- \cup S_{be}^-$, $\Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+$ に関する対称性を考慮したものであり、式 (4.14) は $\delta_{Se} k_e = 1$, $0 < k_e \ll 1$ の意味において離散近似している。

滑らかな任意関数である式 (4.5), (4.6) を、それぞれ界面要素領域 Ω_{be} で

$$\varphi_{Re} = \sum_{i=1}^{nodes} N_i R_{Se}|_i \quad (4.15)$$

$$\varphi_{He} = \sum_{i=1}^{nodes} N_i H_{Se}|_i \quad (4.16)$$

と構成する。ここに、 N_i は双一次多項式の基底関数である。 $R_{Se}|_i$, $H_{Se}|_i$ は、それぞれ要素節点 i における R_{Se} , H_{Se} の値であり既値である。

有限要素内における変位ベクトルとひずみベクトルの補間関数としては、

$$\mathbf{u}_{ce}^* = \mathbf{N}_e \mathbf{a}_e^*, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ce}^* = \mathbf{B}_e \mathbf{a}_e^* \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u}_{ce} = \mathbf{N}_e \mathbf{a}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ce} = \mathbf{B}_e \mathbf{a}_e \quad (4.18)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \mathbf{G}_{Re} \mathbf{u}_{Re} + \mathbf{G}_{He} \mathbf{u}_{He} \quad (4.19)$$

を用いる。ここに、 \mathbf{N}_e , \mathbf{B}_e は、それぞれ通常の四辺形要素に対する双一次多項式の形状関数行列、ひずみ変換行列である。また、 $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ を 2×2 の単位行列として、

$$\mathbf{G}_{Re} = H_{Se} \mathbf{N}_e - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\phi}_{Re} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{G}_{He} = \delta_{Se} \mathbf{N}_e - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\phi}_{He} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{N}_e^T = \begin{bmatrix} n_{ex} & 0 & n_{ey} \\ 0 & n_{ey} & n_{ex} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{Re}^T = \left[R_{Se} \Big|_{i=1} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad R_{Se} \Big|_{i=2} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad R_{Se} \Big|_{i=3} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad R_{Se} \Big|_{i=4} \mathbf{I}_{2 \times 2} \right] \quad (4.23)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{He}^T = \left[H_{Se} \Big|_{i=1} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad H_{Se} \Big|_{i=2} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad H_{Se} \Big|_{i=3} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad H_{Se} \Big|_{i=4} \mathbf{I}_{2 \times 2} \right] \quad (4.24)$$

である。

一方で、次の制約条件を課す。

$$\int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{Re}^{*T} \boldsymbol{\sigma}_e d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

$$\int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{He}^{*T} \boldsymbol{\sigma}_e d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}_e$ は式 (4.12) と同様、式 (4.9) のひずみから求まる応力である。また、

$$\mathbf{G}_{Re}^* = \left(H_{Se} - \left| \Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+ \right| / \left| \Omega_{be} \right| \right) \mathbf{N}_e \quad (4.27)$$

$$\mathbf{G}_{He}^* = \left(\delta_{Se} - l_{Se} / \left| \Omega_{be} \right| \right) \mathbf{N}_e \quad (4.28)$$

であり、 $|\cdot|$ は領域の面積を表し、 l_{Se} は要素内での界面の長さである。

制約条件式 (4.25), (4.26) に、それぞれ式 (4.27), (4.28) を代入し、整理すると、

$$\frac{1}{\left| \Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+ \right|} \int_{\Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e d\Omega = \frac{1}{\left| \Omega_{be}^- \cup S_{be}^- \right|} \int_{\Omega_{be}^- \cup S_{be}^-} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e d\Omega \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{l_{Se}} \int_{S_e} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e dS = \frac{1}{\left| \Omega_{be} \right|} \int_{\Omega_{be} \setminus S_{be}} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e d\Omega \quad (4.30)$$

が得られる。ここに、 f を十分に滑らかな関数として

$$\int_{\Omega_{be}} f \delta_{Se} d\Omega = \int_{S_e} f dS \quad (4.31)$$

なる関係を用いた。式(4.29), (4.30) は、界面における表面力の連続条件を平均的に満足することを示している。したがって、制約条件式 (4.25), (4.26) は表面力の連続条件式に他ならないことが分かる。また、式 (4.27), (4.28) は、

$$\int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{Re}^* d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

$$\int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{He}^* d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

を満たしているので、本有限要素近似は、制約条件式(4.25), (4.26) から一定応力場を表現できることが分かりパッチテストを満足する。

よって、式 (4.12) と制約条件式 (4.25), (4.26) から、界面要素の要素剛性方程式は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e11} & \mathbf{K}_{e1R} & \mathbf{K}_{e1H} \\ \mathbf{K}_{eR1} & \mathbf{K}_{eRR} & \mathbf{K}_{eRH} \\ \mathbf{K}_{eH1} & \mathbf{K}_{eHR} & \mathbf{K}_{eHH} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_e \\ \mathbf{u}_{Re} \\ \mathbf{u}_{He} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{e11} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{B}_e d\Omega & \mathbf{K}_{e1R} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{G}_{Re} d\Omega & \mathbf{K}_{e1H} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{G}_{He} d\Omega \\ \mathbf{K}_{eR1} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{Re}^{*T} \mathbf{C}_e \mathbf{B}_e d\Omega & \mathbf{K}_{eRR} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{Re}^{*T} \mathbf{C}_e \mathbf{G}_{Re} d\Omega & \mathbf{K}_{eRH} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{Re}^{*T} \mathbf{C}_e \mathbf{G}_{He} d\Omega \\ \mathbf{K}_{eH1} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{He}^{*T} \mathbf{C}_e \mathbf{B}_e d\Omega & \mathbf{K}_{eHR} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{He}^{*T} \mathbf{C}_e \mathbf{G}_{Re} d\Omega & \mathbf{K}_{eHH} &= \int_{\Omega_{be}} \mathbf{G}_{He}^{*T} \mathbf{C}_e \mathbf{G}_{He} d\Omega \end{aligned} \quad (4.35)$$

となる。ここに、 \mathbf{C}_e は要素 e の材料定数行列であり、 \mathbf{C}_e^- , \mathbf{C}_{Se} , \mathbf{C}_e^+ をそれぞれ定数変数とした階段関数

$$\mathbf{C}_e = \begin{cases} \mathbf{C}_e^- & x \in \Omega_{be}^- \\ \mathbf{C}_{Se} & x \in S_{be} \\ \mathbf{C}_e^+ & x \in \Omega_{be}^+ \end{cases} \quad (4.36)$$

である。なお、式 (4.34) の要素剛性行列は非対称であるが、界面 S_e が要素辺に平行あるいは垂直の場合に限り $\mathbf{G}_{Re} = \mathbf{G}_{Re}^*$, $\mathbf{G}_{He} = \mathbf{G}_{He}^*$ となるので、対称となる。界面要素は、その要素剛性行列を要素毎に独立な非適合変位 \mathbf{u}_{Re} , \mathbf{u}_{He} を静的縮約により消去することで、通常の変位法に組み込むことができる。

ところで、この界面要素を第 2.3 節で定義した均質化法のメゾ構造に対して用いる場合には、本節で定義した変位関数 \mathbf{u} を特性関数 χ^{mn} と読み替える。但し、この場合、制約条件式 (4.25), (4.26) には、メゾ構造におけるひずみの評価式 (2.9) から求まる応力を

用いる必要がある。つまり、式 (4.9) だけではなく、これにひずみに巨視ひずみ $e^x(\mathbf{u}^0)$ を加えて求まる応力を用いる。この制約条件と式 (2.4) を合わせると、最終的に要素剛性方程式は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e11} & \mathbf{K}_{e1R} & \mathbf{K}_{e1H} \\ \mathbf{K}_{eR1} & \mathbf{K}_{eRR} & \mathbf{K}_{eRH} \\ \mathbf{K}_{eH1} & \mathbf{K}_{eHR} & \mathbf{K}_{eHH} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\chi}_e^{mn} \\ \boldsymbol{\chi}_{Re}^{mn} \\ \boldsymbol{\chi}_{He}^{mn} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e11} \\ \mathbf{K}_{eR1} \\ \mathbf{K}_{eH1} \end{bmatrix} \mathbf{p}_e^{mn} \quad (4.37)$$

となる。ここに、 \mathbf{p}^{mn} はモード mn の特性関数ベクトル $\boldsymbol{\chi}^{mn}$ に対する強制変位ベクトルである。

4.4 要素剛性の評価法

4.4.1 要素剛性の展開

次の第 5 章で示すように、最終的にはデジタル画像処理により界面の位置を推定した結果を用いて要素剛性の積分を評価することになる。したがって、冗長性のあるデータを用いることでより良い近似解を得ることができるように、式 (4.2), (4.3) に関して次式を再定義する。

$$R_{Se}^+ = R_{Se} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega_{be}^- \cup S_{be}^- \\ f : \partial f / \partial n = 1 & x \in \Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+ \end{cases} \quad R_{Se}^- = \begin{cases} f : \partial f / \partial n = -1 & x \in \Omega_{be}^- \cup S_{be}^- \\ 0 & x \in \Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+ \end{cases} \quad (4.38)$$

$$H_{Se}^+ = H_{Se} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega_{be}^- \cup S_{be}^- \\ 1 & x \in \Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+ \end{cases} \quad H_{Se}^- = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_{be}^- \cup S_{be}^- \\ 0 & x \in \Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+ \end{cases} \quad (4.39)$$

さらに、式 (4.23), (4.24) に対して、関数 $R_{Se}^+, R_{Se}^-, H_{Se}^+, H_{Se}^-$ の界面要素の節点 i における値 $R_{Se|_i}^+, R_{Se|_i}^-, H_{Se|_i}^+, H_{Se|_i}^-$ を用いて、

$$\boldsymbol{\Phi}_{Re}^{+T} = \boldsymbol{\Phi}_{Re}^T = \left[R_{Se|_{i=1}}^+ \mathbf{I}_{2 \times 2} \cdots R_{Se|_{i=4}}^+ \mathbf{I}_{2 \times 2} \right] \quad \boldsymbol{\Phi}_{Re}^{-T} = \left[R_{Se|_{i=1}}^- \mathbf{I}_{2 \times 2} \cdots R_{Se|_{i=4}}^- \mathbf{I}_{2 \times 2} \right] \quad (4.40)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{He}^{+T} = \boldsymbol{\Phi}_{He}^T = \left[H_{Se|_{i=1}}^+ \mathbf{I}_{2 \times 2} \cdots H_{Se|_{i=4}}^+ \mathbf{I}_{2 \times 2} \right] \quad \boldsymbol{\Phi}_{He}^{-T} = \left[H_{Se|_{i=1}}^- \mathbf{I}_{2 \times 2} \cdots H_{Se|_{i=4}}^- \mathbf{I}_{2 \times 2} \right] \quad (4.41)$$

を再定義する。このとき、式 (4.21), (4.20) の冗長表現を得る。

$$\mathbf{G}_{Re} = H_{Se}^+ \mathbf{N}_e - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\Phi}_{Re}^+ = -H_{Se}^- \mathbf{N}_e - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\Phi}_{Re}^- \quad (4.42)$$

$$\mathbf{G}_{He} = \delta_{Se} \mathbf{N}_e - \mathbf{B}_e \boldsymbol{\Phi}_{He}^+ = \delta_{Se} \mathbf{N}_e + \mathbf{B}_e \boldsymbol{\Phi}_{He}^- \quad (4.43)$$

これらを、それぞれ混合比 p^+, p^-, q^+, q^- にて混合すると、式 (4.21), (4.20) は

$$\mathbf{G}_{Re} = \frac{1}{p^+ + p^-} \left\{ (p^+ H_{Se}^+ - p^- H_{Se}^-) \mathbf{N}_e - \mathbf{B}_e \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{Re} \right\} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{G}_{He} = \delta_{Se} \mathbf{N}_e - \mathbf{B}_e \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{He} \quad (4.45)$$

と表現できる。ここに、

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{Re} = \frac{p^+ \boldsymbol{\Phi}_{Re}^+ + p^- \boldsymbol{\Phi}_{Re}^-}{p^+ + p^-} \quad (4.46)$$

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{He} = \frac{q^+ \boldsymbol{\Phi}_{He}^+ - q^- \boldsymbol{\Phi}_{He}^-}{q^+ + q^-} \quad (4.47)$$

である。これは、単に一般化された単位 ramp 関数と Heaviside 関数を用いた場合を考え

ているに過ぎない。

今、便宜的に界面を要素内で直線近似することにして、式 (4.36), (4.44), (4.45) を要素剛性の式 (4.35) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{e11} &= \int_{\Omega_{be}^+} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e^+ \mathbf{B}_e d\Omega + \int_{\Omega_{be}^-} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e^- \mathbf{B}_e d\Omega + \int_{S_{be}} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_{Se} \mathbf{B}_e d\Omega \\
 \mathbf{K}_{eR1} &= \frac{|\Omega_{be}^- \cup S_{be}^-|}{|\Omega_{be}|} \left\{ \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_e^+ \int_{\Omega_{be}^+} \mathbf{B}_e d\Omega + \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \int_{S_{be}^+} \mathbf{B}_e d\Omega \right\} \\
 &\quad - \frac{|\Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+|}{|\Omega_{be}|} \left\{ \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_e^- \int_{\Omega_{be}^-} \mathbf{B}_e d\Omega + \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \int_{S_{be}^-} \mathbf{B}_e d\Omega \right\} \\
 \mathbf{K}_{eH1} &= -\frac{A_{Se}}{|\Omega_{be}|} \left\{ \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_e^+ \int_{\Omega_{be}^+} \mathbf{B}_e d\Omega + \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_e^- \int_{\Omega_{be}^-} \mathbf{B}_e d\Omega + \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \int_{S_{be}} \mathbf{B}_e d\Omega \right\} + \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \int_{S_e} \mathbf{B}_e dS \\
 \mathbf{K}_{e1R} &= \frac{1}{p^+ + p^-} \left[p^+ \left\{ \int_{\Omega_{be}^+} \mathbf{B}_e^T d\Omega \mathbf{C}_e^+ \mathfrak{N}_e + \int_{S_{be}^+} \mathbf{B}_e^T d\Omega \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e \right\} \right. \\
 &\quad \left. - p^- \left\{ \int_{\Omega_{be}^-} \mathbf{B}_e^T d\Omega \mathbf{C}_e^- \mathfrak{N}_e + \int_{S_{be}^-} \mathbf{B}_e^T d\Omega \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e \right\} \right] - \mathbf{K}_{e11} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{Re} \\
 \mathbf{K}_{eRR} &= \frac{1}{p^+ + p^-} \left[p^+ \frac{|\Omega_{be}^- \cup S_{be}^-|}{|\Omega_{be}|} \left\{ |\Omega_{be}^+| \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_e^+ \mathfrak{N}_e + |S_{be}^+| \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e \right\} \right. \\
 &\quad \left. + p^- \frac{|\Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+|}{|\Omega_{be}|} \left\{ |\Omega_{be}^-| \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_e^- \mathfrak{N}_e + |S_{be}^-| \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e \right\} \right] - \mathbf{K}_{eR1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{Re} \\
 \mathbf{K}_{eHR} &= \frac{1}{p^+ + p^-} \left\langle A_{Se} \left[\frac{p^+ - p^-}{2} \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e - p^+ \frac{1}{|\Omega_{be}|} \left\{ |\Omega_{be}^+| \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_e^+ \mathfrak{N}_e + |S_{be}^+| \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + p^- \frac{1}{|\Omega_{be}|} \left\{ |\Omega_{be}^-| \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_e^- \mathfrak{N}_e + |S_{be}^-| \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e \right\} \right] \right\rangle - \mathbf{K}_{eH1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{Re} \\
 \mathbf{K}_{e1H} &= \int_{S_e} \mathbf{B}_e^T dS \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e - \mathbf{K}_{e11} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{He} \\
 \mathbf{K}_{eRH} &= \frac{1}{2} A_{Se} \frac{|\Omega_{be}^- \cup S_{be}^-| - |\Omega_{be}^+ \cup S_{be}^+|}{|\Omega_{be}|} \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e - \mathbf{K}_{eR1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{He} \\
 \mathbf{K}_{eHH} &= A_{Se} \left(\frac{1}{k_e} - \frac{A_{Se}}{|\Omega_{be}|} \right) \mathfrak{N}_e^T \mathbf{C}_{Se} \mathfrak{N}_e - \mathbf{K}_{eH1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{He}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

ところで、実際の粗骨材 - モルタル界面の幅は要素寸法に比べて十分に微小であるので、式 (4.48) の積分において $k_e \rightarrow 0$ としても良い近似解を得ることができる。このとき、界面 S_{be} 内部における応力 - ひずみの構成則については、積分的に考えて内部の応力 σ を、等価的な材料定数 \mathbf{C}_{Se}^k を用いて、界面の両側面での不連続変位差 \mathbf{u}_{He} との

関係

$$\sigma = \mathbf{C}_{S_e}^k \mathbf{N}_e \mathbf{u}_{He} \quad (4.49)$$

で近似的に評価することが妥当である。すなわち、 k_e が実際の界面の幅ではなく $k_e + 0$ であるときには、もはや \mathbf{C}_{S_e} は k_e と同じ収束のオーダーを持った便宜的な材料定数となり、

$$\mathbf{C}_{S_e}^k = \frac{1}{k_e} \mathbf{C}_{S_e} = \text{一定値} \quad (4.50)$$

となる。式 (4.50) を考慮しつつ、式 (4.48) において $k_e + 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{e11} &= \int_{\Omega_{be}^+} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e^+ \mathbf{B}_e d\Omega + \int_{\Omega_{be}^-} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e^- \mathbf{B}_e d\Omega \\ \mathbf{K}_{eR1} &= \frac{1}{|\Omega_{be}|} \left\{ |\Omega_{be}^-| \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^+ \int_{\Omega_{be}^+} \mathbf{B}_e d\Omega - |\Omega_{be}^+| \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^- \int_{\Omega_{be}^-} \mathbf{B}_e d\Omega \right\} \\ \mathbf{K}_{eH1} &= -\frac{A_{S_e}}{|\Omega_{be}|} \left\{ \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^+ \int_{\Omega_{be}^+} \mathbf{B}_e d\Omega + \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^- \int_{\Omega_{be}^-} \mathbf{B}_e d\Omega \right\} \\ \mathbf{K}_{e1R} &= \frac{1}{p^+ + p^-} \left\{ p^+ \int_{\Omega_{be}^+} \mathbf{B}_e^T d\Omega \mathbf{C}_e^+ \mathbf{N}_e - p^- \int_{\Omega_{be}^-} \mathbf{B}_e^T d\Omega \mathbf{C}_e^- \mathbf{N}_e \right\} - \mathbf{K}_{e11} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{Re} \\ \mathbf{K}_{eRR} &= \frac{1}{p^+ + p^-} \left[\frac{|\Omega_{be}^-| |\Omega_{be}^+|}{|\Omega_{be}|} \left\{ p^+ \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^+ \mathbf{N}_e + p^- \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^- \mathbf{N}_e \right\} \right] - \mathbf{K}_{eR1} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{Re} \\ \mathbf{K}_{eHR} &= \frac{1}{p^+ + p^-} \left[\frac{A_{S_e}}{|\Omega_{be}|} \left\{ -p^+ |\Omega_{be}^+| \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^+ \mathbf{N}_e + p^- |\Omega_{be}^-| \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_e^- \mathbf{N}_e \right\} \right] - \mathbf{K}_{eH1} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{Re} \\ \mathbf{K}_{e1H} &= -\mathbf{K}_{e11} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{He} \\ \mathbf{K}_{eRH} &= -\mathbf{K}_{eR1} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{He} \\ \mathbf{K}_{eHH} &= A_{S_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{C}_{S_e}^k \mathbf{N}_e - \mathbf{K}_{eH1} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{He} \end{aligned} \quad (4.51)$$

なお、この式は、呉ら(1998)が弱定式化の出発点とした変位、ひずみ、応力に加えて界面の不連続変位も独立変数とする 4 変数場の変分原理からも導出できるはずである。

4.4.2 要素剛性の数値積分

式(4.48) あるいは (4.51) において、均等な重み付けを行い $p^+ : p^- = 1:1$ とすると、 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{Re}$ は全ての節点と界面の中心線 S_e との推定距離を有効に用いることができる。 $q^+ : q^-$ については任意であるが、1:0 あるいは 0:1 とすると好都合である。

式(4.48) あるいは(4.51) に現れる複雑な幾何学領域内の多重積分を数値的に評価す

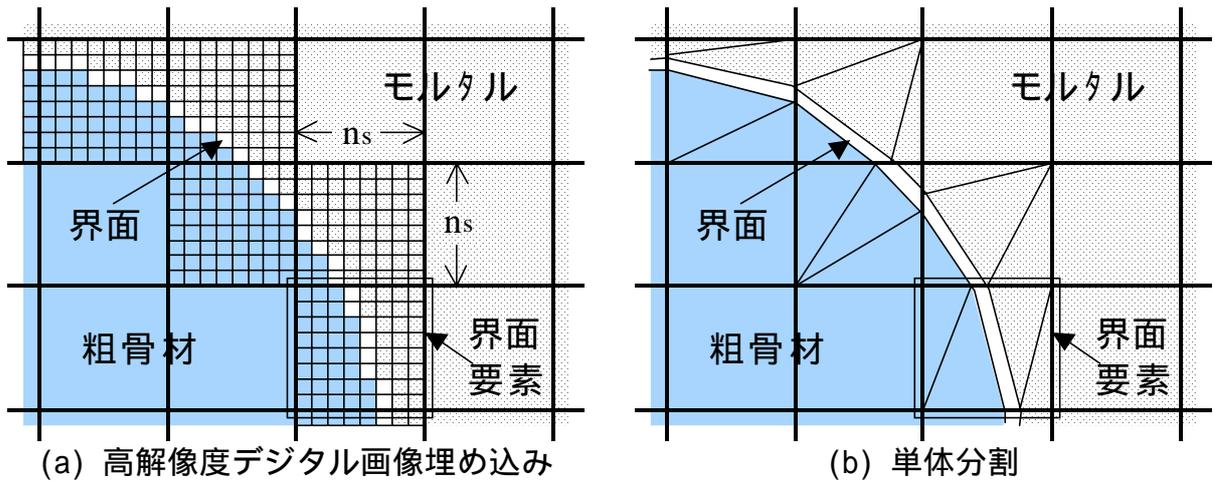


図 4.5 2 種類の数値積分法 (二次元)

