

新 制

工

838

京大附図

弾性地盤により支持された建築構造物の最適設計

および地震時応答制約設計

1990年9月

竹 脇 出

弾性地盤により支持された建築構造物の最適設計

および地震時応答制約設計

1990年9月

竹 脇 出

目次

一章 序	
1-1 研究の背景および目的	1
1-2 発表論文リスト	5
二章 振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計	
2-1 剪断型構造物	7
2-2 剪断型構造物—杭系	18
2-3 建築骨組	23
2-4 結論	28
文献	29
三章 振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計	
3-1 振動数依存型剛性ばねで支持された構造物と振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物の特性	32
3-2 振動数依存型剛性ばねで支持された構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計問題	34
3-3 振動数依存型剛性ばねで支持された構造物と振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物に関する二つの定理	36
3-4 不等号制約条件下の最適設計問題	39
3-5 より一般的な振動数依存型剛性ばねに対する定理の拡張	40
3-6 例題	42
3-7 結論	46
文献	46
四章 振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物の地震時弾性応答制約設計	
4-1 設計用地震動	49
4-2 剪断型構造物	52
4-3 剪断型構造物—杭系	56
4-4 地盤特性依存型スペクトルに対する剪断型構造物の設計	64
4-5 結論	76
文献	77
五章 振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物の地震時弾性応答制約設計	
5-1 複素剛性ばねとしての地盤の剛性の表現	79
5-2 地震時弾性応答制約設計問題	80
5-3 振動数非依存型剛性ばねで支持された剪断型構造物の一次固有振動数制約条件下の最適設計	82
5-4 FI2 モデルによる FD2 モデルの地震時弾性応答の平均最大値の近似的評価法	83
5-5 地震時弾性応答制約設計を求める手順	83
5-6 地震時弾性応答制約設計の例題	84
5-7 FD2 モデルに対する時刻歴応答解析による検証	86

5-8	結論	90
	文献	90
六章	弾性支持された非線形弾性建築骨組のコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計と 応答制約設計	
6-1	最小コスト設計問題	93
6-2	最適性条件の誘導	95
6-3	最小コスト設計解の誘導	98
6-4	弾性支持されたモデルへの拡張	103
6-5	応答制約設計	104
6-6	設計例	106
6-7	結論	106
	文献	107
七章	弾性支持された非線形弾性建築骨組のシステム柔性制約条件下の最小コスト設計と 応答制約設計	
7-1	最小コスト設計問題	109
7-2	最適性条件の誘導	111
7-3	最小コスト設計解の誘導	112
7-4	弾性支持されたモデルへの拡張	117
7-5	静的部材塑性率制約設計	118
7-6	設計例	120
7-7	結論	122
	文献	124
八章	弾性支持された非弾性建築骨組の激震時最大部材塑性率制約設計	
8-1	単位ユニット骨組モデル	127
8-2	多層多スパン骨組	131
8-3	弾性支持された単位ユニット骨組モデル	136
8-4	結論	138
	文献	139
九章	結論	142
	あとがき	147

一章 序

1-1 研究の背景および目的

建築構造物の挙動解析の研究分野においては、有限要素法や境界要素法に代表される解析技術の開発と、コンピューターのハードウェア面における急速な進歩により、如何に複雑な形状を有する大規模構造物であっても、ある特定の外乱に対する応答をかなり精度良くかつ効率的に計算することが実行可能となりつつある。一方、構造物の設計理論の研究分野においては、最適設計理論が精力的に研究されている。

構造物の最適設計理論には、大きく分けて設計感度解析手法に基づく数値計画法によるアプローチ、最適性規準法によるアプローチ、解析的解表現を見いだす理論的アプローチの3つが存在する。対象を建築構造物、その中でも建築骨組および置換剪断型構造物に限定すれば、以上の3つのアプローチには異なる特質が存在する。各アプローチの建築骨組の設計における長所、短所は、中村の著書[7]に詳述されている。どのようなアプローチを採用するにしても、建築骨組は一般に大規模構造物であるため、実用に供し得る最適設計理論を構築する際には、その幾何学的形状の規則性を有効に利用することが必要である。建築骨組の最適設計理論を対象とした著書あるいはSURVEYの主なものとして文献[1-12]がある。また、数値計画法によるアプローチを採用した論文、最適性規準法によるアプローチを採用した論文、及び解析的解表現を見いだす理論的アプローチを採用した論文の主なものは、文献[13]に示されている。

一方、最適設計問題とは独立に、従来の構造解析問題における指定値と未知数の関係を逆転させた理論として、「振動における逆問題 (inverse problems in vibration)」に対する理論がGladwellらによって展開されてきている (たとえば[14])。また、逆問題に関する国際専門誌も最近発刊されるに至っている[15]。Gladwellらは、ばねで連結された質点系モデル (あるいは一次元分布質量モデル) の自由振動の固有値問題について、固有値列 (spectrum) あるいは、2組の固有ベクトルを与えたときのばね剛性と質量の値 (あるいは剛性分布) を見いだす問題を考え、その問題構造を明らかにしている。これに対して、中村らは、一次固有周期および一次固有モードを指定したときに、剪断型構造物モデルについては各層層間剛性、一次元連続体モデルについては剛性分布関数を求める理論を展開している[12]。

静的荷重を受ける構造物の最適設計問題、あるいは動的な外乱の作用を受ける構造物の最適設計問題においては、応力や変位を制約条件として採用するケースが多い。しかしながら、建築骨組の動的応答を考慮した構造設計においては、上記の制約条件の他に、上層におけるいわゆる「むち振り現象」を抑制したいといった要求もかなり重要な位置を占める。従って、上記の応力や変位を制約条件とする最適設計問題の解が得られたとしても、後者の要求から著しくかけ離れたものであれば、現実の設計では採用しにくいことになる。つまり、制約条件の間にもその重要度に関するランクづけが可能である。その重要度を考慮した上で、すべての制約条件を満たす解を求める一つの方法として、最も重要と思われる制約条件を満たす解 (等号制約ならば一意に決定されることもある) を見だし、その後その設計が他の制約条件をも満足することを検定する方法が考えられる。本論文で提案している地震時応答制約設計法は、このような考えのもとに生み出されたものである。従って、本論文で展開する地震時応答制約設計法では、対象とするモデルについて、最も重要と思われる単一の設計条件を目標とする設計法を展開しているが、他の設計条件についてはその満足度の検定を行ない、場合によっては前者の設計目標を変更するという手続きも考えられる。あるいは、数種類の設計用荷重 (たとえば強震レベルの設計用荷重と激震レベルの設計用荷重) について、本論文で展開する地震時応答制約設計法を用

いて各々の設計用荷重に対する設計解を独立に求め、その各設計の間で多目的最適設計における非劣解を探索するという方法も考えられる。しかしながら、これに関する理論は本論文では扱わない。

全ての建築構造物は地盤により支持されているため、信頼性の高い耐震構造設計理論を展開する際には、建築構造物と地盤の動的相互作用を考慮に入れる必要がある。地盤の剛性の最も単純かつ合理的なモデル化は、振動数非依存型剛性ばねモデルあるいは振動数依存型剛性ばねモデルへの置換である。

本論文の目的は、地盤の剛性を代表するばねで支持された建築構造物モデルについて、(i) レベル1 設計用地震動（耐用年限中に一回以上発生すると予測される地震動）[16] に対する地震時弾性応答制約設計法を展開すること、および(ii) レベル2 設計用地震動（当該敷地で発生する可能性のある中で最大の地震動）に対する地震時非弾性応答制約設計法を展開することである。設計用地震動モデルとしては、地盤特性非依存型および地盤特性依存型の設計用速度応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群を想定している。また、構造物の並進振動のみを対象としている。前述したように、ここではレベル1 設計用地震動に対する制約条件を満足する設計構造物とレベル2 設計用地震動に対する制約条件を満足する設計構造物を各々独立に扱う。従って、両者の制約条件を同時に考慮した設計法は本論文では扱わない。尚、本論文では、「設計」という用語は、最終的に求められるべき設計変数（剪断型構造物では層間剛性、建築骨組においては、梁および柱の曲げ剛性等）の集合を指すものとして用いられている。

本論文では、レベル1 設計用地震動およびレベル2 設計用地震動に対する地震時弾性制約設計法を展開するために、まず最初にシステム性能制約条件下の最適設計理論を展開している。その意義は次のように要約できる。

- (i) 建築構造物において一次固有周期は、構造物全体としてのシステム性能を表わす重要な指標の一つであり、構造設計者は、一次固有周期から構造設計のための多くの有用な情報（例えば設計用ベースシヤール係数レベル）を得ることができる。換言すれば、適切な一次固有周期を設定することにより、いくつかの重要な設計条件を満足する構造物の設計の概算値を得ることができる。従って、そのような一次固有周期を制約条件とする最適設計問題に対する解は、レベル1 設計用地震動に対する最終的な地震時弾性制約設計解を得るための良好な初期設計解を提供するのみならず、閉形表現で得られる最適設計解公式は、次の改良解を得るための有効な手段としても利用することが可能である。
- (ii) 多数の地震波で代表される設計用地震動に対して、建築構造物の非弾性応答の最大値を制約する設計法を展開することは、支配方程式の非線形性等に起因して極めて困難である。静的な設計用荷重に対して非弾性応答を考慮した最適設計理論を展開することは、レベル2 設計用地震動に対する最終的な地震時弾性制約設計解を得るための良好な初期設計解を提供するのみならず、閉形表現で得られる最適設計解公式は、次の改良解を得るための有効な手段としても利用することが可能である。

本論文の内容は以下のように要約できる。本論文では、振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物のレベル1 設計用地震動に対する弾性応答制約設計法を展開するために、まず最初に一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開している。この最適設計理論においては、設計解のみならず一次固有ベクトルも重み係数を含んだ形の閉形表現で得られるため、この重み係数を応答調整パラメータと見なすことにより、一次固有周期と一次固有ベクトルを主制御パラメータとする地震時弾性制約設計法を展開することが可能である。本手法においては、一次固有周期と一次固有ベクトルの変更状況を常に把握しながら設計目標に到達できるとい

う長所がある。その他に、応答性状から判断して構造物の剛性を直接変更する方法（上記の最適性規準法の一）も存在するが、設計用応答スペクトルの性質によってはその適切な変更方法を見出すことが困難な場合が存在する。それに対して、本手法は一次固有周期をパラメータとしているため、そのような事態は発生しない。

次に、振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物のレベル1 設計用地震動に対する地震時弾性応答制約設計法を展開するために、まず一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開している。これまでに、振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物の、一次固有周期制約条件下の最適設計理論は扱われたことがない。著者らは、この問題を初めて取り上げかつ定式化している。その際に、重要な定理を提示しかつその証明を示している。さらに、この理論に基づき、振動数依存型剛性ばね（複素剛性ばね）で支持された建築構造物のレベル1 設計用地震動に対する地震時弾性応答制約設計法を展開している。本設計法の検証のために、周波数領域での応答解析を実施している。

本論文の後半では、振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物のレベル2 設計用地震動に対する地震時非弾性応答制約設計法を展開するために、まず非線形弾性骨組モデルの最適設計理論を展開している。その際に、非線形弾性構造物の構造物全体の柔性を表わすシステム性能量として、「コンプライアンス」と「システム柔性」と呼ぶ二つの量を新たに定義している。静的な設計用荷重を受ける場合においては、同一の処女応力-歪関係を有する非線形弾性構造物モデルの応答も非弾性構造物モデルの応答も構成法則の安定な領域内で議論する限りにおいては区別できない。従って、最小ポテンシャルエネルギーの原理が成立する非線形弾性構造物を対象とする方がより適切である。非線形弾性構造物の応答を制約することは、動的外乱を受ける非弾性構造物のスケルトン曲線上の履歴ループの尖点の応答を簡易的に制約するという意義を有する。本論文の最後では、非線形弾性骨組モデルおよび弾性支持された非線形弾性骨組モデルの最適設計理論における重み係数を応答調整パラメータと見なすことにより、最適設計理論を静的部材塑性率制約設計法に拡張する方法を展開し、さらにその設計法に基づき動的部材塑性率制約設計法を展開している。その際に、レベル2 設計用地震動の設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対する骨組の平均最大応答層剪断力を、レベル1 設計用地震動の設計用応答スペクトルを用いたSRSS 評価法による値の係数倍として求める新しい方法を提案している。

本論文により、地盤との動的相互作用を考慮した建築構造物の耐震構造設計が、従来よりも一層合理的かつ組織的に実現可能となるものと期待される。

[文献]

- [1] R.H. Gallagher and C. Zienkiewicz (ed.): *Optimum Structural Design*, John Wiley & Sons, 1973.
- [2] 田中尚、中村雄治: 建築構造物の自動設計と最適設計、日本鋼構造協会編、コンピュータによる構造工学講座II-7-B、培風館、1973.
- [3] K.I. Majid : *Optimum Design of Structures*, Butterworths, 1974.
- [4] 中村恒善: 鋼骨組の最小重量塑性設計、カラム、56号、pp83-94、1975.
- [5] E.J. Haug and J.S. Arora: *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons, 1979.
- [6] Tsuneyoshi Nakamura : A Review of Optimum Designs of Regular Rectangular Frames, *Buletinul Institutului Politehnic Din Iasi*, Tomul 25(29), pp7-14, 1979.
- [7] 中村恒善: 建築骨組の最適設計、丸善、1980.

- [8] E.J. Haug: A Review of Distributed Parameter Structural Optimization Literature, *Optimization of Distributed Parameter Structures* (eds.: E.J. Haug and J. Cea), Sitjhoff & Noordhoff, Netherlands, Vol.I, pp3-74, 1981.
- [9] O.E. Lev (ed.): *Structural Optimization*, ASCE, 1981.
- [10] U. Kirsch : *Optimum Structural Design*, McGraw-Hill, 1981. 邦訳 最適構造設計—概念・方法・応用— (山田善一・大久保禎二監訳)、丸善、1983.
- [11] A.J. Morris (ed.): *Foundations of Structural Optimization; A Unified Approach*, John Wiley & Sons, 1982.
- [12] 中村恒善: 最適設計理論と性能制御理論、日本建築学会編、「建築構造力学の最近の発展 —応力解析の考え方—」, pp99-136, 1987.
- [13] 竹脇 出: 建築工学における応用、構造システムの最適化 —理論と応用—、(構造工学シリーズ1) 山田 善一編、土木学会、第III編、第14章、pp260-265、1988.
- [14] G.M.L. Gladwell : *Inverse Problems in Vibration*, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- [15] International Journal of Inverse Problems, 1985- , UK.
- [16] 日本建築センター高層建築物構造評定委員会「高層建築物の動的解析用地震動について」ビルディングレター、pp49-50, 1986.

1-2 発表論文リスト

論文

- [1] 繰返し両振り塑性曲げをうける鋼片持梁一柱の構面内変形の収束と発散に関する実験的研究, 日本建築学会論文報告集, 第316号, pp41-52, 1982. (共著者: 横尾義貫, 中村恒善, 上谷宏二)
- [2] 弾性支持されたせん断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計, 構造工学論文集, Vol.31B, pp93-102, 1985. (中村恒善)
- [3] Optimum Building Design for Forced-mode Compliance, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.111, No.9, pp1159-1174, 1985. (中村恒善)
- [4] 非線形弾性平面骨組のコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計と最大ひずみ制御法, 日本建築学会構造系論文報告集, 第362号, pp26-36, 1986. (中村恒善)
- [5] 筋違付建築骨組の激震時応答解析用モデル骨組, 構造工学論文集, Vol.34B, pp85-94, 1988. (中村恒善, 常岡次郎)
- [6] Ductility Design via Optimum Design of Nonlinear Elastic Frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.115, No.3, pp608-625, 1989. (中村恒善)
- [7] Optimal Elastic Structures with Frequency-dependent Elastic Supports, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.25, No.5, pp539-551, 1989. (中村恒善)
- [8] 平面弾性剪断型構造物一杭系の地震時応答制約設計, 日本建築学会構造系論文報告集, 第403号, pp125-137, 1989. (中村恒善, 島野幸弘)
- [9] 弾性支持されたせん断型建築構造物の地震時応答制約設計法, 第7回日本地震工学シンポジウム論文集, pp1735-1740, 1986. (中村恒善)
- [10] 剪断型建築構造物のファジィ最適設計, 第1回構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウム論文集, pp459-464, 1987. (中村恒善)
- [11] Earthquake-response Constrained Design of Pile-supported Elastic Shear Buildings for Site-dependent Response Spectra, *Proceedings of 9th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol.V, pp1043-1048, 1989. (中村恒善)

総説

- [1] 構造システムの最適化～理論と応用～ 第14章 建築工学における応用, 構造工学シリーズ1 (土木学会), pp260-265, 1988. (分担執筆)

研究発表(梗概)

- [1] 鋼片持梁一柱の繰返し両振り塑性曲げ過程における不安定現象(その1:角形鋼管供試体による実験), 日本建築学会大会学術講演梗概集(近畿), pp1157-1158, 1980. (共著者: 中村恒善, 上谷宏二)
- [2] ロッキングを考慮した建築ラーメンの一次固有周期制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集(九州), pp833-834, 1981. (中村恒善)
- [3] 建築ラーメンの動的コンプライアンス制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集(東北), pp799-800, 1982. (中村恒善)

- [4] 非線形弾性平面ラーメンの静的コンプライアンス制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北), pp1051-1052, 1982. (中村恒善)
- [5] 弾性支持された建築ラーメンの一次固有周期及び最小曲げ剛性制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), pp1043-1044, 1983. (中村恒善)
- [6] 弾性支持された剪断型建築骨組モデルの一次固有周期制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp847-848, 1984. (中村恒善)
- [7] 弾性支持された剪断型構造物の強制振動モードコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東海), pp291-292, 1985. (中村恒善)
- [8] 非線形弾性骨組のコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計, 第35回応用力学連合講演会論文集, pp399-402, 1985. (中村恒善)
- [9] 非線形弾性平面骨組のコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計と最大ひずみ制御法, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), pp201-202, 1986. (中村恒善)
- [10] 弾性支持された剪断型建築構造物の地震時応答制約設計法, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (近畿), pp631-632, 1987. (中村恒善)
- [11] 剪断型建築構造物のファジィ最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp261-262, 1988. (中村恒善)
- [12] 弾性剪断型構造物一杭系の最適設計及び地震時応答制約設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp857-858, 1988. (中村恒善, 島野幸弘)
- [13] 高層建築骨組の実用動的解析における諸問題 PART II 一筋違付骨組とその等価剪断型モデルの弾塑性時刻歴応答解析一, 日本建築学会近畿支部構造力学部会・構造力学講究録第3号, pp15-24, 1988.

二章 振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物の 一次固有周期制約条件下の最適設計*

線形弾性応答に関する設計条件に対して、建築構造物の部材断面の初期設計を得るための直接的手法の一つとしてこれまでに、種々のシステム性能（一次固有周期、静的および動的コンプライアンス、塑性崩壊荷重係数、座屈荷重係数等）制約条件下の最適設計法および局所応答制約条件下の最適設計法が展開されてきている(Wasiutynski and Brandt, 1963; Sheu and Prager, 1968; Niordson and Pedersen, 1972; Pierson, 1972; Rozvany and Mroz, 1977; Venkayya, 1978; Olhoff, 1980; Lev, 1981; Haug and Cea, 1981; Schmit, 1981; Olhoff and Taylor, 1983; Levy and Lev, 1987)。現実の骨組の部材断面はその他の諸々の制約により決定される場合が多いが、最適化手法により得られた設計は、初期設計の段階において一つの指針を与えるものと期待される。

部材ごとに一様な剛性をもつ構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計問題に対する大域最適性の必要十分条件は、C.Y. Sheu(1968)によって提示され、その後種々の構造物に対して最適設計解が数値的に、あるいは解析的に求められてきている。また、一次固有周期の他に変位、応力に関する制約条件も同時に考慮された最適設計問題が提示され、数値計画法や最適制御理論を用いて解かれているが、局所応答制約条件を含む最適設計問題の数値解は、大域最適解であるという確証が得にくいという欠点をもっている。さらに、たとえ複雑な問題に対する解が数値的に得られたとしても、応答制御の観点からは必ずしも有用だとは限らない。

一方、中村恒善らは剪断型構造物および骨組の一次固有周期制約条件下の最適設計問題に対する大域最適性の必要十分条件を導き、それを用いて最適設計解の閉形表現を誘導している(中村, 1980; 中村, 伊藤, 1980; 中村, 山根, 1981; Nakamura and Yamane, 1986)。また、中村恒善と中村豊(1982)は、2軸偏心を有する立体剪断型構造物モデルについて、一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開した。次に、中村と竹脇(1981, 1983, 1985)は、地盤-杭-建築構造物の動的相互作用を考慮した上での建築構造物の合理的な耐震設計法の基礎的研究の一つとして、振動数非依存型の指定された剛性を有するばねで弾性支持された剪断型構造物および建築骨組の、一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開した。

本章では、四章で展開するレベル1設計用地震動に対する地震時応答制約設計法の準備として、振動数に依存しない剛性を有するばねで支持された弾性建築構造物の、一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開する。本章で導入される重み係数は、本章の最適設計理論の枠組み内では、例えばコスト係数を表わすが、四章の地震時応答制約設計法においては、応答調整パラメータとしての役割を果たすことになる。

2-1節では、支持ばね剛性を指定値として扱い、上部構造物の部材剛性のみを設計変数とする理論を展開する。直接基礎の場合や杭断面の指定された場合がこれに対応する。

2-2節では、上部構造物の部材剛性ととも、杭剛性をも設計変数として扱った理論を展開する。

2-3節では、2-1節と同様の理論を建築骨組に対して展開する。

2-1 剪断型構造物

問題の定式化

地盤上に置かれた基礎、あるいは地盤内に埋設された基礎の水平移動および回転に関する剛性を、水平ばねの剛性 k_H と回転ばねの剛性 k_R で代表させることとし、図2.1に示すような弾性ばねで支持された f 層剪

* 本章の2-1, 2-2節は、それぞれ1-2節の論文[2], [8]の一部に加筆しまとめたものである。

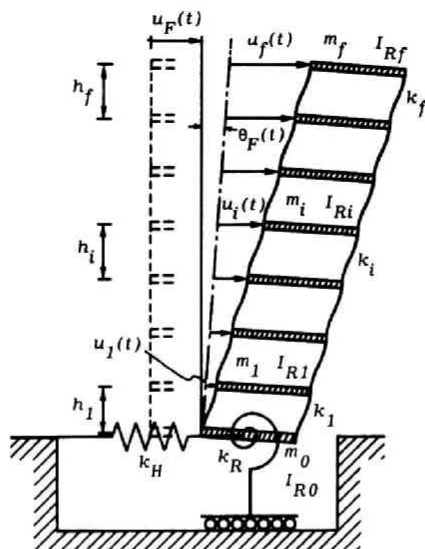


図2.1 弾性支持された剪断型構造物

断型構造物を扱う。 k_H および k_R は、地盤の性状、基礎（地下室部分を含む）の形状および接地面積等より適切に評価され前もって指定されているものとする。下から i 番目の床を第 i 床と呼ぶ。また、第 $(i+1)$ 床の集中質量およびその重心回りの回転慣性は、それぞれ m_i, I_{Ri} で、第 i 層階高は h_i で指定されているものとする。第 i 層の層間移動剛性を k_i で表わし、その集合 $\mathbf{k} = \{k_i\}$ を設計変数とする。ここでは、次のような仮定を設定する。

[仮定 1] 部材質量は床レベルに配置される集中質量に含まれるものとし、設計過程における部材質量変動量を床レベルの集中質量に比べて無視する。すなわち、設計変更にとらわず第 $(i+1)$ 床の集中質量およびその重心回りの回転慣性は、各々 m_i, I_{Ri} で変化しないものとする。

[仮定 2] ロッキングおよび上部剪断型構造物の変形の際に床質量に作用する重力によって生じる基礎回りのモーメントは運動方程式において考慮しない。

一般化座標としては、基礎の水平変位 $u_F(t)$ 、回転 $\theta_F(t)$ および上部剪断型構造物の基礎に対する相対水平変位を記述する $u_1(t), \dots, u_f(t)$ を用いる。設計 \mathbf{k} の弾性支持された剪断型構造物の一次固有ベクトルを $\Phi(\mathbf{k}) = \{U_1(\mathbf{k}), \dots, U_f(\mathbf{k}), U_F(\mathbf{k}), \Theta_F(\mathbf{k})\}$ で表わせば、その一次固有値 $\Omega_1(\mathbf{k})$ は、Rayleigh 商を用いて次のように表現できる。

$$\Omega_1(\mathbf{k}) = \frac{\Phi(\mathbf{k})^T [\mathbf{K}_B(\mathbf{k}) + \mathbf{K}_F(k_H, k_R)] \Phi(\mathbf{k})}{\Phi(\mathbf{k})^T \mathbf{M} \Phi(\mathbf{k})} \quad (2.1)$$

ここで、 $\mathbf{K}_B(\mathbf{k}), \mathbf{K}_F(k_H, k_R), \mathbf{M}$ はそれぞれ上部剪断型構造物に関する剛性行列、弾性支持ばねに関する剛性行列および系全体の質量行列を表わし、以下のように表現できる。

$$\mathbf{K}_B(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & \dots & & & & \\ \dots & \dots & -k_i & & & 0 \\ & -k_i & k_i + k_{i+1} & \dots & & \\ & & \dots & \dots & -k_f & \\ 0 & & & -k_f & k_f & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_F(k_H, k_R) = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \dots & & & & 0 \\ & & 0 & & & \\ & & \dots & & & \\ & Sym. & & & 0 & \\ & & & & & k_H & \\ & & & & & & k_R \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & m_1 & m_1 H_1 \\ & \dots & & & \vdots & \vdots \\ & & m_i & & m_i & m_i H_i \\ & & \dots & & \vdots & \vdots \\ & & & m_j & m_j & m_j H_j \\ & Sym. & & & E_1 & E_2 \\ & & & & & E_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ただし、 $E_1 \sim E_3, H_i$ は次の諸量を表わす。

$$E_1 = \sum_{i=0}^f m_i, \quad E_2 = \sum_{i=1}^f m_i H_i$$

$$E_3 = \sum_{i=1}^f m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^f I_{Ri}, \quad H_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad (2.3)$$

一次固有値の制約値を Ω_a 、第 i 層層間剛性の下限値を \bar{k}_i 、重み係数 (コスト係数) を β_i^2 で表わせば、最適設計問題は次のように述べられる。

[問題 ODSB]

一次固有値制約条件

$$\Omega_1(\mathbf{k}) \geq \Omega_a \quad (2.4)$$

および、最小層間剛性制約条件

$$k_i \geq \bar{k}_i \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.5)$$

を満たし、かつ評価関数

$$w = \sum_{i=1}^f \beta_i^2 k_i \quad (2.6)$$

を最小にする剛性集合 $\mathbf{k} = \{k_i\}$ を求めよ。

中村 (1980) の評価関数は $\beta_i^2 = 1.0 (i = 1, 2, \dots, f)$ に対応している。指定一次固有値は、ばね剛性 k_H, k_R との関係から、ある範囲に設定しないと有限剛性を有する剪断型構造物が設計できない。一次固有値の許容指定範囲については後述する。

最適性条件の誘導

前節で述べた [問題 ODSB] に対する大域最適性の必要十分条件を、Rayleigh の原理 (たとえば Temple and Bickley, 1933) および Farkas の定理 (数値計画法における二者択一の定理, Farkas, 1902) を用いて誘導する。

制約条件 (2.4),(2.5) を満足する任意の設計 \mathbf{k} の弾性支持された剪断型構造物の一次固有ベクトルを $\Phi(\mathbf{k}) = \{U_1(\mathbf{k}), \dots, U_f(\mathbf{k}), U_F(\mathbf{k}), \Theta_F(\mathbf{k})\}$ で表わす。一方、制約条件 (2.4),(2.5) を満足し、かつ評価関数を最小にする最適設計 $\tilde{\mathbf{k}}$ の弾性支持された剪断型構造物の一次固有ベクトルを $\Phi(\tilde{\mathbf{k}}) = \{U_1(\tilde{\mathbf{k}}), \dots, U_f(\tilde{\mathbf{k}}), U_F(\tilde{\mathbf{k}}), \Theta_F(\tilde{\mathbf{k}})\}$ で表わす。最適設計 $\tilde{\mathbf{k}}$ の弾性支持された剪断型構造物の一次固有値 $\Omega_1(\tilde{\mathbf{k}})$ は、Rayleigh 商を用いて次のように表現できる。

$$\Omega_1(\tilde{\mathbf{k}}) = \frac{\Phi(\tilde{\mathbf{k}})^T [\mathbf{K}_B(\tilde{\mathbf{k}}) + \mathbf{K}_F(k_H, k_R)] \Phi(\tilde{\mathbf{k}})}{\Phi(\tilde{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\tilde{\mathbf{k}})} \quad (2.7)$$

変位モード $\Phi(\tilde{\mathbf{k}})$ は設計 \mathbf{k} の弾性支持された剪断型構造物にとって運動学的に許容なモードと考えられるので、Rayleigh の原理より次の不等式が成立する。

$$\Omega_1(\mathbf{k}) \leq \frac{\Phi(\tilde{\mathbf{k}})^T [\mathbf{K}_B(\mathbf{k}) + \mathbf{K}_F(k_H, k_R)] \Phi(\tilde{\mathbf{k}})}{\Phi(\tilde{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\tilde{\mathbf{k}})} \quad (2.8)$$

制約条件 (2.4) は次のようにも表現できる。

$$\Omega_1(\mathbf{k}) - \Omega_1(\tilde{\mathbf{k}}) + [\Omega_1(\tilde{\mathbf{k}}) - \Omega_a] \geq 0 \quad (2.9)$$

(2.7),(2.8) 式を (2.9) 式に代入すれば次式が得られる。

$$\frac{1}{\Phi(\tilde{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\tilde{\mathbf{k}})} \sum_{i=1}^f (k_i - \tilde{k}_i) \{U_i(\tilde{\mathbf{k}}) - U_{i-1}(\tilde{\mathbf{k}})\}^2 + [\Omega_1(\tilde{\mathbf{k}}) - \Omega_a] \geq 0 \quad (2.10)$$