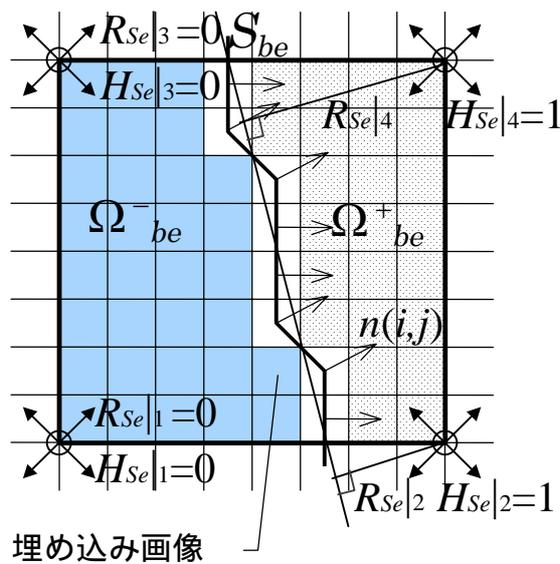


図 4.6 界面要素の埋め込み画像から界面の情報抽出

る方法として、1) 界面要素にのみ部分的に高解像度デジタル画像を埋め込んで各領域を定義する方法、2) デジタル画像の画素による表現から三角形 (四面体) 集合を生成し各領域を定義する方法、の 2 種類を考える。以下に、この 2 種類の方法を示す。

1) 界面要素に高解像度なデジタル画像を埋め込む

デジタル画像が十分に緻密であると仮定する。図 4.5 (a) に示すように、低解像度画

像の 1 画素を 1 有限要素として、界面要素にのみ $n_s \times n_s$ 画素からなる高解像度デジタル画像を埋め込んだ 2 階層のデジタル画像を用いる。このようにデジタル的に各領域を近似することで、数値積分を次式で近似的に評価できる。

$$\int_{\Omega_{be}^-} f \, d\Omega \cong \left(\sum_{(i,j) \in \text{モルタル画素}} f(i,j) + \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \text{界面画素}} f(i,j) \right) \Delta A \quad (4.52)$$

$$\int_{\Omega_{be}^+} f \, d\Omega \cong \left(\sum_{(i,j) \in \text{粗骨材画素}} f(i,j) + \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \text{界面画素}} f(i,j) \right) \Delta A \quad (4.53)$$

$$\int_{S_e} f \, dS \cong \text{avg}_{(i,j) \in \text{界面画素}} (f(i,j)) l_{Se} \quad (4.54)$$

あるいは各高解像度画素について解析的に積分を行うことにより評価することもできる。このとき、全ての界面要素の要素形状が同一であることから、あらかじめ $n_s \times n_s$ 画素数分の積分値のみデータベース化しておくこともできる。各領域の面積 $|\Omega_{be}^-|$, $|S_{be}|$, $|\Omega_{be}^+|$ 、界面の法線 n_e 、長さ l_{Se} などは、図 4.6 に示すように平易なデジタル幾何学的処理や最小自乗法的近似などを用いて求めることができる。但し、節点での $H_{Se|i}$ については、その節点を共有する要素間で矛盾することなく決定する必要がある。本論文では、二次元問題に対して、この方法を用いた。

2) 界面要素を複数の単体に分割

次の第 5 章で詳説するように、多階調デジタル画像に対する等値面作成手法を用いることにより、図 4.5 (a) に示すような階層型デジタル画像中の界面要素を、図 4.5 (b) に示すような単体（二次元の場合は三角形、三次元の場合は四面体）に分割することができる。デジタル画像に基づく有限要素分割においては要素形状は矩形に限定されるので、分割された単体領域内の多項式の積分値は解析的に容易に求めることができる。これを全ての分割した各単体について足し合わせる。

例えば三次元の場合、図 4.7 に示すような有限要素の局所座標系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 で表されたベクトル $\mathbf{0}, \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c$ で定義される四面体 $\mathbf{0}-\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b\mathbf{v}_c$ 領域での多項式 f の積分値は、四面体について頂点 $\mathbf{0}$ を原点、その頂点を共有する稜線を正規座標系 t_1, t_2, t_3 にとると、

$$\int_{\text{四面体}} f \, d\Omega = \int_0^1 \int_0^{1-t_2} \int_0^{1-t_2-t_3} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \det(\mathbf{T}) \, dt_1 dt_2 dt_3 \quad (4.55)$$

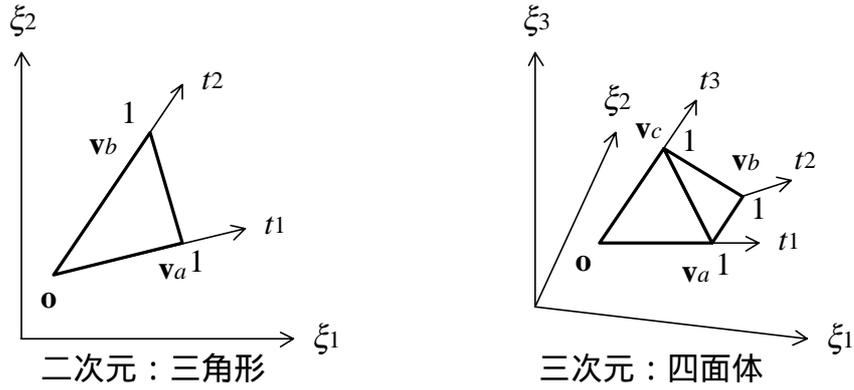


図 4.7 単体の正規化座標系の設定

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} + \mathbf{0} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a - \mathbf{0} & \mathbf{v}_b - \mathbf{0} & \mathbf{v}_c - \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

である。なお、三重 1 次多項式による立方体有限要素の補間の場合、要素剛性中の多項式の次元あたりの次数は 2 以下である。

実際には要素剛性行列の各成分毎に全て展開し、さらに各成分の多項式の各項について式 (4.55) の解析解を求める必要がある。これは煩雑な作業となるが、数式処理を用いることで、容易に求めうるばかりでなく自動的に計算コードを生成することができる。

本論文では、三次元問題に対してこの方法を用いた。但し、要素剛性の評価に必要な三次元界面要素中の界面の法線と面積は、平均値と射影面積により評価した。

なお、いずれの積分方法を用いても、

$$\int_{\Omega_{be}^{\pm}} f d\Omega = \int_{\Omega_{be}} f d\Omega - \int_{\Omega_{be}^{\mp}} f d\Omega \quad (4.58)$$

なる関係があり、要素全体での積分は容易に評価できるので、粗骨材領域 Ω_{be}^- とモルタル領域 Ω_{be}^+ のどちらか一方についてのみ上述した積分を行えば良い。

4.5 要素特性の検討

4.5.1 固有値解析

1) 二次元界面要素

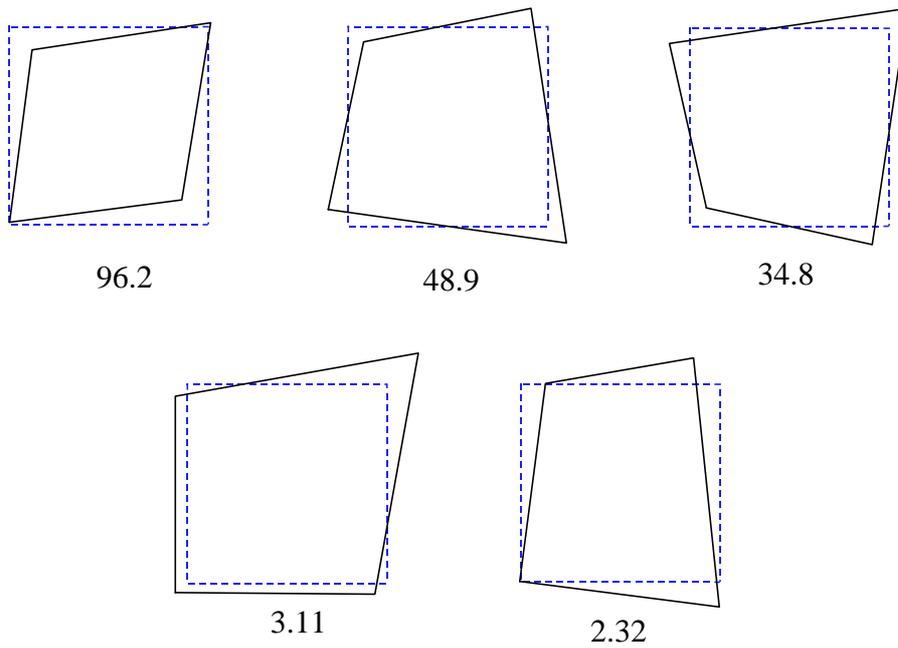
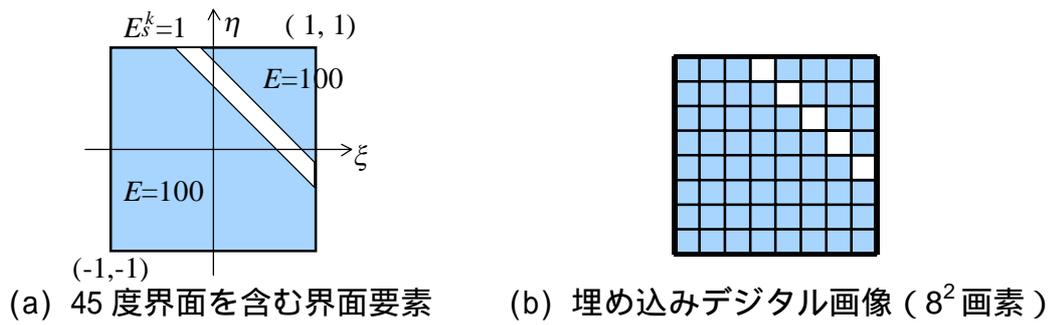
例として、図 4.8 (a) に示すような 45 度の界面を表現した正方形の界面要素に、同図 (b) のように 8×8 画素からなる高解像度デジタル画像を埋め込み、これの縮約された要素剛性に対して固有値解析を行った。ここでは、2 つの非適合モード \mathbf{u}_{Re} , \mathbf{u}_{He} は本質的に同じ性状を示すと予想されることから、ひび割れの非適合モード \mathbf{u}_{He} のみを考える。領域 $\Omega_{be}^- \cup \Omega_{be}^+$ に対するヤング係数を $E=100$ 、界面 S_{be} に対する等価ヤング係数を $E_s^k=1$ 、ポアソン比をともに $\nu=0.2$ とした。

剛体モードを除いた固有値解析の結果を図 4.8 (c) に示す。このうち小さな 2 つの固有値が、同図 (d) に示すような開口型(mode I)ひび割れとせん断型(mode II)ひび割れに対応している。これら 2 つの固有変形モードにおいて、界面の法線方向変形量と接線方向変形量のうちの 95%, 97% は、非適合モードであるひび割れ変位 \mathbf{u}_{He} に起因していた。

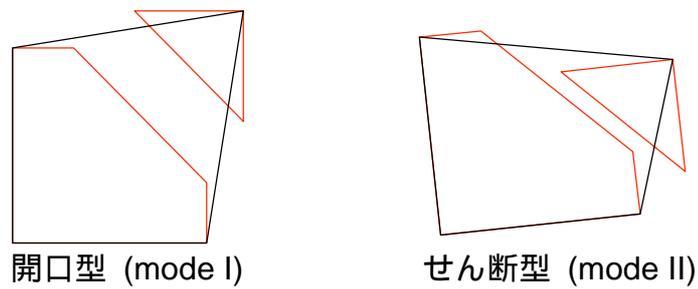
図 4.9 に示すように界面の位置のみを変えて、界面要素に対しても固有値解析を行ったが、ひび割れ変形モードに相当する固有値・固有変形モードは図 4.8 (c) と殆ど同じであった。これは、ひび割れの非適合モードの節点位置が幾何学的には定まっていないことに起因していると考えられる。これは、個々の界面要素では力学的に不合理なものであるが、図 4.10 のように連結した幾つかの界面要素で考えると、界面の位置には無関係に平均的にひび割れ変形モードを評価していると理解できる。

界面の方向を変化させた場合の固有値解析も行ったが、要素分割方向への依存性が殆どないことを確認した。垂直界面を含む界面要素について、図 4.11 に示す。

なお、Jirásek(1998) が既に指摘しているように、 \mathbf{G}_{Re} , \mathbf{G}_{He} の補間を式(4.20), (4.21) の代わりに \mathbf{G}_{Re}^* , \mathbf{G}_{He}^* の補間式(4.27), (4.28) として要素剛性を対称にした場合、図 4.8 (a) の 45 度界面を含む界面要素の固有値解析結果は、図 4.12 に示すように開口型ひび割れに対しては菱形、せん断ひび割れモードに対しては長方形となった。この場合、混合モードのひび割れに対して台形ではなく平行四辺形の変形しかできないために、結果として変形が拘束されることが予想できる。これは、 \mathbf{G}_{Re}^* , \mathbf{G}_{He}^* の補間式(4.27), (4.28) には定数項しかないことによる。

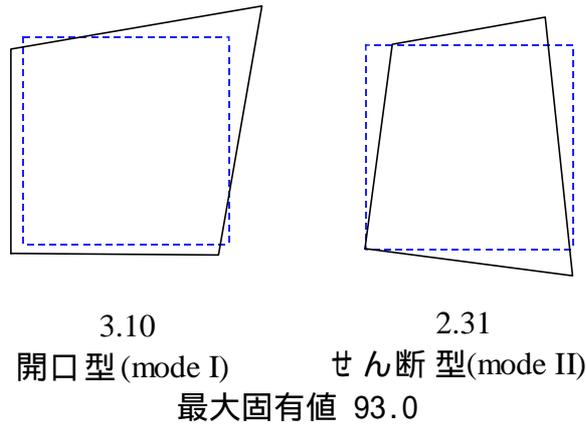
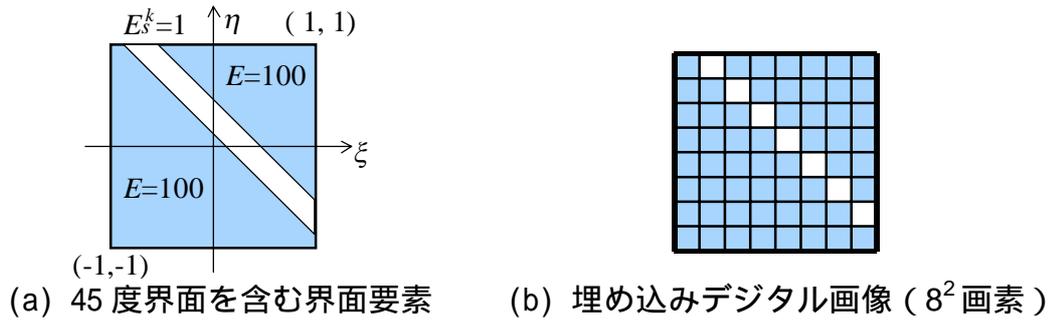


(c) 剛体モードを除く固有値・固有変形モード



(d) 対応するひび割れ変形モード

図 4.8 界面要素の縮約された要素剛性に対する固有値解析、その 1 (平面ひずみ)



(c) ひび割れ変形モードに対応する固有値・固有変形モード

図 4.9 界面要素の縮約された要素剛性に対する固有値解析、その 2 (平面ひずみ)

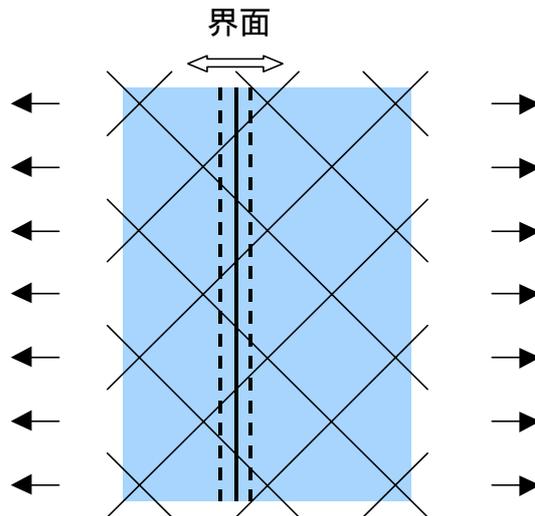
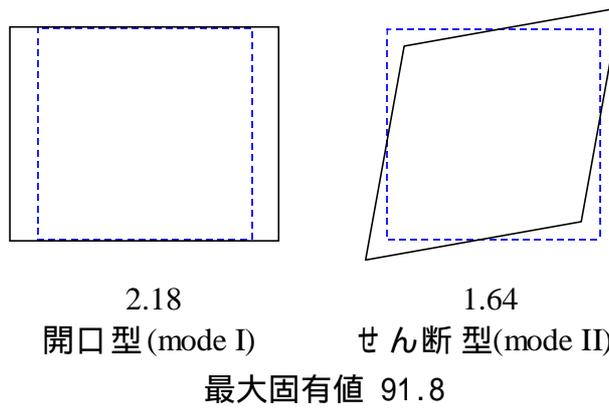
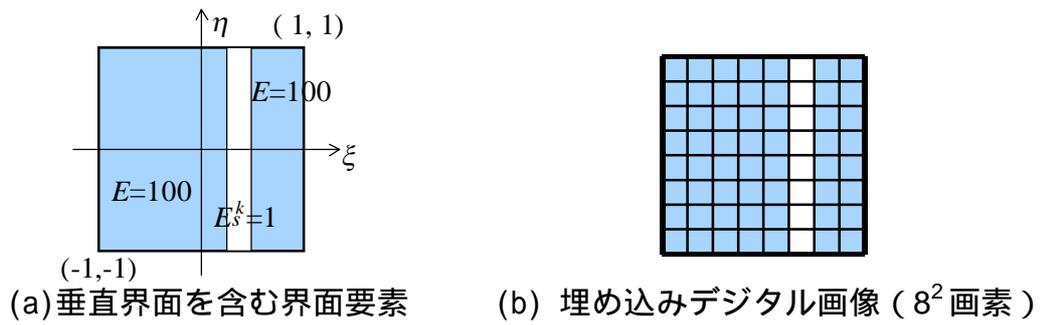


図 4.10 45 度方向の有限要素分割における界面要素の一物理的解釈



(c) ひび割れ変形モードに対応する固有値・固有変形モード

図 4.11 界面要素の縮約された要素剛性に対する固有値解析、その 3 (平面ひずみ)

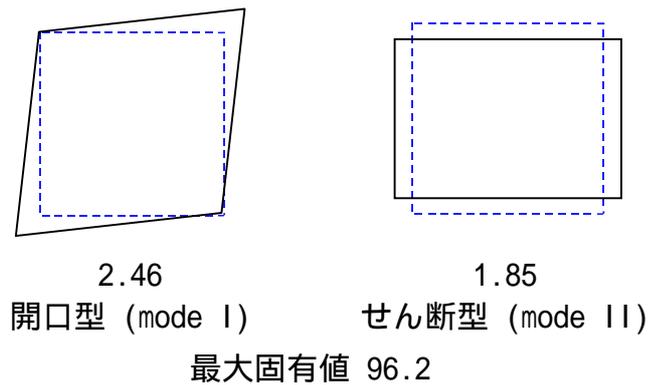


図 4.12 45 度界面を含む界面要素で $G_{Re} = G_{Re}^*$, $G_{He} = G_{He}^*$ の場合、ひび割れ変形モードに対応する固有変形モード

2) 三次元界面要素

続いて、図 4.13 に示すような界面を含んだ一辺長さ 2 の立方体の界面要素を例として、縮約された要素剛性に対して固有値解析を行った。界面要素中の粗骨材とモルタルのヤング係数を、それぞれ $E^- = 100$, $E^+ = 10$ 、界面の等価ヤング係数を $E_s^k = 1$ とした。また、ポアソン比を、いずれも $\nu = 0.2$ とした。界面と立方体要素の各稜線との交点は、0.67:0:33 の比で分割する点とした。要素剛性の数値積分法は、領域を四面体に分割する手法によった。

固有値解析の結果、二次元界面要素と同様に、1 つの開口型(mode I)ひび割れと 2 つのせん断型(mode II)ひび割れに相当する固有値・固有変形モードを得た。これらの固有値は、いずれも剛体モードを除いた固有値のうち最小のものであった。例えば、図 4.13 (a) の開口型(mode I)ひび割れモードにおいて、粗骨材、モルタル、界面の界面法線方向変位への寄与比は 1:18:123 であった。これは、1 次元の直列問題として考えた時の寄与比、1:20:150 にほぼ等しい。