また、最小層間剛性制約条件 (2.5) は次のようにも表現できる。

$$k_i - \tilde{k}_i + (\tilde{k}_i - \bar{k}_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.11)$$

設計 $\tilde{\mathbf{k}}$ が評価関数 (2.6) を最小にする設計であるという条件は次のように表現できる。

$$\sum_{i=1}^f \beta_i^2 (k_i - \tilde{k}_i) \geq 0 \quad (2.12)$$

(2.10),(2.11),(2.12) の不等式は次のようなベクトルの内積とも見なせる。

$$\mathbf{r}^T \mathbf{U} \geq 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{r}^T \mathbf{g}_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{r}^T \mathbf{b} \geq 0 \quad (2.15)$$

ここで、 $\mathbf{r}, \mathbf{U}, \mathbf{g}_i, \mathbf{b}$ は次のような $(2f+1)$ 次元のベクトルを表わす。

$$\mathbf{r}^T = \{k_1 - \bar{k}_1, \dots, k_i - \bar{k}_i, \dots, k_f - \bar{k}_f, 1, \dots, 1, \dots, 1, 1\} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{U}^T = \frac{1}{\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\bar{\mathbf{k}})} \{U_1(\bar{\mathbf{k}})^2, \dots, (U_i(\bar{\mathbf{k}}) - U_{i-1}(\bar{\mathbf{k}}))^2, \dots, (U_f(\bar{\mathbf{k}}) - U_{f-1}(\bar{\mathbf{k}}))^2, \\ 0, \dots, 0, \dots, 0, \Phi(\bar{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\bar{\mathbf{k}})(\Omega_1(\bar{\mathbf{k}}) - \Omega_a)\} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{g}_i^T = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, (\bar{k}_i - k_i), 0, \dots, 0, 0\} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{b}^T = \{\beta_1^2, \dots, \beta_i^2, \dots, \beta_f^2, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0\} \quad (2.19)$$

Farkas の定理によれば、もし \mathbf{b} が $\mathbf{U}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_f$ の非負線形結合で表わされるならば、またその時に限り、不等式(2.15) は(2.13) 式と(2.14) 式から導かれる。その時の非負係数を $\frac{1}{\mu^2}, \nu_1, \dots, \nu_f$ で表わせば、[問題 ODSB] に対する大域最適性の必要十分条件が次のように得られる。

$$\mathbf{G}\mathbf{n} = \mathbf{b} \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{n} \geq 0 \quad (2.20b)$$

ここで、 $\mathbf{G}, \mathbf{n}, 0$ は次の行列およびベクトルを表わす。

$$\mathbf{G} = [\mathbf{U}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \dots, \mathbf{g}_f] \quad (2.21)$$

$$\mathbf{n}^T = \left\{ \frac{1}{\mu^2}, \nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_f \right\} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{0}^T = \{0, 0, \dots, 0, \dots, 0\} \quad (2.23)$$

最適性条件(2.20a,b) は次のような内容を表わしている。

(1) 制約条件(2.4) が等号で満たされる時。すなわち、 $\Omega_1(\bar{\mathbf{k}}) = \Omega_a$ の時。

$$\frac{1}{\mu^2} > 0 \rightarrow \begin{cases} \bar{k}_i > k_i \rightarrow \nu_i = 0 \rightarrow \frac{1}{\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\bar{\mathbf{k}})} (U_i(\bar{\mathbf{k}}) - U_{i-1}(\bar{\mathbf{k}}))^2 = (\beta_i \mu)^2 \\ \bar{k}_i = k_i \rightarrow \nu_i \geq 0 \rightarrow \frac{1}{\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\bar{\mathbf{k}})} (U_i(\bar{\mathbf{k}}) - U_{i-1}(\bar{\mathbf{k}}))^2 \leq (\beta_i \mu)^2 \end{cases} \quad (2.24a, b)$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 0 \rightarrow \nu_i = \beta_i^2 \rightarrow \bar{k}_i = \bar{k}_i \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.25)$$

(2) 制約条件(2.4) が不等号で満たされる時。すなわち、 $\Omega_1(\bar{\mathbf{k}}) > \Omega_a$ の時。

$$\frac{1}{\mu^2} = 0 \rightarrow \nu_i = \beta_i^2 \rightarrow \bar{k}_i = \bar{k}_i \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.26)$$

最適設計解の誘導

前節で導いた最適性条件を用い、[問題 ODSB] に対する最適設計解の閉形表現を導く。ただし、ここでは基本的な解を導くことを目的として、制約条件(2.4) が等号で満たされ、かつ制約条件(2.5) のすべてが不等号で満たされる時の解を導くことにする。従って、最適性条件としては(2.24a) が用いられる。制約条件(2.5) 中のいくつか等号で満足される場合の解表現も、Nakamura and Takewaki(1985) が示した手法と同様の方法を採用することにより導くことが可能である。以下では、最適設計解のみ扱うので、 (\cdot) および $(\bar{\mathbf{k}})$ 記号は省略する。図 2.1 に示される弾性支持された剪断型構造物の自由振動方程式に、 ω_a を円振動数とし、 Φ を変位モードとしてもつ調和振動を表わす式を代入すれば、その係数より次式を得る。

$$-\Omega_a m_0 U_F - \Omega_a \sum_{i=1}^f m_i (U_F + \Theta_F H_i + U_i) + k_H U_F = 0 \quad (2.27)$$

$$-\Omega_a \sum_{i=1}^f m_i (U_F + \Theta_F H_i + U_i) H_i - \Omega_a \sum_{i=0}^f I_{Ri} \Theta_F + k_R \Theta_F = 0 \quad (2.28)$$

$$-\Omega_a m_i (U_F + \Theta_F H_i + U_i) + k_i (U_i - U_{i-1}) - k_{i+1} (U_{i+1} - U_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f-1) \quad (2.29)$$

$$-\Omega_a m_f (U_F + \Theta_F H_f + U_f) + k_f (U_f - U_{f-1}) = 0 \quad (2.30)$$

一方、最適性条件(2.24a) より次式が導かれる。

$$U_i - U_{i-1} = \beta_i \mu \quad (\beta_i > 0, \quad \mu > 0; \quad i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.31)$$

ただし、ここでは(2.24a) 式の $\mu \sqrt{\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\bar{\mathbf{k}})}$ を新たに μ とする。(2.31) 式で(2.24a) 式の根の中の正符号のみ採用したのは、そのように選んだモードが Rayleigh 商を最小化するため Rayleigh の原理から一次モードと判断されるからである。より正確に言えば、それ以外の組み合わせを採用した場合には、それに対する Rayleigh 商よりも小さな Rayleigh 商を与えるモードが必ず見いだせるため、真の一次モードにはなり得ないからである。(2.31) 式より次式が得られる。

$$U_i = \mu \sum_{j=1}^i \beta_j \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.32)$$

(2.31), (2.32) 式と同様の表現は、Nakamura and Yamane(1986) によって基礎固定の場合について既に得られている。

(2.31,32) 式を用いて (2.27,28) 式を整理すれば次式となる。

$$D_1 U_F + D_2 \Theta_F + D_3 \mu = 0 \quad (2.33)$$

$$D_2 U_F + D_4 \Theta_F + D_5 \mu = 0 \quad (2.34)$$

ただし、 $D_1 \sim D_5$ は次の諸量を表わす。

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{i=0}^f m_i - \frac{k_H}{\Omega_a}, & D_2 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i, & D_3 &= \sum_{i=1}^f m_i \sum_{j=1}^i \beta_j \\ D_4 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^f I_{Ri} - \frac{k_R}{\Omega_a}, & D_5 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i \sum_{j=1}^i \beta_j \end{aligned} \quad (2.35)$$

(2.33,34) 式を U_F, Θ_F について解けば、 U_F, Θ_F が μ で表現できる。

$$U_F = \frac{D_2 D_5 - D_3 D_4}{D_1 D_4 - D_2^2} \mu, \quad \Theta_F = \frac{D_2 D_3 - D_1 D_5}{D_1 D_4 - D_2^2} \mu \quad (2.36a, b)$$

(2.36a,b) 式の U_F, Θ_F を μ で割って次の量を定義する。

$$U_F^* = U_F / \mu, \quad \Theta_F^* = \Theta_F / \mu \quad (2.37a, b)$$

(2.31),(2.32),(2.37a,b) 式を (2.29,30) 式に代入し整理すれば次式を得る。

$$-\Omega_a m_i \left(U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{j=1}^i \beta_j \right) + \beta_i k_i - \beta_{i+1} k_{i+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f-1) \quad (2.38)$$

$$-\Omega_a m_f \left(U_F^* + \Theta_F^* H_f + \sum_{j=1}^f \beta_j \right) + \beta_f k_f = 0 \quad (2.39)$$

(2.38,39) 式を $i = j$ から $i = f$ まで加えれば、最適層間剛性の表現が次のように求められる。

$$k_j = \frac{\Omega_a}{\beta_j} \sum_{i=j}^f m_i \left(U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{r=1}^i \beta_r \right) \quad (j = 1, 2, \dots, f) \quad (2.40)$$

基礎固定の場合は $k_H, k_R \rightarrow \infty$ に対応し、その時 $U_F^*, \Theta_F^* \rightarrow 0$ となる。さらに $\beta_i = 1.0 (i = 1, 2, \dots, f)$ とすれば (2.40) 式は次式となる。

$$k_j = \Omega_a \sum_{i=j}^f i m_i \quad (j = 1, 2, \dots, f) \quad (2.41)$$

(2.41) 式は中村 (1980) が基礎固定時の剪断型構造物に対して導いた解表現と一致する。

次に、一次の刺激係数と刺激モードベクトルの表現を導く。(2.32),(2.36a,b) 式で表わされる一次固有ベクトルが、正規化条件 $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = 1$ を満足するものとするれば、 μ が次のように表現できる。

$$\mu = \left[m_0 U_F^{*2} + \sum_{i=1}^J m_i \left(U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{j=1}^i \beta_j \right)^2 + \sum_{i=0}^J I_{Ri} \Theta_F^{*2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

この時、一次の刺激係数 γ_1 は次のように表現できる。

$$\gamma_1 = \left[m_0 U_F^* + \sum_{i=1}^J m_i \left(U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{j=1}^i \beta_j \right) \right] \mu \quad (2.43)$$

一次のモードベクトルに γ_1 を乗じたものを一次の刺激モードベクトルと呼ぶことにすれば、一次の刺激モードベクトルにおけるスウェイ成分およびロッキング成分を含まない水平変位と層間相対変位は次のように表現できる。

$$U_i = \gamma_1 \mu \sum_{j=1}^i \beta_j \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.44)$$

$$U_i - U_{i-1} = \gamma_1 \mu \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (2.45)$$

さらに、一次の刺激モードベクトルにおける基礎の水平変位と回転は次のように表わせる。

$$U_F = \gamma_1 \mu U_F^*, \quad \Theta_F = \gamma_1 \mu \Theta_F^* \quad (2.46a, b)$$

一次固有値の許容指定範囲

[問題ODSB]において、層間剛性を無限大とした時の弾性支持された剪断型構造物の一次固有値よりも小さな一次固有値を指定しておかなければ有限剛性をもつ設計解は得られない。そこで、層間剛性を無限大とした時の一次固有値の表現を求める。(2.33,34)式で $\mu \rightarrow 0, \Omega_a \rightarrow \Omega$ とした式に対する固有値方程式は次式となる。

$$\alpha_1 \Omega^2 - \alpha_2 \Omega + \alpha_3 = 0 \quad (2.47)$$

ただし、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は次の量を表わす。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\sum_{i=0}^J m_i \right) \left(\sum_{i=1}^J m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^J I_{Ri} \right) - \left(\sum_{i=1}^J m_i H_i \right)^2 \\ \alpha_2 &= k_H \left(\sum_{i=1}^J m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^J I_{Ri} \right) + k_R \sum_{i=0}^J m_i \\ \alpha_3 &= k_H k_R \end{aligned} \quad (2.48)$$

従って、全層の層間剛性を無限大とした時の一次固有値は次のように求められる。

$$\bar{\Omega}_a = \frac{1}{2\alpha_1} \left(\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1 \alpha_3} \right) \quad (2.49)$$

	k_H (tonf/cm)	k_R (tonf·cm/rad)
CASE (1)	3.515×10^2	3.499×10^7
CASE (2)	7.909×10^2	7.872×10^7
CASE (3)	3.165×10^3	3.150×10^8

表2.1 三種類の地盤に対する水平ばね剛性および回転ばね剛性

i	m_i (ton)	I_{Ri} (ton·cm ²)	h_i (cm)	β_i^2
10	33.0	1.347×10^6	350.0	1.0
9	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
8	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
7	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
6	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
5	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
4	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
3	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
2	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
1	30.0	1.225×10^6	350.0	1.0
0	90.0	3.675×10^6		

表2.2 非制御パラメター

i	k_i CASE (1)	k_i CASE (2)	k_i CASE (3)	k_i^*
10	6.773	6.785	6.797	6.802
9	12.32	12.34	12.36	12.37
8	17.25	17.28	17.30	17.31
7	21.57	21.60	21.63	21.64
6	25.28	25.31	25.34	25.35
5	28.37	28.40	28.43	28.44
4	30.86	30.88	30.91	30.92
3	32.73	32.75	32.76	32.77
2	33.98	33.99	34.01	34.01
1	34.63	34.63	34.63	34.63 (tonf/cm)
T_α	1.9146	1.6474	1.4642	
Ω_α	10.770	14.546	18.414	
T_I	1.3994	1.3988	1.3983	1.3980

T_α : 弾性支持モデルの一次固有周期 (sec)
 Ω_α : 弾性支持モデルの一次固有値 (rad²/sec²)
 T_I : 剛支持モデルの一次固有周期 (sec)
 k_i^* : 剛支持された時の最適設計解

表2.3 弾性支持された場合の最適層間剛性分布と基礎固定時の最適層間剛性分布

	$q_B=0.16$	$q_B=0.18$	$q_B=0.20$	$q_B=0.22$	$q_B=0.24$
CASE (1)	2.038	1.970	1.915	1.868	1.828
CASE (2)	1.790	1.712	1.647	1.593	1.545
CASE (3)	1.623	1.537	1.464	1.402	1.348

表2.4 弾性支持モデルの一次固有周期(sec)

よって有限剛性をもつ設計解を得るには、指定一次固有値 Ω_a を次のように設定しなければならない。

$$\Omega_a < \bar{\Omega}_a \quad (2.50)$$

例題

(2.40)式で導いた最適設計解公式は、弾性支持された剪断型構造物の一次固有値が Ω_a に指定された時の層間剛性を算出する設計公式であるが、その設計公式が閉形表現で得られていることを利用して一層の層間剛性を指定することも可能である。この方法によれば、異なる地盤条件の下で一次固有周期を制約して最適設計される剪断型構造物の層間剛性分布が同一の一層剛性の下で比較できるという利点がある。ここでは簡単のため、ばね剛性はJ.R.Hall(1970)が提案した均質半無限弾性体上に置かれた円形剛基礎の水平剛性、回転剛性を算出する式から求め、表2.1に示す三種類を設定した。表2.2には、剪断型構造物の非制御パラメータを示す。

まず、前述の三種類の地盤に対して設計される剪断型構造物の一層剛性を各々同じ値にするためには、一次固有値をどのように設定すればよいかを考える。各々の地盤に対して設計される剪断型構造物の共通の一層剛性を \hat{k}_1 とする。この \hat{k}_1 は、本例題においては後で述べる設計条件によりあらかじめ指定されているものとする。各々の地盤に対する最適一層剛性は(2.40)式において閉形表現で求められているので、それを \hat{k}_1 と等置することにより次式を得る。

$$\left(\frac{\Omega_a^{(s)}}{\beta_1} \right) \sum_{i=1}^f m_i \left[U_F^* \left(\Omega_a^{(s)}; k_H^{(s)}, k_R^{(s)} \right) + \Theta_F^* \left(\Omega_a^{(s)}; k_H^{(s)}, k_R^{(s)} \right) H_i + \sum_{r=1}^i \beta_r \right] = \hat{k}_1 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (2.51)$$

ここで、 $\Omega_a^{(s)}$ はCASE(s)の地盤に対して指定すべき一次固有値を表し、 $U_F^* \left(\Omega_a^{(s)}; k_H^{(s)}, k_R^{(s)} \right)$ 、 $\Theta_F^* \left(\Omega_a^{(s)}; k_H^{(s)}, k_R^{(s)} \right)$ は(2.37a,b)式で定義される関数で各々 $\Omega_a^{(s)}$ の関数であることを意味している。(2.51)式($\Omega_a^{(s)}$ に関して3次関数)で $s=1,2,3$ ごとに $k_H^{(s)}$ 、 $k_R^{(s)}$ を与え、それぞれの式を $\Omega_a^{(s)}$ について解けば、各々の地盤に対して指定すべき一次固有値が求められる。

剪断型構造物においては、各層の層剪断力と層間相対変位は静的問題の場合、当該の層の層間剛性を介して一対一で対応するため、ある層の層剪断力レベルと層間相対変位レベルを設計者が指定すればそれに対応する層間剛性が決定できる。ここでは、一層の層剪断力を剪断型構造物の一層以上の全重量で除したものをベースシヤール係数換算値と呼び、 q_B で表す。その時、一層の層間変形角を R_1 (ロッキング成分を含まない)とすれば、共通の一層剛性 \hat{k}_1 は次のように決定できる。

$$\hat{k}_1 = \frac{q_B g}{R_1 h_1} \sum_{i=1}^f m_i \quad (2.52)$$

ここで、 g は重力加速度を表す。本例題の前半では、 $q_B = 0.2$ 、 $R_1 = 1/200$ と設定する。CASE(1)-(3)の各々の地盤について、(2.51)式から求めた各々の指定一次固有値の下で設計した剪断型構造物の各層剛性を表2.3に示す。表2.3より、一層剛性を等しくした設計では、 k_H 、 k_R が大きい場合(CASE(3))程弾性支持された剪断型構造物の一次固有周期は短くなるといえる。また、異なる地盤条件の下で一層剛性を等しくした設計を比較すれば、 k_H 、 k_R が異なっても、上層の剛性分布はほぼ同一の分布となるといえる。表2.3には、弾性支持された剪断型構造物の一次固有周期とその剪断型構造物の基礎固定時の一次固有周期(k_H 、 k_R を無限大とし

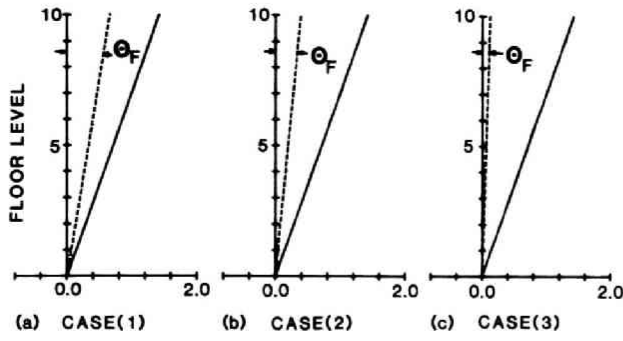


図2.2 三種類の地盤に対して設計された剪断型構造物の一次の刺激モードベクトル

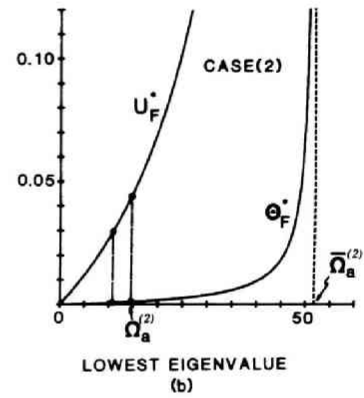
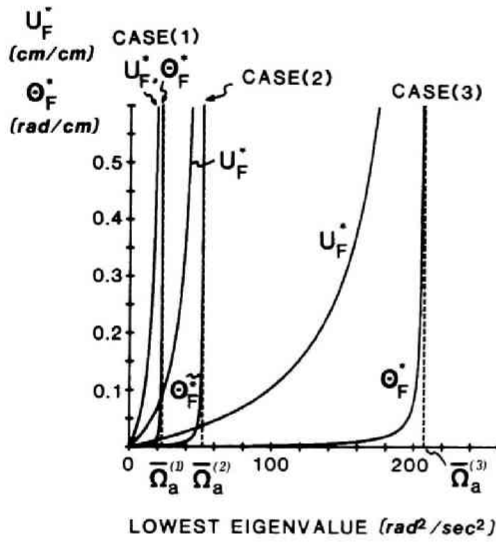
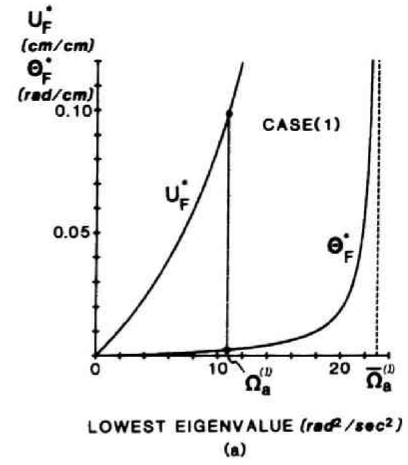


図2.3 一次モードにおける基礎の水平変位比, 回転角比

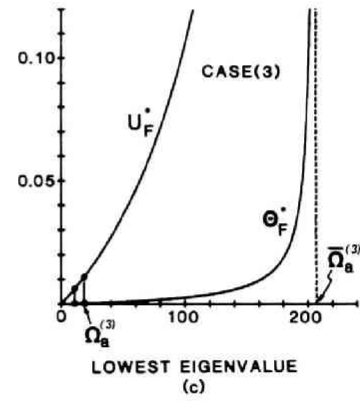


図2.4 指定一次固有値に対する U_F^* , θ_F^*

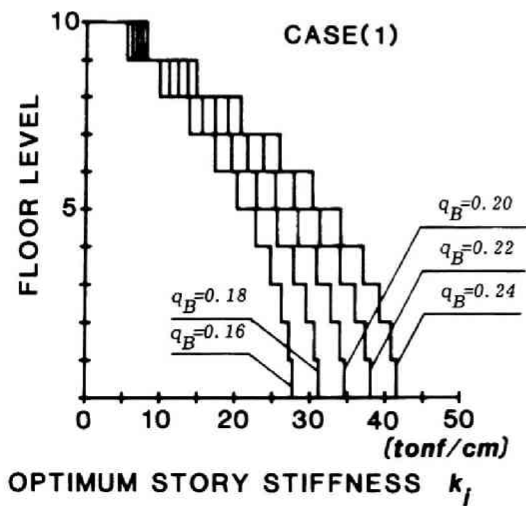


図2.5 最適剛性分布

たとき)も示してある。さらに、中村(1980)による基礎固定モデルの一次固有周期制約条件下の最適設計解剛性の中で、一層剛性を前述の k_1 と等しくした設計の剛性分布も表2.3に示す。

図2.2は、各地盤に対する一次の刺激モードベクトルである。最適性条件(2.31)式より、本設計解公式により設計される剪断型構造物の一次固有モードは、重み係数および階高が全層で一定の場合、ばね剛性 k_H 、 k_R に関係なく直線モードになるといえる。このことは、図2.2からも理解できる。また、図2.2より、一層剛性を等しくした設計では、ばね剛性 k_H 、 k_R が大きいほど一次固有モードに占める基礎のスウェイ成分およびロッキング成分が小さくなっているのがわかる。このことは、図2.3,2.4からより明確に理解できる。

図2.3は、CASE(1)-(3)の各々の地盤について、(2.37a,b)式の U_F^* 、 Θ_F^* を指定固有値 Ω_a の関数として描いたものである。 U_F^* 、 Θ_F^* は(2.37a,b)式からもわかるように、一次固有モードにおける基礎のスウェイ成分およびロッキング成分の、剪断型構造物のロッキング成分を含まない一定の層間相対変位成分に対する比である。従って、各々の地盤に対して指定される一次固有値 $\Omega_a^{(s)}$ に対応する U_F^* 、 Θ_F^* の値が小さいほど、一次固有モードにおける基礎のスウェイ成分およびロッキング成分の占める割合が小さいといえる。各々の一次固有値 $\Omega_a^{(s)}$ に対応する U_F^* 、 Θ_F^* の値を示すために、図2.3を拡大して描いたのが図2.4である。図2.4は、剛な地盤(CASE(3))ほど U_F^* 、 Θ_F^* の値が小さくなっていることを示している。尚、図2.4には、(2.49)式で定義される $\bar{\Omega}_a$ の値が各CASEごとに破線で示されている。

図2.5は、(2.52)式で k_1 を決定する際に、一層の層間変形角レベルは変えずに $R_1 = 1/200$ とし、ベースシヤール係数換算値を $q_B = 0.16 \sim 0.24$ と変化させた時の最適設計解の剛性分布をCASE(1)の地盤について示したものである。ただし、 m_i 、 I_{Ri} 、 h_i 、 β_i^2 等の非制御パラメーターの値は表2.2と同じである。前述したように、本設計公式によれば、地盤条件が異なっても剪断型構造物の一層剛性を等しく設定すれば、剛性分布はほとんど同一の分布となるため、CASE(2),(3)の地盤に対する剛性分布は省略してある。また、その時の弾性支持された剪断型構造物の一次固有周期を各地盤条件ごとに表2.4に示す。

2-2 剪断型構造物一杭系

序

杭基礎を有する建築構造物のこれまでの構造設計では、上部構造物の剛性および強度分布を決定した後に、杭に作用する設計用荷重を算出し、その荷重条件下で種々の設計条件を満足するように杭の断面を決定するといういわば上部構造物と杭基礎を各々独立に扱う手順が多数の場合に採用されてきた。しかし、このような設計法では、上部構造物と杭基礎の剛性及び強度のバランスを十分に考慮し、構造設計者の意図を反映させた構造設計を実施することは、かなりの経験を積むか、多数回の繰り返し修正を行わない限り極めて困難なように思われる。また一方では、地盤と杭の動的相互作用に関する研究の急速な進展に伴い、如何に複雑な形状を有する杭基礎の地震時における挙動も、適当なモデル化によって相当の精度で予測可能な状況となりつつある(たとえば、Wolf and Arx, 1978; Luco, 1980; Cakmak et al., 1982; Waas and Hartmann, 1984; Moore, 1985; Wolf, 1985; 日本建築学会, 1987)。これらの状況からみて、地盤一杭一建築構造物の動的相互作用を考慮した上で、これらを一つのモデルとして取り扱ったバランスのとれた耐震設計法を展開することが望まれているように思われる。

本節では、4-3節において、レベル1設計用地震動に対する剪断型構造物一杭系の地震時応答制約設計法を展開するための準備として、杭剛性をも設計変数として含む弾性支持された弾性剪断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開する。

これまでに、建築構造物一杭系に対する最適設計理論は提示されていない。従来の最適設計法の多くは、設計感度解析法と数値計画法を用いた数値的手法である (Haug and Cea, 1981; Lev, 1981; Morris, 1982)。この方法は、複雑システムに対しては、必ずしも実際上有用なレベルには達していないし、建築構造物一杭系に対して提示された論文も存在しない。また、最適設計問題に対して Lagrange 乗数法を適用し、それから導かれる条件と制約条件を満足するように繰り返し手法を用いて数値的に設計解を求める最適性規準法 (Venkayya, 1971) も提案されているが、やはり建築構造物一杭系に対して提示された論文は存在しない。これに対して、規則的な幾何学形状を有する建築骨組について、その特性を有効に利用して、正解の閉形表現を導く解析的方法が提案されている (中村恒善, 1980, 1987)。この方法は、システム性能に関する制約条件が課された最適設計問題に対して、力学的最小原理を用いて大域最適性の必要十分条件を導く Prager らの方法 (Prager and Taylor, 1968; Prager, 1974) に基づき、その最適性条件と上記の幾何学特性を有効に利用する方法である。本節で採用する方法は、この解析的方法である。

杭基礎のモデル化

本節では、杭基礎を水平ばね (スウェイばね) および回転ばね (ロッキングばね) にモデル化する。杭の位置及び総本数は指定されているものとし、各杭の断面積比もすべて指定されているものとする。

まず、単杭の杭頭における水平ばね剛性 s_1 は、線形弾性地盤反力法つまり Chang(1937) の式により評価する。次に、鉛直ばね剛性 s_2 は、杭を周面及び先端にばねを有する弾性体としてモデル化し、それに土質試験結果を組み込んだ形で評価する。ここで、杭の断面積と杭径及び断面二次モーメントとの関係式を用いると、それらはともに杭の断面積 A_P の関数として表現できる。さらに、断面積 A_P の対象領域を限定すると、断面積比の基準となる杭 (以下では基準杭と呼ぶ) の水平ばね剛性 $s_1^{(1)}$ 及び鉛直ばね剛性 $s_2^{(1)}$ は次のように基準杭の杭断面積 $A_P^{(1)}$ の一次関数で近似できる。

$$s_1^{(1)} = \hat{a}_1 A_P^{(1)} + \hat{b}_1 \quad (2.53a)$$

$$s_2^{(1)} = \hat{a}_2 A_P^{(1)} + \hat{b}_2 \quad (2.53b)$$

この時、杭基礎全体の水平ばね剛性 k_H および回転ばね剛性 k_R は次のように表現できる。

$$k_H = \sum s_1^{(i)} = \sum (\hat{a}_1 A_P^{(i)} + \hat{b}_1) = \sum (\hat{a}_1 q_i A_P^{(1)} + \hat{b}_1) = a_1 A_P^{(1)} + b_1 \quad (2.54)$$

$$k_R = \sum s_2^{(i)} R_i^2 = \sum (\hat{a}_2 A_P^{(i)} + \hat{b}_2) R_i^2 = \sum (\hat{a}_2 q_i A_P^{(1)} + \hat{b}_2) R_i^2 = a_2 A_P^{(1)} + b_2 \quad (2.55)$$

ただし、総和記号は杭全体にわたる総和を意味し、 a_1, b_1, a_2, b_2, q_i は次式で与えられる量である。

$$a_1 = \hat{a}_1 \sum q_i, \quad b_1 = n \hat{b}_1, \quad a_2 = \hat{a}_2 \sum q_i R_i^2, \quad b_2 = \hat{b}_2 \sum R_i^2, \quad q_i = \frac{A_P^{(i)}}{A_P^{(1)}} \quad (2.56)$$

ここで、 q_i は第 i 番目の杭の基準杭に対する断面積比、 R_i は第 i 番目の杭のロッキング中心軸からの距離を、 n は杭の本数を表わし、また、 a_1, b_1, a_2, b_2 は杭種別及び地盤条件、杭長、材質等に依存する量であり、いずれも最適化の過程においては被指定量として扱う。従って、水平ばね剛性 k_H 、回転ばね剛性 k_R は基準

杭の断面積 $A_P^{(1)}$ の一次関数で近似できる。以下では基準杭の断面積のみ扱うので、 $A_P^{(1)}$ を単に A_P と表記する。

尚、ここでは群杭効果は考慮しないが、杭位置および杭本数は前もって指定されているため、その全体的又は平均的效果を組み込むことは比較的容易である。また、本論文では杭の剛性は振動数非依存型のものとして扱っているが、対象とする杭及び地盤条件によっては、この仮定が妥当なものであることが弾性波動論に基づく Novak and Sharnouby(1983) の研究によって明らかにされている。

問題の定式化

図 2.1 に示すような二種類のばねで支持された f 層弾性剪断型構造物を扱う。下から i 番目の床を第 i 床と呼ぶ。第 $(i+1)$ 床の集中質量 m_i 、及びその重心回りの回転慣性 I_{Ri} 、第 i 層階高 h_i は指定されているものとし、第 i 層の層間相対変位に関する剛性 k_i に基準杭の断面積 A_P を含めた集合 $\mathbf{k} = \{k_1 \dots k_f A_P\}$ を設計変数とする。ここで、次のような最適設計問題を考える。

[問題 ODBP]

一次固有周期制約条件

$$T_1(\mathbf{k}) = T_a \quad (\text{or } \Omega_1(\mathbf{k}) = \Omega_a) \quad (2.57)$$

を満たし、評価関数

$$W(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^f (c_i \beta_i)^2 k_i h_0 + (c_0 \beta_0)^2 \rho_0 A_P L \quad (2.58)$$

を最小にするような集合 \mathbf{k} を求めよ。

ここで、 $T_1(\mathbf{k}), \Omega_1(\mathbf{k})$ は設計 \mathbf{k} の弾性剪断型構造物—杭系の一次固有周期および一次固有値を表わし、 $T_a, \Omega_a, \beta_i, \beta_0$ は、それぞれ指定一次固有周期、それに対応する指定一次固有値、第 i 層構成部材の重み係数の平方根、杭の重み係数の平方根を表わす。また、 $c_0^2 = \sum q_i$ で、 c_i^2 は第 i 層の層間相対変位に関する剛性 k_i を第 i 層構成部材重量に変換するための係数である。さらに、 ρ_0, L, h_0 は、それぞれ杭の構成材料の単位体積当りの平均化重量、杭長、および剪断型構造物の基準階高を表わす。

この時、一次固有値 $\Omega_1(\mathbf{k})$ は Rayleigh 商を用いて次のように表現できる。

$$\Omega_1(\mathbf{k}) = \min_{\phi} \frac{\phi^T [\mathbf{K}_B(k_1 \dots k_f) + \mathbf{K}_F(A_P)] \phi}{\phi^T \mathbf{M} \phi} \quad (2.59)$$

ここで、 $\mathbf{K}_B(k_1 \dots k_f), \mathbf{K}_F(A_P), \mathbf{M}, \phi$ は、それぞれ上部剪断型構造物に関する剛性行列、杭に関する剛性行列、全体の質量行列および任意のモードベクトルを表わす。 $\mathbf{K}_B, \mathbf{K}_F, \mathbf{M}$ は、(2.2) 式と同一の行列である。ただし、 \mathbf{K}_F については、(2.2) 式の k_H, k_R が (2.54, 55) 式により A_P で表現されることに注意する必要がある。

最適性条件の誘導

[問題 ODBP] に対する大域最適性の必要十分条件は、指定された剛性を有するばねで弾性支持された弾性剪断型構造物の場合 (中村、竹脇, 1985) とほぼ同様に、Rayleigh の原理および Farkas の定理を適用することにより次のように導かれる。

[問題 ODBP] に対する最適設計を $\bar{\mathbf{k}} = \{\bar{k}_1 \dots \bar{k}_f \ \bar{A}_P\}$ で表わし、それに対応する一次固有モードを $\Phi(\bar{\mathbf{k}})$ で表わす。一方、[問題 ODBP] において、制約条件 (2.57) 式を満足する任意の設計を $\mathbf{k} = \{k_1 \dots k_f \ A_P\}$ で表わし、その一次固有モードを $\Phi(\mathbf{k})$ で表わす。 $\Phi(\bar{\mathbf{k}})$ は設計 \mathbf{k} の構造物にとって運動学的に許容なモードであるから、Rayleigh の原理により次式が成り立つ。

$$\frac{\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T [\mathbf{K}_B(k_1 \dots k_f) + \mathbf{K}_F(A_P)] \Phi(\bar{\mathbf{k}})}{\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\bar{\mathbf{k}})} \geq \frac{\Phi(\mathbf{k})^T [\mathbf{K}_B(k_1 \dots k_f) + \mathbf{K}_F(A_P)] \Phi(\mathbf{k})}{\Phi(\mathbf{k})^T \mathbf{M} \Phi(\mathbf{k})} \quad (2.60)$$

また、設計 \mathbf{k} と $\bar{\mathbf{k}}$ の構造物はともに同じ一次固有値 Ω_a を有するという事より次式が成り立つ。

$$\frac{\Phi(\mathbf{k})^T [\mathbf{K}_B(k_1 \dots k_f) + \mathbf{K}_F(A_P)] \Phi(\mathbf{k})}{\Phi(\mathbf{k})^T \mathbf{M} \Phi(\mathbf{k})} = \frac{\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T [\mathbf{K}_B(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_f) + \mathbf{K}_F(\bar{A}_P)] \Phi(\bar{\mathbf{k}})}{\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T \mathbf{M} \Phi(\bar{\mathbf{k}})} \quad (2.61)$$

(2.60) 式と (2.61) 式より次式が導かれる。

$$\Phi(\bar{\mathbf{k}})^T [\mathbf{K}_B(k_1 \dots k_f) - \mathbf{K}_B(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_f) + \mathbf{K}_F(A_P) - \mathbf{K}_F(\bar{A}_P)] \Phi(\bar{\mathbf{k}}) \geq 0 \quad (2.62)$$

一方、 $\bar{\mathbf{k}}$ が [問題 ODBP] の最適設計であるという条件は、次のように表現できる。

$$\sum_{i=1}^f (c_i \beta_i)^2 h_0 (k_i - \bar{k}_i) + (c_0 \beta_0)^2 \rho_0 L (A_P - \bar{A}_P) \geq 0 \quad (2.63)$$

Farkas の定理によれば、(2.62) 式を満足するすべての $\{k_1 - \bar{k}_1 \ \dots \ k_f - \bar{k}_f \ A_P - \bar{A}_P\}$ に対して (2.63) 式が成立するための必要十分条件は次式で与えられる。

$$[U_i(\bar{\mathbf{k}}) - U_{i-1}(\bar{\mathbf{k}})]^2 = (\mu h_0 c_i \beta_i)^2 \quad (i = 1, \dots, f) \quad (2.64)$$

$$a_1 U_F(\bar{\mathbf{k}})^2 + a_2 \Theta_F(\bar{\mathbf{k}})^2 = \rho_0 h_0 L (\mu c_0 \beta_0)^2 \quad (2.65)$$

ここで、 $U_F(\bar{\mathbf{k}})$, $\Theta_F(\bar{\mathbf{k}})$, $U_i(\bar{\mathbf{k}})$ は最適設計 $\bar{\mathbf{k}}$ の弾性剪断型構造物一杭系の一次固有モードにおける基礎版の水平変位、基礎版の回転角、基礎版に対する第 $(i+1)$ 床の水平変位を表わし、 μ は正の定数を表わす。

最適設計解の導出

前節で導いた最適性条件を用い、[問題 ODBP] に対する最適設計解を導く。以下では最適設計解のみ扱うので記号 $(\bar{\mathbf{k}})$ は省略する。

図 2.1 に示される弾性支持された剪断型構造物の自由振動方程式に、 $\sqrt{\Omega_a}$ を円振動数とし、 Φ を変位モードとして持つ調和振動を表わす式を代入すれば、その係数より次式を得る。

$$-\Omega_a m_0 U_F - \Omega_a \sum_{i=1}^f m_i (U_F + \Theta_F H_i + U_i) + k_H U_F = 0 \quad (2.66)$$

$$-\Omega_a \sum_{i=1}^f m_i (U_F + \Theta_F H_i + U_i) H_i - \Omega_a \sum_{i=0}^f I_{Ri} \Theta_F + k_R \Theta_F = 0 \quad (2.67)$$

$$-\Omega_a m_i (U_F + \Theta_F H_i + U_i) + k_i (U_i - U_{i-1}) - k_{i+1} (U_{i+1} - U_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f-1) \quad (2.68)$$

$$-\Omega_a m_f (U_F + \Theta_F H_f + U_f) + k_f (U_f - U_{f-1}) = 0 \quad (2.69)$$

ただし、 H_i は次式で定義される量である。

$$H_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad (2.70)$$

一方、最適性条件(2.64)より次式を得る。

$$U_i - U_{i-1} = \mu h_0 c_i \beta_i \quad (c_i > 0, \beta_i > 0, \mu > 0, i = 1, \dots, f) \quad (2.71)$$

(2.71) 式で、(2.64) 式の根の中の正符号のみ採用したのは、それ以外の符号の組合せを採用した時には、Rayleigh の原理よりそのモードが真の一次固有ベクトルではないことが容易に示せるからである。(2.71) 式より次式が得られる。

$$U_i = \mu h_0 \sum_{j=1}^i c_j \beta_j \quad (i = 1, \dots, f) \quad (2.72)$$

(2.72) 式を用いて(2.66,67) 式を整理すれば次式を得る。

$$D_1 U_F + D_2 \Theta_F + D_3 \mu h_0 = 0 \quad (2.73)$$

$$D_2 U_F + D_4 \Theta_F + D_5 \mu h_0 = 0 \quad (2.74)$$

ただし、 $D_1 \sim D_5$ は次の量を表わす。

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{i=0}^f m_i - \frac{k_H}{\Omega_a}, & D_2 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i, & D_3 &= \sum_{i=1}^f m_i \sum_{j=1}^i c_j \beta_j \\ D_4 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^f I_{Ri} - \frac{k_R}{\Omega_a}, & D_5 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i \sum_{j=1}^i c_j \beta_j \end{aligned} \quad (2.75)$$

(2.73,74) 式を U_F, Θ_F について解けば次式となる。

$$U_F = \frac{D_2 D_5 - D_3 D_4}{D_1 D_4 - D_2^2} \mu h_0, \quad \Theta_F = \frac{D_2 D_3 - D_1 D_5}{D_1 D_4 - D_2^2} \mu h_0 \quad (2.76a, b)$$

(2.76a,b) 式を最適性条件(2.65) 式に代入し、さらにその式に(2.54,55) 式を代入すれば、結局次のような A_P に関する 4 次方程式が得られる。

$$\alpha_1 A_P^4 + \alpha_2 A_P^3 + \alpha_3 A_P^2 + \alpha_4 A_P + \alpha_5 = 0 \quad (2.77)$$

係数 $\alpha_1 \sim \alpha_5$ は、 $c_0, c_i, \beta_0, \beta_i, a_1, a_2, b_1, b_2, \Omega_a, m_i, I_{Ri}, h_i, \rho_0, h_0, L$ から構成されている (中村、竹脇、島野、1989)。(2.77) 式の4つの根の中で、 $A_P > 0, U_F > 0, \Theta_F > 0$ を満足する根が正解である。その理由は、 U_F, Θ_F の中で一つでも負のものが存在すれば、それに対応する Rayleigh 商が、その負号を正号に変えたモードに対応する Rayleigh 商よりも大きくなるのが容易に証明でき、真の一次モードとはなり得ないことが示せるからである。 A_P が求められると、(2.54,55) 式より k_H, k_R の値が決まる。その値を (2.75) 式、さらに (2.76) 式に代入すると、 U_F, Θ_F が μh_0 で表現できる。この U_F, Θ_F を μh_0 で割って次の量を定義する。

$$U_F^* = U_F/(\mu h_0), \quad \Theta_F^* = \Theta_F/(\mu h_0) \quad (2.78a, b)$$

(2.71),(2.72),(2.76a,b) 式を (2.68,69) 式に代入し整理すれば次式を得る。

$$-\Omega_a m_i \left(U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{j=1}^i c_j \beta_j \right) + c_i \beta_i k_i - c_{i+1} \beta_{i+1} k_{i+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f-1) \quad (2.79)$$

$$-\Omega_a m_f \left(U_F^* + \Theta_F^* H_f + \sum_{j=1}^f c_j \beta_j \right) + c_f \beta_f k_f = 0 \quad (2.80)$$

(2.79,80) 式を $i = j$ から $i = f$ まで加えれば最適層間剛性の表現が次のように求められる。

$$k_j = \frac{\Omega_a}{c_j \beta_j} \sum_{i=j}^f m_i \left(U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{k=1}^i c_k \beta_k \right) \quad (2.81)$$

2-3 建築骨組

問題の定式化

ここでは、梁及び柱から構成される建築骨組に対する理論の基本的特徴を提示するために、図2.6に示すような f 層1 スパン骨組を扱う。多スパン骨組に対する理論は、固定基礎を有する場合に展開された理論とは同様に展開可能である。

図2.6に示す2種類の弾性ばねで支持された f 層1 スパン建築骨組を扱う。水平支持ばね剛性 k_H および回転支持ばね剛性 k_R は、地盤の性質および基礎構造の特性から適切な方法を用いて前もって求められているものとする。下から i 番目の床を第 i 床と呼ぶ。第 $(j+1)$ 床を支える梁および第 j 層の柱をそれぞれ「第 j 梁」、「第 j 柱」とよび、各々の曲げ剛性を K_j, J_j で表わす。また、第 j 梁および第 j 柱の断面2次半径は r_{Bj}, r_{Cj} で指定されているものとする。隣接する構造部材の重量も含めた第 $(j+1)$ 床の集中質量、およびその重心回りの回転慣性を m_j, I_{Rj} で表わす。これらは、構造部材の設計変更により変動するが、その非変動部分に比べて変動部分は第一次近似としては無視できるので、設計変更に拘らず m_j, I_{Rj} は変化しないものとして取り扱う。より精度を上げるには、本理論により求められた設計に基づき m_j, I_{Rj} を設定し直せばよい。さらに階高 h_j 、スパン長 l もまた指定されているものとする。

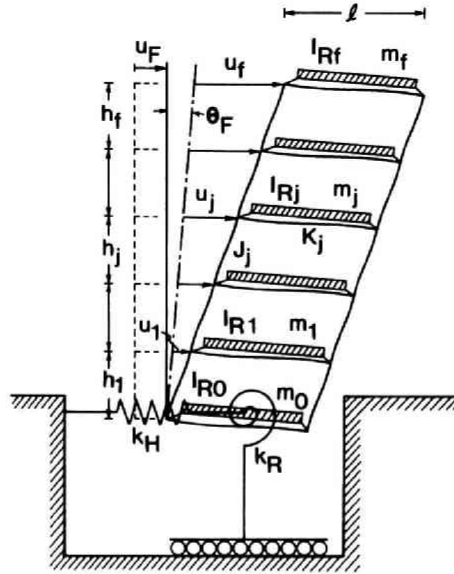


図2.6 弾性支持された建築骨組

本節では、梁および柱の曲げ剛性集合 $s = \{ \{K_j\}^T, \{J_j\}^T \}$ を設計変数とする。集合 s を設計 s と呼び、設計 s を有する骨組を以下では「設計 s の骨組」と呼ぶ。最適性条件の誘導までは、梁と柱を区別せず、第 i 番目の部材の曲げ剛性、断面2次半径、部材長をそれぞれ s_i, r_i, L_i で表わす。ただし、同一断面を有する部材については、その部材長の総和を L_i と表記する。ここでは、各層とも同一剛性（同一断面）を有する2本の柱で構成されているものとし、 $n = 2f + 1$ とする。第 i 部材の（名目）細長比 λ_i を次式で定義する。

$$\lambda_i = \frac{L_i}{r_i} \quad (2.82)$$

第 i 部材の断面積、断面2次モーメントを A_i, I_i で表わし、骨組構成部材のヤング係数、単位体積当り重量を E, ρ で表わせば、骨組全体の重量 W の換算関数 w は次式で表わされる。

$$w = (E/\rho)W = (E/\rho)(\rho \sum_{i=1}^n A_i L_i) = \sum_{i=1}^n E I_i (L_i / r_i^2) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 / L_i) s_i \quad (2.83)$$

設計 s の骨組の一次固有値（一次固有円振動数の2乗）を $\Omega_1(s)$ で表わし、指定一次固有値を Ω_a で表わすことにすれば、一次固有振動数制約条件下の最適設計問題は次のように述べられる。

[問題 ODFR]

一次固有値制約条件

$$\Omega_1(s) = \Omega_a \quad (2.84)$$

を満たし、評価関数(2.83)式を最小にする設計 s を求めよ。

ここでは、各層とも同一剛性（同一断面）を有する2本の柱で構成されているものとし、かつ梁の細長比が全層で一定(= λ_B) の場合についての理論を展開する。梁の細長比が各層で異なる場合については、伊藤(1980)による方法を用いて同様に定式化できる。

最適性条件の誘導

Sheu(1968)の手法とほぼ同様の手法を用いて大域最適性の必要十分条件を導く。一般化座標としては、図2.6に示すように、基礎の水平変位および回転と上部骨組の変形を記述するもの（基礎に対する相対水平変位および相対節点回転角）を選ぶ。

制約条件(2.84)を満たす任意の設計 s の骨組の一次固有モードを $\{U_F, \Theta_F, U_1, \dots, U_f\}$ で表わし、対応する第 i 部材の曲率分布を $\kappa_i(x_i)$ で表わす。一方、[問題 ODFR] の最適設計解 \bar{s} の一次固有モードを $\{\bar{U}_F, \bar{\Theta}_F, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_f\}$ で表わし、対応する第 i 部材の曲率分布を $\bar{\kappa}_i(x_i)$ で表わす。この時、これらの二つの設計に対する Rayleigh 商は次のように表現できる。

$$\begin{aligned}\Omega_a &= \frac{\frac{1}{2}k_H U_F^2 + \frac{1}{2}k_R \Theta_F^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}s_i \int_0^{L_i} \kappa_i(x_i)^2 dx_i}{\frac{1}{2}m_0 U_F^2 + \sum_{j=1}^f \frac{1}{2}m_j (U_F + H_j \Theta_F + U_j)^2 + \sum_{j=0}^f \frac{1}{2}I_{Rj} \Theta_F^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}k_H \bar{U}_F^2 + \frac{1}{2}k_R \bar{\Theta}_F^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\bar{s}_i \int_0^{L_i} \bar{\kappa}_i(x_i)^2 dx_i}{\frac{1}{2}m_0 \bar{U}_F^2 + \sum_{j=1}^f \frac{1}{2}m_j (\bar{U}_F + H_j \bar{\Theta}_F + \bar{U}_j)^2 + \sum_{j=0}^f \frac{1}{2}I_{Rj} \bar{\Theta}_F^2}\end{aligned}\quad (2.85)$$

一次固有モード $\{\bar{U}_F, \bar{\Theta}_F, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_f\}$ 、および曲率分布 $\bar{\kappa}_i(x_i)$ は、設計 s の骨組にとって運動学的に許容なモードであるから、Rayleigh の原理により次の不等式が成立する。

$$\Omega_a \leq \frac{\frac{1}{2}k_H \bar{U}_F^2 + \frac{1}{2}k_R \bar{\Theta}_F^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\bar{s}_i \int_0^{L_i} \bar{\kappa}_i(x_i)^2 dx_i}{\frac{1}{2}m_0 \bar{U}_F^2 + \sum_{j=1}^f \frac{1}{2}m_j (\bar{U}_F + H_j \bar{\Theta}_F + \bar{U}_j)^2 + \sum_{j=0}^f \frac{1}{2}I_{Rj} \bar{\Theta}_F^2}\quad (2.86)$$

(2.85) 式と (2.86) 式より次式が導かれる。

$$\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s}_i) \int_0^{L_i} \bar{\kappa}_i(x_i)^2 dx_i \geq 0\quad (2.87)$$

一方、設計 \bar{s} が最適設計であるという条件は次のように表わせる。

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 / L_i) (s_i - \bar{s}_i) \geq 0\quad (2.88)$$

(2.87) 式と (2.88) 式に Farkas の定理を適用することにより、[問題 ODFR] に対する大域最適性の必要十分条件が次のように得られる。

$$(L_i / \lambda_i^2) \int_0^{L_i} \bar{\kappa}_i(x_i)^2 dx_i = \mu \quad (\mu > 0; i = 1, 2, \dots, n)\quad (2.89)$$

最適設計解の誘導

前節で導いた最適性条件を用いて [問題 ODFR] に対する最適設計解の閉形表現を導く。以下では、最適設計解のみ扱うので (\cdot) 記号は省略する。また、 $\lambda_{Bj} = l/r_{Bj} = \lambda_B$ 、 $\lambda_{Cj} = h_j/r_{Cj}$ とする。

最適設計 \bar{s} の骨組の第 j 梁の基礎に対する相対材端回転角、および第 j 層の相対層間変形角をそれぞれ θ_j, R_j で表わす (図2.7)。仮定により本モデル骨組は梁の中央点を通る軸に関して逆対称な変形をする。従っ

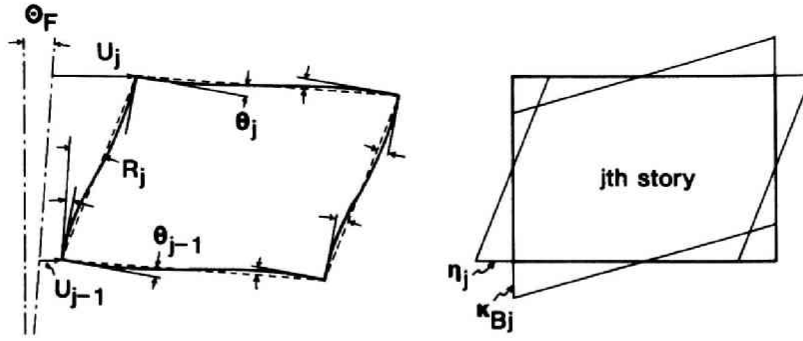


図2.7 第j層変形図および曲率図

て、梁の一次モードにおける反曲点は部材中央に存在するといえる。第j梁の一次モードにおける材端曲率を κ_{Bj} で表わせば、第j梁に対する最適性条件は、次のように表現できる。

$$(l/\lambda_B^2)(\kappa_{Bj}^2 l/3) = \mu \quad (2.90)$$

また、第j梁に対するたわみ角法公式より次式が得られる。

$$\kappa_{Bj} = (6/l)\theta_j \quad (2.91)$$

(2.91) 式を(2.90) 式に代入すれば次式を得る。

$$12\theta_j^2/\lambda_B^2 = \mu \quad (2.92)$$

(2.92) 式は次のようにも表現できる。

$$\theta_j = \sqrt{\frac{\mu}{12}}\lambda_B = \theta_0 \quad (2.93)$$

(2.93) 式で正符号のみ（あるいは負符号のみ）を採用したモードが一次モードであることが容易に示せる。より正確に言えば、それ以外の符号の組合せを採用したモードは、一次固有モードではないことが示せる。以下では、正符号のみ採用した場合を扱う。

(2.93) 式により、全ての柱の反曲点はその部材中央に存在する。一次固有モードにおける第j柱の材端曲率を η_j で表わせば、第j柱に対する最適性条件(2.89) 式は次のように表現できる。

$$(h_j^2/(3\lambda_{Cj}^2))\eta_j^2 = (12/\lambda_{Cj}^2)(\theta_0 - R_j)^2 = \mu \quad (2.94)$$

ここでは、第j柱に対するたわみ角法公式を用いている。(2.93) 式と(2.94) 式より、第j層層間変形角 R_j と第j柱材端曲率 η_j が次のように求められる。

$$R_j = \left(1 + \frac{\lambda_{Cj}}{\lambda_B}\right)\theta_0 \quad (2.95)$$

$$\eta_j = \frac{6\lambda_{Cj}}{h_j\lambda_B}\theta_0 \quad (2.96)$$

一次振動時の第 j 層層剪断力 Q_j は次のように表現できる。

$$Q_j = \Omega_a \sum_{i=j}^f m_i \left\{ U_F + \Theta_F H_i + \sum_{k=1}^i \left(1 + \frac{\lambda_{Ck}}{\lambda_B} \right) h_k \theta_0 \right\} \quad (2.97)$$

また、 k_H, k_R を含む一次の自由振動方程式に上記の一次固有モードの表現を代入することにより次式が得られる。

$$D_1 U_F + D_2 \Theta_F + D_3 \theta_0 = 0 \quad (2.98)$$

$$D_2 U_F + D_4 \Theta_F + D_5 \theta_0 = 0 \quad (2.99)$$

ただし、 $D_1 \sim D_5$ は次の諸量を表わす。

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{i=0}^f m_i - \frac{k_H}{\Omega_a}, & D_2 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i, & D_3 &= \sum_{i=1}^f m_i \sum_{j=1}^i \left(1 + \frac{\lambda_{Cj}}{\lambda_B} \right) h_j \\ D_4 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^f I_{Ri} - \frac{k_R}{\Omega_a}, & D_5 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i \sum_{j=1}^i \left(1 + \frac{\lambda_{Cj}}{\lambda_B} \right) h_j \end{aligned} \quad (2.100)$$

(2.98) 式と (2.99) 式を U_F, Θ_F について解けば次のようになる。

$$U_F = \frac{D_2 D_5 - D_3 D_4}{D_1 D_4 - D_2^2} \theta_0, \quad \Theta_F = \frac{D_2 D_3 - D_1 D_5}{D_1 D_4 - D_2^2} \theta_0 \quad (2.101a, b)$$

U_F, Θ_F を θ_0 で割って次の量を定義する。

$$U_F^* = U_F / \theta_0, \quad \Theta_F^* = \Theta_F / \theta_0 \quad (2.102a, b)$$

一次固有モードにおける第 j 柱の材端曲げモーメントを c_j で表わし、第 j 層の層方程式を書けば次のようになる。

$$\frac{1}{2} h_j Q_j = -2c_j = 2J_j \eta_j = (12\lambda_{Cj} / (h_j \lambda_B)) J_j \theta_0 \quad (2.103)$$

(2.97) 式を (2.103) 式に代入することにより、第 j 柱の最適曲げ剛性の表現が次のように求められる。

$$J_j = \frac{\Omega_a}{24} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_{Cj}} \right) h_j^2 \sum_{i=j}^f m_i \left\{ U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{k=1}^i \left(1 + \frac{\lambda_{Ck}}{\lambda_B} \right) h_k \right\} \quad (2.104)$$

また、第 j 梁の材端において節点方程式を書くことにより、第 j 梁の最適曲げ剛性の表現が次のように求められる。

$$K_j = \frac{\Omega_a l}{24} \left[h_j \sum_{i=j}^J m_i \left\{ U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{k=1}^i \left(1 + \frac{\lambda_{Ck}}{\lambda_B} \right) h_k \right\} + h_{j+1} \sum_{i=j+1}^J m_i \left\{ U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{k=1}^i \left(1 + \frac{\lambda_{Ck}}{\lambda_B} \right) h_k \right\} \right] \quad (2.105)$$

2-4 結論

本章では、四章において展開するレベル1設計用地震動に対する地震時応答制約設計法の準備として、弾性支持された剪断型構造物、剪断型構造物－杭系、弾性支持された建築骨組の一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開した。本章では、支持ばね剛性として、振動数非依存型のものが採用された。本章において得られた主な成果は以下の通りである。

2-1 節

- (1) 地盤上に置かれた基礎、あるいは地盤内に埋設された基礎の水平移動および回転に関する剛性を代表するばねで弾性支持された剪断型構造物について、一次固有周期を制約条件とする最適設計問題を定式化し、その問題に対する大域最適性の必要十分条件を Rayleigh の原理および Farkas の定理を用いて導いた。
- (2) 弾性ばね係数 k_H, k_R を含む自由振動に対する運動方程式と最適性条件より、最適設計解の一次固有ベクトルが閉形表現で導かれることを示した。本節で導いた最適設計解は、重み係数および階高が一定の時、その一次固有ベクトルが直線形となる特性を有している。また、最適設計解の一次固有ベクトルの表現を運動方程式に代入し、最適層間剛性の閉形表現を導いた。
- (3) 固定基礎を有する剪断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計解と弾性支持された時の最適設計解の関係を明らかにした。また、後者の解の極限は前者の解と一致することを示した。
- (4) 剛性が指定された弾性支持ばねの存在により指定一次固有値の範囲が制限されることを示し、その限界値を求めた。
- (5) 最適設計の層間剛性が閉形表現で得られていることを利用して、異なる地盤条件に対して一定の一層剛性を有する剪断型構造物を設計する一つの方法を示した。この方法によれば、異なる地盤条件に対して一次固有周期を制約して最適設計される弾性支持された剪断型構造物の剛性分布が、同一の一層剛性の条件下で比較できるという利点がある。

2-2 節

- (1) 弾性剪断型構造物－杭系モデルを2種類の弾性ばねで支持された剪断型構造物モデルに置換したモデルに対して、杭断面積及び剪断型構造物の層間剛性を設計変数とする場合の一次固有周期制約条件下の最適設計問題を定式化し、大域最適性の必要十分条件を導いた。
- (2) 上記の最適設計問題に対する解を閉形表現の形で誘導した。

2-3 節

- (1) 水平ばねと回転ばねの2種類の弾性ばねで支持された多層1スパン建築ラーメンの一次固有周期制約条件下の最小重量設計問題を定式化し、大域最適性の必要十分条件を導いた。この最適性条件は、各部材の曲率二乗平均が断面二次半径の二乗の逆比に比例して分配されることを示している。
- (2) 最適性条件と自由振動における運動方程式を用いて、梁と柱の最適曲げ剛性の閉形表現を誘導した。

文献

- 伊藤 均 (1980): 建築骨組の動的最適設計理論 —一次固有周期制約条件下の最適設計理論とその応用、京都大学修士論文。
- Cakmak, A.S., A.M.Abdel-Ghaffar and C.A.Brebbia (eds.) (1982): *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.I, II: Proc. of the Conf. on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, A.A.Balkema.
- Chang, Y.L.(1937): Discussion on "Lateral Pile-loading Test" by L.B. Feagin, *Trans.*, ASCE, pp272-278.
- Farkas, J. (1902): Uber die Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 124, 1-24.
- Haug, E.J. and J. Cea (eds.) (1981): *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Sitjhoff & Noordhoff, Netherlands.
- Lev, O.E.(1981): *Structural Optimization: Recent developments and Applications*, ASCE.
- Levy, R. and O.E. Lev (1987): Recent Developments in Structural Optimization, *Jour. of Struct. Eng.*, ASCE, Vol.113, No.9, pp1939-1962.
- Luco, J.E. (1980): *Linear Soil-structure Interaction*. UCRL-15272, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California.
- Moore, P.J.(ed.) (1985): *Analysis and Design of Foundations for Vibration*, A.A.Balkema.
- Morris, A.J.(ed.) (1982): *Foundations of Structural Optimization; A Unified Approach*, John Wiley & Sons.
- 中村 恒善 (1987): 最適設計理論と性能制御理論、日本建築学会編「建築構造力学の最近の発展 —応力解析の考え方—」、pp99-136.
- 中村 恒善 (1980): 建築骨組の最適設計、丸善、1980.
- 中村 恒善、伊藤 均 (1980): 建築ラーメンの一次固有周期制約条件下の最適設計 (その 1,2)、日本建築学会学術講演梗概集、近畿、pp947-950.
- 中村 恒善、中村 豊 (1982): 偏心のある構造物モデルの1次固有周期制約条件下の最適設計、日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北)、pp801-802.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1981): ロッキングを考慮した建築ラーメンの一次固有周期制約条件下の最適設計、日本建築学会大会学術講演梗概集、構造、pp833-834.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1983): 弾性支持された建築ラーメンの一次固有周期及び最小曲げ剛性制約条件下の最適設計、同上、構造、pp1043-1044.