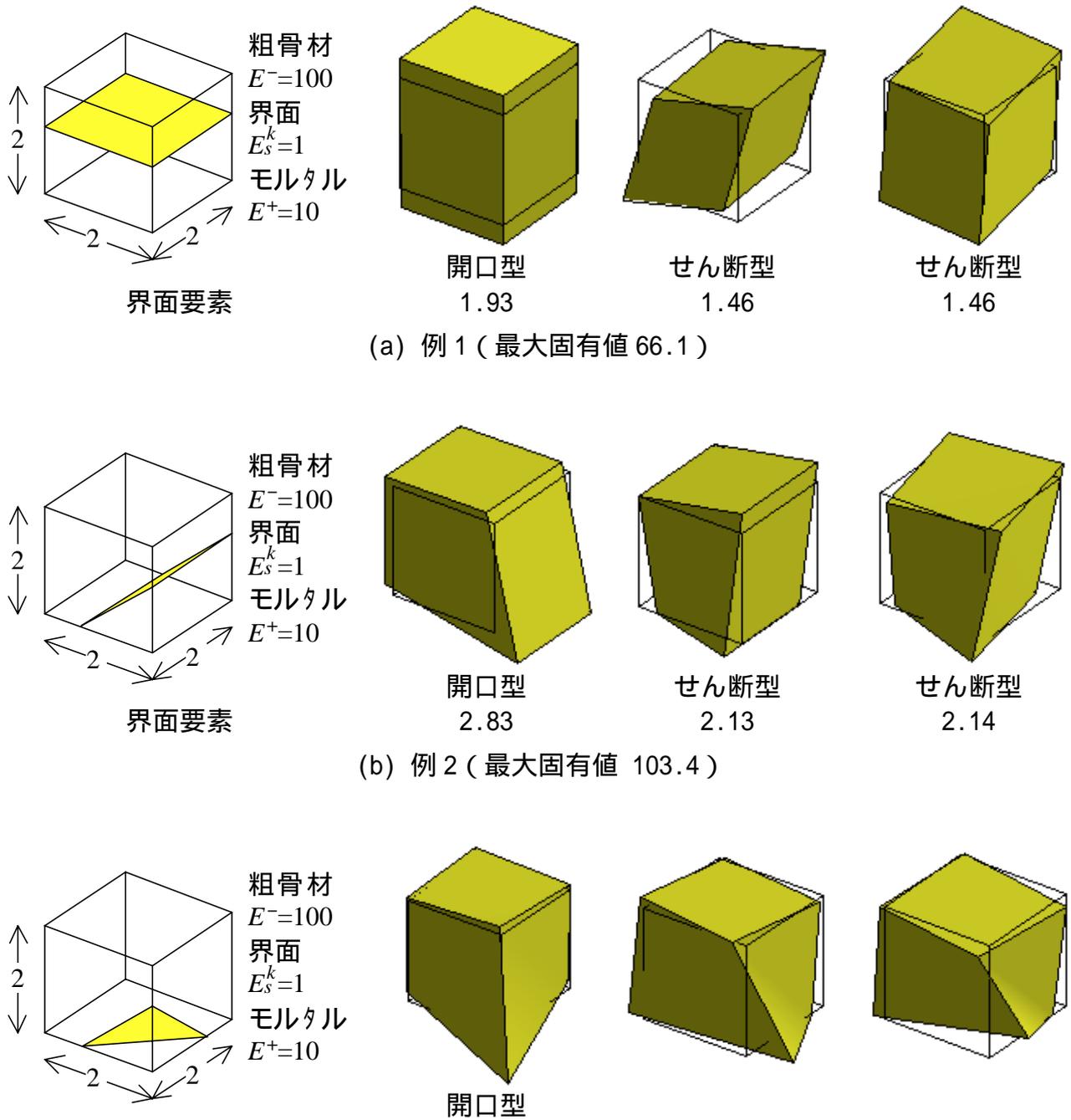


図 4.13 幾つかの界面要素の縮約された要素剛性に対する固有値解析 (三次元)

4.5.2 平面ひずみ問題の数値実験

1) 傾き $-2/1$ の直線界面を持つ材料

図 4.14 (a) に示すような、底辺の中心をピン支持、残りの底辺をローラー支持とした、 10^2 要素から成る一辺の長さ 20 の正方形領域の上辺に、鉛直上向きに単位等分布荷重を作用させる問題を考える。界面要素は 15 個である。粗骨材とモルタルのヤング係数をそれぞれ $E^- = 10$ 、 $E^+ = 1$ 、界面の等価ヤング係数を $E_s^k = 0.1$ とし、ポアソン比はいずれも $\nu = 0.2$ とする。

界面に沿った n - t 座標系で見た応力 σ_{nt} と σ_{tt} を、それぞれ図 4.14 (c), (d) に示す。但し、応力の値は、領域平均的な表面力の連続条件を表す制約条件式 (4.25), (4.26) を考慮して、要素内の各領域ごとに平均化操作を行っている。 σ_{nt} の応力状態から、界面において表面力の連続条件を満たしていることがわかる。

一方で、図 4.15 に示すように、粗骨材とモルタルが界面を挟んでそれぞれ独立に界面法線方向に変形するモードは表現できないために、 σ_{tt} の応力状態には物理的に不合理な応力が発生している。つまり、本章で定式化した界面要素の非適合ひずみモードは、式 (4.9) ~ (4.11) からわかるように変位に関する \mathbf{u}_R , \mathbf{u}_H の 0 次近似で定義したものである。二次元問題の場合、本来の 3 成分に対して 2 成分しか考慮していないことになっている。したがって、この変形モードの分だけ変形が拘束されていると考えることが妥当である。なお、この変形モードについては、これまでに提案されているいずれの不連続要素においても考慮していない。この変形モードを考慮するためには、式 (4.9) ~ (4.11) において、変位に関する \mathbf{u}_R , \mathbf{u}_H の界面法線方向成分を 1 次近似とする必要がある。

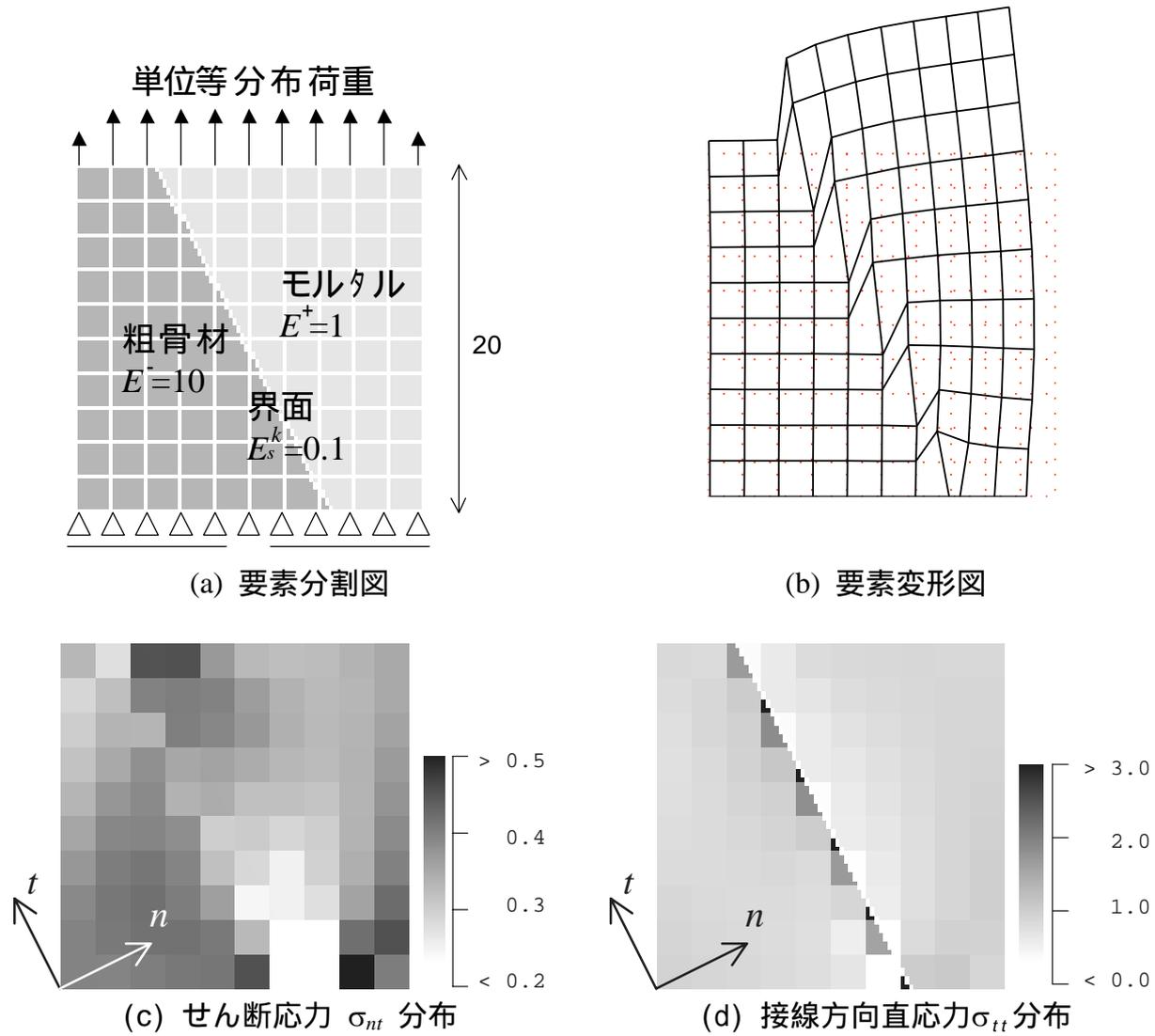


図 4.14 傾き $-2/1$ の直線界面を持つ複合材料

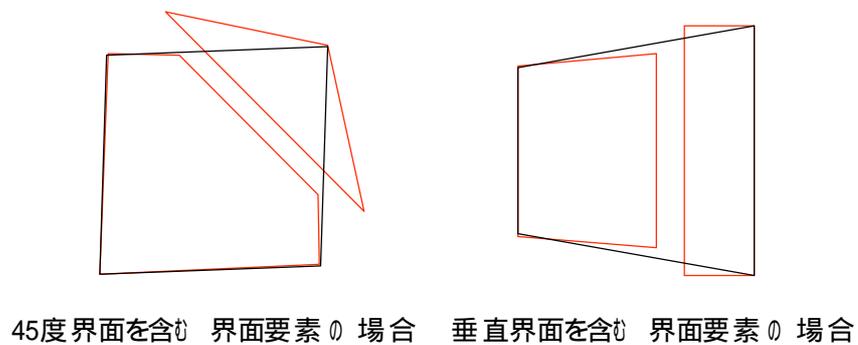


図 4.15 界面要素で考慮していない変形モード

2) 円形骨材を含む材料

解析領域の境界条件、および材料定数は、1) と同じである。図 4.16 (a) 中の円形骨材を含んだ要素はわずか 32 個であり、そのうち 12 個は界面要素である。図 4.16 (b) の要素変形図より、界面要素には著しい変形が生じていることがわかる。比較のために、同一の要素分割に対して、界面要素を用いずに通常の大一次要素のみを用いた場合の要素変形図を図 4.17 (b) に示す。この場合、界面を表現することすらできないので、変形は全く異なったものとなっている。また、図 4.16 (c) に示す σ_{yy} の応力状態は、1) で述べたように考慮していない変形モードにより骨材の鉛直側面近くに高い値が出ているが、それ以外は妥当な応力状態であると考えられる。

4.6 まとめ

第 2 章で述べたデジタル画像に基づく有限要素解析手法では、直交固定格子で定義されているデジタル画像を直接に有限要素分割とするために、粗骨材 - モルタル界面が階段状に近似されるという問題点があった。

そこで本章では、この問題に対して、粗骨材 - モルタル界面を固定格子による有限要素分割とは関係無く滑らかに定義する手法を提案した。すなわち、有限要素法による界面のモデル化方法について検討し、要素内部に界面を埋め込むモデル化を採用した。この界面を含む有限要素に対して、異種材料とひび割れの不連続性を考慮した混合型の弱定式化を行った。この要素内の変位の非適合モードとしては、ひとつの要素内部に界面を挟んで存在する粗骨材とモルタルの異種材料を表現するための ramp 関数、界面のひび割れを表現するための Heaviside 関数である。制約条件は表面力の領域平均的な連続条件であり、要素剛性が非対称行列となるものである。また、この要素剛性積分の評価法についても述べた。

続いて、固有値解析と線形解析による数値実験から、デジタル画像に基づく有限要素解析手法で問題となっていた界面の階段状近似を大きく改善できるばかりでなく、界面のひび割れも扱うことができることを示した。同時に、この要素で表現できる変形の限界についても触れた。なお、本章で提案した有限要素は、界面を含んだ要素に対してのみ用いるものであり、残りの要素については第 2 章で示したように通常の有限要素を用いるものである。

第 5 章 粗骨材 - モルタル界面の高精度モデル 化有限要素のためのデジタル画像処理

5.1 はじめに

界面要素の有限要素弱定式化において、粗骨材 - モルタル界面は十分滑らかでかつ要素内に1面のみ存在するという幾何学的な条件を仮定している。一方で、実際のコンクリート材料のデジタル画像を直接に用いて界面要素を含む固定格子を作成する場合、界面要素を高解像度なデジタル画像を埋め込むか単体に分割するかに関わらず、この幾何学的な与条件を必ずしも満たさないことは明らかである。例えば、図 5.1 (a) に示すように界面要素に高解像度なデジタル画像を埋め込んだ有限要素分割の場合、デジタル画像の雑音も考え合わせて、要素内に界面が2面以上存在したり、滑らかではない界面要素などが考えられる。

このような界面要素は、数値計算上は一律に要素剛性を評価できるものの、本来の性能を期待できないばかりでなく悪影響を及ぼす可能性が高い。界面要素内に界面が2面以上存在する場合には、隣接した粗骨材同士は有限要素分割の解像度では一体化される可能性が高いが、これをできる限り正しく分離してモデル化することが重要であると考ええる。また、粗骨材 - モルタル界面の微細な凸凹は全体の応力分布には殆ど無関係であり、それによる噛み合いは構成則としてモデル化することが妥当であると考ええる。

そこで本章では、有限要素分割の解像度において元々の理想的な骨格を保存しつつ、全ての界面要素に滑らかな界面が1面のみ存在するようにできるデジタル画像に基づく有限要素分割手法を示す。また、図 5.1 (a) に示したような階層型デジタル画像を、同図 (b) に示すような単体に自動分割する手法を示す。

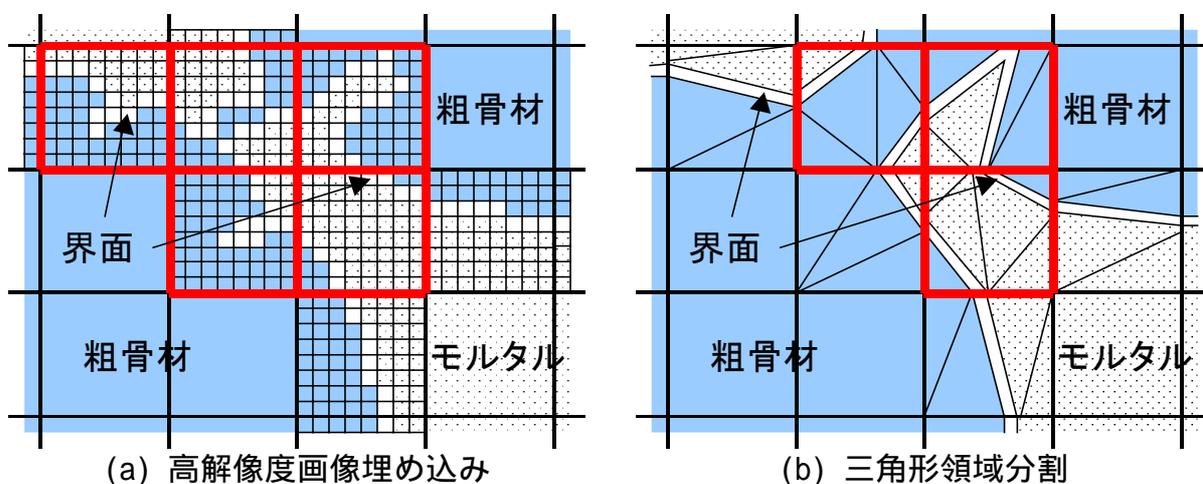


図 5.1 不良な界面要素を含む有限要素分割の例 (二次元)

5.2 階層型デジタル画像に基づく有限要素分割

第 4 章で提案した界面要素中の界面には、十分に滑らかで平面近似ができて、かつ 1 面しか存在しないという幾何学的な条件を与えた。本節では、このような幾何学形状を満足する有限要素分割を、モルフォロジー理論に基づく画像変形手法を用いて行う手法を述べる。モルフォロジー理論は、鉱山学から派生した集合理論であり、Serra (1982) が集大成している。また、小畑(1995)が入門書を著している。このモルフォロジー理論は、撮影したデジタル画像から粒子、結晶、細胞などの抽出を目的とする画像解析や、集積回路などの配線設計に用いられている理論である。本節で述べる画像処理手法は、高解像度デジタル画像を埋め込む界面要素を生成するだけでなく、次節5.3で述べる界面要素領域の単体分割に対する前処理としても用いることができる。

5.2.1 モルフォロジー理論の概要

モルフォロジー理論は、次の Minkowski 和と呼ばれる集合演算の定義を基礎とする。

$$X \oplus B = \{ x+b : x \in X, b \in B \} \quad (5.1)$$

ここに、集合 X を変形対象とする 2 値画像としたとき、集合 B は構成要素(真瀬・上田 1991)と呼ばれている。集合 B の平行移動を $B_x = \{ b+x : b \in B \}$ とすれば、Minkowski 和は次のようにも記述できる。

$$X \oplus B = \cup_{x \in X} B_x \quad (5.2)$$

つまり、Minkowski 和とは、図 5.2 に示すように「 B の原点を X 内で移動させたときに B が覆うことのできる領域」(小畑 1995)である。対象がデジタル画像の場合、Minkowski

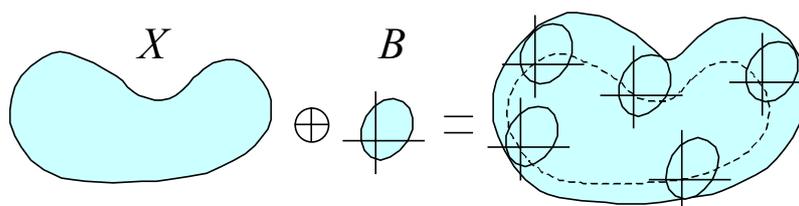


図 5.2 Minkowski 和

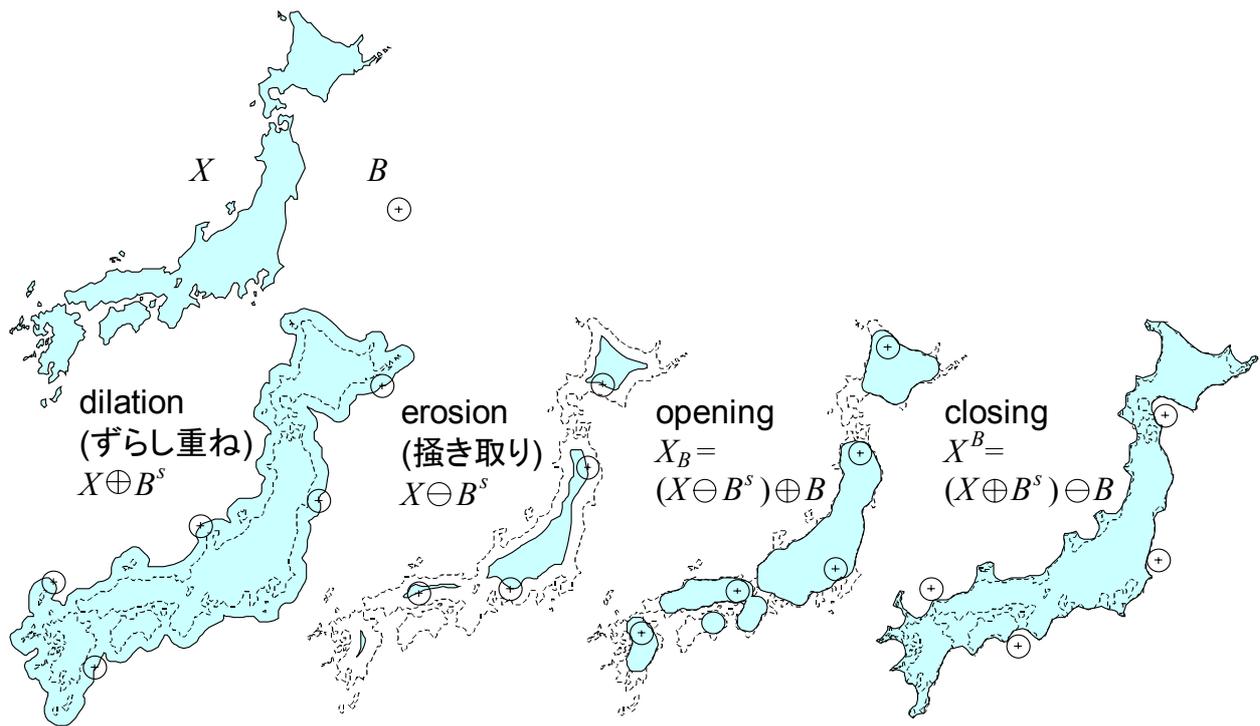


図 5.3 モルフォロジー理論における 4 つの基本演算

和は画像間の畳み込み演算となるので、その実装は対象とする次元を問わずに容易である。また、単純な構成要素を用いる場合には、より高速な処理が可能である距離変換を用いることができる。

集合 X の補集合を X^c とすれば、 X と X^c の双対性から次の Minkowski 差と呼ばれる集合演算が定義される。

$$X \ominus B = (X^c \oplus B)^c \quad (5.3)$$

集合 B の原点に関する反転を $B^s = \{-b : b \in B\}$ とすると、これらの和と差に関する集合演算を用いて、次の 4 つの基本的な演算が構成される。

$$\text{dilation (ずらし重ね)} \quad X \oplus B^s \quad (5.4)$$

$$\text{erosion (掻き取り)} \quad X \ominus B^s \quad (5.5)$$

$$\text{opening} \quad X_B = (X \ominus B^s) \oplus B \quad (5.6)$$

$$\text{closing} \quad X^B = (X \oplus B^s) \ominus B \quad (5.7)$$

直感的には、図 5.3 に示すように dilation は膨張、erosion は収縮、opening は内からの平滑化、closing は外からの平滑化フィルタであると理解できる。

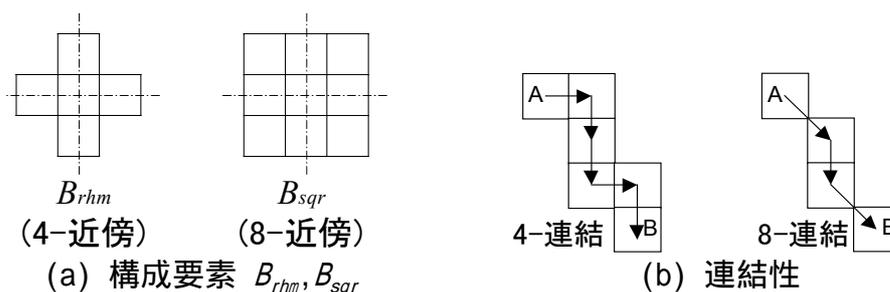


図 5.4 画素の近傍と連結性の定義 (二次元)

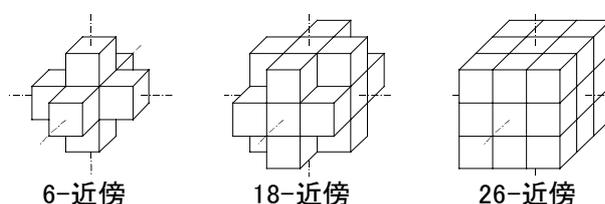


図 5.5 画素の近傍 (三次元)

opening に関して、 $X_B=X$ である集合 X は B -open であると言われ、

$$X = \cup B_x \tag{5.8}$$

と記述できる。つまり、 B -open な集合 X は構成要素 B の dilation で構成できる。同様に closing に関して、 $X^B=X$ である集合 X は B -closed と言われる。このとき双対性から、

$$X^c = \cup B_x \tag{5.9}$$

と記述できる。

これらの基本演算がモルフォロジー理論の基礎となる。

5.2.2 有限要素分割とする階層型デジタル画像に対する構成条件

ここでは、モルフォロジー理論を用いて、二次元階層型デジタル画像に対する構成条件を詳述する。三次元階層型デジタル画像や、次節で述べる界面要素領域の単体分割の前処理として用いる場合でも、以下に述べる構成要素 B_1, B_2, B_3 の形状を適したものに変えるだけで構成条件を与えることができる。

今、2 値画像の on 画素で表される粗骨材の集合を X として、粗骨材 - モルタル界面を

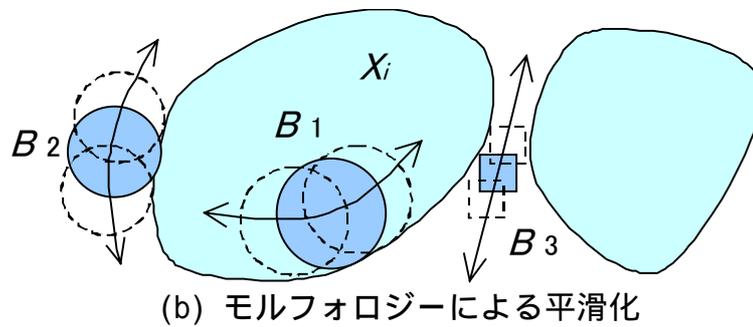
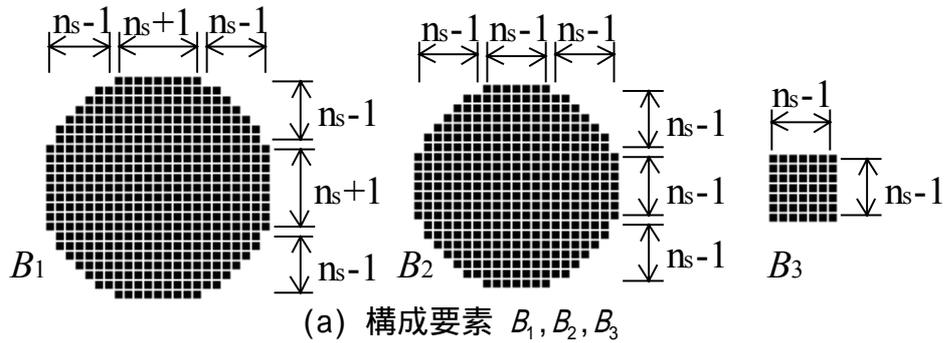


図 5.6 モルフォロジー理論によるデジタル画像処理

粗骨材側の境界画素で定義することにする。二次元デジタルの場合、界面の集合は、図 5.4 (a) に示す 2 種類の構成要素を用いて次式で示す 2 通りの表現ができる。

$$I_4 = X - (X \ominus B_{sqr}) \quad (5.10)$$

$$I_8 = X - (X \ominus B_{rhm})$$

(5.11)

ここに、界面の集合 I_4, I_8 はそれぞれ図 5.4 (b) に示すような 4-,8-連結な画素の集合であり、常に $I_4 \supset I_8$ である。三次元デジタル画像の場合も同様に、図 5.5 に示すような近傍画素を構成要素として用いることで 3 種類の表現ができる。

界面要素の埋め込み画像を $n_s \times n_s$ 画素とすると、各々の粗骨材を表す集合 X_i を図 5.6 (a) に示す凸集合 B_1, B_2 を用いて平滑化し、 B_1 -open かつ B_2 -closed とすることができれば、すべて滑らかな界面を含む要素分割となる。すなわち、 B_1 -open かつ B_2 -closed な各々の粗骨材を表す集合 X_i の境界は、図 5.6 (b) に示すように内側からは集合 B_1 によって、ま

た外側からは集合 B_2 によって決定されるので、界面の曲率は B_1, B_2 の曲率を超えることはない。さらに、すべての粗骨材の論理和集合 $X = \cup_i X_i$ を B_3 -closed とすることができれば、界面要素には一本の界面しか含まなくなる。すなわち、すべての粗骨材集合 X の補集合 X^c はモルタルであり、これを集合 B_3 のずらし重ねにより埋め尽くすことができるので、粗骨材間の距離は n_s より大きくなることが保証される。

これらの構成条件を満たす粗骨材集合 X について、階層型デジタル画像による固定格子作成を行う。具体的には界面要素を、界面の集合 I_4, I_8 から構成される有限要素の集合 IE_4, IE_8 を用いて、次のように構成し、4-連結の有限要素の集合とする。

$$IE_8 \cup (IE_4 \cap (IE_8)^c) \quad (5.12)$$

あるいは、単に

$$IE_4 \quad (5.13)$$

でも良い。これらは、粗骨材集合内部に位置する有限要素節点とモルタル集合内部に位置する有限要素節点は、必ず界面を介した力の伝達を行うことを保証するものである。なぜならば、8-連結の界面の集合から構成される界面要素の集合 IE_8 を用いると、図 5.7 に示すように、界面要素の集合が部分的に 8-連結となることがあるので、その近傍で変形が拘束される。

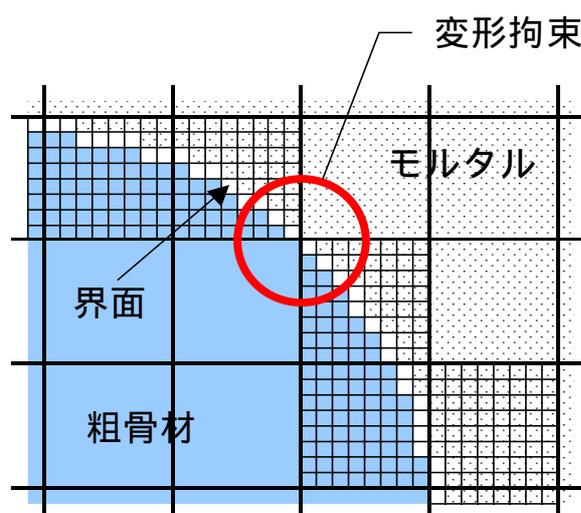


図 5.7 変形が拘束される有限要素分割の例

5.2.3 二次元デジタル画像処理例

画像処理による固定格子作成の例として、第 2.2 節で撮影したコンクリート供試体のある断面の二次元デジタル画像の一部 (9.6x9.6cm, 768x768 画素, RGB 24bit) を用いる。このカラー画像の R チャンネル画像を図 5.8 (a) に、第 2.2 節に示したデジタル画像処理法による 2 値化画像を図 5.8 (b) に示す。この 2 値化画像に対して、モルフォロジーを主とした画像処理を行う。本例題では、界面要素の埋め込み画素数を $n_s=8$ とした。前項 5.2.2 の構成条件を満たす修正画像を作成するために行った画像処理の手順を次に示す。

粗骨材の集合の鋭利な凸部分を除去するために、 B_1 -opening により内側から平滑化 (図 5.8 (c))、

殆ど存在しないと考えるが、個々の粗骨材集合について鋭利な凹部分を除去するために、 B_2 -closing により外側から平滑化。ここに、個々の粗骨材集合の判別は、名前付け(Labeling)処理による。

すべての粗骨材間の距離を n_s 以上とするために、モルタル集合に対して幾何学的な位相を保ったまま細線化して中心線を求めた後、 B_3 -dilation (図 5.8 (d))、

と で得られた画像の論理積を算出する。これにより粗骨材同士が接近し過ぎて、界面要素に界面が 2 本入る問題を回避できる。

の処理で粗骨材集合に突起が生じた可能性があるために、再度 B_1 -opening

ここに、名前付け(labeling)と細線化 (三次元では薄面化) 処理は発見的手法であるが、三次元画像に対するアルゴリズムについて、鳥脇と横井(1985)が概説している。

この一連の画像処理は、前項 5.2.2 の構成条件を満たす修正画像の生成を保証するものではないが、粗骨材は基本的に凸集合で部分的にのみ弱い凹性を示すに留まることから、ほとんどこの構成条件を満たす画像を得ることができると思う。この一連の処理手順を経て得られた画像を式(3.8)に従い 96x96 の有限要素に要素分割したものを、図 5.8 (e) に示す。これに含まれる界面要素は全要素の約 20%であり、この修正画像は前項 5.2.2 の構成条件を満たしていることを確認した。

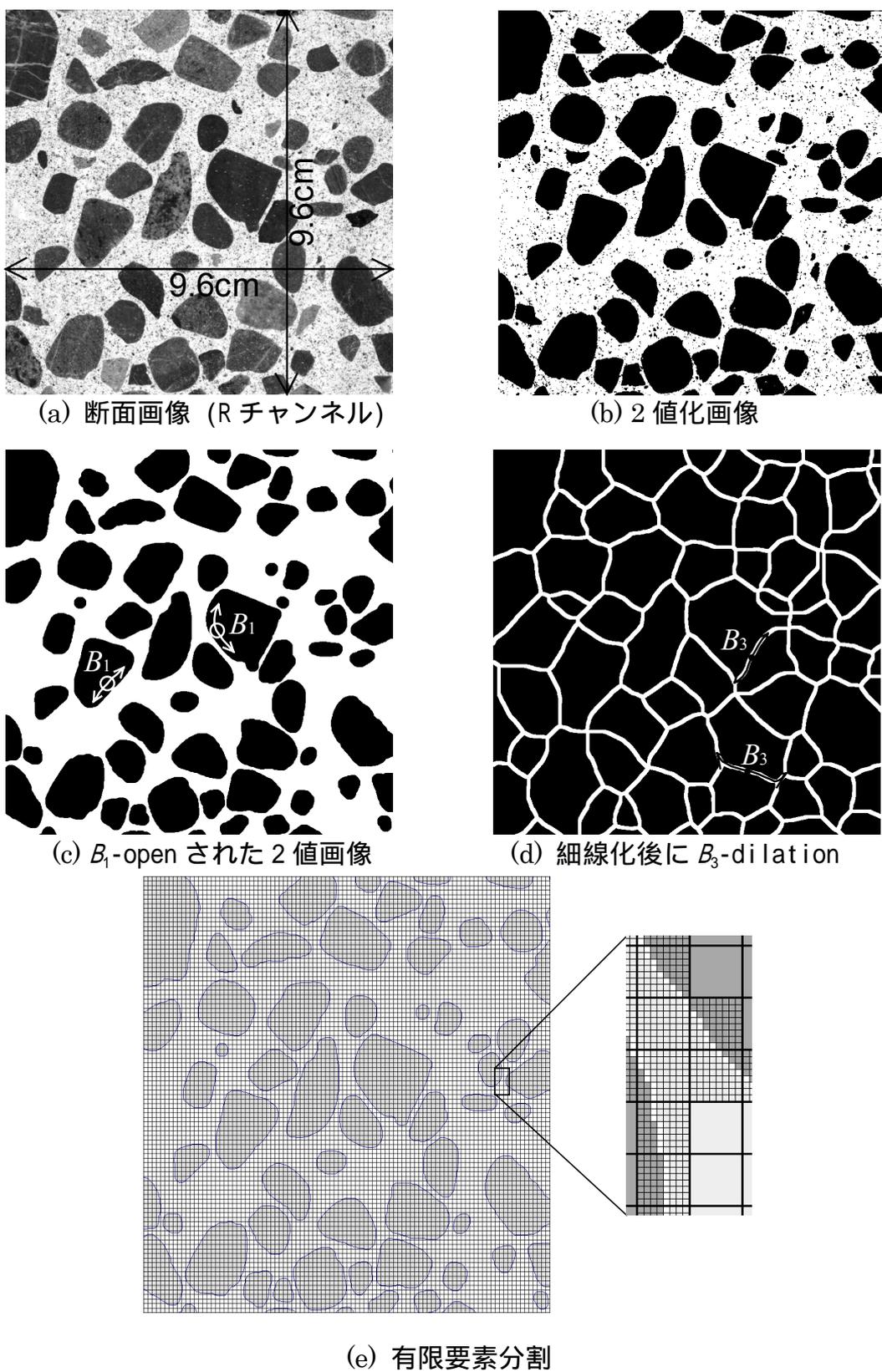


図 5.8 二次元画像処理例

5.3 等値面作成アルゴリズムを用いた界面を含む有限要素の領域の単体分割

1 有限要素を第 2.2 節で定義した各標本点の支配領域である 1 画素とするのではなく、有限要素の頂点を各標本点として定義することを考える。さらに、有限要素分割に用いるデジタル画像としては、多値画像を準備する。ここで、前節5.2のモルフォロジー処理を行った高解像度な 2 値画像を用いる場合、これを距離画像に変換にした後に、低解像度な有限要素分割の各節点において再び補間による標本化・量子化を行うことで多値画像とする。この場合、界面要素の要素剛性評価に必要な界面と各有限要素節点との距離を付随的に得ることができる。

このような多値画像の標本点を有限要素の各頂点とする有限要素分割に対して、多値画像に対する等値面作成アルゴリズム(例えば、Lorenzen and Cline 1987, Nagae et al. 1993)を用いて推定できる等値面を界面と見なすことにより、界面要素とそれに含まれる界面を決定することができる。以下にそれを述べる。なお、等値面は、X 線 CT や MRI による非破壊検査で得られた生体器官のデジタル画像や、各種科学技術計算結果の離散データを可視化するために一般的に用いられている。

今、各要素節点(標本点)において濃度値 f が与えられているとして、あるしきい値 θ (距離画像から得られた多値画像の場合には $\theta=0$) を考える。各濃度値は、そのしきい値 θ で on もしくは off に 2 値化される。ここで、図 5.9 に示すような 2 節点 v_1, v_2 を結ぶ線分を考える。その 2 節点での 2 値化濃度値の組み合わせが on と off の場合にのみ、線分上を界面が横切っていると考える。この交点 x を次式により評価する。

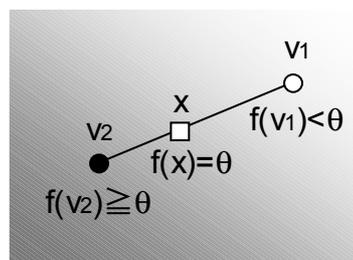


図 5.9 線分と界面の交点

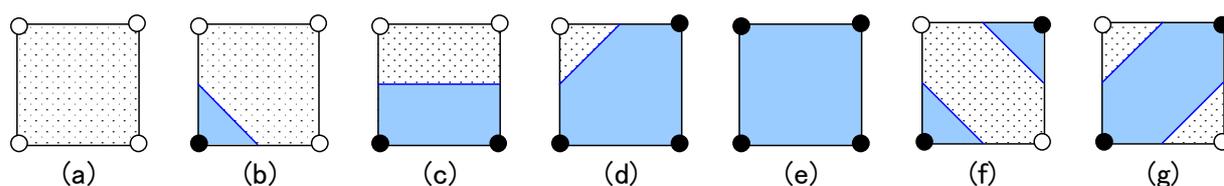


図 5.10 等値面作成アルゴリズムを用いた二次元界面要素の三角形分割

$$\mathbf{x} = \frac{(f(\mathbf{v}_1) - \theta) \mathbf{v}_2 + (\theta - f(\mathbf{v}_2)) \mathbf{v}_1}{f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2)} \quad (5.14)$$

すなわち、交点 \mathbf{x} を 2 節点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を $(f(\mathbf{v}_1) - \theta) : (\theta - f(\mathbf{v}_2))$ に内分する点とする。

1) 二次元の場合

正方形の 4 辺全てについて界面（等値面）との交点の有無を考えて、交点が存在した場合にこれらを式(5.14)で評価して結び、界面を含まない場合を含めて、図 5.10 に示すような種類の界面を推定することができる。ここに、図 5.10 (a), (d) は通常の有限要素である。また、(f), (g) は不良な界面要素であるが、前節 5.2 のモルフォロジー処理の後、距離画像に変換、補間により低解像度化した多値画像を用いることで回避することができる。このときの低解像度化において、節点での濃度値（距離値）がしきい値 θ と等しくならないように注意しておく、図 5.7 に示したような変形が拘束される有限要素分割となることはない。

本節において、各辺上で一次的に界面との交点を評価していることが重要な着目点である。つまり、それぞれの要素が共有する辺上で界面との交点が定義されることとなるため、これらの交点をつないで得られる界面は連続する。なお、本論文には無関係であるが、(f), (g) の 4 節点全ては同一の 2 値化濃度値を持っているので、界面作成時にはどちらか一方のみを用いる。不良な界面要素を含めて、全ての界面の横切り方の組合せは合計 $2^4=16$ 通り ((a): 1 通り, (b): 4 通り, (c): 4 通り, (d): 4 通り, (e): 1 通り, (f) or (g): 2 通り) 存在する。最後に、これらの要素の各多角形領域を三角形に分割する。

2) 三次元の場合

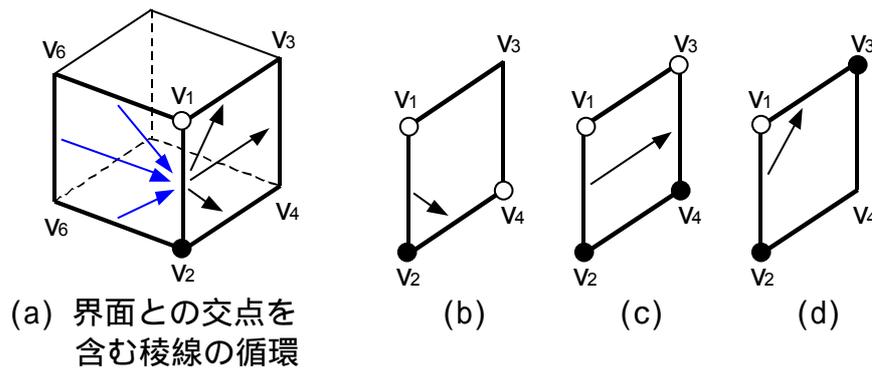


図 5.11 界面との交点を含む稜線の循環の定義

二次元の場合と同様、立方体要素の 8 頂点を多値画像の標本点として、式 (5.14) を用いて立方体要素の稜線と界面（等値面）の交点を評価する。これを 12 稜線全てについて考えて、界面との交点を含む稜線を順につないでいけば良い。しかしながら、これは離散データから幾何学的な位相を推定して付与していく作業であり、煩雑となるので工夫を要する。これに対して、Nagae et al. (1993) が界面との交点を含む稜線を一律につないでいく等値面作成アルゴリズムを考案しているため、以下に概説する。