- 中村 恒善、竹脇 出 (1985): 弾性支持されたせん断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計、構造工学論文集、Vol.31B, pp93-102.
- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1985): Optimum Building Design for Forced-mode Compliance, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.111, No.9, pp1159-1174.
- 中村 恒善、竹脇 出、島野 幸弘 (1988): 弾性剪断型構造物—杭系の最適設計及び地震時応答制約設計、日本建築学会大会学術講演梗概集、構造 I, pp857-858.
- 中村 恒善、竹脇 出、島野 幸弘 (1989): 平面弾性剪断型構造物—杭系の地震時弾性応答制約設計、日本建築学会構造系論文報告集、第 403 号, pp125-137.
- 中村 恒善、山根 尚志 (1981): 一次固有周期制約条件下の最適設計解とそれに基づく地震時応答変位の最大値の制御、日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), pp1041-1042.
- Nakamura, Tsuneyoshi and T. Yamane (1986): Optimum Design and Earthquake-response Constrained Design of Elastic Shear Buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, pp797-815.
- 日本建築学会 (1987): 地震荷重—その現状と将来の展望.
- Niordson, F.I. and P. Pedersen (1972): A Review of Optimal Structural Design, Theoretical and Applied Mechanics, *Proc. 13th Int. Cong. of Th. Appl. Mech.*, Moscow.
- Novak, M. and B.E. Sharnouby (1983): Stiffness Constants of Single Piles, *J. Geotech. Eng.*, ASCE, Vol.109, No.7, pp961-974.
- Olhoff, N. (1980): Optimal Design with Respect to Structural Eigenvalues, *Proc. IUTAM Symposium on Variational Methods in the Mechanics of Solids*, S. Nemat-Nasser, ed., Pergamon, New York, pp133-149.
- Olhoff, N. and J.E. Taylor (1983): On Structural Optimization, *Jour. of Appl. Mech.*, Vol.50, pp1139-1151.
- Pierson, B.L. (1972): A Survey of Optimal Structural Design under Dynamic Constraints, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.4, pp491-499.
- Prager, W. (1974): *Introduction to Structural Optimization*, Springer.
- Prager, W. and J.E. Taylor (1968): Problems of Optimal Structural Design, *J. Appl. Mech.*, Vol.35, pp102-106.
- Richart, F.E., Jr., J.R. Hall, Jr. and R.D. Woods (1970): *Vibrations of Soils and Foundations*, (邦訳「土と基礎の振動」、岩崎敏男、島津晃臣訳、鹿島出版会 (1975))
- Rozvany, G.I.N. and Z. Mroz (1977): Analytical Methods in Structural Optimization, *Applied Mechanics Reviews*, Vol.30, No.11, 1977, pp1461-1470.
- Schmit, L.A. (1981): Structural Synthesis-Its Genesis and Development, *AIAA Journal*, Vol.19, No.10, pp1249-1263.
- Sheu, C.Y. (1968): Elastic Minimum-Weight Design for Specified Fundamental Frequency, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.4, pp953-958.
- Sheu, C.Y. and W. Prager (1968): Recent Developments in Optimal Structural Design, *Applied Mechanics Reviews*, Vol.21, No.10, pp985-992.

- Temple, G. and W.G. Bickley (1933): *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering*, Dover Publications Inc..
- Venkayya, V.B. (1971): Design of Optimum Structures, *Computers and Structures*, Vol.1, pp265-309, 1971. およびそれ以降の多数の論文
- Venkayya, V.B. (1978): Structural Optimization: A Review and Some Recommendations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.13, pp203-228.
- Waas, G. and H.G. Hartmann (1984): Seismic Analysis of Pile Foundations Including Pile-soil-pile Interaction, *Proc. of 8th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol.V, pp55-62.
- Wasiutynski, Z. and A. Brandt (1963): The Recent State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures, *Applied Mechanics Reviews*, Vol.16, No.5, pp341-350.
- Wolf, J.P. (1985): *Dynamic Soil-structure Interaction*, Prentice-Hall.
- Wolf, J.P. and G.A. von Arx (1978): Impedance Function of a Group of Vertical Piles, *Proc. of the ASCE Geotech. Eng. Div. Specialty Conf. on Earthquake Eng. and Soil Dynamics*, Vol.II, pp1024-1041.

第三章 振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物の 一次固有周期制約条件下の最適設計*

構造物と地盤の動的相互作用に関する研究においては、波動論に基づく挙動解析的研究が多数行なわれている。それらの研究においては多くの場合、基礎の自由地盤に対する相対変位に関する剛性が、振動数依存型のものとして求められている（たとえば、Luco, 1980; Wolf, 1985; 日本建築学会, 1987）。

本章の目的は、振動数依存型剛性を有するばね（あるいは部材）で支持され、振動数非依存型剛性を有する部材から構成される構造物の固有振動数に関する特徴を明らかにし、その一次固有振動数制約条件下の最適設計理論を展開することにある。また、振動数依存型剛性ばねで支持された構造物と、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物の一次固有振動数および一次固有ベクトルの対応関係に関する定理を導く。この定理は、後で展開する振動数依存型複素剛性ばねで支持された構造物の地震時応答制約設計法において重要な役割を果たす。尚、本章では減衰は扱わないが、第五章の地震時応答制約設計法においては考慮する。

これまでに一次固有振動数を制約条件とする弾性構造物の最適設計理論は数多く展開されてきている（Pierson, 1972; Olhoff, 1980; Haug and Cea, 1981）。しかしながら、振動数依存型剛性を有するばね（あるいは部材）で支持され、振動数非依存型剛性を有する部材から構成される構造物の、一次固有振動数制約条件下の最適設計問題を扱っているものは、著者らの論文（Nakamura and Takewaki, 1989）以外には存在しない。

振動数依存型剛性を有する部材を含む構造物の自由振動に関する固有値問題は、そのような部材を含まない構造物の固有値問題（線形固有値問題）とは異なる数学的構造を有している。このような数学的構造を有する固有値問題は、一般的に「 λ matrix の問題」として知られている（Lancaster, 1966）。振動数依存型剛性部材を含む構造物は、各自由振動において異なる剛性行列を有するため、固有ベクトル間の直交条件は一般に成立しない。また、このような構造物においては、振動数依存型剛性に特別な制約が課されない限り、Rayleigh の原理は成り立たない。

以下では、まず最初に、振動数依存型剛性ばねで支持された構造物に対して、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物を新たに定義し、両構造物の一次固有振動数および一次固有ベクトルの対応関係について述べる。

3-1 振動数依存型剛性ばねで支持された構造物と振動数 非依存型剛性ばねで支持された構造物の特性

振動数依存型剛性ばねで支持された構造物の動的特性を明らかにするために、図 3.1 に示す単純モデルを考える。本モデルは、水平方向にのみ自由度を有する 2 自由度モデルである。支持ばね剛性は振動数依存型であると仮定し、 $k_1(\Omega)$ で表わす。ここで、 $\Omega = \omega^2$ (ω は円振動数) である。一方、一層剛性 k_2 は振動数非依存型であると仮定する。また、1 層および 2 層床の集中質量をそれぞれ m_1, m_2 で表わす。この時、固有値問題は次のように表現できる。

$$\left[\Omega \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1(\Omega) + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

ここで、 u_1, u_2 は、各床の水平変位を表わす。

* 本章の一部は、1-2 節の論文 [7] の一部に加筆しまとめたものである。

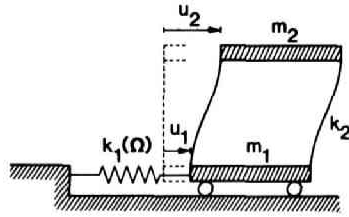


図3.1 振動数依存型剛性ばねで支持された二自由度モデル

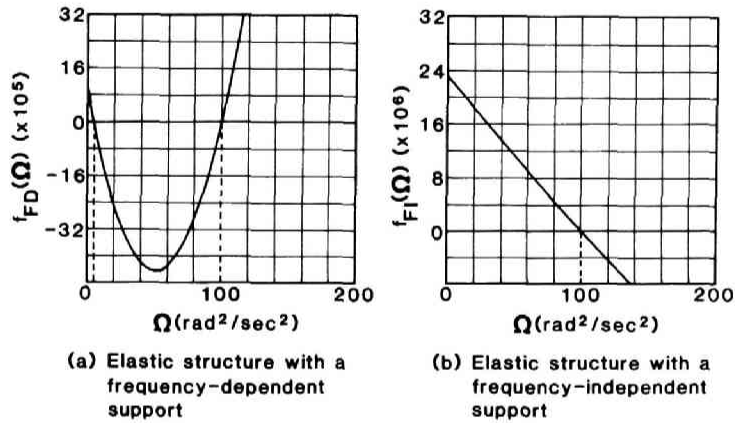


図3.2 (3.6)式の $f_{FD}(\Omega)$ の Ω に関するプロット, および(3.7)式の $f_{F1}(\Omega)$ の Ω に関するプロット ($k_1(\Omega)=0.2\Omega^2+100$ の場合)

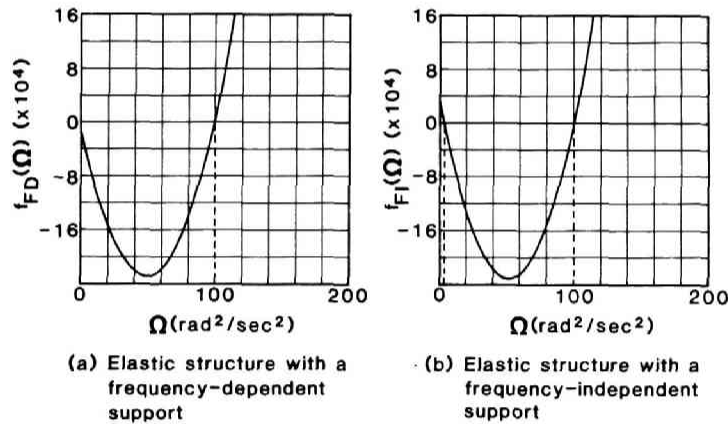


図3.3 (3.6)式の $f_{FD}(\Omega)$ の Ω に関するプロット, および(3.7)式の $f_{F1}(\Omega)$ の Ω に関するプロット ($k_1(\Omega)=\Omega-20$ の場合)

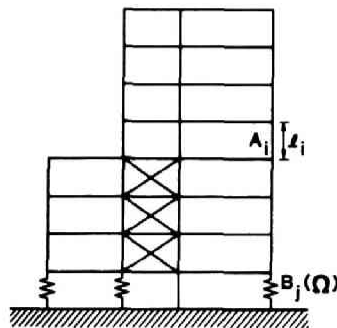


図3.4 振動数依存型剛性ばねで支持された弾性骨組

このモデルの指定固有値(次数は指定しない)を Ω_a で表わすものとする。 $\Omega = \Omega_a$ の条件下で(3.1)式の第一式と第二式を辺々加えれば次式を得る。

$$\Omega_a(m_1 u_1 + m_2 u_2) = k_1(\Omega_a) u_1 \quad (3.2)$$

(3.2)式から層間変位比が次のように求められる。

$$\frac{u_1}{u_2 - u_1} = \frac{\Omega_a m_2}{k_1(\Omega_a) - \Omega_a(m_1 + m_2)} \quad (3.3)$$

(3.1)式の第二式は次のようにも表現できる。

$$k_2 = \Omega_a m_2 \left\{ 1 + \frac{u_1}{u_2 - u_1} \right\} \quad (3.4)$$

(3.3)式を(3.4)式に代入すれば Ω_a を一つの固有値として有する構造物の剛性 k_2^* が次のように求められる。

$$k_2^* = \frac{\Omega_a m_2 \{k_1(\Omega_a) - \Omega_a m_1\}}{k_1(\Omega_a) - \Omega_a(m_1 + m_2)} \quad (3.5)$$

この時、 $\{k_1(\Omega), k_2^*\}$ を有する構造物の固有値方程式は次式で与えられる。

$$f_{FD}(\Omega) = m_1 m_2 \Omega^2 - \{m_1 k_2^* + m_2(k_1(\Omega) + k_2^*)\} \Omega + k_1(\Omega) k_2^* = 0 \quad (3.6)$$

一方、 $\{\bar{k}_1 = k_1(\Omega_a), k_2^*\}$ を有する振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物の固有値方程式は次式で与えられる。

$$f_{FI}(\Omega) = m_1 m_2 \Omega^2 - \{m_1 k_2^* + m_2(\bar{k}_1 + k_2^*)\} \Omega + \bar{k}_1 k_2^* = 0 \quad (3.7)$$

ここで、 $m_1 = m_2 = 1.0 \times 10^4(kg)$, $\Omega_a = 100.0(rad^2/s^2)$, $k_1(\Omega) = 0.2\Omega^2 + 100(\times 10^3 kg \cdot rad^2/s^2)$ のモデルを考える。図3.2(a),(b)は、このモデルに対する(3.6)式の $f_{FD}(\Omega)$ と(3.7)式の $f_{FI}(\Omega)$ の Ω に対するプロットを表わす。図3.2(a),(b)は、たとえ振動数非依存型剛性ばね $\bar{k}_1 = k_1(\Omega_a)$ で支持された構造物が Ω_a を一次固有値として有していても、振動数依存型剛性ばね $k_1(\Omega)$ で支持された構造物は、 Ω_a を一次固有値として有するとは限らないことを示している。

次に、 $m_1 = m_2 = 1.0 \times 10^4(kg)$, $\Omega_a = 100.0(rad^2/s^2)$, $k_1(\Omega) = \Omega - 20(\times 10^3 kg \cdot rad^2/s^2)$ のモデルを考える。剛性 k_2^* は(3.2)式から(3.5)式までと同様にして求められる。また、その時の固有値方程式も(3.6)および(3.7)式として与えられる。図3.3(a),(b)は、このモデルに対する(3.6)式の $f_{FD}(\Omega)$ と(3.7)式の $f_{FI}(\Omega)$ の Ω に対するプロットを表わす。図3.3(a),(b)は、たとえ振動数依存型剛性ばね $k_1(\Omega)$ で支持された構造物が Ω_a を一次固有値として有していても、振動数非依存型剛性ばね $\bar{k}_1 = k_1(\Omega_a)$ で支持された構造物は、 Ω_a を一次固有値として有するとは限らないことを示している。

3-2 振動数依存型剛性ばねで支持された構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計問題

振動数依存型剛性ばねで支持された弾性構造物の振動特性の基本的特徴は前節で明らかにされた。ここでは、振動数依存型剛性ばねで支持された弾性構造物と対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された弾性構造

物が取り上げられ、それらの一次固有振動数および一次固有ベクトルの対応関係について述べられた。すなわち、振動数依存型剛性ばねに特別な制約が課されない場合には、両者の一次固有振動数および一次固有ベクトルは必ずしも対応しない。しかし、ある制約が課されると、両者のそれらは一対一に対応することが示され得る。ここではまず、支持ばねにある特別な制約が課された場合について、振動数依存型剛性ばねで支持された弾性構造物の一次固有振動数制約条件下の最適設計解を見いだす方法について述べる。次に、その制約が取り除かれた場合について言及する。

図 3.4 に示されるような、指定された振動数依存型剛性ばね（あるいは部材）で支持され、振動数非依存型剛性を有する部材で構成された弾性構造物を対象とする。設計変数は振動数非依存型剛性部材の断面積である。構造物および支持ばね（あるいは部材）の部材中心線形状および寸法は指定されているものとする。系全体の自由度、構造物の部材数および支持部材の独立な剛性の数をそれぞれ N, n, S で表わす。また、構造物の第 i 番目の部材の断面積および部材長をそれぞれ A_i, l_i で表わす。部材断面積の集合 $A_i (i = 1, \dots, n)$ を \mathbf{A} で表わし、「設計 \mathbf{A} 」と呼ぶ。構造物は、軸方向剛性のみ有するトラス部材あるいは軸方向剛性および曲げ剛性を有する梁（あるいは梁-柱）部材から構成されているものとする。また、各部材のヤング係数も指定されているものとする。曲げ剛性を有する部材の断面 2 次モーメントは断面積の非線形関数であってもよい。

支持部材もまたトラス部材あるいは梁（あるいは梁-柱）部材から構成されているものとし、その剛性は振動数依存型であるとする。支持部材の第 j 番目の剛性を $B_j(\Omega)$ で表わし、その集合を $\mathbf{B}(\Omega) = \{B_j(\Omega)\}$ で表わす。以下では表現の簡略化のため、 $\mathbf{B}(\Omega)$ で支持された設計 \mathbf{A} の構造物を「 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物」と呼び、 $\bar{\mathbf{B}}_a (= \mathbf{B}(\Omega_a))$ で支持された設計 \mathbf{A} の構造物を「 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物」と呼び、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の全体座標系における $N \times N$ の剛性行列は、次のように上部構造物に関する剛性行列 $\mathbf{K}_I(\mathbf{A})$ と支持部材に関する剛性行列 $\mathbf{K}_{II}(\mathbf{B}(\Omega))$ の和として表現できる。

$$\mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\Omega)) = \mathbf{K}_I(\mathbf{A}) + \mathbf{K}_{II}(\mathbf{B}(\Omega)) \quad (3.8)$$

ここで $\mathbf{K}_I(\mathbf{A})$, $\mathbf{K}_{II}(\mathbf{B}(\Omega))$ とともに $N \times N$ の剛性行列である。 $\mathbf{K}_{II}(\mathbf{B}(\Omega))$ の各要素は、 $\{B_j(\Omega)\}$ の線形関数であるとする。

$\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物および $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の質量行列は、次のように $N \times N$ の非構造質量行列 \mathbf{M}_P および $N \times N$ の構造質量行列 $\mathbf{M}_S(\mathbf{A})$ で構成されているものとする。

$$\mathbf{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{M}_S(\mathbf{A}) + \mathbf{M}_P \quad (3.9)$$

$\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の k 次固有値および k 次固有ベクトルを $\Omega_k, \mathbf{Z}_{FD}^{(k)}$ で表示するものとするれば、その時の固有値問題は次のように表現される。

$$[\mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\Omega_k)) - \Omega_k \mathbf{M}(\mathbf{A})] \mathbf{Z}_{FD}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

(3.10) 式はこの固有値問題が、振動数依存型剛性部材を含まない構造物のそれとは異なる数学的構造を有することを意味している。

$\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の一次固有振動数を $\omega_1(\mathbf{A})$ で表わし、指定される一次固有振動数を ω_a で表わす。また $\Omega_1(\mathbf{A}) = \omega_1(\mathbf{A})^2$, $\Omega_a = \omega_a^2$, $\mathbf{L} = \{l_1 \dots l_n\}^T$ とする。ここで $()^T$ は転置を表わす。この時、振動数依存型剛性部材で支持された構造物の一次固有振動数制約条件下の最適設計問題は次のように述べられる。

[問題 FEC]

振動数依存型剛性部材 $\mathbf{B}(\Omega)$ で支持された弾性構造物について、一次固有振動数制約条件

$$\omega_1(\mathbf{A}) = \omega_a \quad (\text{or } \Omega_1(\mathbf{A}) = \Omega_a) \quad (3.11)$$

および最小断面積制約条件

$$A_i \geq \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.12)$$

を満たし評価関数

$$w = \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad (3.13)$$

を最小にする断面積集合 \mathbf{A} を求めよ。

ここでは、最小断面積制約条件が全て等号で満たされる場合は扱わない。

以下では、支持ばね剛性 $B_j(\Omega)$ が全て Ω の正の非増加一価関数である場合のみ扱う。[問題FEC]において、一次固有振動数を指定した後では、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物と、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物を区別することは困難のように思えるが、次の点に注意する必要がある。すなわち、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の一次固有ベクトルは Rayleigh の原理により特徴づけられるが、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物についてはそうではないということである。たとえ $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物について一つの固有ベクトルが見いだせても、それが一次の固有ベクトルであるかどうかは、対応する固有値が固有値方程式の正の最小根であることを示す以外に方法はない。前節で示したように、支持ばね剛性に特別な制約が課されていない場合には、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物と $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物には明確な差が存在する。

3-3 振動数依存型剛性ばねで支持された構造物と振動数 非依存型剛性ばねで支持された構造物に関する二つの定理

[問題FEC] に対する大域最適性の必要十分条件を導くためには、まず次の二つの定理を導入し証明しなければならない。

[定理 1]

$\bar{\mathbf{B}}_a (= \mathbf{B}(\Omega_a))$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の一次固有振動数を ω_a で表わす。この時、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は前者の構造物と同じ一次固有振動数と一次固有ベクトルを有する。ただし、 $\{B_j(\Omega)\}$ は全て正の非増加一価関数であるとする。

[証明]

$\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物が ω_a を一次固有振動数として有することより、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物が、 ω_a を一つの固有振動数として有することは明らかである。定理1は、「 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は、 ω_a を一つの固有振動数としてもつが、それよりも小さな固有振動数をもたない」ことを示すことにより証明できる。

$\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の一次固有振動数を ω_a で表わす時、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物に対する (3.10) 式は次のように表現できる。

$$[\mathbf{K}_{FI}(\mathbf{A}; \bar{\mathbf{B}}_a) - \Omega_a \mathbf{M}(\mathbf{A})] \mathbf{Z}_{FI}(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

ここで、 $\mathbf{K}_{FI}(\mathbf{A}; \bar{\mathbf{B}}_a)$ と $\mathbf{Z}_{FI}(\mathbf{A})$ は、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の剛性行列および一次固有ベクトルを表わす。 $\mathbf{K}_{FI}(\mathbf{A}; \bar{\mathbf{B}}_a)$ は、 $\mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\Omega))$ における $\mathbf{B}(\Omega)$ を $\bar{\mathbf{B}}_a$ で置き換えることにより得られる行列である。(3.14) 式の前から $\mathbf{Z}_{FI}(\mathbf{A})^T$ を乗じることにより、 Ω_a の表現が Rayleigh 商として次のように得られる。

$$\Omega_a = \frac{\mathbf{Z}_{FI}(\mathbf{A})^T \mathbf{K}_{FI}(\mathbf{A}; \bar{\mathbf{B}}_a) \mathbf{Z}_{FI}(\mathbf{A})}{\mathbf{Z}_{FI}(\mathbf{A})^T \mathbf{M}(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_{FI}(\mathbf{A})} \quad (3.15)$$

(3.15) 式は振動数依存型剛性部材を含まない構造物に対する Rayleigh 商であり、 Ω_a はこの構造物に対する真の一次固有値であるから、Rayleigh の原理 (たとえば Temple and Bickley, 1933) により (3.15) 式の右辺は運動学的に許容な任意のモードに対して Ω_a を最小値としてもつ。

今、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は Ω_a よりも小さな固有値 $\Omega_p (= \Omega_a - \Delta\Omega (\Delta\Omega > 0) = \omega_p^2)$ を有するものとする。この時、この構造物が固有振動数 ω_p で自由振動する時の剛性行列は、 \mathbf{K}_{II} の $B_j(\Omega)$ に関する線形性により次のように表現できる。

$$\mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\Omega_a - \Delta\Omega)) = \mathbf{K}_I(\mathbf{A}) + \mathbf{K}_{II}(\mathbf{B}(\Omega_a)) + \mathbf{K}_{II}(\Delta\mathbf{B}) \quad (3.16)$$

ここで、 $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B}(\Omega_a - \Delta\Omega) - \mathbf{B}(\Omega_a)$ であり、 $\mathbf{B}(\Omega)$ の非増加特性により $\Delta B_j \geq 0$ (for all j) である。 Ω_p に対応する固有ベクトルを $\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})$ で表わす。(3.10) 式の ω_k , $\mathbf{Z}_{FD}^{(k)}$ の代わりに、 Ω_p , $\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})$ を代入することにより固有値 Ω_p は次のように表現できる。

$$\Omega_p = \frac{\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\Omega_a - \Delta\Omega)) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})}{\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{M}(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})} \quad (3.17)$$

$\mathbf{K}_{II}(\mathbf{B}(\Omega_a)) = \mathbf{K}_{II}(\bar{\mathbf{B}}_a)$ を用いて (3.16) 式を (3.17) 式に代入すれば次式が得られる。

$$\Omega_p = \frac{\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{K}_{FI}(\mathbf{A}; \bar{\mathbf{B}}_a) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})}{\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{M}(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})} + \frac{\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{K}_{II}(\Delta\mathbf{B}) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})}{\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{M}(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})} \quad (3.18)$$

$\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})$ は $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物にとって運動学的に許容なモードであるから、Rayleigh の原理により (3.15) 式から次の不等式が導かれる。

$$\Omega_a \leq \frac{\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{K}_{FI}(\mathbf{A}; \bar{\mathbf{B}}_a) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})}{\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{M}(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})} \quad (3.19)$$

さらに、 $\Delta B_j \geq 0$ (for all j) かつ \mathbf{K}_{Bj} と $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ の正定値性より次の不等式が導かれる。

$$\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{K}_{II}(\Delta\mathbf{B}) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^S \Delta B_j \{ \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{K}_{Bj} \mathbf{Z}_p(\mathbf{A}) \} \geq 0 \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{M}(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A}) > 0 \quad (3.20b)$$

ここで \mathbf{K}_{Bj} は次式で定義される行列を表わす。

$$\mathbf{K}_{II}(\Delta\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^S \Delta B_j \mathbf{K}_{Bj} \quad (3.21)$$

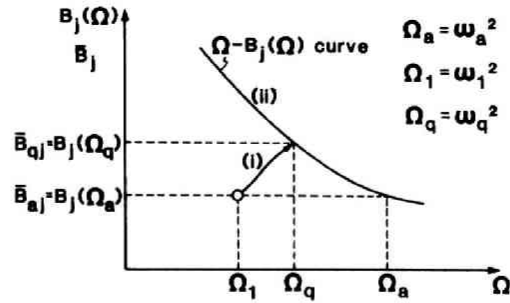


図3.5 (i)振動数非依存型剛性ばねで支持された設計Aの構造物の一次固有値の、振動数非依存型支持ばね剛性に対するプロット (ii) $\Omega - B_j(\Omega)$ 曲線

不等式(3.20a,b)において、 $\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{M}(\mathbf{A}) \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})$ と $\mathbf{Z}_p(\mathbf{A})^T \mathbf{K}_{B_j} \mathbf{Z}_p(\mathbf{A})$ は、それぞれこの構造物の自由振動時の全運動エネルギー、第 j 支持要素 $B_j(\Omega)$ の単位剛性当りの歪エネルギーを表わす。(3.18) 式と不等式(3.19)、(3.20a,b) は、 $\Omega_p \geq \Omega_a$ が成立することを要求している。しかしこの結果は、最初の仮定($\Omega_p < \Omega_a$)に反している。従って、 Ω_a よりも小さな固有値は存在しない。すなわち、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計Aの構造物の一次固有値は Ω_a である。

$\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計Aの構造物と $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計Aの構造物は、 $\mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\Omega_a)) = \mathbf{K}_{FI}(\mathbf{A}; \bar{\mathbf{B}}_a)$ により同じ剛性行列を有し、かつ同じ質量行列を有しているため、両者は同じ一次固有ベクトルを有することは明らかである。(証明終)

定理1 と対をなす次のような定理を考える。

[定理 2]

$\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計Aの構造物の一次固有振動数を ω_a で表わす。この時、 $\bar{\mathbf{B}}_a (= \mathbf{B}(\Omega_a))$ を有する設計Aの構造物は前者の構造物と同じ一次固有振動数と一次固有ベクトルを有する。ただし、 $B_j(\Omega)$ は全て正の非増加一価関数であるとする。

[証明]

$\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計Aの構造物が ω_a を一次固有振動数として有することより、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計Aの構造物が、 ω_a を一つの固有振動数として有することは明らかである。定理2は、「 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計Aの構造物は、 ω_a を一つの固有振動数としてもつが、それよりも小さな固有振動数はもたない」ことを示すことにより証明できる。