界面との交点を含む稜線に対して、その両端の節点（標本点）での on, off 値を用いて方向を定義する。図 5.11 (a) に示すような立方体要素の稜線ベクトル v_1v_2 を考える。立方体を外側から見た時に、この稜線ベクトル v_1v_2 を基準として、これを共有している 2 つの正方形面 $v_1v_2v_4v_3$ と $v_2v_1v_6v_5$ を区別することができる。そこで、今、図 5.11 (a) に示すように、稜線ベクトル v_1v_2 に対して、正方形面 $v_1v_2v_4v_3$ を次の面、正方形面 $v_2v_1v_6v_5$ を先の面と定義する。界面との交点を含む稜線ベクトル v_1v_2 に対して、先の面を構成する界面との交点を含む稜線は v_1v_2 を除いて必ず 1 つだけ存在し、対をなす。同様に、界面との交点を含む稜線ベクトル v_1v_2 に対して、次の面を構成する界面との交点を含む稜線は v_1v_2 を除いて必ず 1 つだけ存在し、対をなす。したがって、界面との交点を含む稜線を次から次につないでいくと、面の数は有限であるため、必ず循環することがわかる。具体的には、12 稜線全てにフラグを与えた後、次のアルゴリズムにより循環を決定する。但し、循環は立方体要素中に 1 つとは限らない。

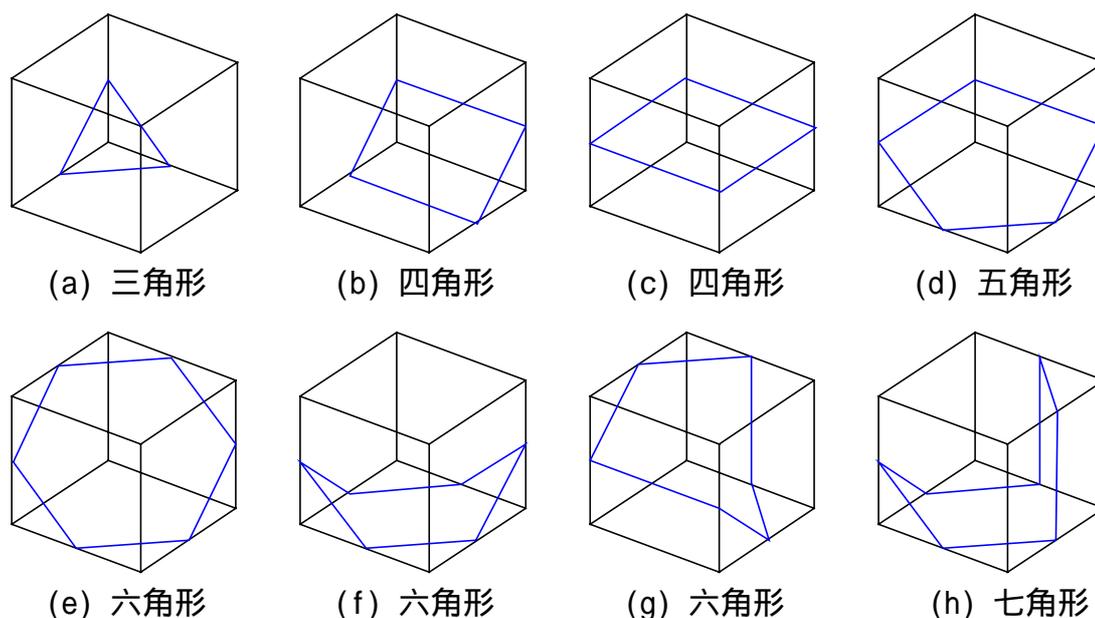


図 5.12 三次元界面要素中に多角形として推定される界面の種類

フラグが立っていない稜線を順番に界面との交点を含むかどうかを調べる。もし、交点が存在しなければ次の稜線を調べる。その稜線が交点を含む場合、フラグを立てて、両端の節点（標本点）の on, off 値に応じて稜線に方向を与える。

次の界面との交点を含む稜線は、次の面において図 5.11 (b), (c), (d) の 3 通りのいずれかである。即ち、まず (b), (d) について調べる。(b)かつ(d)でない場合には、必ず (c)である。このとき、図 5.10 (f), (g) を用いて説明したように、二次元の場合と同様、界面の横切り方をどちらか一方に統一しておく必要がある。次の界面との交点を含む稜線に既にフラグが立っている場合、循環し終えたので に戻り、次の別な循環の起点を探す。さもなくば、フラグを立てた後、次の次の界面との交点を含む稜線を求める。

このようにして推定される等値面としての界面の 1 循環は、図 5.12 に示す三角形から七角形のものである。このアルゴリズムによりデジタル画像から生成される曲面は、閉曲面の位相を持っている。このことから、界面要素の各節点で定義される H_{Sel_i} は、各節点を共有している全ての界面要素で矛盾無く一律に定義できることも分かる。

続いて、推定された界面の多角形とその要素表面を、図 5.13のように全て三角形に分

割すると、図 5.14 に一例を示すように界面要素を四面体に分割することができる。すなわち、要素座標系の原点などを頂点として、これらの三角形を底面とする。通常の立方体要素を含めた界面要素は合計 $2^8=256$ 通り存在するが、二次元の場合と同様、図 5.15 に示すような不良な界面要素の生成を回避するためには、あらかじめ前節5.2のモルフォロジー処理を行う必要がある。このとき、モルフォロジー処理を行うことで、図 5.12 に示したような界面においても曲率が小さく十分に滑らかな曲面を得ることができる。しかし、図 5.12 (f), (g), 特に稀ではあると考えるものの (h) に示したような界面では、稜線と界面の交点の位置関係により曲率が大きくなる可能性があり、これらを含んだ界面要素には注意が必要である。

第 2.3 節で得られた三次元デジタル画像を 100^3 要素に分割し、界面要素中に含まれる界面（等値面）のみを三角形分割して表現した例を図 5.16 (a) に示す。同図(b)は部分的に拡大したものである。改めて、この図中の界面の三角形分割は、有限要素分割を表現しているのではないことを述べておく。すなわち、有限要素分割は、界面とは別に直交固定格子のままとなっている。要素分割の演算量・計算時間は、応力解析に比べて元々無視できるものではあるが、通常要素を含めて合計 256 通りの界面要素の位相情報をあらかじめテーブルに保持しておく効率的である。

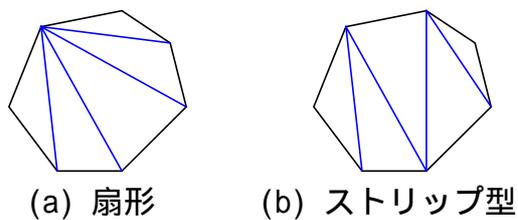


図 5.13 多角形の三角形分割法

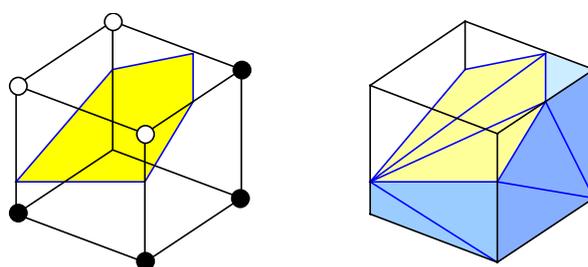


図 5.14 等値面作成アルゴリズムによる三次元界面要素の四面体分割例

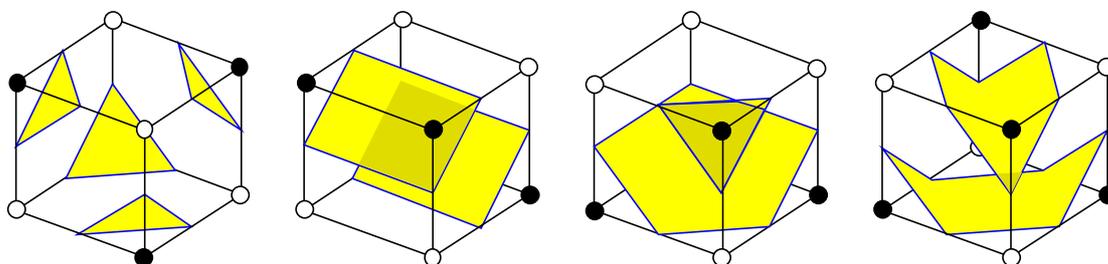
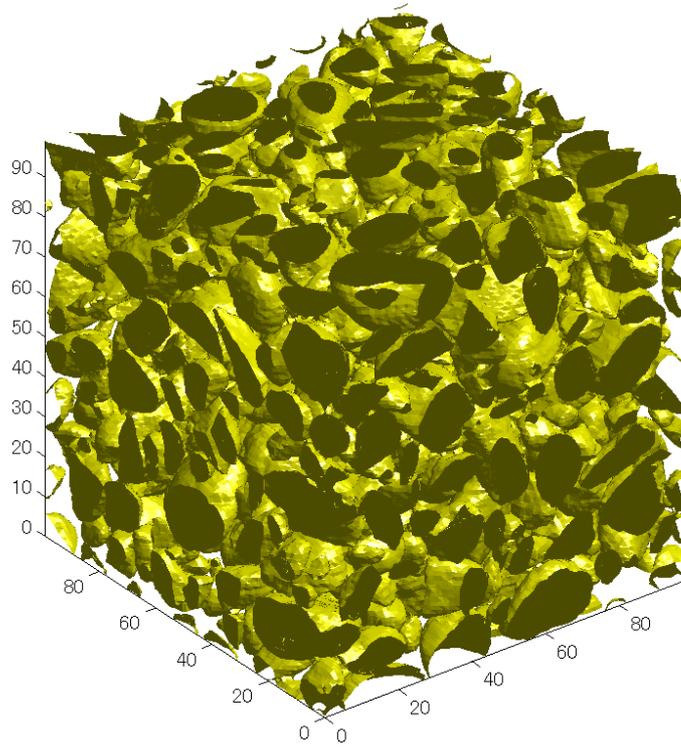
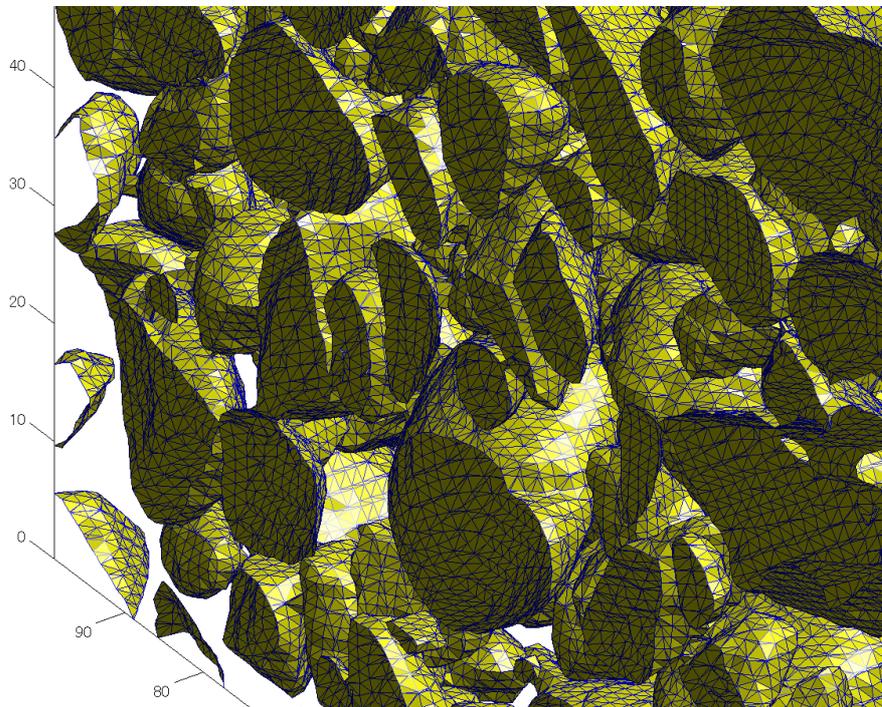


図 5.15 不良な三次元界面要素の例



(a) 全体図



(b) 部分拡大図

図 5.16 100^3 有限要素分割中の三角形分割された界面の例

5.4 まとめ

第 4 章で開発した界面要素を用いて、デジタル画像に基づく有限要素分割を行う場合、不良な界面要素が生成される可能性がある。そこで本章では、それを回避するためのデジタル画像処理手法を示した。つまり、界面要素に高解像度デジタル画像を埋め込む有限要素分割に対して、モルフォロジー理論を用いた画像処理手法を示し、その有効性を確認した。さらに、この有限要素分割中の界面要素に対して、等値面作成アルゴリズムを用いた領域の単体分割手法を示した。

本章で示した有限要素分割を直交固定格子とする有限要素モデルは、第 4 章で提案した粗骨材 - モルタル界面を含む特殊な有限要素を用いることで、要素分割とは殆ど無関係に粗骨材 - モルタルの複雑な三次元幾何学構造を表現することができる。但し、このような形状の幾何学情報を個々の有限要素内部に保持する有限要素モデル化手法は、従来の自動有限要素分割では要素分割が困難な形状に対して用いられるべき代替的な手法であると考えられる。

第 6 章 非線形問題による本解析手法の検討

6.1 はじめに

本章では、前章まで述べてきた一連の有限要素解析手法をコンクリート材料の一軸圧縮破壊の非線形問題に適用し、この解析手法の適用性について検討する。このために、メゾ構造の材料構成則としては簡潔なものを用いる。

6.2 粗骨材 - モルタル界面の構成則

界面の引張りひび割れ破壊の構成則として、連続損傷力学に基づく Oliver(1996) のモデルを用いる。このモデルは、損傷量 d ($0 \leq d \leq 1$) を導入して、構成則を次式で表現するものである。

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.1}$$

ここに、行列・ベクトル表現を用いている。損傷の発生条件は、 σ_u を一軸引張強度として、界面の主応力が図 6.1 に示す主応力座標系の着色部に位置した時である。また、主応力座標系の第 3 象限では初期剛性を回復するものとする。引張軟化は、次式で表される破壊エネルギーを考慮した指数関数型のものであり、除荷は原点への線形弾性回復として扱っている。

$$d = \begin{cases} 0 & r < r_0 = \sigma_u / \sqrt{E} \\ 1 - \frac{r_0}{r} \exp(H(r/r_0 - 1)) & r_0 < r \end{cases} \tag{6.2}$$

$$r = \max_{s \in (-\infty, t)} \{ r_0, \tau_s^\varepsilon \} \tag{6.3}$$

$$\tau^\varepsilon = \sqrt{\sum_1^{\dim} \langle \bar{\sigma}_i \rangle \varepsilon_i} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.4}$$

$$\bar{H} = -r_0^2 / G_f \tag{6.5}$$

$$H = \bar{H}k \tag{6.6}$$

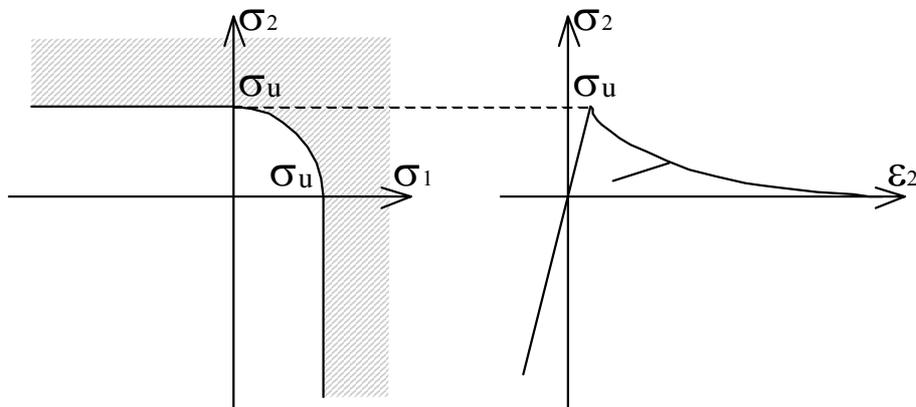


図 6.1 粗骨材 - モルタル界面における損傷の発生条件と構成則

ここに、すべての定数と変数は界面において定義されるものであり、 E はヤング係数、 G_f は界面の破壊エネルギー、 $\bar{\sigma}$ は有効応力である。 $\langle \cdot \rangle$ は主応力座標系において引張成分のみを取ることを表す。損傷量 d は、式 (6.3) から分かるように過去の最大履歴により決定され、それを越えた場合にのみ増加する単調増加な関数である。また、式 (6.5), (6.6) により、引張軟化を微小な界面の幅 k に応じて正規化している。

ところで、第 4.4 節に示したように要素剛性の評価法として微小な界面の幅 k を $k + 0$ として近似的に評価する場合には、ひずみは有界ではないので式 (6.1) の代わりとして式(4.49)と同様に積分的に考えて、界面内の応力 σ と界面の両面での不連続変位差 \mathbf{u}_{He} との関係で表した次式を用いる。

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\mathbf{C}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k \quad \boldsymbol{\varepsilon}^k = \mathbf{N} \mathbf{u}_{He} \quad (6.7)$$

ここに、 \mathbf{C}^k は等価な材料定数であり、 \mathbf{N} は式(4.22)で表されるような界面の法線に関する行列である。このとき、式 (6.2) ~ (6.6) の代わりに次式を用いる。

$$d = \begin{cases} 0 & r^k < r_0^k = \sigma_u / \sqrt{E^k} \\ 1 - \frac{r_0^k}{r^k} \exp\left(H(r^k/r_0^k - 1)\right) & r_0^k < r^k \end{cases} \quad (6.8)$$

$$r^k = \max_{s \in (-\infty, t)} \{r_0^k, \tau_s^{\varepsilon k}\} \quad (6.9)$$

$$\tau^{\varepsilon k} = \sqrt{\sum_1^{\dim} \langle \bar{\sigma}_i \rangle \varepsilon_i^k} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k \quad (6.10)$$

$$H = -\frac{(r_0^k)^2}{G_f - 1/2(r_0^k)^2} \quad (6.11)$$

なお、界面要素内部の応力については、粗骨材領域 Ω_{be}^- 、モルタル領域 Ω_{be}^+ 、界面領域 S_{be} でそれぞれ平均して個別に評価するものとする。

6.3 平面ひずみ問題の一軸圧縮

第 5.2 節で得られた階層型デジタル画像による有限要素分割モデルを用いて、本論文で提案する解析手法の検討を平面ひずみ問題にて行う。材料定数は、既往の文献(破壊力学の応用委員会 1993, 梶川ら 1985, Lee 1992)などを参考にして表 6.1 に示すように決定した。界面の厚さは数 $10\mu\text{m}$ であり、界面のヤング係数がモルタルのヤング係数より数倍低くなるように、界面の等価ヤング係数を定めた。一般に界面の破壊は混合破壊モードであるため、界面の法線と主応力方向との関係によって破壊エネルギー G_f は変化すると考えられる(Lee 1992)が、本例では一定とした。また、界面の摩擦は無視した。境界条件は、図 6.2 に示すように解析領域の上下面を横方向無拘束として、上面に一律な強制圧縮変位を与えた。非線形方程式の求解法は、軟化を取り扱うものの応力勾配があ

表 6.1 材料定数

	ヤング係数 E	ポアソン比 ν	破壊エネルギー G_f	一軸引張強度 σ_u
粗骨材	69 GPa	0.20	-	-
モルタル	25 GPa	0.20	-	-
界面	250 GPa/mm	0.20	4.9 J/m ²	1.2 MPa

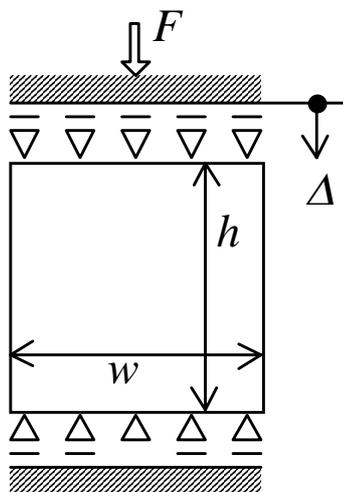


図 6.2 解析例題 (平面ひずみ問題)

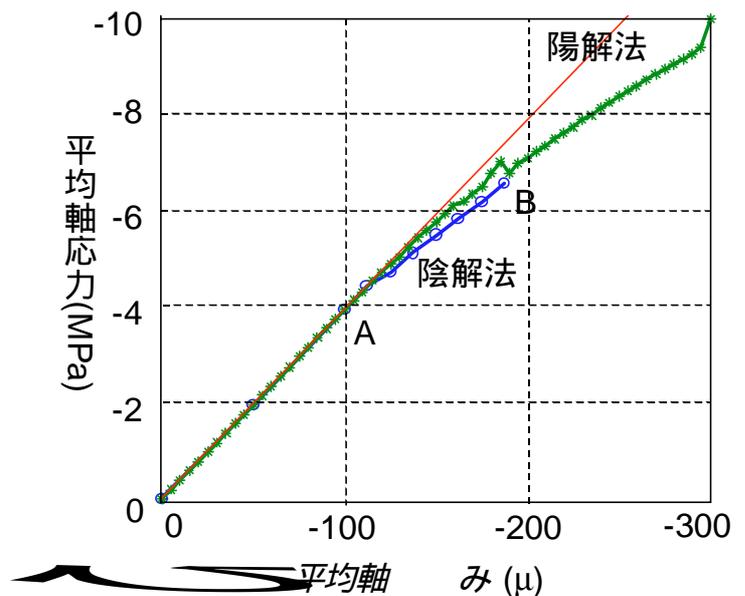


図 6.3 平均軸ひずみ - 平均軸応力関係

ることから一意な解が得られる可能性が高いと考え、陰解法による割線剛性法を用いた。

引張側を正として、解析結果を示す。図 6.3 は鉛直軸方向の平均ひずみ - 平均応力関係である。同図中のほとんど線形範囲内である A 点における最小主応力度分布を図 6.4 (a) に示す。また比較のために、同条件で適合要素のみを用いた線形解析を行った。この場合の A 点相当の最小主応力度分布を図 6.4 (b) に示す。適合要素のみを用いた場合には、界面を階段状に近似していることから、界面近傍の要素の応力には数値振動が生じている。一方で、界面要素を用いた図 6.4 (a) の場合、界面を滑らかに近似していることから、応力に関して滑らかな数値解が得られている。なお、界面を境として応力が不連続となっているが、界面では表面力は連続であっても一般に応力は不連続であることから、妥当な結果である。

図 6.3中の B 点における有限要素メッシュの変形、最小主応力度分布、損傷量分布をそれぞれ図 6.5 (a)~(c) に示す。圧縮変位の増加に伴い、損傷量分布に示すような主に鉛直方向の粗骨材 - モルタル界面に引張損傷破壊が生じる結果、鉛直軸方向の平均ひずみ - 平均応力関係には剛性劣化が現れていることが分かる。また、若干の界面要素には力学的に不合理な応力振動が生じているが、これが非線形解析に及ぼす影響については考慮しておく必要がある。これは 4 章で示した要素改良に起因していると考えられる。

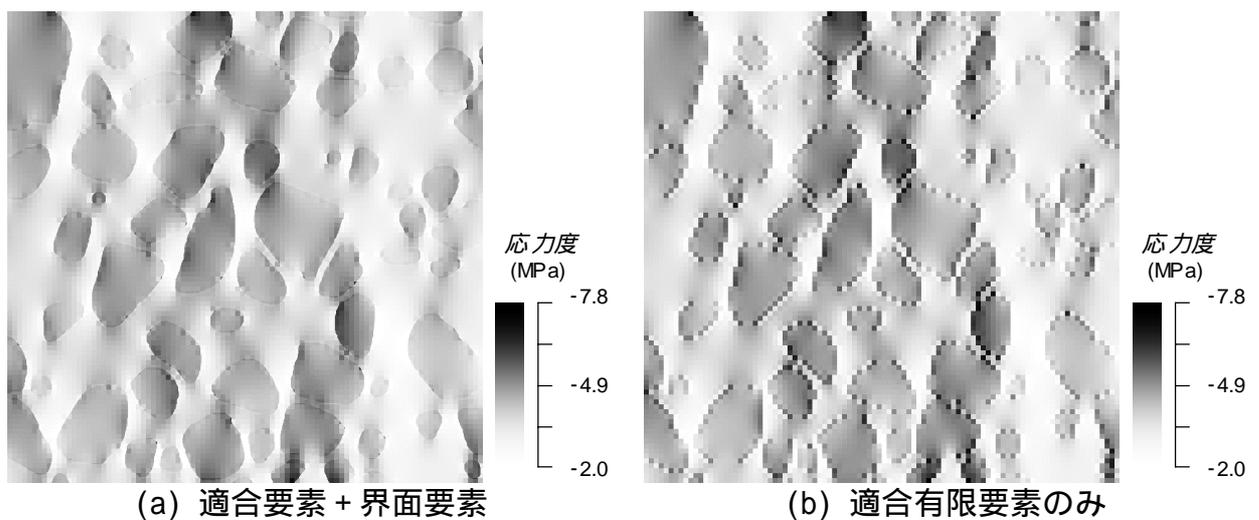
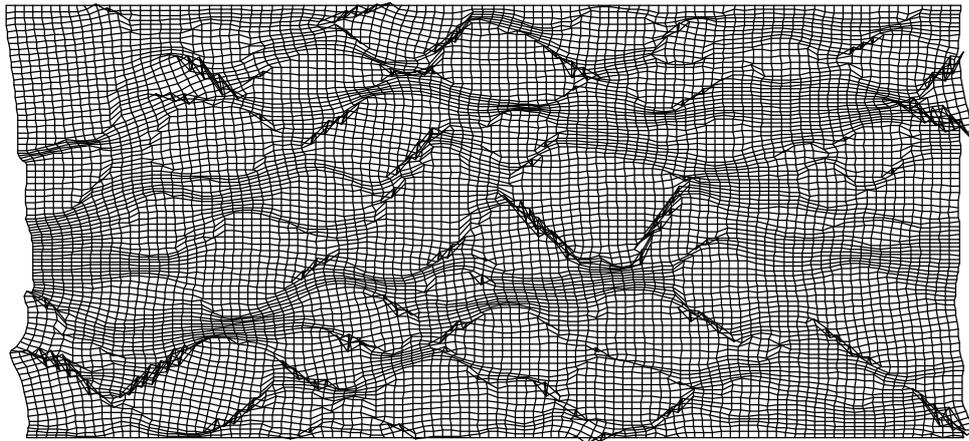
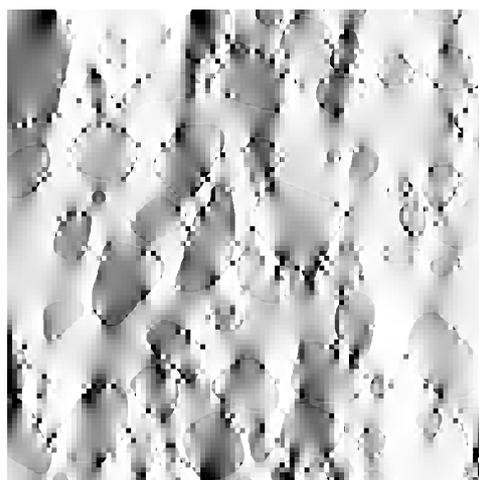


図 6.4 線形範囲内 A 点における最小主応力度分布の比較

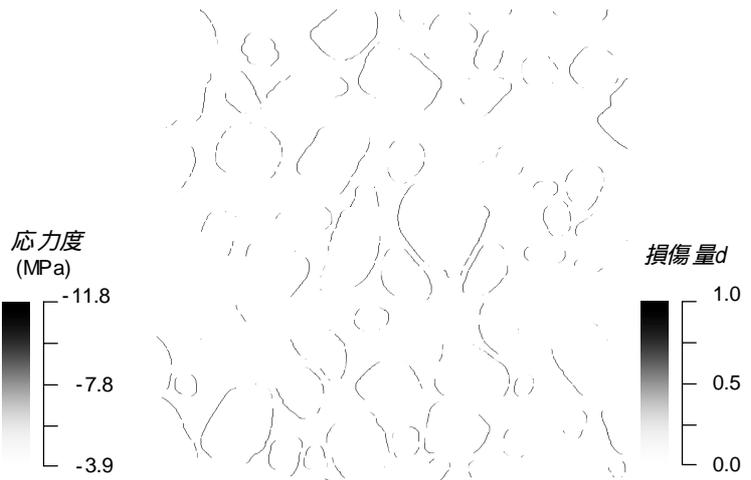
B 点以降、圧縮応力を大きくしていくと、陰解法では非線形方程式の反復求解が収束せず振動を始めた。これは、粗骨材 - モルタル界面の構成則構成の問題、もしくは軟化を扱っていることから解が一意に定まらない分岐であると考えられる。そこで、陽解法により解きなおして圧縮応力を大きくしていくと、図 6.3 に示すように約-9MPa に達した時点で、側面の粗骨材が側方に押し出され不安定となった。



(a) 有限要素メッシュの変形 (2500 倍)



(b) 最小主応力度分布



(c) 損傷量分布

図 6.5 B 点における各種状態量

6.4 均質化法による三次元問題の一軸圧縮

均質化法を適用した巨視的一軸圧縮の計算例を示す。粗骨材・モルタル・界面の各材料定数は表 6.1 に示したものをを用いて、混合破壊モードの破壊エネルギーを一定とする。非線形方程式の求解には、陰解法による割線剛性法を用いる。連立一次方程式の反復求解の収束判定は外力に対する残差の L2 ノルム比で 10^{-6} 、非線形方程式の求解の収束判定は外力に対する残差の L2 ノルム比で 10^{-3} とした。

1) 1 個の球体粗骨材を含むモデル

16mm 立方のメゾ構造のほぼ中心に直径 9.4mm の球体粗骨材を配置し、直交固定格子で 16^3 に要素分割した有限要素モデルを用いる。このモデル内部の界面要素内部で定義される界面のみを三角形分割で表現したものを図 6.6 に示す。载荷軸方向の巨視的な応力 - ひずみ関係と、それに対応するメゾ構造の粗骨材 - モルタル界面の損傷量分布、鉛直中央断面での最小・最大主応力を図 6.7 に示す。ここに、応力の色は巨視的な軸応力で正規化し、1 要素あたり 2^3 画素で表示している。

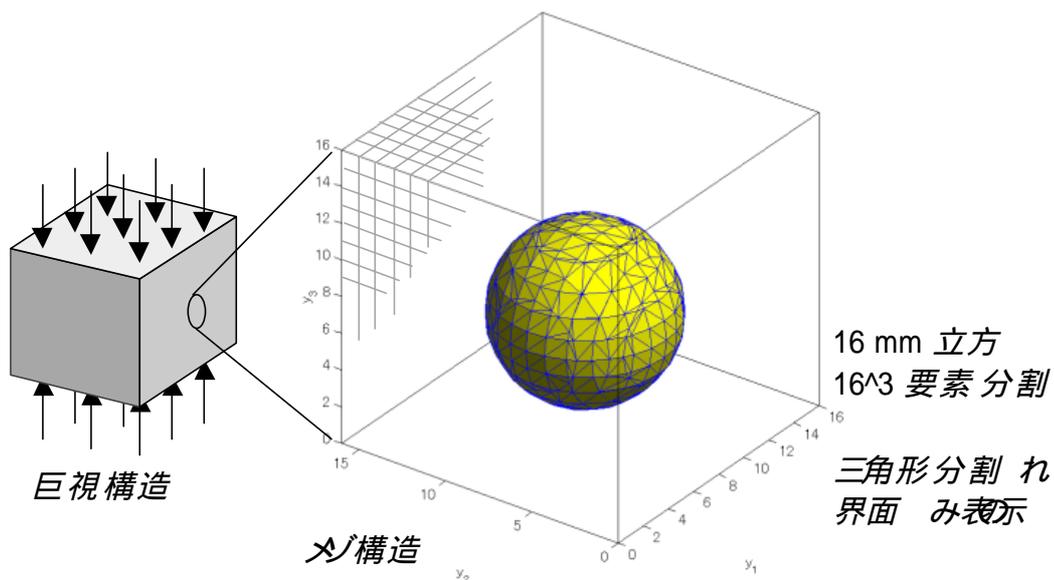


図 6.6 球体粗骨材 1 個の有限要素モデル

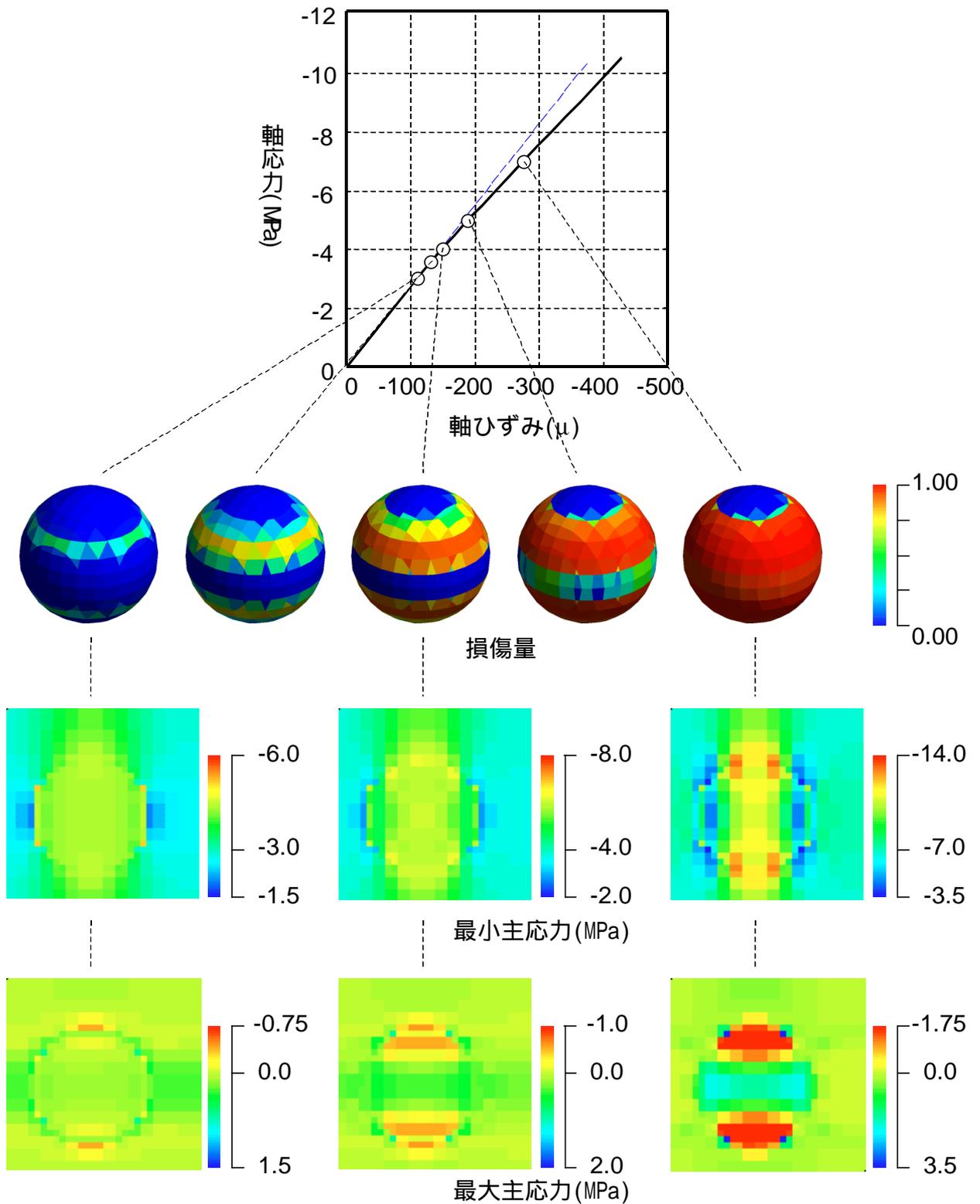


図 6.7 球体粗骨材 1 個のモデルの軸ひずみ - 軸応力関係とそれに対応する各種状態量

界面の損傷を要素別に見ると若干振動しているが、応力増分に対して全体としての損傷は、粗骨材の中緯度付近で始まり、少し遅れて赤道付近に広がっていく様子が見られる。この損傷進展は、和泉ら(1980)が行った模式図 6.8 に示すような円柱骨材 1 個を含んだ供試体の 1 軸圧縮試験の観察結果と定性的に一致している。界面が十分に損傷した後は、最大主応力図から、モルタルの損傷は粗骨材上下の载荷軸方向もしくは斜め方向に放射状に進展することが予想できる。また、粗骨材側面の損傷進展に伴い圧縮束が発達し、粗骨材の応力状態は三軸応力へと変化していることがわかる。これは、円柱を側面から圧縮したときの二軸状態に類似していると考えられる。但し、第 4.5 節で述べたように、界面をはさんでその法線方向にそれぞれ独立に変形するモードに対しては、変形が拘束されることに注意しておく必要がある。つまり、界面の損傷が十分に発達したとき、粗骨材の赤道付近の応力には、この変形拘束に起因した成分が混入していると考えられることが妥当である。

本解析においては、混合破壊モードの比率に応じて破壊エネルギーを可変とせず一定としていることは先に述べた通りである。破壊エネルギーを可変とした場合には、引張破壊モードが支配的な赤道付近に比べてせん断破壊モードが大きく効いてくる中緯度付近で、より大きな破壊エネルギーを要する。したがって、相対的に中緯度付近の損

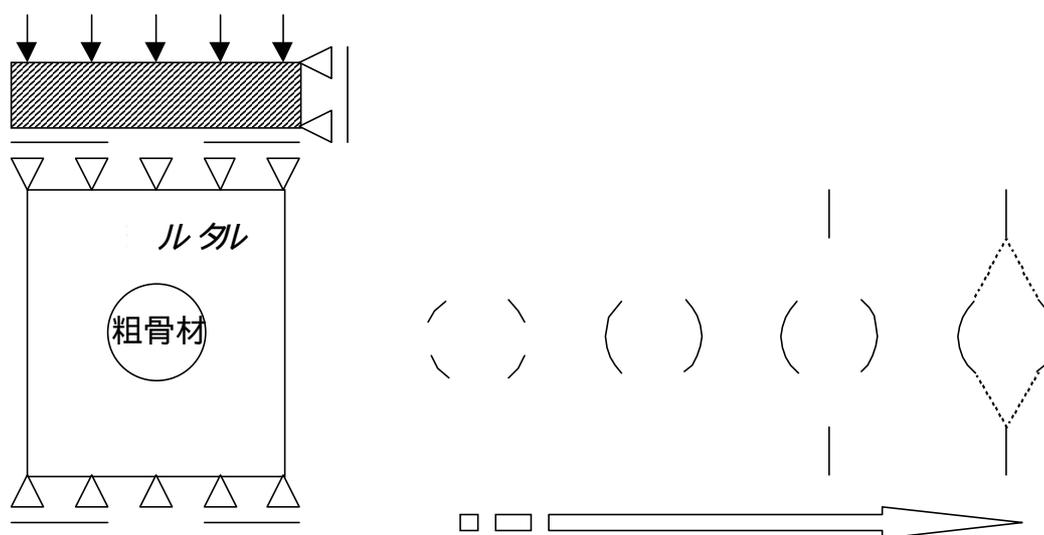


図 6.8 円柱粗骨材周りのひび割れ進展（模式図）

傷進行が抑えられることになるので、赤道付近への損傷進展はより急激に生じることになると考える。

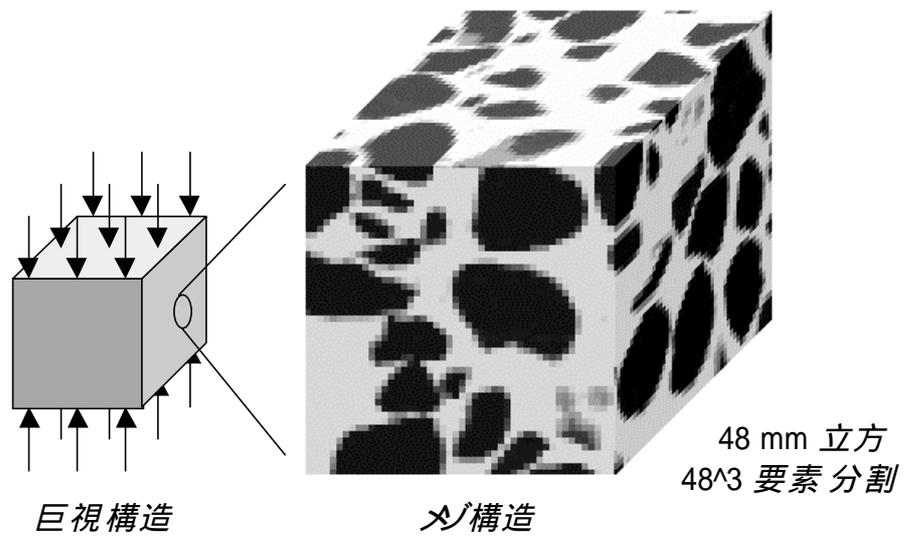
なお、第 3 章で述べた連立一次方程式の反復求解法であるスペクトル前処理付き共役勾配法は、全体剛性行列が対称となる問題に対するものである。一方で、界面要素の要素剛性行列は非対称であることから、本問題の全体剛性行列は非対称となるが、第 3 章で述べたスペクトル前処理付き共役勾配法を用いて収束させることが可能であった。これは、弾性問題は元々エネルギー原理により対称性が保証されていることから、離散化の過程において非対称となってもその非対称性は弱いためであると考えられる。なお、前処理を施さない共役勾配法では収束しないことを確かめている。