$\bar{\mathbf{B}}_a = \mathbf{B}(\Omega_a) = \{\bar{B}_{a_j}\}$ を有する設計Aの構造物は、 ω_a を一次固有振動数以外の一つの固有振動数として有するものと仮定する。この時この構造物は、明らかに ω_a よりも小さな一次固有振動数 ω_1 を有している。この構造物が $\bar{\mathbf{B}}_a$ よりも大きな剛性ばねで支持されたときには、その一次固有振動数は、 ω_1 に等しいかあるいはそれよりも大きくなることは容易に証明できる。図3.5は、振動数非依存型剛性ばねで支持された設計Aの構造物の一次固有値を振動数非依存型支持ばねの剛性に対してプロットした曲線は、必ず $\Omega - B_j(\Omega)$ 曲線と Ω_a よりも小さな値の点で交わることを示している。

図3.5は、ある一つのばねに対する図を示しているため、複数個の支持ばねが存在するときに、そのばね剛性を大きくしていった時に、すべてのばねにおいて上記の両曲線が同時に交わり得るかという問題が残る。しかし、各ばねについて、 Ω_a からの等しい固有値の減少量に対応するばね剛性の増加を与えることにより、上記の条件を満足するアルゴリズムを構成することが可能である。

この交点における一次固有値と支持ばね剛性を、それぞれ Ω_q と $\bar{\mathbf{B}}_q = \{\bar{B}_{qj}\}$ で表わすことにする。この時、 $\bar{\mathbf{B}}_q = \mathbf{B}(\Omega_q)$ が成立することは明らかである。定理1により、もし $\bar{\mathbf{B}}_q = \mathbf{B}(\Omega_q)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物が、 ω_q を一次固有振動数として有するならば、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物もまた ω_q を一次固有振動数として有するといえる。この結論、すなわち $\omega_q < \omega_a$ は、明らかに $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は、 ω_a を一次固有振動数として有するという最初の仮定に反する。従って $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は ω_a を一次固有振動数として有すると結論づけられる。(証明終)

定理1と定理2から、 $\mathbf{B}(\Omega)$ の全ての要素が正の非増加一価関数の場合には、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物と $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の一次固有振動数 ω_a に関する設計空間は一対一に対応するといえる。

この一対一の対応関係から、[問題FEC]に対する大域最適性の必要十分条件は、Sheu(1968)にならって次のように求められる。ただしこの場合には、各部材の断面2次モーメントは、断面積の線形関数であるとする。

$$\frac{\mathbf{Z}_{FD}(\tilde{\mathbf{A}})^T(\mathbf{K}_i - \Omega_a \mathbf{M}_i)\mathbf{Z}_{FD}(\tilde{\mathbf{A}})}{\mathbf{Z}_{FD}(\tilde{\mathbf{A}})^T \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{Z}_{FD}(\tilde{\mathbf{A}})} = \frac{l_i}{\mu} \quad \text{if } \tilde{A}_i > \bar{A}_i \quad (3.22a)$$

$$\frac{\mathbf{Z}_{FD}(\tilde{\mathbf{A}})^T(\mathbf{K}_i - \Omega_a \mathbf{M}_i)\mathbf{Z}_{FD}(\tilde{\mathbf{A}})}{\mathbf{Z}_{FD}(\tilde{\mathbf{A}})^T \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{Z}_{FD}(\tilde{\mathbf{A}})} \leq \frac{l_i}{\mu} \quad \text{if } \tilde{A}_i = \bar{A}_i \quad (3.22b)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{A}}$ は [問題FEC] に対する最適設計解を表わし、 μ は正のスカラー、 $\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_i$ は次の行列を表わす。

$$\mathbf{K}_i = \frac{\partial \mathbf{K}_I(\mathbf{A})}{\partial A_i}, \quad \mathbf{M}_i = \frac{\partial \mathbf{M}_S(\mathbf{A})}{\partial A_i} \quad (3.23a, b)$$

3-4 不等号制約条件下の最適設計問題

前節では、振動数依存型剛性部材で支持された弾性構造物の一次固有振動数に関する等号制約条件下の最適設計問題に対する大域最適性の必要十分条件を導いた。ここでは、一次固有振動数に関する不等号制約条件下の拡張された最適設計問題について、等号制約時の最適設計解がその問題に対する解ともなり得るための支持ばね特性の資格条件について述べる。ただし、ここでは、簡単のため最小断面積制約条件が課されていない場合を扱う。振動数依存型剛性部材で支持された弾性構造物の一次固有振動数に関する不等号制約条件下の拡張された最適設計問題は、次のように述べられる。

[問題 FICA]

振動数依存型剛性部材 $\mathbf{B}(\Omega)$ で支持された弾性構造物について、一次固有振動数に関する不等号制約条件

$$\omega_1(\mathbf{A}) \geq \omega_a \quad (\text{or } \Omega_1(\mathbf{A}) \geq \Omega_a) \quad (3.24)$$

の下で、(3.13) 式で表わされる評価関数 w を最小化する設計 \mathbf{A} を求めよ。

[問題FEC] で、最小断面積制約条件が全て取り除かれた問題を新たに [問題FECA] と呼ぶ。支持ばね剛性 $\mathbf{B}(\Omega)$ は、振動数依存型であるので、[問題FICA] に対する最適設計解は必ずしも [問題FECA] の解と一致するとは限らない。ここでは、[問題FECA] の解が [問題FICA] の解ともなり得るための支持ばね剛性 $\mathbf{B}(\Omega)$ の資格条件について述べる。

[問題 FECA] の解の大域最適性を特徴づける条件については、前節において述べた。指定一次固有値をある範囲で変化させた時の、[問題 FECA] に対する最適設計解群は、最適設計解の順序集合を形成する (Nakamura and Ohsaki, 1988)。この順序集合における全ての 변수は、指定一次固有値の区分的に微分可能な関数とみなし得る。もし、次の条件が $\Omega \geq \Omega_a$ の全ての Ω に対して満たされたならば、 $\Omega = \Omega_a$ を制約条件として有する [問題 FECA] の解は、 $\Omega \geq \Omega_a$ を制約条件として有する [問題 FICA] の解ともなり得る。

$$\frac{dw(\Omega)}{d\Omega} > 0 \quad (3.25)$$

最適設計解の順序集合の概念、および最適設計解における設計変数を、問題を構成しているあるパラメターの関数と見なす概念 (Nakamura and Nagase, 1976) は既に知られているが、その最適設計解のパラメターに関する感度係数の陽な表現は最近になって示された (Sobieszcanski-Sobieski et al., 1982; Schmit and Chang, 1984; Vanderplaats and Yoshida, 1985)。評価関数 $w(\Omega)$ の感度係数の陽な表現を次に示す。

一次固有値制約条件 $\Omega_1(\mathbf{A}) = \Omega$ を有する [問題 FECA] の最適設計の構造物の断面積集合を $\mathbf{A}(\Omega)$ 、一次固有ベクトルを $\hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega) \equiv \mathbf{Z}_{FD}(\mathbf{A}(\Omega))$ で表わす。[問題 FECA] においては、一次固有振動数に関する制約条件が唯一のアクティブな制約条件であるので、評価関数の一次固有値 Ω に関する感度係数は Barthelemy and Sobieszcanski-Sobieski (1983) にならって次のように表現できる。

$$\frac{dw(\Omega)}{d\Omega} = \mu(\Omega) \left[1 - \sum_{j=1}^S \frac{dB_j(\Omega)}{d\Omega} \frac{\hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega)^T \mathbf{K}_{B_j} \hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega)}{\hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega)^T \hat{\mathbf{M}}(\Omega) \hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega)} \right] \quad (3.26)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{M}}(\Omega) \equiv \mathbf{M}(\mathbf{A}(\Omega))$ を表わし、 $\mu(\Omega)$ は正のラグランジュ定数を表わす。前節で述べたように、 $\hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega)^T \hat{\mathbf{M}}(\Omega) \hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega)$ および $\hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega)^T \mathbf{K}_{B_j} \hat{\mathbf{Z}}_{FD}(\Omega)$ は、 $\hat{\mathbf{M}}(\Omega)$ 、 \mathbf{K}_{B_j} の正定値性より正の数である。

もし、支持ばね剛性 $\mathbf{B}(\Omega)$ の全ての要素が正の非増加一価関数であるならば、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{dB_j(\Omega)}{d\Omega} \leq 0 \quad (\text{for all } j) \quad (3.27)$$

(3.27) 式が (3.26) 式において用いられたならば、(3.25) 式は常に成り立つ。それゆえ、 $\mathbf{B}(\Omega)$ の全ての要素が正の非増加一価関数であるならば、[問題 FECA] の解は [問題 FICA] の解でもあり得る。

(3.26) 式において、 $dw(\Omega)/d\Omega$ および $dB_j(\Omega)/d\Omega$ は、区分的に微分可能であればよい。従って、 $B_j(\Omega)$ はジャンプを含んでいてもよい。

3-5 より一般的な振動数依存型剛性ばねに対する定理の拡張

3-3 節においては、振動数依存型剛性ばねで支持された弾性構造物について、その一次固有振動数に関する設計空間が、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された弾性構造物のそれと一致することが二つの定理により示された。しかしながら、そこでは、ばね特性として、正の非増加一価関数という制限が加えられていた。ここでは、3-3 節の定理 2 は、正の非増加関数という制限無しに成立することを示す。

ただし、支持部材の剛性は振動数に関して一価関数であり、静的 ($\Omega = 0$ の時) 剛性は全て正であるとす。すなわち、

$$B_j(0) > 0 \quad (\text{for all } j) \quad (3.28)$$

このような支持ばねに対して、 $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(0)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は、明らかに正の一次固有振動数を有する。

この時次のような定理が成立する。

[定理 3]

$\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の一次固有振動数を ω_a で表わす。この時 $\bar{\mathbf{B}}_a (= \mathbf{B}(\Omega_a))$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は前者の構造物と同じ一次固有振動数と一次固有ベクトルを有する。ただし、 $B_j(\Omega)$ は全て $B_j(0) > 0$ を満たすものとする。

[証明]

$\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物が ω_a を一次固有振動数として有することより、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物が、 ω_a を一つの固有振動数として有することは明らかである。定理 3 は、「 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は、 ω_a を一つの固有振動数としてもつが、それよりも小さな固有振動数はない」ことを示すことにより証明できる。

今、次のような固有値問題を考える (Lancaster, 1966)。

$$[\mathbf{K}_{FI}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\lambda)) - \Omega_k \mathbf{M}(\mathbf{A})] \mathbf{Z}_{FI}^{(k)} = 0 \quad (3.29)$$

Ω_k は与えられた λ に対して求められる振動数非依存型構造物の k 次固有値であり、(3.29) 式を介して λ の関数とも見なせるので以下では $\Omega_k(\lambda)$ と表示する。固有値の番号付けとして、正の小さな値から順番に番号付けを行なうものとするれば、 $\Omega_k(\lambda)$ は、 λ に関して一価の関数である。

一方、振動数依存型構造物の固有値問題は次のように表現できる。

$$[\mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\tilde{\Omega}_k)) - \tilde{\Omega}_k \mathbf{M}(\mathbf{A})] \mathbf{Z}_{FD}^{(k)} = 0 \quad (3.30)$$

(3.29), (3.30) 式から明らかなように、 $\Omega_k(\lambda) = \lambda$ が成立する時の λ の値が振動数依存型構造物の固有値となる。すなわち、振動数依存型構造物の固有値は、関数 $y = \Omega_k(\lambda)$ と直線 $y = \lambda$ の交点における λ の値としても特徴づけられる。

今、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は、 ω_a を一次固有円振動数以外の固有円振動数としてもつものとする。この時、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の一次固有円振動数を ω_1 ($\omega_1^2 = \Omega_1(\Omega_a)$) とすると、 $\omega_1 < \omega_a$ かつ関数 $y = \Omega_1(\lambda)$ の一価関数特性より、関数 $y = \Omega_1(\lambda)$ は必ず Ω_a よりも小さな値 Ω_q で直線 $y = \lambda$ と交わる (図 3.6)。この交点は、上述の性質により、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物の固有円振動数に対応する点を表わす。これは、 $\mathbf{B}(\Omega)$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物が ω_a よりも小さな固有円振動数を有することを意味し、仮定に反する。従って、 $\bar{\mathbf{B}}_a$ を有する設計 \mathbf{A} の構造物は ω_a を一次固有円振動数として有すると結論づけられる。(証明終)

証明においては、 $B_j(0) > 0$ 以外には関数 $B_j(\Omega)$ の性質については制約が課されていないので、関数 $\mathbf{B}(\Omega)$ が増加関数でも減少関数でも、あるいは両者が混在した関数でも定理 3 は成立する。また、定理 1, 2 では、支持ばね分布質量が構造質量行列に含まれない場合について述べられたが、定理 3 は、支持ばねの分布質量が構造質量行列に含まれる場合においても成立することに注意する必要がある。

定理 3 により、[問題 FEC] で支持ばね剛性に関する拘束条件 (正の非増加一価関数) が取り除かれた場合に対する解は、次のように求められる。 $\bar{\mathbf{B}}_a$ で支持された構造物の一次固有振動数制約条件下 ($\omega_1(\mathbf{A}) = \omega_a$) の最適設計解を $\bar{\mathbf{A}}$ で表わす。ここで、 $\mathbf{B}(\Omega)$ で支持された設計 $\bar{\mathbf{A}}$ の構造物の固有値解析を行ない、その一

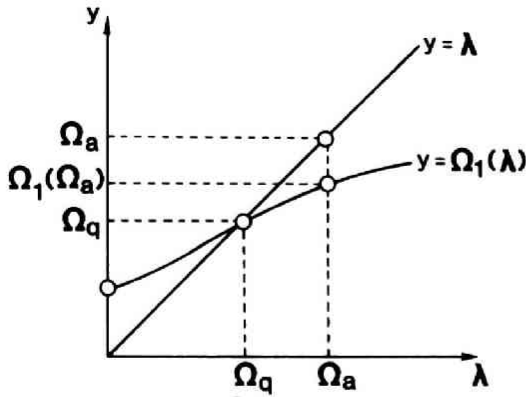


図3.6 関数 $y = \Omega_1(\lambda)$ および直線 $y = \lambda$

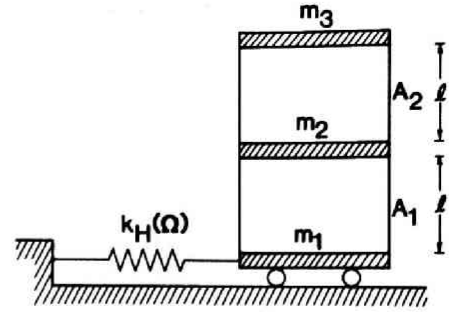


図3.7 振動数依存型剛性ばねで支持された3自由度モデル

次固有振動数が ω_a ならば \bar{A} は[問題FEC]の最適解となる。もし、その一次固有振動数が ω_a にならないときは、別の解法を考案する必要がある。(例えば図3.2に対応するばね特性の場合)

3-6 例題

[例題 3.1]

図3.7に示すような水平ばね $k_H(\Omega) = B_1(\Omega) = -0.00294\Omega + 58.8(\text{ton}/\text{s}^2)$ で支持された2層弾性構造物を扱う。各層は2本の一樣断面柱(長さ l)で構成されているものとし、第1、2層の柱の断面積(2本の和)を A_1, A_2 とする。また、第1、2層の柱の断面2次半径を r_1, r_2 とする。各柱のヤング係数は E で一定とする。構造物の質量行列としては、床集中質量 m_1, m_2, m_3 からなる非構造質量行列 \mathbf{M}_P と、両端の回転を拘束された柱のコンシステント構造質量行列 $\mathbf{M}_S(\mathbf{A})$ を考える。この時、構造物全体の質量行列 $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ と剛性行列 $\mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\Omega))$ は、次式のように表わせる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} + \frac{\rho l}{420} \begin{pmatrix} 156A_1 & 54A_1 & 0 \\ 54A_1 & 156(A_1 + A_2) & 54A_2 \\ 0 & 54A_2 & 156A_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{FD}(\mathbf{A}; \mathbf{B}(\Omega)) = \begin{pmatrix} k_H(\Omega) + A_1g_1 & -A_1g_1 & 0 \\ -A_1g_1 & A_1g_1 + A_2g_2 & -A_2g_2 \\ 0 & -A_2g_2 & A_2g_2 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

また、 $\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{B1}, \mathbf{M}_i, \mathbf{M}_P$ は次式で表現できる。

$$\mathbf{K}_1 = g_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = g_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\rho l}{420} \begin{pmatrix} 156 & 54 & 0 \\ 54 & 156 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \frac{\rho l}{420} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 54 \\ 0 & 54 & 156 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_P = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{B1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

ただし、 $g_i = 12Er_i^2/l^3$ ($i = 1, 2$)である。

Ω ($\text{rad}^2/\text{sec}^2$)	10.0	100.0	1000.0
$\frac{\Delta w}{\Delta \Omega}$	91.350000	92.995000	117.110000
$\frac{dw}{d\Omega}$	91.326385	93.004666	117.147278
$\mu(\Omega)$	91.326364	93.000226	116.45318

表3.1 有限差分による(3.26)式の数値検証

今、(3.26)式の数値的検証を行なうために、次式のような有限差分により、 $dw(\Omega)/d\Omega$ の近似値を求める。

$$\frac{dw(\Omega)}{d\Omega} \approx \sum_i \frac{\{A_i(\Omega + \Delta\Omega) - A_i(\Omega)\}l}{\Delta\Omega} = \frac{\Delta w}{\Delta\Omega} \quad (3.33)$$

ここで、 $A_i(\Omega + \Delta\Omega)$ および $A_i(\Omega)$ は、 $\Omega + \Delta\Omega$ および Ω を指定一次固有値とした時の最適断面積を表わし、最適性条件を用いた繰返し手法により求めるものとする。パラメータとしては、 $\rho = 7.0 \times 10^{-6}(\text{ton}/\text{cm}^3)$ 、 $r_i = 10.0(\text{cm})$ ($i = 1, 2$)、 $l = 350.0(\text{cm})$ 、 $m_1 = m_2 = m_3 = 30.0(\text{ton})$ 、 $E = 2100.0 \times 980.0(\text{ton}/(\text{cm} \cdot \text{sec}^2))$ を採用した。表3.1には、 $\Omega = 10.0, 100.0, 1000.0(\text{rad}^2/\text{sec}^2)$ の時の、 $\Delta w/\Delta\Omega$ 、 $dw/d\Omega$ (3.26式)、 $\mu(\Omega)$ の値を示す。ただし、 $\Delta\Omega/\Omega = 1.0 \times 10^{-3}$ である。表3.1から、(3.26)式の表現の妥当性が確認できる。

[例題 3.2]

次に、図3.8に示すような2種類の振動数依存型剛性ばねで支持された弾性剪断型構造物を扱う。ここでは、簡単のため構造質量行列は考慮しない。本モデルにおける行列 M_P 、 K_i 、 K_{B_j} は次のように表わせる。

$$M_P = \begin{bmatrix} m_1 & & & & m_1 & m_1 H_1 \\ & \ddots & & 0 & \vdots & \vdots \\ & & m_i & & m_i & m_i H_i \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ Sym. & & & & m_f & m_f H_f \\ & & & & E_1 & E_2 \\ & & & & & E_3 \end{bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & 0 \\ & & & g_i & -g_i & \\ & & & -g_i & g_i & \\ & & & & & 0 \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

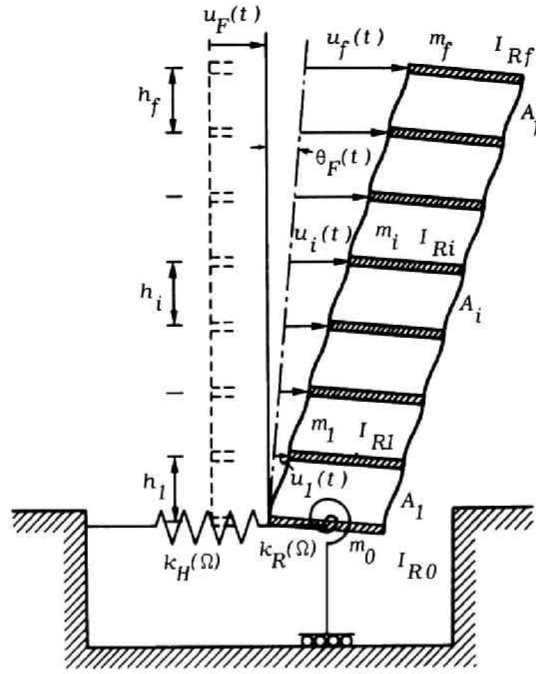


図3.8 振動数依存型剛性ばねで支持された剪断型構造物

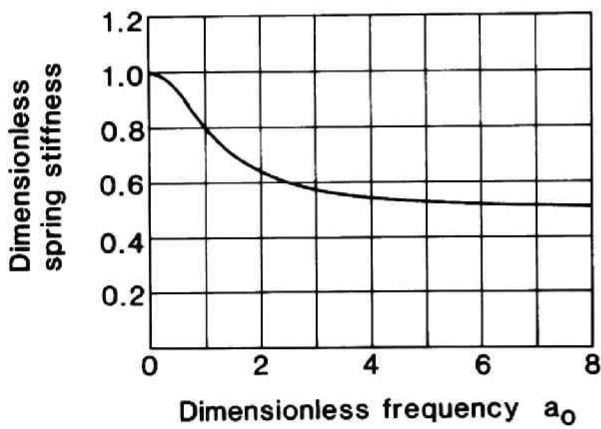


図3.9 振動数依存型回転ばね剛性の無次元振動数に対するプロット

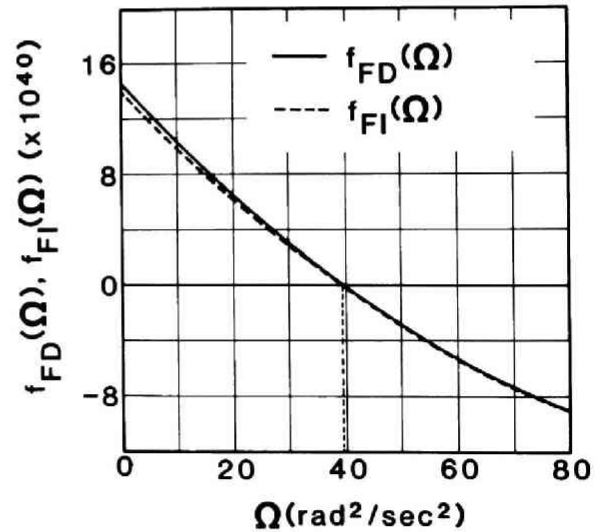


図3.10 振動数依存型剛性ばねで支持された剪断型構造物の $f_{FD}(\Omega)$ と振動数非依存型剛性ばねで支持された剪断型構造物の $f_{FI}(\Omega)$ の Ω に関するプロット

$$\mathbf{K}_{B1} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{B2} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

ここで、 $H_i, E_1 \sim E_3, g_i$ は次の諸量を表わす。

$$\begin{aligned} H_i &= \sum_{j=1}^i h_j, & E_1 &= \sum_{i=0}^f m_i, & E_2 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i, \\ E_3 &= \sum_{j=1}^f m_j H_j^2 + \sum_{j=0}^f I_{Rj}, & g_i &= \frac{12sEr_i^2}{h_i^3} \end{aligned} \quad (3.35)$$

ただし、ここでは、各層は層ごとに同一の s 本の柱で構成されているものとし、その両端は床に剛接合されているものとする。第 i 層の柱の断面積の総和を A_i で表わし、 $\mathbf{A}^T = \{A_1 \dots A_f\}$ 、 $\mathbf{L}^T = \{h_1 \dots h_f\}$ とすれば、評価関数は、 $w = \mathbf{A}^T \mathbf{L}$ と表現できる。本例題では、 $B_1(\Omega) = k_H(\Omega)$ 、 $B_2(\Omega) = k_R(\Omega)$ である。

本例題の [問題 FECA] に対する最適性の必要十分条件は次のように表現できる。

$$\frac{\mathbf{Z}_{FD}(\bar{\mathbf{A}})^T \mathbf{K}_i \mathbf{Z}_{FD}(\bar{\mathbf{A}})}{\mathbf{Z}_{FD}(\bar{\mathbf{A}})^T \mathbf{M}_P \mathbf{Z}_{FD}(\bar{\mathbf{A}})} = \frac{h_i}{\mu} \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (3.36)$$

ここでは、半無限弾性地盤上に置かれた円形剛基礎として $k_H(\Omega), k_R(\Omega)$ を評価し、Veletsos and Verbic(1974) の次のような近似式を採用する。

$$k_H(\Omega) = \frac{8\rho V_s^2 r_o}{2 - \nu} \quad (3.37)$$

$$k_R(\Omega) = \frac{8\rho V_s^2 r_o^3}{3(1 - \nu)} \left[1 - b_1 + \frac{b_1}{1 + b_2^2 \left(\frac{r_o}{V_s}\right)^2 \Omega} - b_3 \left(\frac{r_o}{V_s}\right)^2 \Omega \right] \quad (3.38)$$

ここで、 V_s, ρ, ν, r_o は、地盤の剪断波速度、密度、ポアソン比、および円形剛基礎の半径を表わす。また、 b_1, b_2, b_3 はポアソン比に依存するパラメータを表す。(3.37),(3.38) 式より、 $k_H(\Omega)$ は定数であり、 $k_R(\Omega)$ は Ω に関する非線形関数であることがわかる。図 3.9 は、(3.38) 式の中括弧の中の関数を Ω に関してプロットした図である。この $k_H(\Omega), k_R(\Omega)$ は、正の非増加一価関数という条件を満たしている。

振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計理論は、中村、竹脇(1985)によって展開され、閉形表現の解が導かれている。ここでは、振動数依存型剛性ばねで支持された最適設計の構造物と振動数非依存型剛性ばねで支持された最適設計の構造物について、定理 1 および定理 2 が成立することを例証する。図 3.10 は、中村、竹脇(1985)の理論を用いて $T_1 = 1.0(\text{sec})$ の下で設計された、振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物 ($\{A_i g_i\} = \{113.8, 111.5, 107.3, 100.9, 92.6, 82.2, 69.8, 55.4, 39.0, 20.5\}$ (N/m)) と、同じ設計を有し振動数依存型剛性ばねで支持された構造物について、固有値方程式を構成する関数をその固有値に関してプロットした図である。図 3.10 は、定理 1,2 の妥当性を例示している。ただし、ここで用いられた、パラメータ値は、 $\nu = 1/3, \rho = 2.0 \times 10^3(\text{kg}/\text{m}^3), V_s = 100(\text{m}/\text{s}), r_o = 5.64(\text{m}), b_1 = 0.5, b_2 = 0.8, b_3 = 0.0, m_0 = 90.0 \times 10^3(\text{kg}), m_i = 30.0 \times 10^3(\text{kg}) (i = 1, \dots, 10), I_{R0} = 7.5 \times 10^5(\text{kg} \cdot \text{m}^2), I_{Ri} = 2.5 \times 10^5(\text{kg} \cdot \text{m}^2) (i = 1, \dots, 10), h_i = 350.0(\text{cm}) (i = 1, \dots, 10)$ である。また、 r_i は全層で一定とした。

3-7 結論

本章では、五章において展開する振動数依存型の複素剛性ばねで支持された剪断型構造物の、レベル1設計用地震動に対する地震時応答制約設計法の準備として、振動数依存型の弾性ばねで支持された剪断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開した。本章において得られた主な成果は以下の通りである。

- (1) 振動数依存型剛性ばねで支持された弾性構造物と、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された弾性構造物の一次固有振動数の対応関係を明らかにし、振動数依存型剛性ばねに特別な制約が課されない場合には、両モデルの一次固有振動数に関する設計空間は必ずしも一対一に対応しないことを明らかにした。
- (2) 振動数依存型剛性ばねが正の非増加一価関数で与えられる場合に成立する二つの定理を新たに導入し、証明した。第一の定理は、上部構造物の設計が同一の場合には、振動数依存型ばねで支持された構造物の一次固有振動数と一次固有ベクトルは、対応する振動数非依存型ばねで支持された構造物のそれらと一致することを示している。また、第二の定理は、第一の定理と対をなす定理である。
- (3) 以上の二つの定理により、振動数依存型剛性ばねが正の非増加一価関数で与えられる場合には、振動数依存型ばねで支持された構造物と対応する振動数非依存型ばねで支持された構造物の一次固有振動数に関する設計空間は、一対一に対応することが保証されたことになる。この性質は、五章の地震時応答制約設計法を展開する際に重要な役割を果たすことになる。
- (4) 振動数依存型ばねで支持された構造物の一次固有振動数制約条件下の最小重量設計問題を定式化した。上記二つの定理により、その問題に対する大域最適性の必要十分条件として、振動数非依存型ばねで支持された構造物の一次固有振動数制約条件下の最小重量設計問題に対する最適性条件を準用できることを示した。
- (5) 一次固有振動数に対する不等号制約条件下の最小重量設計問題を新たに定式化し、等号制約条件下の最適設計解が、不等号制約条件下の最適設計解となり得るための支持ばね剛性の資格条件を明らかにした。
- (6) 上記第二の定理は、支持ばね剛性に非増加関数という制約が存在しない場合にも拡張できることを示し、第三の定理を導入し証明した。
- (7) 第三の定理により、支持ばね剛性が非増加関数でない場合に対する最小重量設計解を見いだす理論を展開した。ただし、この場合には、振動数依存型剛性ばねで支持された構造物と、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物の一次固有振動数の対応関係を常に確認する必要がある。

文献

- Barthelemy, J.-F. and J. Sobieszczanski-Sobieski (1983). Optimum Sensitivity Derivatives of Objective Functions in Nonlinear Programming. *AIAA Journal*, Vol.21, pp913-915.
- Farkas, J. (1902): Uber die Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 124, 1-24.
- Haug, E.J. and J. Cea (eds.) (1981). *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol.I, Sijthoff-Noordhoff, The Netherlands.