2) コンクリート材料のデジタル画像モデル

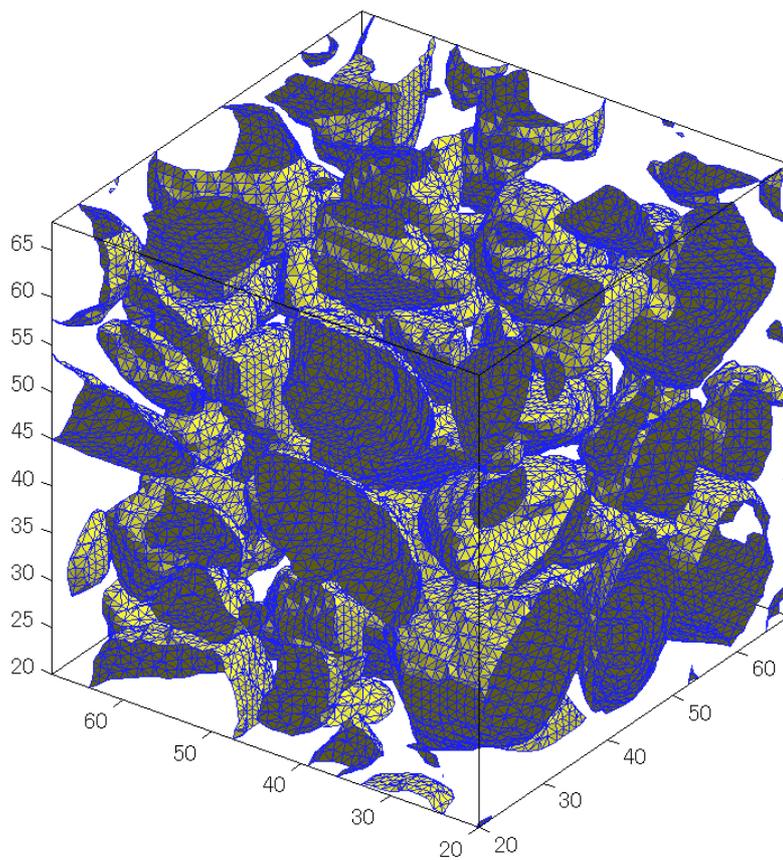
第 2.3 節で示した実際のコンクリート材料のデジタル画像から 48mm 立方の三次元多階調デジタル画像切り出して、直接に 48^3 に要素分割したメゾ構造の有限要素モデル(11 万要素, 33 万自由度)を図 6.9 (a) に示す。このモデル内部の界面要素内部で定義される界面のみを三角形分割で表現したものを同図(b)に示す。なお、このデジタル画像は、第 5.2 において示したモルフォロジー処理を施していないものであるため、不良な界面要素が約 300 要素存在している。計算はパーソナルコンピュータ(Dual Pentium III 500MHz, 512MB memory)を 1CPU で行った。

巨視的なひずみ - 応力関係を図 6.10 に示す。図中の A 点は実質的な線形限界、B 点は解析終了点である。解析は連立一次方程式の共役勾配法による反復求解が破綻することにより終了した。この破綻については、球体粗骨材 1 個モデルにおいて述べたような全体剛性行列の非対称性、もしくは不良な界面要素も近似的に積分評価していることからひび割れ進展に伴い不安定となった可能性などが考えられる。これについては今後の検討が必要であるが、本質的な問題ではないと考える。

解析終了点 B におけるメゾ構造の粗骨材 - モルタル界面の引張破壊による損傷分布を図 6.11 に示す。線形限界点 A と解析終了点 B におけるメゾ構造の主応力分布を図 6.12 に示す。ここに、応力の色は巨視的な軸応力で正規化し、1 要素あたり 2^3 画素で表示している。界面が損傷することにより応力再配分が生じていることがわかる。



(a) 解析モデル



(b) 有限要素分割中の三角形分割された界面

図 6.9 デジタル画像有限要素モデル

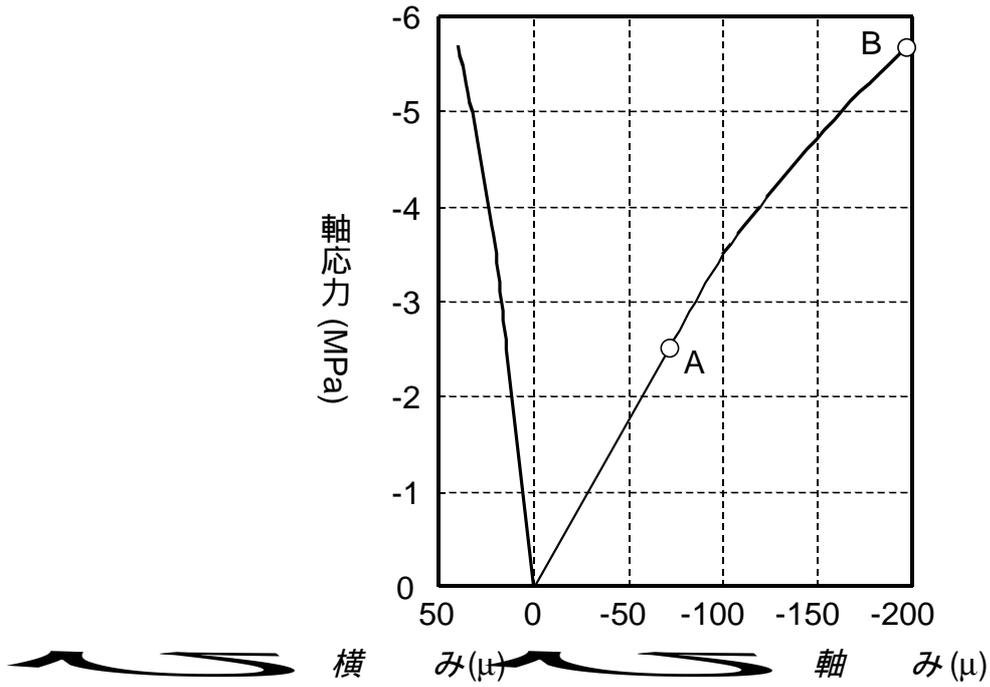


図 6.10 巨視的ひずみ - 軸応力関係

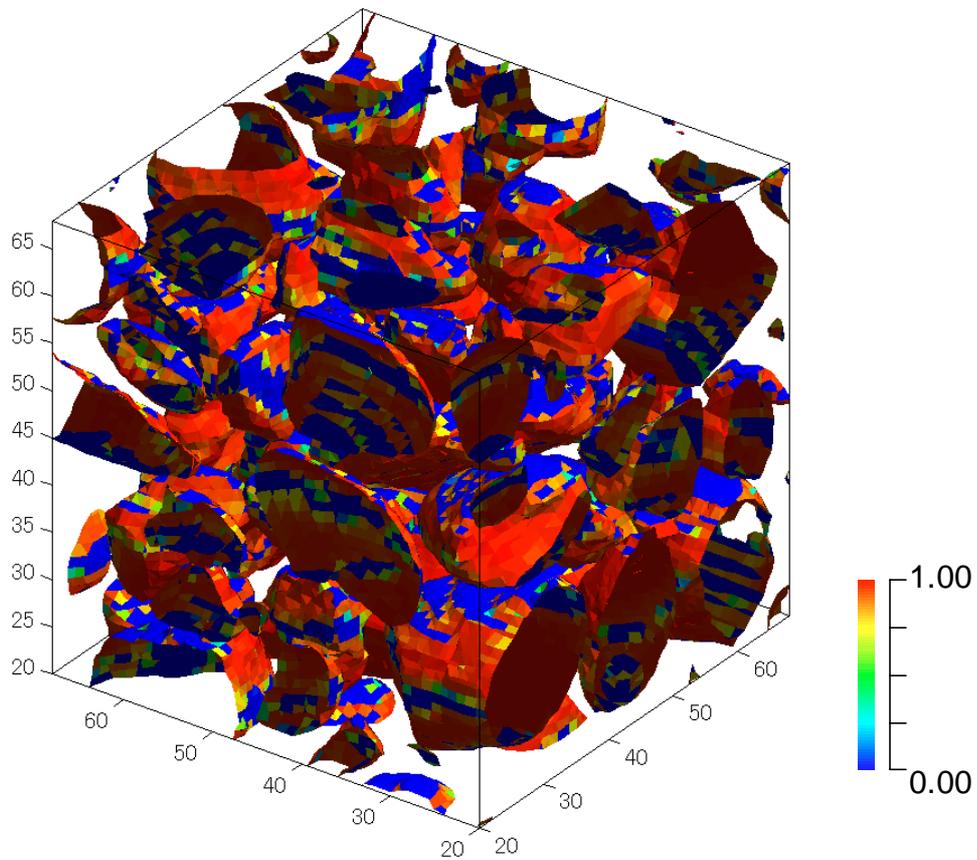
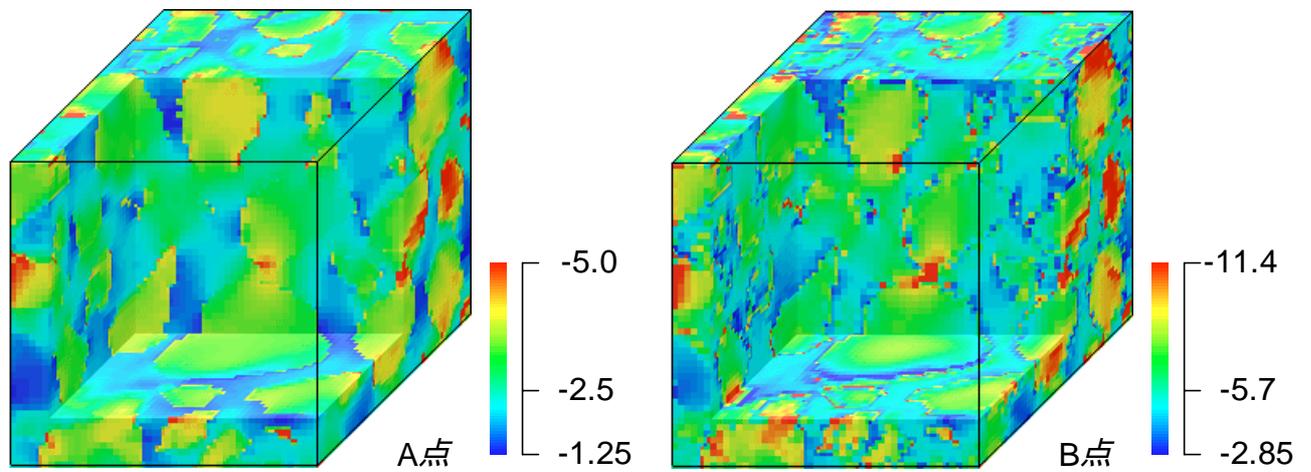
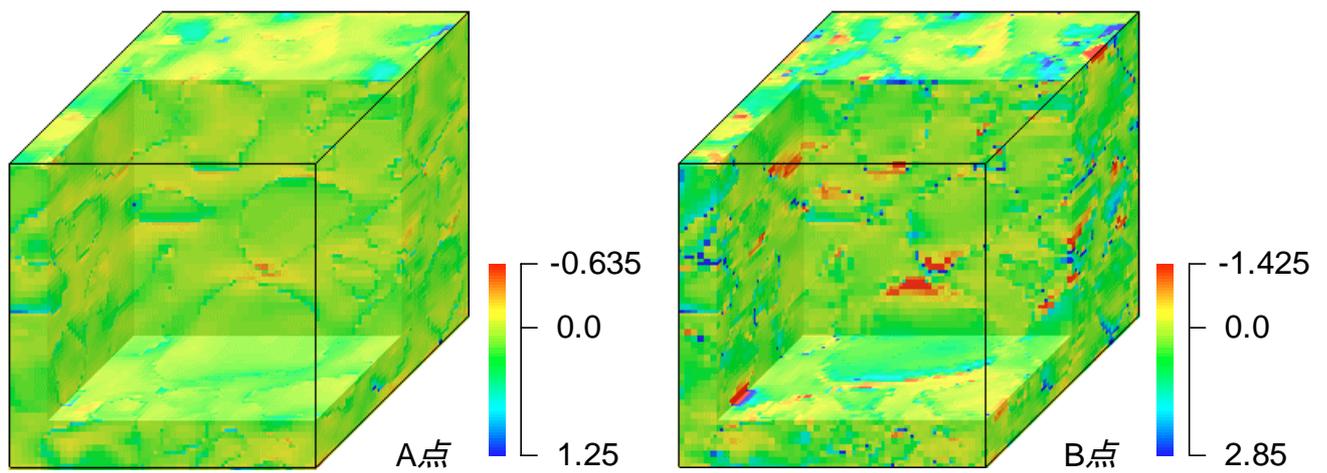


図 6.11 解析終了点 B における損傷量



(a) 最小主応力 (MPa)



(b) 最大主応力 (MPa)

図 6.12 線形限界点 A と解析終了点 B における主応力

6.5 まとめ

本章では、第 2 章から第 5 章まで述べてきた一連の解析手法をコンクリート材料の一軸圧縮破壊の非線形問題に適用し、この解析手法の適用性について検討した。その結果、粗骨材 - モルタルのメゾ構造の不均質性に起因する局所的な引張破壊を表現できることを示した。また、これらの局所的な引張破壊が進行することにより、巨視的な軸ひずみ - 軸応力関係には剛性低下が生じることを示した。いずれの計算例も、粗骨材 - モルタル界面の引張破壊のみを考慮してモデル化したものである。今後、粗骨材・モルタル中に進展するひび割れについては、簡単には分散ひび割れモデルにより表現できると考えている。本章で有限要素に組み込んだ粗骨材 - モルタル界面の構成則は、混合破壊モードの影響と摩擦を無視した極めて簡単なものであるので、より詳細な検討を行い、破壊現象を説明することは今後の課題である。

第 7 章 結論及び展望

7.1 結論

本研究は、コンクリート材料の巨視的な破壊現象、特に普通コンクリートの低側圧下の圧縮破壊現象を、コンクリート材料内部の不均一性に起因する局所的な引張破壊から詳細に説明することを目的として、これを行うことのできる有限要素解析手法を提案したものである。以下に本研究の総括を行い、結論を述べる。

コンクリート材料の巨視的な圧縮破壊現象を局所的な引張破壊から説明するためには、コンクリート材料をマルチスケール材料と見なして、粗骨材とモルタルからなるメゾ構造を 2 相複合材料として取り扱うことが妥当であると考えられる。これを本研究におけるモデル化の出発点として、詳細な応力解析を行うための前提となる現実のコンクリート材料のメゾ構造を十分に反映した有限要素モデルの作成手法を述べた。すなわち、実際に存在するコンクリート材料をデジタル画像撮影し、それを直接に直交固定格子の有限要素分割とする手法の適用を試みた。これは、近年の計算機性能の向上をかんがみて、従来の有限要素モデルの作成手法とは大きく異なった手法を提案している研究の考え方を取り入れたものであり、デジタル画像処理のみで有限要素モデルの作成を行うものである。したがって、対象となる物体のデジタル画像を得て画像処理を施すことができれば、二次元、三次元での幾何学形状の複雑さに関係なく、一律かつ容易に幾何学的に精確な有限要素モデルを得ることができる。このデジタル画像に基づく有限要素モデルの作成手法を用いた場合と、従来の有限要素のモデル作成手法を用いた場合について、それぞれの線形応力解析の結果を比較することにより、実際のコンクリート材料の三次元幾何学構造を十分に反映することが重要であることを確認した。(主に第 2 章)

本解析手法においては、問題の自由度数が多くなることから連立一次方程式の求解には反復系の求解法が適しているが、要素分割が直交固定格子であることから様々な効率的な前処理を行うことができる。本研究では、反復系の求解法の中でも有限回数で厳密解に収束することが知られている前処理つき共役勾配法を用いることとし、マルチスケール問題としての定式化からメゾ構造に対して課せられる周期領域条件を利用して、フーリエ変換などのスペクトル変換を用いた前処理因子を提案した。数値実験により、所定誤差までの反復回数は問題の自由度数の大きさに殆ど依存せず、非常に少ない反復回数となることを確認した。この前処理付きの共役勾配法を用いることにより、非常に

大規模な三次元問題に対しても、最も計算時間の要する連立一次方程式を高速かつ効率的に求解することが可能となった。(主に第 3 章)

ところで、幾何学的に精確な三次元有限要素モデルを作成することが本研究の出発点であり、そのためにデジタル画像を用いて直交固定格子の有限要素分割を行うという考え方を取り入れたが、この考え方は有限要素モデルを容易かつ一律に行う代償として幾何学形状の境界を階段状に近似するものである。コンクリート材料の粗骨材・モルタルのメゾ構造において、考慮すべき局所的な引張破壊としてはモルタルの引張破壊はもちろんであるが、普通コンクリートの場合、それに先だって粗骨材 - モルタル界面の引張破壊をモデル化することが重要であると考え。そこで、直交固定格子の有限要素分割を行うことを前提として、この要素分割とは殆ど無関係に粗骨材 - モルタル界面を定義する手法を提案した。すなわち、数多く提案されている不連続有限要素を参考として、要素内部の任意位置に界面を含む新しい混合型の有限要素を提案した。この要素内の変位の非適合モードとしては、ひとつの要素内部に界面を挟んで存在する粗骨材とモルタルの異種材料を表現するための ramp 関数、界面のひび割れを表現するための Heaviside 関数である。制約条件は表面力の領域平均的な連続条件であり、非対称行列となる要素剛性を導くものである。この界面を内部に含む有限要素の要素剛性積分の評価法として、高解像度な埋め込みデジタル画像を数値積分点として用いる方法と、粗骨材とモルタルの領域を三角形や四面体に細分割することにより解析解を用いる方法を述べた。この要素の性能確認として固有値解析と単純な線形解析を行い、界面が存在することによる変形特性に対して高い表現能力を持つことを確認した。(主に第 4 章)

このように要素内部の任意位置に界面を埋め込んで定義できる有限要素を提案したが、定式化上の制約から界面は要素内で滑らかで 1 面のみ含むと言う幾何学的な仮定を設けている。しかしながら、この要素内の界面を表現するために高解像度な埋め込み画像を用いる場合、デジタル画像の雑音や粗骨材の凸凹の高次成分のために、界面は必ずしも滑らかとはならない可能性がある。また、デジタル画像から推定される界面は要素内に数面存在している可能性がある。そこで、集合論の一種であるモルフォロジー理論を用いた画像修正手法を提案した。この画像修正はわずかなものであるが、数値解析上の問題を回避できるものである。さらに、離散データの等値面作成アルゴリズムを用いて、界面を含む有限要素を特定し、曲面としての界面を推定して粗骨材とモルタルの各領域

を三角形や四面体に細分割する手法を述べた。(主に第 5 章)

これら一連の手法を組合せた場合を検証するために、普通コンクリートを想定して粗骨材 - モルタル界面の引張破壊のみを簡単な構成則でモデル化して、巨視的な一軸圧縮破壊解析を行った。その結果、巨視的視点で観察することのできる初期の非線形力学挙動を、粗骨材・モルタルのメゾ構造の引張破壊から表現できることを確認した。したがって、引き続きモルタルの引張破壊もモデル化することにより、本解析手法は巨視的な圧縮強度までの非線形力学挙動も表現できる可能性があると考えられる。(主に第 6 章)

以上、本研究で提案する粗骨材・モルタルのメゾ構造の破壊、特に圧縮破壊、に対する有限要素解析手法は、従来の数値解析手法を用いた場合には困難であると考えられる詳細な三次元解析を行うことができるという意味において、コンクリート材料の破壊現象の詳細な説明を可能とするための一解析手法として有用であると考えられる。

7.2 展望

本論文で提案した解析手法では非線形要因として界面の引張破壊のみを考慮しているに留まることから、第 1.2 節「本研究の目的」で述べたように、局所的な引張破壊のみで巨視的な圧縮破壊を説明するという目的を達成するためには、今後、均質材料と仮定している粗骨材とモルタル中へのひび割れ進展をモデル化し、それに伴う軟化現象を上手く取り扱うことが必須である。これらを行うことにより、引張破壊のみで巨視的な圧縮破壊強度を捉えることが出来ると考えている。さらには、圧縮軟化挙動まで予測しうる可能性もある。当然、本解析手法が圧縮問題に適用できれば、引張問題にも適用可能であると考えられる。具体的には、以下の事項について研究を行う必要がある。なお、本研究では一切触れなかった多軸圧縮挙動や巨視的なせん断挙動については、それぞれ粉体破壊と有限変形による骨材の噛み合いも主要因として考慮する必要があると考えられるので、基本的なモデル化から改めて行う必要があるだろう。

1) 均質材料と仮定した粗骨材とモルタル中へのひび割れ進展のモデル化について

均質材料と仮定している粗骨材とモルタル中へ進展する引張破壊は、有限要素法の場合もっとも簡単には、分散ひび割れ有限要素モデルを用いて表現できる。この分散ひび割れモデルを用いる場合には、ひび割れによる変位差をひずみで表現する事から要素寸法への依存性が知られており、一般には、これを回避するために破壊エネルギーによる正規化が必要である。但し、この要素寸法への依存性は、大きく成長して要素寸法以下に局所化するひび割れに対してのみ考慮すべきものであることに注意しておく必要がある。これを踏まえると、粗骨材 - モルタルのメゾ構造中のモルタルには、ある程度まで有限要素寸法以上の幅で微細ひび割れによる損傷が進行する破壊進行領域が存在していると考えられる事ができる。したがって、モルタル中に進展する引張破壊は、まず分散ひび割れモデルで表現する事が妥当であると考えられる。その後、引張破壊領域の幅が有限要素寸法以下に局所化した時点で、本研究でも提案した不連続要素でモデル化すればよい。すなわち、異種材料による変位勾配差を表現する ramp 関数を考えずに、ひび割れを表現する Heaviside 関数のみを考えればよい。

一方で現状において、不連続要素だけでなく一般的に、均質材料中に複雑に進展していく不連続面を精度よく追跡することは二次元でさえも困難な問題であり、三次元均質

材料中に同時多発的に入るひび割れに対しては、革新的な手法が要求されることが予想される。不連続要素を用いた研究の場合、各不連続要素内で独立に不連続面を発生させているものも幾つかある(例えば、呉ら 1998, Jirásek 1998)。このようにすると確かに計算を進めることができるものの、本研究の界面の定式化過程において示したように、不連続面は各要素間で連続している保証は何処にもない。これが満たされない場合には変形が拘束されることになる。したがって、不連続要素を用いる場合でも、厳密には各有限要素節点を矛盾なく不連続面で分割する必要があると考える。もしくは、等値面作成手法を応用して、不連続面が要素間で連続せずとも全体としておおよそのひび割れ進展のモデル化ができる可能性があるかもしれない。今後、いずれにせよ本研究の目的に適ったひび割れ進展のモデル化手法を開発・検討する必要がある。

2) 軟化を含む大規模な非線形方程式の求解の取り扱いについて

巨視的な圧縮破壊を局所的な引張破壊のみで表現するという事は、単調載加において巨視的な強度点以前においても、部分的に引張軟化が生じていることに他ならないので、厳密には分岐を考える必要がある。しかしながら、複合材料という不均質性が初期不整として働くので、実用上は細かく計算を進めていけば良いと考える。計算を進めていく上で、非線形方程式の求解課程において解が収束しなくなるという問題の出現が予想されるが、これに対する検討が必要である。事実、本非線形解析の範囲においても、簡潔な粗骨材 - モルタル界面の構成則を用いたことが主要因であると考えられるが、収束しない場合があった。現時点において、その原因は分かっていない。

ところで、マルチスケール材料として考えて均質化法を用いて計算を行う場合、軟化は変形の局所化を伴うので、均質化法の適用限界に注意しておく必要がある。均質化法を問題無く適用できる範囲は、破壊を材料としての問題で扱える範囲である。すなわち、変形の局所化が進行して最終的な破壊状態となる訳であるが、これは明らかに材料の問題ではなく構造物としての問題として取り扱うべきであり、変形が局所化していくにしたがい、破壊は材料としての問題から構造物としての問題に移行して行くと考えられる。このような考察に加えて境界条件が破壊形態に大きな影響を与えるので、実験との比較を考えて、実際のコンクリート材料の圧縮強度試験と同様の境界条件とした解析も行う必要がある。それゆえ、共役勾配法の前処理因子として、均質化法と直交固定格子の特徴を最大限に活かした高速スペクトル変換の他に、マルチグリッド法などについても検

討を行う必要がある。マルチグリッド法では波数空間だけでなく空間に対する分解能もあるので、引張軟化に伴う材料定数の変化による剛性マトリクスの条件数の悪化に対しても有効であると予想する。このような計算には、大規模な並列計算を行う必要がある。

3) 圧縮破壊の数値実験について

本研究で提案する粗骨材・モルタルのメゾ構造の有限要素解析手法では、現在の計算機性能で、10x10x20cm 程度のコンクリート角柱供試体の解析領域を非線形計算することが可能であると考えられる。有限要素分割の幾何学モデルとしては、デジタル画像を得ることができれば良いので、実際のコンクリート材料に対して破壊検査を行う他、あらかじめ造影剤を混入しておいて X 線 CT などの非破壊検査を行うことも可能である。非破壊検査によりデジタル画像を得る場合には、モデル作成のみでなく、各種力学実験を行いながら同時に非破壊検査を行い、計算結果との詳細な比較を行うことも原理的には可能である。また、述べるまでも無いが、本研究では有限要素法の幾何学モデルとして実際のコンクリート材料メゾ構造の幾何学構造を用いる手法を主に述べたが、幾何学モデル自体を任意形状の粗骨材で計算機上にデジタル画像として創出することにすれば、粗骨材の形状と配置を変動要因とした比較計算等を容易に行うことができる。パラメータとして、メゾ構造の碎石や天然砂利などの幾何学形状や材料定数、界面や進展するひび割れの構成則（摩擦も考慮）などに選ぶことにより、巨視的な圧縮破壊の挙動を詳細に調べることができると思う。

参考文献

- 荒井正直, 船見晃啓, 黒川善幸, 森博嗣, 谷川恭雄: 非連続体モデルを用いたコンクリートの破壊解析手法, 日本建築学会構造系論文集, 第 471 号, 1-9, 1995.5
- G. Beylkin: On the Representation of operators in bases of compactly supported wavelets, SIAM J. Num. Anal., 6(6), 1716-1740, 1992
- T. Belytschko, J. Fish and B. E. Engelman: A finite element with embedded localization zones, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 70, pp. 59-89, 1988
- C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni and T. A. Zang: Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1987
- M. L. Wang, Z. Chen: Experimental and numerical investigations of concrete failure under triaxial loading, Fracture Mechanics of concrete Structures (eds. H. Mihashi and K. Rokugo), Proceedings FRAMCOS-3 ,AEDIFICATIO Publishers, pp.793-802
- W. A. Cordon and H. A. Gillespie: Variables in concrete aggregates and Portland cement paste which influence the strength of concrete, pp. 1029-1052, ACJ journal, 1963.8
- M. Frigo and S. G. Johnson: FFTW User's Manual for version 2.0, home page <http://www.fftw.org/> ,1998
- K. Garikipati and T. J. R. Hughes: A variational multiscale approach to strain localization -Formulation for multidimensional problems, preprint, 1999
- R. Glowinski, A. Rieder, R. O. Wells and X. Zhou: A wavelet Multigrid Preconditioner for Dirichlet Boundary-Value Problems in General Domains, preprint ,1994
- J.M.Guedes and N.Kikuchi: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, Comp. Appl. Meth. Eng., vol.83, pp.143-198, 1990
- 和泉正哲, 三橋博三, 佐々木達夫: コンクリートの圧縮破壊発生機構に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集, 第 289 号, pp. 11-24, 1980.3
- S. Jaffard, Ph. Laurecot: Orthogonal wavelets, analysis of operators and applications to numerical analysis, Wavelet-A Tutorial and applications, Academic Press, Boston, 1992
- M. Jirásek: Embedded crack models for concrete fracture, Computational modelling of concrete structures, de Borst, Bićanić, Mang & Meschke (eds), Rotterdam, pp. 291-300, 1998
- 笠井芳夫, 小林正几: 改訂版セメント・コンクリート用混合材料, 技術書院, 1993

- 梶川康男, 橘吉宏, 吉田博: 骨材 - モルタル平面モデルを用いたコンクリートの変形挙動, 土木学会論文集, 第 356 号 / I-3, 1985.4
- 川井忠彦: 離散化極限解析法概論, 培風館, 1991
- 川上英男: 粗骨材とコンクリート強度に関する基礎的研究(その 1), 日本建築学会論文報告集, 第 166 号, pp. 19-27, 1969.12
- 小坂義夫, 谷川恭雄, 太田福男: コンクリートの破壊挙動に及ぼす粗骨材の影響 (第 1 報: モデル解析法による検討), 日本建築学会論文報告集, 第 228 号, pp.1-11, 1975.2
- 小坂義夫, 谷川恭雄: コンクリートの破壊挙動に及ぼす粗骨材の影響 (第 2 報: マイクロラック観察法による検討), 日本建築学会論文報告集, 第 231 号, pp.1-11, 1975.5
- 小畑秀文: モルフォロジー, コロナ社, 1996
- 破壊力学の応用研究委員会: 破壊力学の応用研究委員会報告書, 日本コンクリート工学協会, 1993
- S.J.Hollister, J.M.Brennan and N.Kikuchi: Homogenization sampling procedure for calculating trabecular bone effective stiffness and tissue level stress, *Journal of Biomechanics*, 27, No.4, pp.433-444, 1994
- S.J.Hollister and N.Kikuchi: Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotech. Bioeng.*, 43(7), pp.586-596 1994.7
- 堀宗朗: 固体力学のマイクロメカニクス理論, 第 41 回日本学術会議材料研究連合講演会前刷集, pp.22-25, 1997.9
- K. M. Lee, O. Buyukozturk and A. Oumera: Fracture analysis of mortar-aggregate interfaces in concrete, *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 118, No. 10, pp. 2031-2047, 1992.10
- 李廷権, 都井裕: 変体塑性・二相材料の破壊挙動の二次元メソ解析, 計算工学講演会論文集 Vol.3, No.3 ,pp.887-890, 1998
- Y. Q. Liu, H. Hikosaka and J. E. Bolander Jr.: Modelling compressive failure using rigid particle systems, *Fracture Mechanics of concrete Structures* (ed. F. H. Wittmann), Proceedings FRAMCOS-2, Elsevier Applied Science, pp.375-382, 1995
- 劉玉擎, 彦坂熙, John Bolander Jr.: コンクリートの内部破壊過程の準微視的数値解析, 構

- 造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第 19 巻, pp.189-194, 1995.7
- W. E. Lorensen and H. E. Cline: Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm, *Computer Graphics*, vol. 21, No. 4, pp.163-169, 1987.7
- P. Mark: Numerical simulation of cracking in concrete during tensile loading, *Proc. EURO-C, Computational modelling of concrete structures*, de Borst, Bićanić, Mang & Meschke (eds), Rotterdam, pp. 119-125, 1998
- 間瀬茂, 上田修功: モルフォロジーと画像解析[I], *電子情報通信学会誌*, Vol. 74, No. 2, pp. 166-174, 1991.2
- 三橋博三: 破壊力学と鉄筋コンクリート構造, *コンクリート工学*, vol.34, No.5, 1996.5
- 森泉和人: 破壊の局所化をシミュレートする微視構造解析モデルの研究動向, *コンクリート工学*, Vol.36, No.6, pp.27-30, 1998.6
- 森野奎二: 骨材との付着の観点から強度をみる, *セメント・コンクリート* No. 546, pp. 124-127, 1992.8
- H. Moulinec and P. Suquet: A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 157, pp69-94, 1998
- T. Nagae, T. Agui and H. Nagahashi: Orientable closed surface construction from volume data, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol. E76-D, No. 2, pp.269-273, 1993.2
- J. Oliver: Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part I: fundamentals, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 3575-3600, 1996
- J. Oliver: Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part II: numerical simulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 3601-3623, 1996
- 尾上清治: 均質化法を用いたコンクリート材料構成則に関する基礎的研究, *東京工業大学平成 5 年度修士論文*, 1994.3
- J. G. Rots: Computational modeling of concrete fracture, Doctoral thesis, Delft university of technology, Delft, The Netherlands, 1988
- M.Saito and M.Kawamura: Resistance of the cement-aggregate interfacial zone to the propagation of cracks, *Cement and concrete research*, vol.16, pp653-661,1986

- E. Schlangen: Computational aspects of fracture simulations with lattice models, Fracture Mechanics of concrete Structures (ed. F. H. Wittmann), Proceedings FRAMCOS-2, Elsevier Applied Science, pp.913-928, 1995
- S. P. Shah and S. Chandra: Critical Stress, volume change, and microcracking of concrete, ACI journal, pp. 770-781, 1968.9
- J. Serra: Image analysis and Mathematical morphology, Academic press, 1982
- 七田裕: 3次元モデルを適用した均質化法によるコンクリート材料構成則に関する基礎的研究, 東京工業大学平成7年度修士論文, 1996.3
- J. C. Simo and M. S. Rifai: A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 29, pp. 1595-1638, 1990
- 周藤安造: 医学における三次元画像処理 - 基礎から応用まで -, コロナ社, 1995
- N. Tanaka, H. Terasaka, T. Shimizu and Y. Takigawa: Incomplete Discrete Wavelet Transform and Its Application to a Poisson Equation Solver, J. Nuclear and Tech., 33(7), 555-561, 1996
- 戸祭邦之: コンクリートの実像 -その性能と性状-, 理工図書, 1999
- 鳥脇純一郎, 横井茂樹: 3次元デジタル画像処理アルゴリズムの基礎, 電子通信学会論文誌, Vol. J68-D. No. 4, pp. 426-432, 1985.4
- 椿龍哉, Mostafa A.M. Abdeen: コンクリートの圧縮破壊挙動の数値シミュレーション, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.16, No.2, 1994
- 椿龍哉: 不連続面の回転を考慮した脆性的材料の変形挙動のシミュレーション, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第19巻, pp. 165-170, 1995.7
- 上田修功, 間瀬茂: モルフォロジーと画像解析[II・完], 電子情報通信学会誌, Vol. 74, No. 3, pp. 271-279, 1991.3
- 内田裕市, 市之瀬敏勝: 破壊のメカニズムと破壊の力学, コンクリート工学, Vol. 37, No.9, 1999.9
- 渡邊岳彦, 清水尚彦: 高性能並列FFT, 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.67-70, 1997.5
- 呉智深, 町田篤彦, 高東劭: 一般的な不連続変形を考慮した混合型有限要素解析法の開発, 土木学会論文集, No. 598/I-44, pp. 149-159, 1998.7

研究に関連して筆者が発表した論文

1. 審査付論文

永井学志, 山田貴博, 和田章: 三次元実画像データに基づくコンクリート材料の有限要素解析手法, 日本建築学会構造系論文集, 第 509 号, pp. 77-82, 1998.7 [主に第 2 章に関係]

G. Nagai, T. Yamada, and A. Wada: Stress Analysis of Concrete Material Based on Geometrically Accurate Finite Element Modeling, Fracture Mechanics of Concrete Structures, Proceedings FRAMCOS-3 (eds H. Mihashi and K. Rokugo), AEDIFICATIO Publishers, pp. 1077-1086, 1998.10

永井学志, 山田貴博, 和田章: コンクリート材料の圧縮破壊のイメージベース有限要素解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 21, No. 3, pp. 157-162, 1999.7

G. Nagai, T. Yamada, and A. Wada: Accurate Modeling and Fast Solver for the Stress Analysis of Concrete Materials Based on Digital Image Processing Technique, International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, First Issue, 2000 (投稿中) [主に第 3 章に関係]

永井学志, 山田貴博, 和田章: 階層型デジタル画像に基づく粗骨材 - モルタル界面を考慮したコンクリート材料の非線形有限要素解析手法, 日本建築学会構造系論文集, 第 528 号, pp. 91-98, 2000.2 [主に第 4 章 ~ 第 6 章に関係]

2. 国際会議

G. Nagai, T. Yamada, and A. Wada: Finite Element Analysis of Concrete Material Based on the 3-dimensional real image data, 4th World Congress on Computational Mechanics, in CD-ROM, 1998.7 (Buenos Aires)

G. Nagai, T. Yamada and A. Wada: Three-dimensional Nonlinear Finite Element Analysis of The Macroscopic Compressive Failure of Concrete Materials Based on Real Digital Image, 8th International Conference on Computing in Civil & Building Engineering, 2000.8 (California) (発表予定)

G. Nagai, T. Yamada and A. Wada: 3-D Mesoscopic Failure Simulation of Concrete Materials by Using Image-Based Finite Element Method, The International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM), 2000.8 (Chicago) (発表予定)

3. 口頭発表

七田裕, 永井学志, 山田貴博, 和田章: 均質化法を用いたコンクリート材料構成則に関する基礎的研究 (その4), 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1996.9

永井学志, 七田裕, 山田貴博, 和田章: 均質化法を用いたコンクリート材料構成則に関する基礎的研究 (その5), 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1996.9

永井学志, 山田貴博, 和田章: 画像データに基づくコンクリート材料の有限要素解析, 計算工学講演会論文集, Vol. 2, No. 3, pp. 1103-1106, 1997.5

永井学志, 山田貴博, 和田章: 画像データに基づくコンクリート材料の有限要素解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1997.9

永井学志, 山田貴博, 和田章: 三次元実画像データに基づくコンクリート材料の応力解析, 日本学術会議材料研究連合, 1997.9

永井学志, 山田貴博, 和田章: 実画像データに基づくコンクリート材料の応力解析, 応用力学連合, 1998.1

永井学志, 山田貴博, 和田章: 固定格子のための滑らかな界面を含む混合型有限要素の開発, 計算工学講演会論文集, Vol. 3, pp. 393-396, 1998.5

永井学志, 山田貴博, 和田章: デジタル画像を用いたコンクリート材料の界面ひび割れを表現できる有限要素, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1998.9

永井学志, 山田貴博, 和田章: 界面破壊を考慮したコンクリート微視構造の非線形解析, 第48回理論応用力学講演会, pp. 377-288, 1999.1

永井学志, 山田貴博, 和田章: 微視構造の引張破壊を考慮したコンクリート材料の巨視的圧縮挙動の数値解析, 計算工学講演会論文集, Vol. 4, No. 2, pp. 729-732, 1999.5

T. Yamada, G. Nagai: On Fast Iterative Solvers for Image-Based Finite Element Method, 5th U.S. National Congress on Computational Mechanics, 1999.8

永井学志, 山田貴博, 和田章: 局所的な引張破壊を考慮したコンクリート材料の圧縮破壊のデジタルイメージベース有限要素解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1999.9

永井学志, 山田貴博, 和田章: コンクリート材料の三次元デジタルイメージベース非線形有限要素解析, 第49回理論応用力学講演会, 2000.1

永井学志, 山田貴博, 和田章: コンクリート材料の圧縮破壊解析のための三次元イメー

ジベース有限要素手法, 計算工学講演会論文集, Vol. 5, No. 2, pp. 767-770,
2000.5

4. その他

永井学志, 山田貴博, 和田章: コンクリート材料のモデル化, 計算工学, Vol. 4, No. 3, pp.
18-23, 1999.9

永井学志: 表紙絵, コンクリート工学, Vol. 37, No. 9, 1999.9

山田貴博, 永井学志: コンクリート材料のイメージベース有限要素法によるメソスケール解析, コンクリート工学, Vol. 38, No. 1, pp. 64, 2000.1

謝 辞

本研究を行うにあたり、素晴らしい研究環境を与えて頂き、また学部4年次より6年間の長きにわたり御指導を賜りました東京工業大学教授・工学博士 和田章先生に深く感謝致します。日々の研究においても、数値解析の楽しさ、実現象の理解に対する基本姿勢を教えてくださいました。心より御礼申し上げます。

本研究は、和田章先生と当時東京工業大学助手であった現東京理科大学助教授・学術博士 山田貴博先生との相談のもと、山田貴博先生が平成5年度東京工業大学修士課程修了 尾上清治氏および平成7年度東京工業大学修士課程修了 七田裕氏と共に取り組まれていた研究テーマの一部を私の修士論文として与えて頂いたことに始まります。以後、東京理科大学への転出後も変わることなく、懇切丁寧な御指導を賜りました山田貴博先生に深く感謝致します。

このような機会を得ることができましたのは、東京工業大学名誉教授 東京理科大学教授・工学博士 岸田英明先生が、私が東京理科大学の学部3年生の終わりに差し掛かった頃に、当時は本研究のような分野の存在すら知らなかった私を、和田章先生と山田貴博先生に引き合わせて下さった縁によります。

日常の研究室において、元東京工業大学助手・博士(工学) 黄一華先生、元東京工業大学社会人博士課程学生 現日本工業大学教授・博士(工学) 市橋重勝先生には、本当に様々な相談にのって下さり、また面倒を見て下さいました。東京工業大学教授・工学博士 田村哲郎先生、東京工業大学助教授・博士(工学) 篠原保二先生、東京工業大学助教授・工学博士 坂田弘安先生、東京工業大学助教授・博士(工学) 山田哲先生、元東京工業大学助手・博士(工学) 伊藤嘉晃先生には、研究室のゼミのみならず日常の研究生活においても多くの有益な御助言と叱咤激励を頂きました。東京工業大学教授・工学博士 林静雄先生、東京工業大学教授・工学博士 田中享二先生、東京工業大学教授・Ph.D 笠井和彦先生、東京工業大学助教授・工学博士 安部武雄先生、東京工業大学講師・博士(工学) 坪倉誠先生、東京工業大学助手・博士(工学) 香取慶一先生には、様々な幅広い御助言を頂きました。東京工業大学建築学科の構造系研究室共有のコンクリート供試体断面研磨装置をお借りする際には、東京工業大学助教授・工学博士 堀田久人先生に色々と便宜を図って頂きました。東京工業大学技術補佐員 小野口弘美氏には、

研究室での日常において、色々とお世話になりました。これらの皆様に深く感謝致します。

本論文の審査に際して、これを引き受けてくださった、東京工業大学教授・工学博士 和田章先生（司会教官）、東京工業大学教授・工学博士 林静雄先生、東京工業大学教授・工学博士 田村哲郎先生、東京工業大学助教授・博士（工学） 篠原保二先生、東京工業大学助教授・工学博士 山中浩明先生、東京工業大学助教授・工学博士 元結正次郎先生に御礼申し上げます。

また、諸学会などでお世話になった多くの先生方、学生生活を有意義なものとしてくれた多くの先輩、同級、後輩に感謝致します。私が学部4年生から現在に至るまで和田研究室でお世話になっている間、軍司雅弘氏、佐藤沢氏、神崎健氏、小波佐和子氏、小泉学氏、大西雄一郎氏、七田裕氏、銭谷薫氏、石光桂太氏、金容南氏、小野喜信氏、久保田宗穂氏、中山晋吾氏、早川輝氏、加藤敬史氏、鈴木庸介氏、中村寛之氏、Choi Sunyoung氏、杉原真央氏、千葉博氏、佐伯正尚氏、柴田正樹氏、森秀樹氏、山口路夫氏、谷川充丈氏、岡田健氏、稲垣浩文氏、廣邊琢也氏、榎本健氏、婁常青氏、Wang Xi Hui氏、Dupin, Eduardo Eustaquio Vilaca氏、岡田玲氏、このように多くの研究室の先輩、同級、後輩に恵まれることができました。特に、コンクリート材料の三次元デジタル画像撮影に際しては、加藤敬史氏、鈴木庸介氏、中村寛之氏の全面的な協力を得ました。

なお、本研究の一部は、平成10年度竹中育英会と平成11年度日本学術振興会による研究助成を受けて行ったものであります。ここに深く感謝致します。

最後に、私の自由気儘を許し、多くの励ましや援助を行ってくれた両親と祖母に感謝致します。

平成12年6月

永井 学志