- Luco, J.E. (1980): *Linear Soil-structure Interaction*. UCRL-15272, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California.
- Lancaster, P. (1966). *Lambda-matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press.
- Nakamura, Tsuneyoshi and T. Nagase (1976). Minimum Weight Design of Multistory, Multispan Plane Frames Subject to Reaction Constraints. *J. Struct. Mech.*, Vol.4, pp257-287.
- Nakamura, Tsuneyoshi and M. Ohsaki (1988). Sequential Optimal Truss Generator for Frequency Ranges. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 67, pp189-209.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1985), 弾性支持されたせん断型建造物の一次固有周期制約条件下の最適設計、構造工学論文集、Vol.31B, pp93-102.
- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1989). Optimal Elastic Structures with Frequency-dependent Elastic Supports, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.25, No.5, pp539-551.
- Nakamura, Tsuneyoshi and T. Yamane (1986). Optimum Design and Earthquake-response Constrained Design of Elastic Shear Buildings. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, pp797-815.
- 日本建築学会 (1987): 地震荷重—その現状と将来の展望.
- Olhoff, N. (1980), Optimal Design with Respect to Structural Eigenvalues, *Proc. IUTAM Symposium on Variational Methods in the Mechanics of Solids*, S. Nemat-Nasser, eds., Pergamon, New York, pp133-149.
- Pierson, B.L. (1972), A Survey of Optimal Structural Design under Dynamic Constraints, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.4, pp491-499.
- Schmit, L.A. and K.J. Chang (1984). Optimum Design Sensitivity Based on Approximation Concepts and Dual Methods. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.20, pp39-75.
- Sheu, C.Y.(1968). Elastic Minimum-weight Design for Specified Fundamental Frequency. *Int. J. Solids and Structures*, Vol.4, pp953-958.
- Sobieszczanski-Sobieski, J., J.-F. Barthelemy and K.M. Riley (1982). Sensitivity of Optimum Solutions of Problem Parameters. *AIAA Journal*, Vol.20, pp1291-1299.
- Temple, G. and W.G. Bickley (1933): *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering*, Dover Publications Inc..
- Vanderplaats, G.N. and N. Yoshida (1985). Efficient Calculation of Optimum Design Sensitivity. *AIAA Journal*, Vol.23, pp1798-1803.
- Veletsos, A.S. and B. Verbic (1974). Basic Response Functions for Elastic Foundations. *Journal of Engineering Mechanics Div.*, ASCE, Vol.100, EM2, pp189-202.
- Wolf, J.P. (1985): *Dynamic Soil-structure Interaction*, Prentice-Hall.

四章 振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物の地震時弾性応答制約設計*

本章では、二章において展開した一次固有周期制約条件下の最適設計理論における重み係数を地震時応答調整パラメータと見なすことにより、下部構造（基礎構造）および（あるいは）上部構造の設計条件を的確に満足する設計を見いだす地震時応答制約設計法を展開する。1-1 節でも述べたように、建築構造物において一次固有周期は、構造物全体としてのシステム性能を表わす重要な指標の一つであり、一次固有周期を制約条件とする最適設計問題に対する解は、最終的な地震時応答制約設計解を得るための良好な初期設計解を与えるのみならず、閉形表現で得られる最適設計解は、次の改良解を得るための有効な手段としても利用することが可能である。

著者らの新しい一貫した設計理論のこれまでの展開は次のように要約できる。まず中村と山根（中村、山根, 1981; Nakamura and Yamane, 1986）は、固定基礎を有する弾性剪断型構造物モデルについて、一次固有周期制約条件下の最適設計理論と地震時弾性応答変位制約設計法を展開した。次に、中村恒善と中村豊（1982, 1986）は、2 軸偏心を有する立体弾性剪断型構造物モデルについて、一次固有周期制約条件下の最適設計理論と地震時弾性応答変位制約設計法を展開した。他方、中村と竹脇（1981, 1983, 1985）は、地盤-杭-建築構造物の動的相互作用を考慮した上での建築構造物の合理的な耐震設計法の基礎的研究の一つとして、振動数非依存型の指定された剛性を有するばねで弾性支持された弾性剪断型構造物および弾性建築骨組の、一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開した。さらに、その理論に基づく地震時弾性応答制約設計法を展開している（中村、竹脇, 1986; Nakamura and Takewaki, 1989a）。地盤と構造物の動的相互作用に関する研究のほとんど全てがその挙動解析に関するものであったのに対し、著者らの理論は強震レベルの設計用地震動に対して指定した平均最大局所応答分布を示す設計を求める「直接的な理論」であるといえる。ここでいう「直接的な理論」とは、設計感度解析法等による膨大な回数の設計変更手続きによらずに指定した応答分布を示す構造物の剛性分布を求める理論を意味する。

4-1 節では、本章、五章および八章で地震時応答制約設計法を展開する際に採用する設計用地震動を定義する。

4-2 節では、指定された弾性ばねで支持された剪断型構造物の層間相対変位の平均最大値を制約する地震時応答制約設計法を展開する。

4-3 節では、杭の応答応力の許容応力に対する比の平均最大値と、上部剪断型構造物の層間相対変位の平均最大値の両者を制約する地震時応答制約設計法を展開する。

4-4 節では、指定された弾性ばね（ただし水平と回転の連成項を含む）で支持された剪断型構造物を、地盤特性依存型の設計用スペクトルに対して層間相対変位の平均最大値を制約して設計する、地震時応答制約設計法を展開する。

尚、本章では、杭基礎をモデル化した弾性支持ばねとして振動数非依存型のものを採用するが、振動数依存型のばねを採用した場合においても、中村と竹脇（Nakamura and Takewaki, 1989b）が導き証明した定理（本論文 3.3 節）を用いてほぼ同様の理論展開が可能である（五章）。ただしその際には、周波数領域での応答解析が必要となる。また、ここでは弾性応答を制約する設計法を展開するが、中村と竹脇（Nakamura and Takewaki, 1989c）が固定基礎を有する骨組に対して展開した地震時非弾性応答制約設計法（8-1,2 節）を弾性

* 本章の 4-2, 4-3, 4-4 節は、それぞれ 1-2 節の論文 [9], [8], [11] の一部に加筆しまとめたものである。

支持された骨組に対して拡張することにより、非弾性応答を直接的に制約する設計法を展開することも可能である(8-3節)。

4-1 設計用地震動

[レベル1 (強震時) 設計用地震動]

本論文では、地震時弾性応答制約設計法を展開する際のレベル1地震動(耐用年限中に一回以上発生すると予測される地震動)に対する設計用応答スペクトルとして、Newmark and Hall(1982)の提案するスペクトルと、Mostaghel and Ahmadi(1979)の提案する地盤特性依存型スペクトルを採用する。ここでは、各々のスペクトルの内容について概説する。

Newmark-Hall の設計用応答スペクトル (NH スペクトル)

Newmark and Hall(1982)の設計用応答スペクトルは、地動の最大加速度、速度、変位として201 (cm/s^2), 25 (cm/s), 18.75 (cm)を設定し、応答倍率として以下に示すNewmark and Hallの提案値を採用することにより求められる。

$$\text{加速度: } 3.21 - 0.68 \ln(100 \times h)$$

$$\text{速度: } 2.31 - 0.41 \ln(100 \times h)$$

$$\text{変位: } 1.82 - 0.27 \ln(100 \times h)$$

ここで、 h は減衰定数を表す。

Mostaghel and Ahmadi の提案する地盤特性依存型スペクトル (MA スペクトル)

Mostaghel and Ahmadi(1979)の提案する地盤特性依存型スペクトルは、理論的検討に基づき構築されており、地盤の卓越周期、地動最大加速度および減衰定数をパラメータとして含んでいる。また、アメリカにおける過去の記録地震波に対する応答スペクトルとの適合性についても検討され、十分な適合性を示すことが実証されている。その速度応答スペクトルは以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} T \leq T_L: S_V(T; h) &= \ddot{u}_{gmax} \frac{T}{2\pi} \\ T_c/10 \leq T \leq T_c/3: S_V(T; h) &= \ddot{u}_{gmax} N \frac{T}{2\pi} \\ T_c \leq T \leq T_d: S_V(T; h) &= \frac{T_c}{2\pi} \ddot{u}_{gmax} N \sqrt{(1 - e^{-100h})} \\ 3T_d \leq T \leq T_U: S_V(T; h) &= \frac{T_c}{2\pi} \ddot{u}_{gmax} N \frac{T_d}{T} \end{aligned} \quad (4.1a - d)$$

ここで、 $T_L \sim h$ は以下の量を表す。また T は周期を表す。

$$T_L = 0.03(s)$$

$$T_U: 60(s) \text{ 以上の大きな値}$$

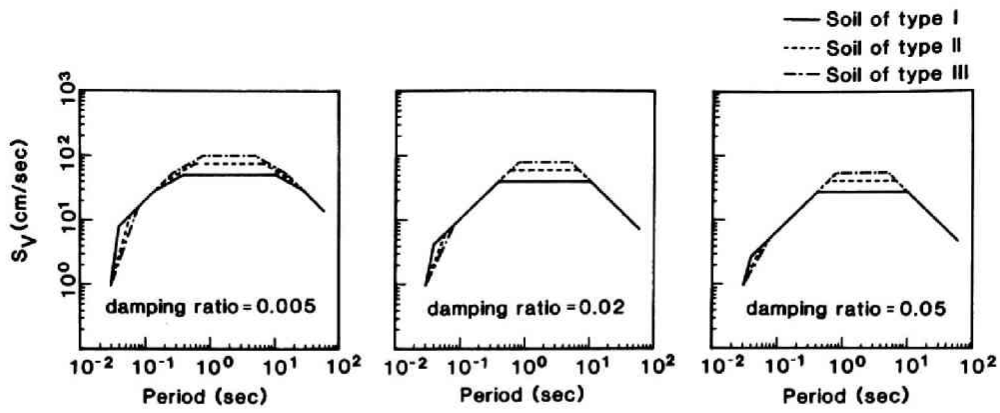


図4.1 Mostaghel and Ahmadiの地盤特性依存型応答スペクトル (1種, 2種, 3種地盤)

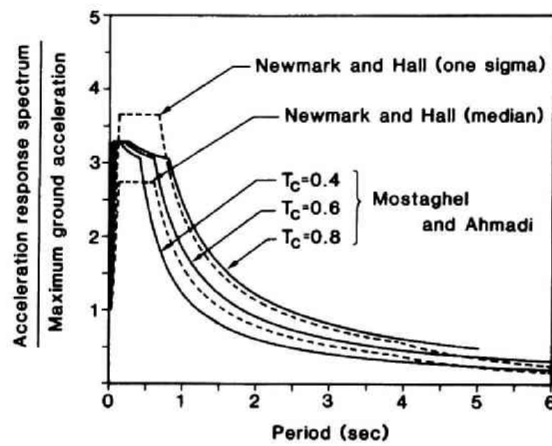


図4.2 Newmark and HallおよびMostaghel and Ahmadiの加速度応答スペクトル

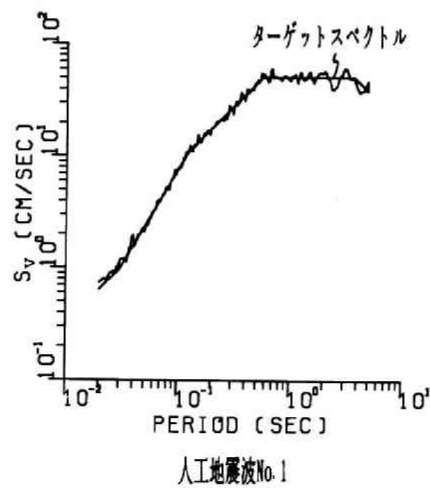


図4.3 ターゲットスペクトルと人工地震波No. 1の速度応答スペクトル

T_c : 地盤の卓越周期

$$T_d = 4/T_c$$

$$N = (1 + 2h)\sqrt{\bar{h}/h}$$

$$\bar{h} = 0.20$$

\ddot{u}_{gmax} : 地動加速度の最大値

h : 減衰定数

また、 $T_L \leq T \leq T_c/10, T_c/3 \leq T \leq T_c, T_d \leq T \leq 3T_d$ の領域では、両対数軸図上 ($\log T, \log S_V(T; h)$) において、上記の方法により決定される端点を直線で補間するものとする。上記の (4.1a-d) 式において、(a) は応答加速度が地動加速度と同じであることを意味し、(b) は応答加速度一定領域、(c) は応答速度一定領域、(d) は応答変位一定領域であることを各々意味している。

ここでは、地盤の種類として3種類を考え、地盤の卓越周期 $T_c = 0.4(s)$ (剪断波速度 $V_s = 200(m/s)$)、 $T_c = 0.6(s)$ ($V_s = 133(m/s)$)、 $T_c = 0.8(s)$ ($V_s = 100(m/s)$) のものを各々、第1、第2、第3種地盤と呼ぶ。各々の地盤に対する0.5, 2, 5%減衰時の Mostaghel and Ahmadi(1979) の設計用速度応答スペクトルを図4.1(a-c)に示す。地動の最大加速度としては $201(cm/s^2)$ を採用した。また、2%減衰時の加速度応答スペクトルを地動加速度の最大値 \ddot{u}_{gmax} で規準化したものを図4.2に示す。図4.2には、Newmark and Hall(1982) が提案する設計用スペクトルも合わせて示している。

設計用速度応答スペクトルに適合する人工地震波の作成

地震時応答制約設計法の検証の際には、時刻歴応答解析を実施する。その時刻歴応答解析で用いる人工地震波を SIMQKE プログラム (Gasparini and Vanmarcke, 1976) を用いて作成した。

まず、Newmark and Hall(1982) の設計用速度応答スペクトルについては、減衰定数2%に対する Newmark and Hall の設計用速度応答スペクトルをターゲットスペクトルとして、各地震波の速度応答スペクトル値の平均がターゲットスペクトルに等しくなるように SIMQKE プログラムを用いて10波作成した。その時のターゲットスペクトルのコントロール点は次の6点である： $(T(s), S_V(cm/s)) = (0.02, 0.640), (0.03, 0.960), (0.125, 10.96), (0.579, 50.75), (3.78, 50.75), (5.00, 38.41)$ 。図4.3には、ターゲットスペクトルと、作成した一つの人工地震波の速度応答スペクトルを示す。また包絡線関数としては、次式で表現される Jennings 型のものを採用し、位相特性は一様乱数を用いた。

$$\zeta(t) = 0.205g(t/3)^2 \quad (0 \leq t \leq 3)$$

$$\zeta(t) = 0.205g \quad (3 \leq t \leq 12.5)$$

$$\zeta(t) = 0.205g \cdot \exp[-0.24(t - 12.5)] \quad (12.5 \leq t \leq 25) \quad (4.2a - c)$$

ただし g は重力加速度を表わす。また、継続時間は25秒間とした。

Mostaghel and Ahmadi の提案する地盤特性依存型スペクトルについては、第1種、第2種、第3種地盤に対してそれぞれ減衰定数1.8, 1.6, 1.3%に対する Mostaghel and Ahmadi の設計用速度応答スペクトルを

ターゲットスペクトルとして、各地震波の速度応答スペクトル値の平均がターゲットスペクトルに等しくなるように SIMQKE プログラムを用いて各地盤について 10 波ずつ作成した。その時のターゲットスペクトルのコントロール点は次の 5 点である。

一種地盤: $(T(s), S_V(cm/s)) = (0.03, 0.960), (0.04, 4.41), (0.133, 14.7), (0.40, 40.3), (10.0, 40.3)$.

二種地盤: $(T(s), S_V(cm/s)) = (0.03, 0.960), (0.06, 7.04), (0.20, 23.5), (0.60, 62.8), (6.67, 62.8)$.

三種地盤: $(T(s), S_V(cm/s)) = (0.03, 0.960), (0.08, 10.2), (0.267, 34.1), (0.80, 87.5), (5.0, 87.5)$.

また包絡線関数としては、(4.2) 式で表現される Jennings 型のものを採用し、位相特性は一様乱数を用いた。

[レベル 2 (激震時) 設計用地震動]

地震時非弾性応答制約設計法を展開する際のレベル 2 地震動 (当該敷地で発生する可能性のある中で最大の地震動) に対する設計用応答スペクトルとしては、上記レベル 1 設計用地震動の地動最大値を各々 2 倍にしたものを採用する。以下では、レベル 2 設計用地震動としては、レベル 1 設計用地震動の時と同様に、Newmark and Hall(1982) の設計用応答スペクトルと Mostaghel and Ahmadi(1979) の設計用応答スペクトルを採用している。その時の、Newmark and Hall(1982) の設計用応答スペクトルにおける地動の最大加速度、速度、変位は、各々 $402(cm/s^2)$, $50(cm/s)$, $37.5(cm)$ であり、Mostaghel and Ahmadi(1979) の設計用応答スペクトルにおける地動最大加速度は $402(cm/s^2)$ である。また、設計用速度応答スペクトルに適合する人工地震波を作成する時には、ターゲットスペクトルのコントロール点および包絡線関数のレベルをレベル 1 の時の各々 2 倍にした。

4-2 剪断型構造物

弾性支持された剪断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計

2-1 節では、一次固有値に関する不等号制約条件および最小剛性制約条件下の最適設計問題を扱った。ここでは、レベル 1 設計用地震動に対する地震時応答制約設計法を展開するための準備として、一次固有値に関する等号制約条件下の最適設計問題を簡潔に定式化し、その解表現のみを示す。

図 2.1 に示すような弾性ばね k_H, k_R で支持された f 層剪断型建築構造物を扱う。弾性ばねの剛性は、地盤の性状、基礎の形式等を考慮して適切に評価され、前もって指定されているものとする。ここでは、弾性ばねは振動数非依存型のものとして扱う。下から i 番目の床を第 i 床と呼ぶ。第 $(i+1)$ 床の集中質量およびその重心回りの回転慣性は、それぞれ m_i, I_{Ri} で、第 i 層階高は h_i で指定されているものとする。このモデルの床面集中質量および回転慣性は、その床面に隣接するすべての構造部材質量の影響を含んでいるものとする。また最適化の過程における構造部材質量の変動量は、原モデルの床面集中質量に比べて無視できるものとし、設計変更にとらえず、第 $(i+1)$ 床の集中質量および回転慣性は、各々 m_i, I_{Ri} で変化しないものとする。

第 i 床と第 $(i+1)$ 床の相対変位に関する第 i 層の構造要素の剛性を k_i で表す。ここでは、 k_i の集合 $\{k_i\}$ を設計変数とし、ベクトル \mathbf{k} で表す。質量行列 \mathbf{M} 、および弾性ばね係数 k_H, k_R が指定された、弾性支持剪断型建築構造物の非減衰一次固有円振動数および一次固有値は、 \mathbf{k} の関数である。従って、それぞれ $\omega_1(\mathbf{k})$, $\Omega_1(\mathbf{k})$ と表示する。さらに、構造要素の評価関数 (全コスト) は次式で表現できるものとする。

$$w = \mathbf{b}^T \mathbf{k} \quad (4.3)$$

ここで、 $\mathbf{b}^T = \{\beta_1^2 \dots \beta_j^2\}$ であり、 β_i は k_i に重み付けされる重み係数（コスト係数）の平方根を表す。

まず第一に、次のような最適設計問題を考える。

[問題 ODSBA]

$\mathbf{b}, \mathbf{M}, k_H, k_R$ の指定された弾性支持剪断型建築構造物について、次式で表される非減衰一次固有値制約条件下で、(4.3) 式で表される w を最小にする \mathbf{k} を見いだせ。

$$\Omega_1(\mathbf{k}) = \min_{\phi} \frac{\phi^T [\mathbf{K}_B(\mathbf{k}) + \mathbf{K}_F(k_H, k_R)] \phi}{\phi^T \mathbf{M} \phi} = \Omega_a \quad (4.4)$$

ここで、 $\Omega_a, \mathbf{K}_B(\mathbf{k}), \mathbf{K}_F(k_H, k_R), \phi$ は指定一次固有値、上部剪断型構造物に関する剛性行列、弾性支持ばねに関する剛性行列、任意のモードベクトルを表す。

この問題に対する大域最適性の必要十分条件および閉形表現の解は、中村、竹脇(1985)により既に導かれている。ここでは、後の地震時応答制約設計法の定式化の準備として、その解表現のみを示す。第 j 層の層間剛性は次のように表現できる。

$$k_j = \frac{\Omega_a}{\beta_j} \sum_{i=j}^f m_i (U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{k=1}^i \beta_k) \quad (4.5)$$

ここで、 U_F^*, Θ_F^* は次の量を表す。

$$U_F^* = \frac{D_2 D_5 - D_3 D_4}{D_1 D_4 - D_2^2}, \quad \Theta_F^* = \frac{D_2 D_3 - D_1 D_5}{D_1 D_4 - D_2^2} \quad (4.6)$$

また、 $D_1 \sim D_5$ は以下の量である。

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{i=0}^f m_i - \frac{k_H}{\Omega_a}, & D_2 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i, & D_3 &= \sum_{i=1}^f m_i \sum_{j=1}^i \beta_j \\ D_4 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^f I_{Ri} - \frac{k_R}{\Omega_a}, & D_5 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i \sum_{j=1}^i \beta_j \end{aligned} \quad (4.7)$$

レベル1 設計用地震外乱下における最大層間相対変位応答制約設計法

上記の一次固有周期制約条件下の最適設計問題における重み係数を地震時応答調整パラメータと見なすことにより、問題 ODSBA に対する解公式を用いた地震時応答制約設計法を展開する。

ここでは、図 2.1 に示す剪断型建築構造物が、弾性支持ばねの他に、さらに地盤の減衰を代表するダッシュポットにより支持されている場合を扱う。減衰係数 c_H, c_R は、弾性ばねと同様に地盤の性状、基礎の形式等を考慮して適切に評価され、前もって指定されているものとし、ここでは振動数非依存型のものとして扱う。ここで扱うモデルは、上部構造物とは独立に指定される地盤の減衰係数 c_H, c_R の存在により、一般には classical normal modes に分解することはできない。しかしながら、近似的手法を用いることにより、連成系としてのモード減衰定数を評価することは可能である。ここでは、モード分解を行う過程において非対角項を無視することにより、連成系のモード減衰定数 $h^{(r)}$ を評価する（たとえば Thomson, Calkins and Caravani, 1974）。

設計用変位応答スペクトル $S_D(T; h)$ が、弾性支持剪断型建築構造物に対して与えられたならば、第 j 床と第 $(j+1)$ 床のロッキング成分を含まない層間相対変位 $\delta_j(t) = u_j(t) - u_{j-1}(t)$ の最大値は、モーダル応答の SRSS 評価により次のように評価できる。

$$\delta_{jmax} = \sqrt{\sum_{r=1}^N \left\{ \nu^{(r)} \left(\Phi_j^{(r)} - \Phi_{j-1}^{(r)} \right) S_D(T_r; h^{(r)}) \right\}^2} \quad (4.8)$$

ここで、 $\nu^{(r)}, \Phi_j^{(r)}$ は r 次の刺激係数および r 次の固有ベクトルの第 j 成分を表し、 N, T_r はそれぞれ SRSS 評価の採用次数および r 次の固有周期を表す。また、固有ベクトル $\Phi^{(r)}$ の成分は、図 2.1 における一般化座標 $\{u_1(t), \dots, u_f(t), u_F(t), \theta_F(t)\}$ に対応する。(4.8) 式の右辺は、層間剛性集合 \mathbf{k} のみの関数と見なすことができる。また、層間剛性を (4.5) 式で表わすことにすれば、結局 (4.8) 式の右辺は Ω_a と \mathbf{b} のみの関数と見なすことが可能である。

ここで、(4.8) 式で表現される平均最大層間相対変位が指定値となる時の層間剛性集合 \mathbf{k} を求める次のような問題を考える。

[問題 RCDSB]

固有周期に関して非減少関数で表現される変位応答スペクトル (NH スペクトル) を有する設計用地震外乱 (レベル 1) を受ける質量行列 \mathbf{M} および k_H, k_R, c_H, c_R の指定された弾性支持剪断型建築構造物について、次式で与えられる層間相対変位の最大値分布を示す $T_a, \mathbf{b}, \mathbf{k}$ の集合を見いだせ。

$$\delta_{jmax}(T_a, \mathbf{b}) = \bar{\delta} \quad (j = 1, 2, \dots, f) \quad (4.9)$$

この問題の解法を構成するに際して、 $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ の条件下での [問題 ODSBA] の解剛性を有する構造物を ODSBA1 構造物と呼び、[問題 RCDSB] の解剛性を有する構造物を RCDSB 構造物と呼ぶ。設計用応答スペクトルとして、Newmark and Hall の提案しているスペクトル (4-1 節参照) を採用した時の数値解析の結果、ODSBA1 構造物の δ_{1max} は、同一の一次固有周期を有する RCDSB 構造物の δ_{1max} のよい近似になっていることが明らかとなった。この特性を利用して [問題 RCDSB] の解を求めるには、(i) ODSBA1 構造物の δ_{1max} が指定値 $\bar{\delta}$ となる時の一次固有周期 T_a を求め、(ii) その後一次固有周期 T_a を有する RCDSB 構造物の層間剛性分布を見いだせばよい。

(i) の操作を合理的に行うには、全モードを考慮した時の ODSBA1 構造物の δ_{1max} の中で一次モード成分の占める割合を算出し、一次モードのみを対象として一次固有周期 T_a を見いだせばよい。(4.8) 式の中で、 $\nu^{(1)}(\Phi_1^{(1)} - \Phi_0^{(1)})$ は T_1 の関数と見なすことが可能であり、 $S_D(T_1; h^{(1)})$ も、 $h^{(1)}$ を T_1 の関数と見なせば、 T_1 のみの関数となる。数値検討の結果、 $\nu^{(1)}(\Phi_1^{(1)} - \Phi_0^{(1)}) - \Omega_1$ 関係は線形近似が可能であり、 $h^{(1)} - \Omega_1$ 関係は 2 次関数近似が可能であることがわかるが、ここではその陽な表現を示すことは省略する。

次に (ii) の操作においては、Nakamura and Yamane(1986) が基礎固定の場合について示した手法と同様の手法を適用し、 \mathbf{b} を変化させることにより指定値 $\bar{\delta}$ となる剛性分布を見いだす。

この操作を通じて得られた設計を「スペクトル適合変位制約設計」と呼び、本設計法をスペクトル適合変位制約設計法と呼ぶ。

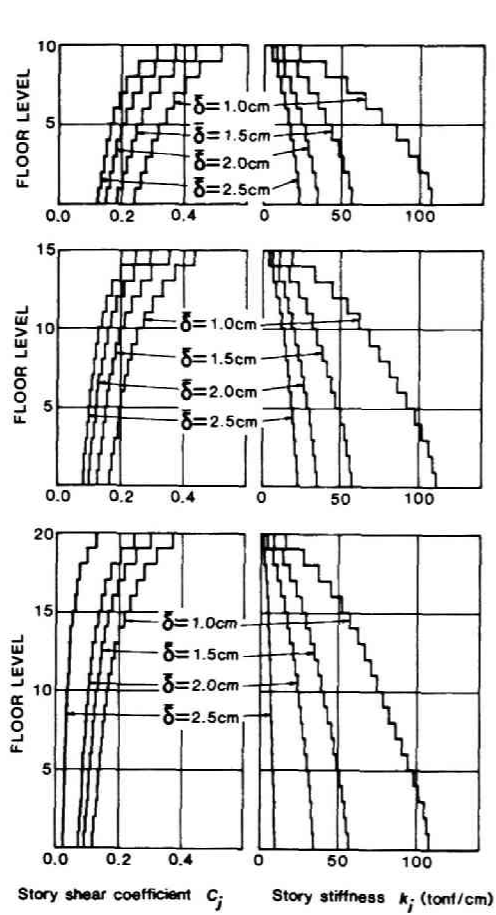


図4.4 地震時応答制約設計構造物の剪断力係数分布と層間剛性分布

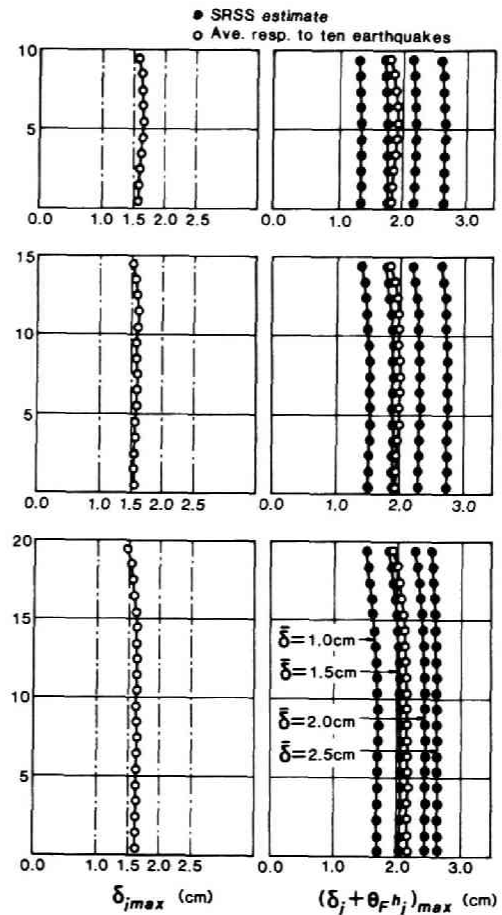


図4.5 人工地震波10波に対する平均最大層間相対変位分布（ロッキング成分を含まない場合と含む場合）

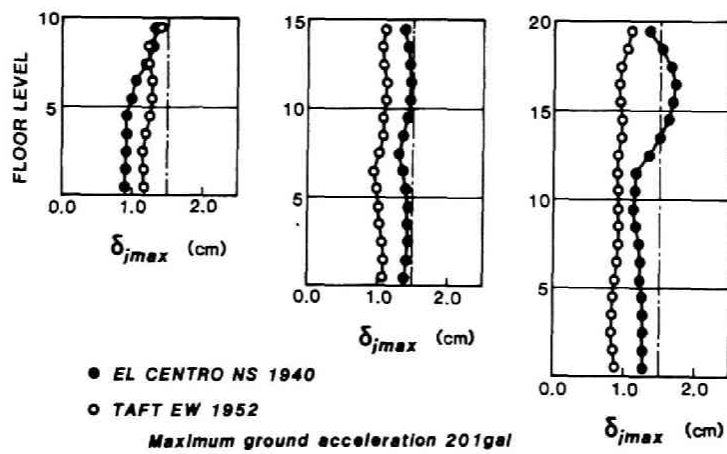


図4.6 EL CENTRO NS 1940波とTAFT EW 1952波に対する最大層間相対変位分布

例題

前節で提示したスペクトル適合変位制約設計法を用いた10,15,20層剪断型建築構造物の例題を示す。設計用変位応答スペクトルとしては、4-1節のNewmark and Hall(1982)のスペクトルを採用する。地盤の弾性ばね係数として、 $k_H = 4.36 \times 10^2(\text{tonf/cm})$, $k_R = 2.37 \times 10^8(\text{tonf} \cdot \text{cm/rad})$ を仮定した。また、スウェイに関する減衰定数は、10,15,20層に対してそれぞれ35%,30%,26%を仮定し、ロッキングに関する減衰定数は、それぞれ2%,1%,1%を仮定した。減衰行列は、上部構造物に対する減衰行列と、地盤におけるダッシュポットの減衰係数を重ね合わせたものとした。また、上部構造物の減衰行列は、基礎固定時の一次の減衰定数を2%として剛性比例型のものを採用した。各層床質量は、 $m_0 = 75.0(\text{ton})$, $m_1 \sim m_f = 45.0(\text{ton})$ 、各層床の回転慣性は、 $I_{R0} = 4.0 \times 10^6(\text{ton} \cdot \text{cm}^2)$, $I_{R1} \sim I_{Rf} = 2.4 \times 10^6(\text{ton} \cdot \text{cm}^2)$ である。階高は等階高とし、 $h_1 \sim h_f = 350.0(\text{cm})$ とする。

図4.4に、10,15,20層の弾性支持剪断型建築構造物について、ロッキング成分を含まない層間相対変位の最大値の指定値を $\bar{\delta} = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\text{cm}$ とした時の層剪断力係数分布および層間剛性分布を示す。また、図4.5には、各々の設計についてSRSS評価した時のロッキング成分を含まない層間相対変位の最大値分布 $\delta_{j,max}$ と、ロッキング成分を含む層間相対変位の最大値分布 $(\delta_j + \theta_F h_j)_{max}$ を示す。

次に、スペクトル適合変位制約設計の剛性を有する弾性支持剪断型建築構造物は、スペクトルに適合するように作成した人工地震波に対して、指定された応答を示すことを例証するために、3個のモデルについて時刻歴応答解析を実施した。10個の異なる人工地震波を、SIMQKEプログラム(Gasparini and Vanmarcke, 1976)を用いて作成した(4-1節参照)。

図4.5に、 $\bar{\delta} = 1.5\text{cm}$ の下で設計した10,15,20層の3個の剪断型建築構造物に、上記のようにして作成した10個の人工地震波を入力し、Newmark- β 法($\beta = 1/4$)を用いて時刻歴解析した時の最大層間相対変位の平均値を○で示す。図4.5より、10,15,20層のすべてについて、応答値は指定値を少し上回っているものの、かなりよく一致していることがわかる。

次に、スペクトル適合変位制約設計の剛性を有する弾性支持剪断型建築構造物の、記録地震波に対する応答特性を調べるために、EL CENTRO NS 1940とTAFT EW 1952の2つの地震波を最大加速度201galに規準化して入力し、時刻歴応答解析を行った。その時のロッキング成分を含まない層間相対変位の最大値の分布を図4.6に示す。図4.6より、20層のモデルのEL CENTRO NS 1940波に対する応答を除いて、かなり一様な応答を示すことがわかる。

本論文では、地盤のばねおよびダッシュポットとして振動数非依存型のものを採用したが、地盤のばね剛性および指定応答レベルが決まれば、一次固有周期の略算値が導かれるため、その一次固有周期に基づき地盤のばね剛性およびダッシュポットの減衰係数を求め直せば、実質的に振動数依存型としての近似的取り扱いも可能である。

4-3 剪断型構造物一杭系

2-2節でも述べたように、杭基礎を有する建築構造物のこれまでの構造設計では、上部構造物と杭基礎を各々独立に扱う手順が多くの場合に採用されてきた。しかし、このような設計法では、上部構造物と杭基礎の剛性及び強度のバランスを十分に考慮し、構造設計者の意図を反映させた構造設計を実施することは、かなりの経験を積み、多数回の繰り返し修正を行わない限り極めて困難のように思われる。

2-2節では、杭剛性をも設計変数として含む弾性支持された弾性剪断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計理論が展開された。ここではその理論に基づき、最適設計理論における重み係数を地震時応答調整パラメータと見なすことにより、剪断型構造物においては層間相対変位の平均最大値を、また杭においては最大応答応力度（垂直応力度および剪断応力度）の対応する許容応力度に対する比の平均最大値を直接的に制約する地震時応答制約設計法を展開する。本設計法により、杭基礎と上部構造物の剛性あるいは弾性限強度に対する余裕率を直接的に指定した設計法の展開が実現可能となる。

尚、本節では杭基礎を弾性支持ばねとしてモデル化した場合を扱っているが、本理論には次のような二つの意義が存在する。第一に、著者らが採用しているモデルは、構造設計の実務において現在採用されているモデルに相当するものであり、本理論は実際上有用な設計法を提示している。第二に、本理論の成果は、多くの一層精度の高い建築物一杭系モデル（たとえば、Wolf and Arx, 1978; Cakmak et al., 1982; Waas and Hartmann, 1984; 日本建築学会, 1987）に対して同様の理論を構成する時のガイドラインとしての役割を果たすものと考えられる。たとえば、ここでは、弾性支持ばねとして振動数非依存型のものを採用するが、振動数依存型のばねを採用した場合においても、中村と竹脇（Nakamura and Takewaki, 1989b）が導き証明した定理を用いてほぼ同様の理論展開が可能である。ただしその際には、周波数領域での応答解析が必要となる。また、ここでは弾性応答を制約する設計法を展開するが、中村と竹脇（Nakamura and Takewaki, 1989c）が固定基礎を有する骨組に対して展開した地震時非弾性応答制約設計法を、弾性支持された骨組に対して拡張することにより、非弾性応答を直接的に制約する設計法を展開することも可能である。

2-2節で誘導した一次固有周期制約条件下の最適設計解は、最適性条件(2.64,65)式から解釈して、一次固有周期、一次固有モード指定設計解と見なすことができる。その最適設計解を利用した地震時弾性応答制約設計法は、基礎固定時の場合(Nakamura and Yamane, 1986)や弾性支持ばね剛性が指定された場合（中村、竹脇、1986; Nakamura and Takewaki, 1989a）と同様に、最適設計問題における重み係数を地震時応答調整パラメータとして扱うことにより展開することができる。尚、その結果として求められる地震時応答制約設計構造物一杭系の層間剛性および杭断面積を、2-2節の最適設計問題における評価関数に代入することにより、地震時応答制約設計として求められる構造物一杭系の重み付き重量和を最適設計理論の枠組内の尺度で再評価することも可能である。

地震時応答制約設計法における応答制約量

本節では応答制約量として弾性剪断型構造物においてはロッキングによる成分を含まない層間相対変位（以下では単に層間相対変位と呼ぶ）の最大値 $\{\delta_j\}$ を、また杭部分においては応答応力度の許容応力度に対する比（以下では単に応力度比と呼ぶ）の最大値を採用する。通常の杭の設計では、杭の許容応力度に対する検討以外に、地盤の許容支持力及び引抜力に対する検討も必要となるが、ここでは基本的な設計解を導くことを目的として地盤の許容支持力及び引抜力に関する条件は満足されているものとして扱う。必要ならば、これらの設計条件を組み込むことも可能である。また、杭の応力度比の最大値(最大応力度比) γ を次式で定義する。

$$\gamma = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{最大圧縮応力} / \text{許容圧縮応力}, \\ \text{最大引張応力} / \text{許容引張応力}, \\ \text{最大剪断応力} / \text{許容剪断応力} \end{array} \right.$$

地震時応答の最大値の評価法

剪断型構造物の減衰行列は、基礎固定時の一次の減衰定数を指定した初期剛性比例型のものを採用する。スウェイばねおよびロッキングばねに対応する減衰としては、スウェイおよびロッキングに関する減衰定数を指定する。本論文では、連成系の減衰行列として、上述の基礎固定時の剪断型構造物の減衰行列に、指定減衰定数より求められるスウェイ及びロッキングの減衰係数を重ね合わせたものを採用する。従って、本モデルは非比例減衰系となるため、一般には古典的基準座標を用いたモード分解を行なうことが不可能である。ここでは、モード分解を行う過程において、非対角項を無視するという近似的手法を用いることにより連成系の r 次減衰定数 $h^{(r)}$ を次式により評価する。

$$h^{(r)} = \frac{1}{2\omega_r} \frac{\Phi^{(r)T} \mathbf{C} \Phi^{(r)}}{\Phi^{(r)T} \mathbf{M} \Phi^{(r)}} \quad (4.11)$$

ここで、 ω_r , $\Phi^{(r)}$, \mathbf{M} , \mathbf{C} は、それぞれ連成系の r 次非減衰固有円振動数、連成系の r 次非減衰固有ベクトル、連成系の質量行列および減衰行列を表わす。この手法は、非比例減衰系を扱った初期の段階の研究（たとえば Thomson, Calkins and Caravani, 1974）において用いられた手法である。本手法を用いた場合の近似度については、時刻歴応答解析結果および複素固有値解析結果との比較を通じて明らかにする。

この減衰定数を用いて、剪断型構造物の地震時最大層間相対変位、および杭の最大応力度比を算出するための杭頭最大軸力、最大剪断力、最大曲げモーメントをSRSS評価法により求める。従来のSRSS評価法の代わりに、複素固有値解析に基づく各次モード間の連成を考慮した改良型SRSS法(Singh, 1980)を用いることも可能であるが、以下で示す例題においては、それによる評価値と従来のSRSS法による評価値との間には、あまり顕著な差が生じなかったため、ここでは従来のSRSS法を用いることにした。

地震時応答制約設計問題

ここでは、2-2節と同様に、 $\mathbf{k} = \{k_1 \dots k_f \ A_p\}$ を設計変数として扱う。この連成系を、指定された設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群（レベル1）に対するその平均最大応答量の分布が、指定された分布となるように設計しようとする。そこで次のような問題を考える。

[問題 RCDBP]

NHスペクトルで代表される設計用人工地震動群（レベル1）に対する平均最大層間相対変位 δ_j が、制約条件

$$\delta_j = \bar{\delta}_j \quad (j = 1, \dots, f) \quad (4.12)$$

を満たし、かつ杭の平均最大応力度比 γ が制約条件

$$\gamma = \bar{\gamma} \quad (4.13)$$

を満足するような設計 $\mathbf{k} = \{k_1 \dots k_f \ A_p\}$ を求めよ。

ここで、 $\bar{\delta}_j$, $\bar{\gamma}$ は、それぞれ第 j 層最大層間相対変位の指定値および杭の最大応力度比の指定値を表わす。(4.12),(4.13)式における δ_j および γ は、設計変数 \mathbf{k} の関数と見なすことが可能である。また、2-2節における設計解公式を用いて \mathbf{k} を表現すれば、 δ_j および γ は、 $\Omega_a, \beta_i (i = 1, \dots, f), \beta_0$ の関数と見なすことも可能である。

地震時応答制約設計を求める手順

[問題 RCDBP] の解法手順を以下に示す。

(1) 一次固有値の決定

[Step A-1] 重み係数の平方根として $\beta_i^{(1)} = 1.0 (i = 1, \dots, f), \beta_0^{(1)} = \alpha$ (ある適当な正の定数) を採用する。

[Step A-2] 2-2 節の設計解公式を用いて設計解を求め、SRSS 評価法により第一層の最大層間相対変位を求める。

[Step A-3] Step A-2 で求められる第一層の最大層間相対変位が指定値 $\bar{\delta}_1$ となる一次固有値を求める。

(2) 平均最大層間相対変位の制約手順

[Step B-1] Step A で求めた一次固有値の下で、 $\beta_i^{(p1)}, \beta_0^{(p2)}$ に対応する設計解を求め、SRSS 評価法により各層の最大層間相対変位 $\delta_i^{(p1)}$ を求める。

[Step B-2] 新しい重み係数の平方根を次式により求める。

$$(\beta_i^{(p1+1)}) = (\bar{\delta}_i / \delta_i^{(p1)}) (\beta_i^{(p1)}) \quad (4.14)$$

[Step B-3] $\beta_i^{(p1+1)}$ を新しい重み係数の平方根として Step B-1 に戻る。

ただし、 $p1, p2$ は繰り返し回数を表わす。Step A-2~B-3 の操作を所要の精度が満たされるまで繰り返す。

(3) 杭の平均最大応力度比の制約手順

[Step C-1] Step B での最終の $\beta_i^{(p1)}, \beta_0^{(p2)}$ に対応する設計解を求め、SRSS 評価法により杭の最大応力度比 $\gamma^{(p2)}$ を求める。

[Step C-2] 新しい杭の重み係数の平方根を次式により求める。

$$(\beta_0^{(p2+1)}) = (\bar{\gamma} / \gamma^{(p2)})^\eta (\beta_0^{(p2)}) \quad (4.15)$$

[Step C-3] $\beta_0^{(p2+1)}$ を新しい重み係数の平方根として Step A および Step B の操作を行った後、Step C-1 に戻る。

ただし、 η は正の定数を表わす。

以上の操作を所要の精度が満たされるまで繰り返す。その結果、最大層間相対変位と杭の最大応力度比がそれぞれ指定値に制約された設計解が求められる。

地震時応答制約設計の例題

前節の設計法を用いて設計した、場所打ちコンクリート杭により支持された3,10,20層剪断型構造物の例題を示す。本節の目的は、「(i) 前節の設計法の妥当性を例証すること」および「(ii) 本設計法を用いて設計した種々の剪断型構造物一杭系の有する特性を明らかにすること」の二つである。設計用応答スペクトルとして Newmark and Hall の提案するスペクトル (レベル1) (4-1 節) を採用し、地動の最大加速度、速度、変位として $201(\text{cm}/\text{s}^2), 25(\text{cm}/\text{s}), 18.75(\text{cm})$ を設定する。杭周面地盤の平均 N 値を 5 程度、杭先端付近の地盤の平均 N 値を 40 程度と想定し、各杭の水平方向ばね係数および鉛直方向ばね係数を「道路橋示方書・同解説」

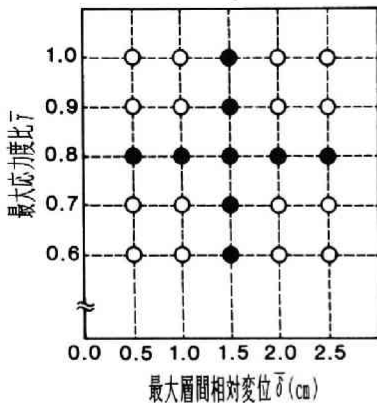


図4.7 指定平均最大層間相対変位と指定平均最大応力度比の組み合わせ

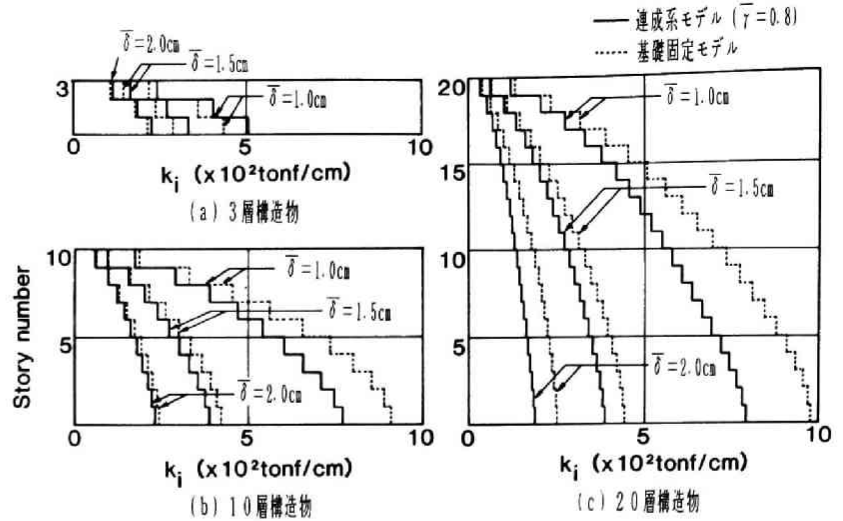


図4.8 指定平均最大応力度比一定 ($\bar{\gamma}=0.8$) で指定平均最大層間相対変位を変化させた時の3, 10, 20層剪断型構造物の層間剛性分布

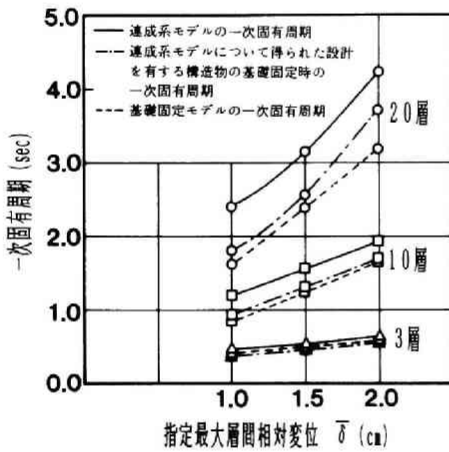


図4.9 指定平均最大応力度比一定 ($\bar{\gamma}=0.8$) で指定平均最大層間相対変位を変化させた時の3, 10, 20層剪断型構造物の一次固有周期

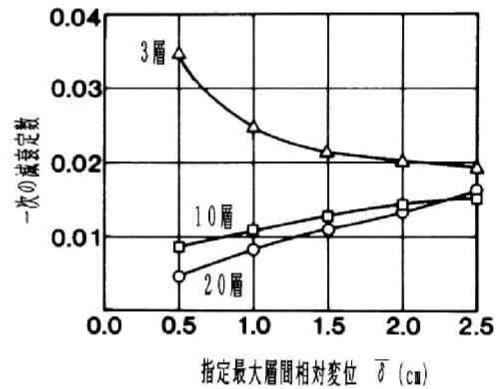


図4.10 指定平均最大応力度比一定 ($\bar{\gamma}=0.8$) で指定平均最大層間相対変位を変化させた時の3, 10, 20層剪断型構造物の一次の減衰定数

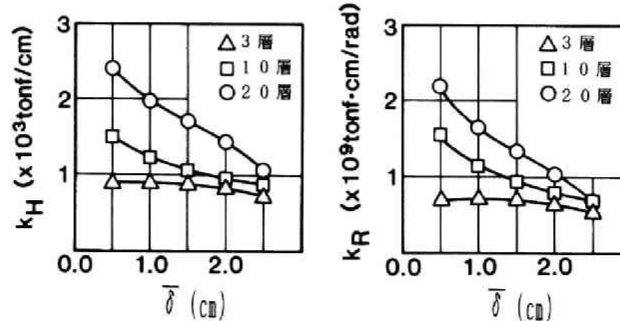


図4.11 指定平均最大応力度比一定 ($\bar{\gamma}=0.8$) で指定平均最大層間相対変位を変化させた時の3, 10, 20層剪断型構造物の支持ばね剛性 k_H , k_R

(日本道路協会、1980)により算出する。また、基礎固定時の一次の減衰定数を2.0(%), スウェイに関する減衰定数を10.0(%), ロッキングに関する減衰定数を0(%), とする。各層スラブ質量は $m_0 = 900(\text{ton})$, $m_1 \sim m_f = 300(\text{ton})$, 各層床の回転慣性は $I_{R0} = 3.675 \times 10^7(\text{ton} \cdot \text{cm}^2)$, $I_{R1} \sim I_{Rf} = 1.225 \times 10^7(\text{ton} \cdot \text{cm}^2)$, 階高は $h_1 \sim h_f = 350(\text{cm})$, 杭長は $40(\text{m})$ とする。また、 $R_i = 350(\text{cm})$ (for all i)とする。

3層, 10層, 20層モデルについて剪断型構造物の層間相対変位の最大値の指定値(全層一定)を $\bar{\delta} = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5(\text{cm})$, 杭の応力度比の最大値の指定値を $\bar{\gamma} = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ とした計25通りについて設計解を求めた(図4.7)。このような数値を採用したのは、一般に、杭の最大応力度比の指定値が大きい程、下部構造が柔であり、剪断型構造物の最大層間相対変位の指定値が大きい程、上部構造物が柔であると考えられるため、両者の剛性の比率を種々変化させた時の設計解の変動を調べるためである。

場所打ちコンクリート杭の応力度検定は、「地震力に対する建築物の基礎の設計指針」(日本建築センター、1984)に基づき行う。ただし、ここでは簡単のために曲げに関する応力度検定は、杭断面の圧縮側のコンクリートの縁応力に対して行い、鉄筋比は適切に与えられるものとする。コンクリートのヤング係数は、コンクリートの設計基準強度を $F_c = 210(\text{kgf}/\text{cm}^2)$ として「鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説」(日本建築学会、1982)に従って求めた。尚、杭の本数は、求められた杭径がほぼ実際に使用されている杭径になるように各層数例題ごとに適切に指定し、3,10,20層モデルのそれぞれに対して、柱一本当たり1,1,2本とした。

ここでは、図4.7に●印で示したように、最大応力度比の指定値を $\bar{\gamma} = 0.8$ で一定に保ち、最大層間相対変位の指定値を $\bar{\delta} = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5(\text{cm})$ と変化させた場合(CASE I)と、層間相対変位の指定値を $\bar{\delta} = 1.5(\text{cm})$ で一定に保ち、最大応力度比の指定値を $\bar{\gamma} = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ と変化させた場合(CASE II)の設計例を示す。

図4.8(a)～(c)の実線は、CASE Iの場合(ただし $\bar{\delta} = 1.0, 1.5, 2.0(\text{cm})$ の場合のみ)の3層, 10層, 20層構造物の層間剛性分布を表わしている。また、図4.8(a)～(c)には、Nakamura and Yamane(1986)が基礎固定の場合について展開した理論を用いて、層間相対変位の指定値が $\bar{\delta} = 1.0, 1.5, 2.0(\text{cm})$ となるように設計したときの層間剛性分布が破線で示してある。図4.8より、10,20層構造物では、同一の最大層間相対変位を示す設計については、基礎固定モデルの方が連成系モデルよりも大きな層間剛性を必要とするのに対し、3層構造物では逆に、連成系モデルの方が基礎固定モデルよりも大きな層間剛性を必要とすることがわかる。このことは次のように説明できる。SRSS 評価法により層間相対変位の平均最大値を評価する際には、変位応答スペクトルと刺激モードベクトルにおける層間相対変位成分が影響する。変位応答スペクトルには固有周期と減衰定数が関係するが、同一の $\bar{\delta}$ を与える設計については、連成系モデルの一次固有周期に対応する変位応答スペクトル値は、基礎固定モデルのそれよりも大きくなる。一方、一次の刺激モードベクトルにおける層間相対変位成分は、ロッキングおよびスウェイの影響により連成系モデルの方が基礎固定モデルよりも小さくなる。特に高層構造物では、ロッキングの影響が大きくなるため後者の影響が顕著となる。これら二つの要因による影響の大小関係により、低層構造物では連成系モデルの方が、高層構造物では基礎固定モデルの方がより大きな層間剛性を必要とすることになる。

また、CASE Iの場合の杭径は、3層モデルでは91～106cm、10層モデルでは105～167cm、20層モデルでは68～138cmとなった。

図4.9は、連成系モデル、基礎固定モデルについて得られた設計を有する構造物の基礎固定時、および基礎固定モデル(Nakamura and Yamane, 1986)の一次固有周期を、指定最大層間相対変位に対してプロットした図を示す。図4.9は、図4.8における連成系モデルおよび基礎固定モデルの層間剛性分布の大小関係を詳細に表わしている。

図 4.10 は、CASE I の場合の連成系モデルの一次の減衰定数を指定最大層間相対変位に対してプロットした図である。3 層モデルでは、 $\bar{\delta} = 2.5(\text{cm})$ の場合を除いて基礎固定時の一次の減衰定数 0.02 よりも大きくなっているのに対し、10,20 層モデルでは 0.02 よりも小さくなっている。また、図 4.11 は支持ばね剛性 k_H, k_R を $\bar{\delta}$ に対してプロットした図である。図 4.11 より、10,20 層モデルの k_H, k_R は $\bar{\delta}$ を大きくする程小さくなるが、3 層モデルではほぼ一定の値となることがわかる。

一方、図 4.12(a) ~ (c) は、CASE II の場合の 3 層,10 層,20 層構造物の層間剛性分布を表わしている。図より、最大層間相対変位の指定値一定の下では、最大応力度比の指定値を変動させても、剪断型構造物の層間剛性分布はほとんど変化しないことがわかる。この事実は、図 4.13 の基礎固定時の一次固有周期がほとんど変動しないことから理解できる。それに対し、 k_H, k_R は $\bar{\delta}$ を大きくする程小さくなる (図 4.14)。以上のことは、換言すれば、剪断型構造物の層間剛性分布が同一であれば、スウェイ、ロッキングばね剛性が少し変動しても層間相対変位の最大値にはあまり影響がないが、杭の最大応力度比には大きく影響することを示している。

また、CASE II の場合の杭径は、3 層モデルでは 95 ~ 121cm、10 層モデルでは 111 ~ 144cm、20 層モデルでは 92 ~ 120cm となった。

図 4.15 の実線は、CASE I の場合の連成系の一次固有周期-ベースシヤ-係数関係を示している。また、図 4.15 には、基礎固定モデル (Nakamura and Yamane, 1986) の場合の一次固有周期-ベースシヤ-係数関係が破線で示してある。図 4.15 は、3 層の場合においてベースシヤ-係数に上限値が存在することを示唆している。この性質は次のように説明できる。ベースシヤ- Q_B は SRSS 評価法により次のように表現できる。

$$Q_B = \sqrt{\sum_{r=1}^5 \left[S_A(T_r; h^{(r)}) \left\{ \sum_{k=1}^3 m_k \nu^{(r)} \Phi_k^{(r)} \right\} \right]^2} \quad (4.16)$$

ここで、 $S_A(T; h)$, $\nu^{(r)} \Phi_k^{(r)}$ はそれぞれ加速度応答スペクトルおよび r 次の刺激モードベクトルの第 k 成分を表わす。CASE I の場合において、最大層間相対変位の指定値 $\bar{\delta}$ が大きくなると、図 4.9 から明らかなように連成系の一次固有周期は大きくなる。この時、一次の減衰定数は、図 4.10 からわかるように $\bar{\delta}$ の増加にともない小さくなるため、応答倍率は大きくなる。この一次固有周期と応答倍率の変動にともない、 $\bar{\delta} = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5(\text{cm})$ の各設計に対応する一次の固有周期に対する加速度応答スペクトル値は、475, 521, 540, 505, 424(cm/s^2) のように上限値を有する分布となる。二次、三次固有周期に対する加速度応答スペクトル値は表 4.1 に示されている。また、図 4.16 の刺激モードベクトル図および表 4.1 から明らかなように、(4.16) 式中の $\left\{ \left| \sum_{k=1}^3 m_k \nu^{(r)} \Phi_k^{(r)} \right| \right\}$ の値は、一次においては $\bar{\delta}$ の値に関して単調減少であるが、二次においては必ずしもそうではない。これらの諸事情に起因して、ベースシヤ- Q_B は連成系の一次固有周期に関して上限値を有する性質を示す。

尚、CASE I の場合において、杭の設計条件の中で最も critical な条件は、 $\bar{\delta} = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5(\text{cm})$ の各設計について、3 層ではすべて剪断応力、10,20 層ではすべて垂直応力に関する条件である。

時刻歴応答解析による検証

本設計法を用いて設計した剪断型構造物-杭系が、指定した平均最大応答値を示すことを例証するために、人工地震波による時刻歴応答解析を実施した。

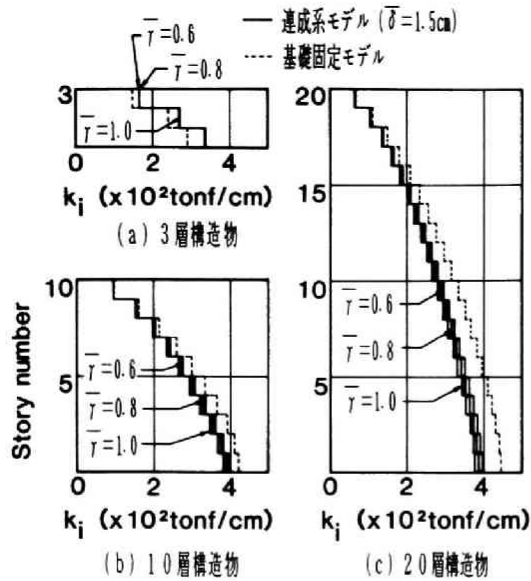


図4.12 指定平均最大層間相対変位一定 ($\bar{\delta} = 1.5\text{cm}$) で指定平均最大応力度比を変化させた時の3, 10, 20層剪断型構造物の層間剛性分布

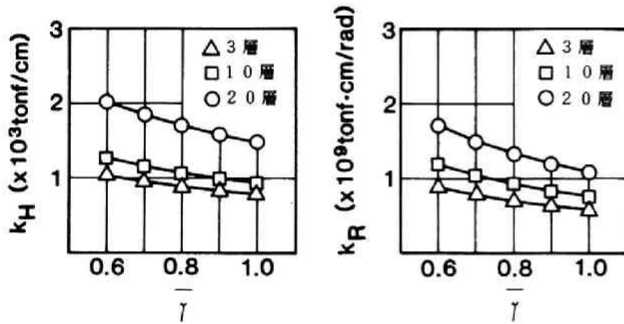


図4.14 指定平均最大層間相対変位一定 ($\bar{\delta} = 1.5\text{cm}$) で指定平均最大応力度比を変化させた時の3, 10, 20層剪断型構造物の支持ばね剛性 k_H , k_R

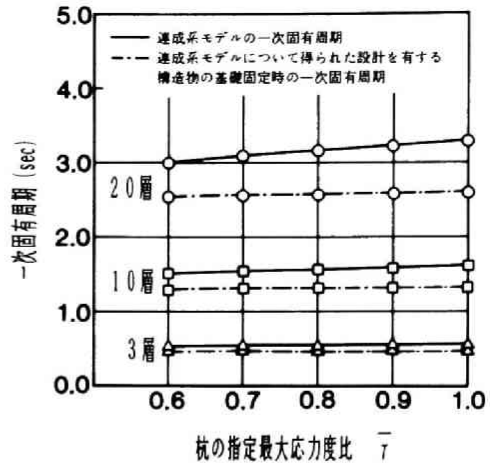


図4.13 指定平均最大層間相対変位一定 ($\bar{\delta} = 1.5\text{cm}$) で指定平均最大応力度比を変化させた時の3, 10, 20層剪断型構造物の一次固有周期

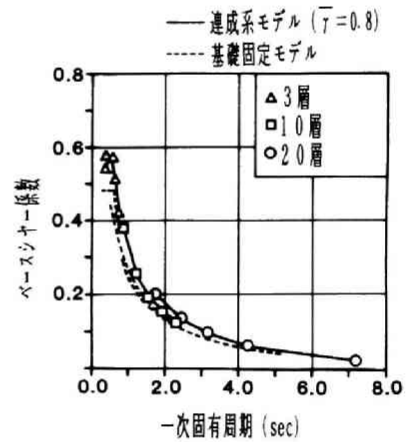


図4.15 指定平均最大応力度比一定 ($\bar{\gamma} = 0.8$) で指定平均最大層間相対変位を変化させた時の連成系モデルの一次固有周期-ベースシヤー係数関係

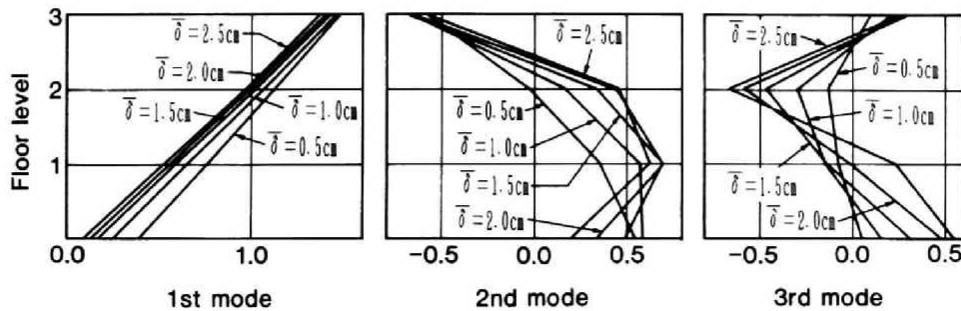


図4.16 弾性支持された3層剪断型構造物の刺激モードベクトル (指定平均最大応力度比 $\bar{\gamma} = 0.8$)

人工地震波は、減衰定数 2% に対する Newmark and Hall の設計用速度応答スペクトルをターゲットスペクトルとして各地震波の速度応答スペクトル値の平均がターゲットスペクトルに等しくなるように SIMQKE プログラム (Gasparini and Vanmarcke, 1976) を用いて 10 波作成した (4-1 節)。

解析モデルとしては図 2.1 のモデルにダッシュポットを付加したモデルを用い、上部剪断型構造物に関する減衰行列は、基礎固定時の減衰定数を 2% とする剛性比例型減衰行列を採用した。一方、スウェイの減衰係数はスウェイに関する減衰定数が 10% であることから算出した。系全体の減衰行列としては上記の各々を重ね合わせたものを採用した。数値積分は、Newmark- β 法 ($\beta = 0.25$) を用い、演算はモード分解を行わない行列の形のままで実施した。

図 4.17 は、CASE II の ($\bar{\gamma} = 0.6, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$), ($\bar{\gamma} = 0.8, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$), ($\bar{\gamma} = 1.0, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$) の 3 個の設計の上記 10 波の地震波に対する最大層間相対変位の平均値分布および平均値 \pm 標準偏差値分布を示す。図より、平均最大値は指定値 $\bar{\delta} = 1.5(\text{cm})$ を少し上回っているものの、かなり精度よく指定した応答を呈しているといえる。一方、杭の最大応力度比の平均値は、($\bar{\gamma} = 0.6, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$) の場合 0.615、($\bar{\gamma} = 0.8, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$) の場合 0.810、($\bar{\gamma} = 1.0, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$) の場合 1.02 であり、精度よく指定した応答を示している。また、標準偏差は各々の場合について、それぞれ 0.203, 0.221, 0.250 であった。さらに、人工地震波の数 (10 波) の妥当性を例証するために、15 波を採用した時の応答解析を実施したところ、10 波に対する結果との差は、平均最大値において最大 3% であった。

次に、本設計法で採用した各次減衰定数の評価法の妥当性を検証するために、複素固有値解析による減衰定数との比較を行った。表 4.2 は、($\bar{\gamma} = 0.6, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$), ($\bar{\gamma} = 0.8, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$), ($\bar{\gamma} = 1.0, \bar{\delta} = 1.5\text{cm}$) の 3 個の場合の上記値の比較を示す。表 4.2 より、本設計法で採用した評価法による減衰定数は、複素固有値解析による減衰定数とかなりよく一致することが確認された。

4-4 地盤特性依存型スペクトルに対する 剪断型構造物の設計

杭剛性の弾性支持ばねへの置換

ここでは弾性剪断型構造物が杭支持されている場合を扱う。杭は面内にも面外にも剛な基礎版で連結されているものとし、杭頭の水平移動および回転に関する剛性は、Novak and Sharnouby(1983) の方法により振動数非依存型のものとして算出されるものとする。この剛性は弾性波動論に基づき算出されたものであり、前節の静的な剛性評価に比べて動的な効果が考慮されている。第 i 杭の杭頭における水平、鉛直、回転に関する剛性を $k_{xi}, k_{zi}, k_{\phi i}$ で表わし、水平と回転の連成項を k_{ci} で表わせば、基礎版の水平移動および回転に関する剛性行列は次のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} \sum k_{xi} & \sum k_{ci} \\ \sum k_{ci} & \sum (k_{\phi i} + k_{zi} x_{ri}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{HH} & k_{HR} \\ k_{RH} & k_{RR} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ここで、 \sum は杭全体に関する総和を意味し、 x_{ri} はロッキング回転軸から第 i 杭位置までの水平距離を表わす。また、杭頭は基礎版に固定されているものとする。

	$S_A(T; h) \text{ (cm/s}^2\text{)}$			$\left \sum_{k=1}^3 \nu^{(r)} \phi_i^{(r)} \right $		
	1次	2次	3次	1次	2次	3次
$\bar{\delta}=0.5\text{cm}$	475	339	395	3.39	0.259	0.107
1.0	521	337	367	3.20	0.079	0.236
1.5	540	356	340	3.06	0.331	0.324
2.0	505	383	320	2.96	0.461	0.307
2.5	424	405	316	2.88	0.481	0.164

表4.1 弾性支持された3層剪断型構造物に対する加速度応答スペクトル値と刺激モードベクトルの成分和（最大応力度比 $\bar{\gamma}=0.8$ ）

h_i : 本論文で用いた方法による第*i*次減衰定数
 h_i^* : 複素固有値解析による第*i*次減衰定数

i	$\bar{\delta}=1.5\text{cm}$ $\bar{\gamma}=0.6$		$\bar{\delta}=1.5\text{cm}$ $\bar{\gamma}=0.8$		$\bar{\delta}=1.5\text{cm}$ $\bar{\gamma}=1.0$	
	h_i	h_i^*	h_i	h_i^*	h_i	h_i^*
1	0.01388	0.01388	0.01287	0.01287	0.01205	0.01205
2	0.05091	0.05091	0.05131	0.05131	0.05175	0.05174
3	0.08113	0.08111	0.08201	0.08197	0.08300	0.08293
4	0.1106	0.1105	0.1124	0.1123	0.1146	0.1144
5	0.1402	0.1400	0.1438	0.1435	0.1470	0.1468
6	0.1693	0.1692	0.1708	0.1712	0.1696	0.1703
7	0.1894	0.1898	0.1855	0.1858	0.1825	0.1827
8	0.2040	0.2042	0.2017	0.2018	0.2004	0.2005
9	0.2239	0.2240	0.2230	0.2231	0.2225	0.2225
10	0.2476	0.2477	0.2470	0.2471	0.2466	0.2466
11	0.2746	0.2746	0.2743	0.2743	0.2739	0.2740
12	0.09053	0.09044	0.09940	0.09928	0.1064	0.1063

表4.2 本論文で用いた方法による減衰定数と複素固有値解析による減衰定数の比較

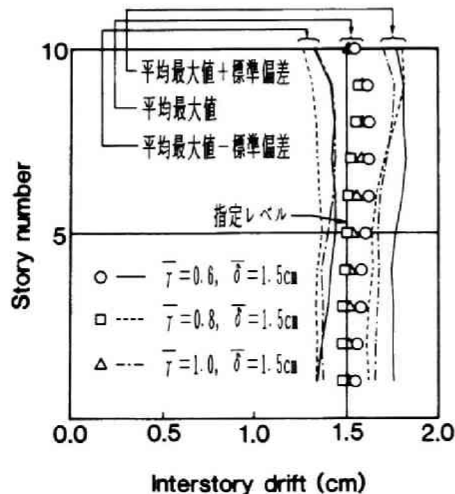


図4.17 弾性支持された10層剪断型構造物の人工地震波10波に対する時刻歴応答解析結果の最大層間相対変位の平均値分布と平均値±標準偏差値分布

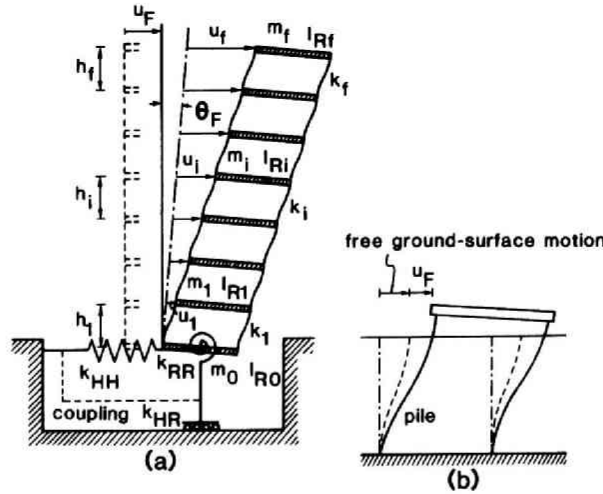


図4.18 弾性支持された剪断型構造物

弾性支持された剪断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計

ここでも前と同様の意味で、レベル1設計用地震動に対する地震時応答制約設計法を展開するための準備として、一次固有値に関する等号制約条件下の最適設計問題を簡潔に定式化し、その解表現のみ示す。ただし、支持ばね剛性の水平と回転の連成項が存在する点が前述の問題とは異なる。

図4.18に示すような弾性支持された f 層剪断型構造物モデルを扱う。支持ばねは、前述の通り杭剛性を代表するものとし、杭および地盤の力学的特性は前もって与えられているものとする。従って、 k_{HH} , k_{RR} , k_{HR} は、指定値として扱う。下から第 i 番目の床を第 i 床と呼ぶ。第 $(i+1)$ 床の集中質量およびその重心周りの回転慣性を m_i , I_{Ri} で表わし、第 i 層階高を h_i で表わす。 m_i , I_{Ri} , h_i は最適化の過程において変化しないものとする。

第 i 床と第 $(i+1)$ 床の相対変位に関する第 i 層の構造要素の剛性を k_i で表わす。ここでは、集合 $\{k_1 \dots k_f\}$ を設計変数とし、ベクトル \mathbf{k} で表わし、“設計 \mathbf{k} ”と呼ぶ。質量行列および基礎版の水平移動、回転に関する剛性が指定された弾性支持剪断型構造物の非減衰一次固有振動数および一次固有値は \mathbf{k} の関数である。従って、それぞれ $\omega_1(\mathbf{k})$, $\Omega_1(\mathbf{k})$ と表示する。

構造要素の評価関数（全コスト）は次式で表現できるものとする。

$$w = \mathbf{b}^T \mathbf{k} \quad (4.18)$$

ここで、 $\mathbf{b}^T = \{\beta_1^2 \dots \beta_f^2\}$ であり、 β_i は k_i に重み付けされる重み係数（コスト係数）の平方根を表わす。また、設計 \mathbf{k} の構造物の一次固有値はRayleigh商を用いて次のように表現できる。

$$\Omega_1(\mathbf{k}) = \min_{\phi} \frac{\phi^T [\mathbf{K}_B(\mathbf{k}) + \mathbf{K}_F(k_{HH}, k_{RR}, k_{HR})] \phi}{\phi^T \mathbf{M} \phi} \quad (4.19)$$

ここで $\mathbf{K}_B(\mathbf{k})$, $\mathbf{K}_F(k_{HH}, k_{RR}, k_{HR})$, \mathbf{M} , ϕ は、それぞれ、上部剪断型構造物の剛性行列、基礎の剛性行列、質量行列、および任意のモードベクトルである。ただし、 $\mathbf{K}_F(k_{HH}, k_{RR}, k_{HR})$ は、(2.2)式の $\mathbf{K}_F(k_H, k_R)$ の非対角項に k_{HR} を組み込んだ行列である。

一次固有値の指定値を Ω_a で表わす。ここで次のような最適設計問題を考える。

[問題 ODSBB]

($\mathbf{b}, \mathbf{M}, k_{HH}, k_{RR}, k_{HR}$) の指定された弾性支持剪断型構造物について、非減衰一次固有値制約条件

$$\Omega_1(\mathbf{k}) = \Omega_a \quad (4.20)$$

を満足し、(4.18) 式で表わされる w を最小化する \mathbf{k} を見いだせ。

上記の問題で、水平移動と回転の連成項 k_{HR} を考慮しない場合の大域最適性の必要十分条件および閉形表現の解は、中村、竹脇 (1985) により既に導かれている。連成項を考慮した場合もほぼ同様にして導くことができる。その層間剛性の解表現のみ示すと以下のようになる。

$$k_j = \frac{\Omega_a}{\beta_j} \sum_{i=j}^f m_i (U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{k=1}^i \beta_k) \quad (4.21)$$

ここで U_F^*, Θ_F^* は次の量を表わす。

$$U_F^* = \frac{D_2 D_5 - D_3 D_4}{D_1 D_4 - D_2^2}, \quad \Theta_F^* = \frac{D_2 D_3 - D_1 D_5}{D_1 D_4 - D_2^2} \quad (4.22)$$

また $D_1 \sim D_5$ は、次式で定義される。

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{i=0}^f m_i - \frac{k_{HH}}{\Omega_a}, & D_2 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i - \frac{k_{HR}}{\Omega_a}, & D_3 &= \sum_{i=1}^f m_i \sum_{j=1}^i \beta_j \\ D_4 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^f I_{Ri} - \frac{k_{RR}}{\Omega_a}, & D_5 &= \sum_{i=1}^f m_i H_i \sum_{j=1}^i \beta_j \end{aligned} \quad (4.23)$$

指定平均最大層間相対変位分布に対する地震時応答制約設計

設計用変位応答スペクトルを $S_D(T; h)$ で表わすことにすれば、弾性支持された剪断型構造物のロックイン成分を含まない第 i 床と第 $(i+1)$ 床の相対変位の地震時平均最大層間相対変位は SRSS 評価法により次のように評価できる。

$$\delta_{jmax} = \sqrt{\sum_{r=1}^N \left\{ \nu^{(r)} \left(\Phi_j^{(r)} - \Phi_{j-1}^{(r)} \right) S_D(T_r; h^{(r)}) \right\}^2} \quad (4.24)$$

ここで、 $T_r, h^{(r)}, \nu^{(r)}, \Phi_j^{(r)}, N$ はそれぞれ、非減衰 r 次固有周期、 r 次減衰定数、 r 次刺激係数、 r 次固有ベクトルの第 j 成分および SRSS 評価法で採用されるモードの数を表わす。ここでは、運動方程式のモード方程式への分解過程において連成項 (非対角項) を無視することにより非比例減衰系の各次の減衰定数を近似的に評価する。

杭群の剛性係数 k_{HH}, k_{RR}, k_{HR} に対応する杭群の減衰係数を c_{HH}, c_{RR}, c_{HR} で表わす。ここで次のような問題を考える。

[問題 RCDCS]

非減少関数で表現される変位応答スペクトル (MA スペクトル) を有する設計用地震外乱 (レベル 1) を受ける質量行列 M および $k_{HH}, k_{RR}, k_{HR}, c_{HH}, c_{RR}, c_{HR}$ の指定された剪断型建築構造物について、次式で与えられる層間相対変位の最大値分布を示す T_a, b, k の集合を見いだせ。

$$\delta_{jmax}(T_a, b) = \bar{\delta}_j \quad (j = 1, \dots, f) \quad (4.25)$$

[問題 RCDCS] の解法手順を以下に示す。

(1) 一次固有値の決定

[Step A-1] 重み係数の平方根として $\beta_i^{(1)} = 1.0 (i = 1, \dots, f)$ を採用する。

[Step A-2] (4.21) 式の設定解公式を用いて設計解を求め、SRSS 評価法により第一層の最大層間相対変位を求める。

[Step A-3] Step A-2 で求められる第一層の最大層間相対変位が指定値 $\bar{\delta}_1$ となる一次固有値を求める。

(2) 平均最大層間相対変位の制約手順

[Step B-1] Step A で求めた一次固有値の下で、 $\beta_i^{(p1)}$ に対応する設計解を求め、SRSS 評価法により各層の最大層間相対変位 $\delta_i^{(p1)}$ を求める。

[Step B-2] 新しい重み係数の平方根を次式により求める。

$$(\beta_i^{(p1+1)}) = (\bar{\delta}_i / \delta_i^{(p1)}) (\beta_i^{(p1)}) \quad (4.26)$$

[Step B-3] $\beta_i^{(p1+1)}$ を新しい重み係数の平方根として Step B-1 に戻る。

ただし、 $p1$ は繰り返し回数を表わす。Step A-2~B-3 の操作を所要の精度が満たされるまで繰り返す。

例題

10,15,20,30 層構造物の例題を示す。各層床の集中質量は $m_0 = 75.0(\text{ton}), m_1 \sim m_f = 45.0(\text{ton})$ 、各層床の回転慣性は $I_{R0} = 4.0 \times 10^6(\text{ton} \cdot \text{cm}^2), I_{R1} \sim I_{Rf} = 2.4 \times 10^6(\text{ton} \cdot \text{cm}^2)$ である。階高は等階高とし、 $h_1 \sim h_f = 350.0(\text{cm})$ とする。

設計用応答スペクトルとして、Mostaghel and Ahmadi(1979) が提案する地盤特性依存型のスペクトルを採用する。ここでは、地盤の種類として 3 種類を考え、地盤の卓越周期 $T_c = 0.4(s), T_c = 0.6(s), T_c = 0.8(s)$ のものを各々、第 1、第 2、第 3 種地盤と呼ぶ。基礎版の水平移動および回転に関する剛性および減衰は、杭と地盤の動的相互作用によるものとし、Novak and Sharnouby(1983) による評価法を採用する。ここでは、第 1 種地盤 ~ 第 3 種地盤の横波速度として $V_s^1 = 200(\text{m/s}), V_s^2 = 133(\text{m/s}), V_s^3 = 100(\text{m/s})$ を考え、 E_{pile}/G_{soil} として各々 354, 800, 1413 を仮定した。また地盤は、均質等方性体と仮定し、ポアソン比 $\nu = 0.40, x_r = 4.0(\text{m})$ 、杭の名目細長比 = 33.3 とした。さらに杭は支持杭を仮定した。各地盤に対する杭群の剛性係数、減衰係数を表 4.3 に示す。

参考のため、上記の杭の減衰を採用したときのスウェイおよびロッキングに関する減衰定数を表 4.4 に示す。減衰行列は、上部構造物に対する減衰行列と、杭の減衰を表わす行列を重ね合わせたものとした。尚、上部構造物の減衰行列は、基礎固定時の一次の減衰定数を 2% として剛性比例型のものを採用した。

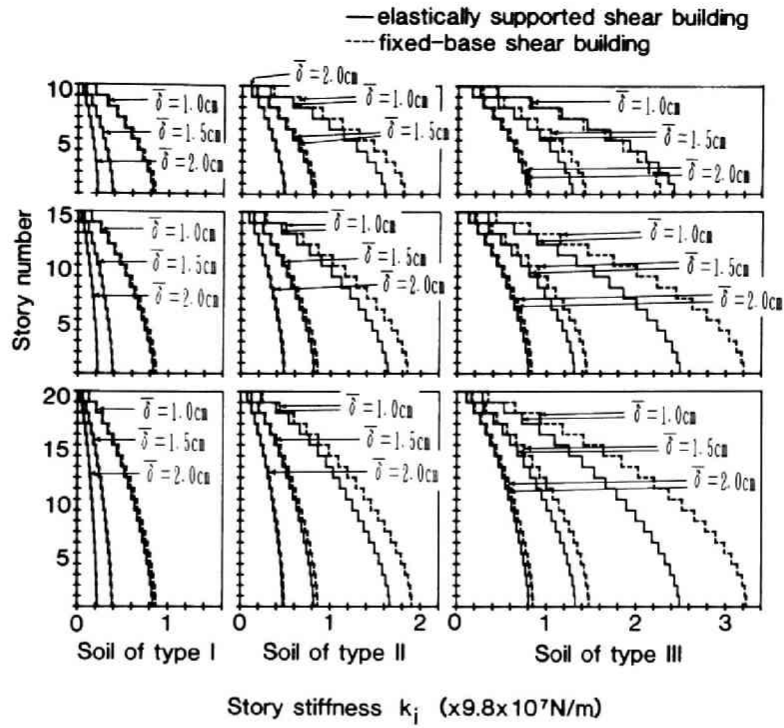


図4.19 地震時応答制約設計された弾性支持剪断型構造物および基礎固定剪断型構造物の層間剛性分布

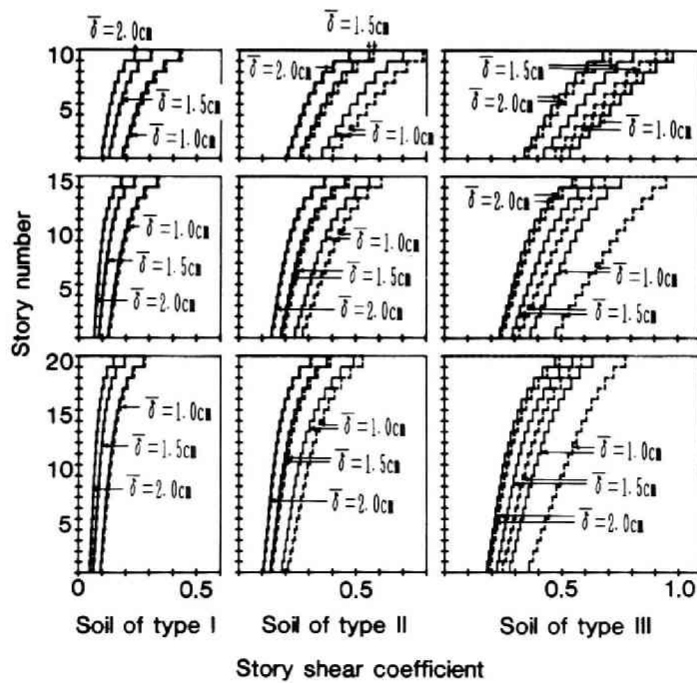


図4.20 地震時応答制約設計された弾性支持剪断型構造物および基礎固定剪断型構造物の層剪断力係数分布

	Soil of type I ($T_c=0.4\text{sec}$)	Soil of type II ($T_c=0.6\text{sec}$)	Soil of type III ($T_c=0.8\text{sec}$)
$\sum k_x$ (N/m) (=k _{HH})	1.414E09	7.756E08	3.987E08
$\sum c_x$ (N·sec/m) (=c _{HH})	1.016E07	8.536E06	5.994E06
$\sum (k_\psi+k_z x_r^2)$ (N·m/rad) (=k _{RR})	8.392E10	6.581E10	5.586E10
$\sum (c_\psi+c_z x_r^2)$ (N·m·sec/rad) (=c _{RR})	3.313E08	2.640E08	1.539E08
$\sum k_c$ (N/rad) (=k _{HR})	-1.716E09	-1.171E09	-8.040E08
$\sum c_c$ (N·sec/rad) (=c _{HR})	-7.252E06	-7.709E06	-7.254E06

表4.3 杭の剛性係数および減衰係数

		f=10	f=15	f=20	f=30
Soil of type I	swaying	18.6	15.6	13.7	11.3
	rocking	3.9	2.2	1.4	0.79
Soil of type II	swaying	21.2	17.7	15.5	12.8
	rocking	3.5	2.0	1.3	0.71
Soil of type III	swaying	20.7	17.3	15.2	12.6
	rocking	2.2	1.2	0.82	0.45

(%)

表4.4 スウェイとロッキングに関する減衰定数

i	Soil of type I		Soil of type II		Soil of type III	
	h_i	h_i^*	h_i	h_i^*	h_i	h_i^*
1	0.0181	0.0181	0.0158	0.0158	0.0132	0.0132
2	0.0512	0.0512	0.0510	0.0510	0.0505	0.0505
3	0.0822	0.0822	0.0814	0.0814	0.0804	0.0804
4	0.113	0.113	0.112	0.112	0.110	0.110
5	0.143	0.143	0.141	0.141	0.139	0.139
6	0.172	0.172	0.170	0.170	0.168	0.168
7	0.201	0.201	0.199	0.199	0.197	0.197
8	0.229	0.229	0.227	0.227	0.225	0.225
9	0.256	0.256	0.255	0.255	0.253	0.253
10	0.283	0.283	0.282	0.282	0.281	0.281
11	0.310	0.310	0.309	0.309	0.309	0.308
12	0.337	0.337	0.336	0.336	0.337	0.336
13	0.363	0.363	0.362	0.362	0.364	0.363
14	0.389	0.389	0.388	0.388	0.392	0.390
15	0.415	0.415	0.414	0.414	0.420	0.417
16	0.442	0.442	0.440	0.440	0.448	0.445
17	0.468	0.468	0.467	0.467	0.476	0.474
18	0.495	0.495	0.494	0.494	0.501	0.506
19	0.524	0.524	0.522	0.522	0.523	0.541
20	0.554	0.554	0.553	0.553	0.544	0.544
21	0.398	0.358	0.588	0.611	0.567	0.566
22	0.464	0.508	0.378	0.357	0.309	0.307

h_i : i th damping ratio adopted in the proposed method

h_i^* : i th damping ratio due to complex eigenvalue analysis

表4.5 本論文で用いた方法による減衰定数と複素固有値解析による減衰定数の比較

図 4.19,20 に、1～3 種地盤の 10,15,20 層の剪断型建築構造物について、層間相対変位の最大値の指定値を $\bar{\delta} = 1.0, 1.5, 2.0(cm)$ とした時の層間剛性分布および層剪断力係数分布を示す。Mostaghel and Ahmadi の設計用速度応答スペクトルは、地動加速度の最大値を一定にした時、地盤の卓越周期が長くなる程、速度一定領域における速度応答スペクトルの値が大きくなるという特性を有している。その結果、層間相対変位の指定値が等しい設計については、層間剛性分布、層剪断力係数分布とも 3 種地盤に対するものが最も大きく、次いで 2 種地盤、1 種地盤の順となる。図 4.19,20 はこのことを端的に表わしている。

次に、弾性支持された場合と固定基礎を有する場合の比較を行なう。固定基礎を有する剪断型構造物の地震時応答変位制約設計法は、Nakamura and Yamane(1986)により既に展開されている。その理論において、本論文で採用している地盤特性依存型の設計用スペクトルを用いた場合の $\bar{\delta} = 1.0, 1.5, 2.0(cm)$ に対応する層間剛性分布、層剪断力係数分布を図 4.19,20 に破線で示す。図 4.19 より、3 種地盤における 10 層構造物の $\bar{\delta} = 1.0(cm)$ の場合を除いて、同一の層間相対変位の指定値に対しては、弾性支持された構造物の剛性は、固定基礎を有する場合よりも小さくなるといえる。同様に、図 4.20 より 3 種地盤における 10 層構造物の $\bar{\delta} = 1.0(cm)$ の場合を除いて、同一の層間相対変位の指定値に対しては、弾性支持された構造物の層剪断力係数は、固定基礎を有する場合よりも小さくなるといえる。

表 4.5 は、20 層剪断型構造物の層間相対変位の最大値の指定値を $\bar{\delta} = 1.5(cm)$ とした場合について、本論文で求めた減衰定数と複素固有値解析により求めた減衰定数の比較を示す。表 4.5 より、本論文の手法による連成系の減衰定数は、かなりの次数まで複素固有値解析による減衰定数と一致するといえる。

図 4.21 は、1～3 種地盤に対して $\bar{\delta} = 1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 2.5(cm)$ の条件下で設計された剪断型構造物の一次固有周期-ベースシャー係数関係曲線を示す。また、図 4.19 の右側には、指定層間相対変位-ベースシャー係数関係曲線も併せて示す。

一次固有周期-ベースシャー係数関係曲線を双曲線で近似し、最小 2 乗法を用いてその係数を求めると、各々の地盤に対して次のように表現される。

$$c_B = \frac{0.213}{T_1} \quad \text{for soil of type I} \quad (4.27)$$

$$c_B = \frac{0.323}{T_1} \quad \text{for soil of type II} \quad (4.28)$$

$$c_B = \frac{0.439}{T_1} \quad \text{for soil of type III} \quad (4.29)$$

図 4.22 は、1～3 種地盤に対して $\bar{\delta} = 1.5(cm)$ の条件下で設計した 10,15,20,30 層剪断型構造物の重み係数分布を示す。図から、同一の指定層間相対変位レベルを有する設計については、層方向の重み係数分布のばらつきは、1 種地盤の場合が最も小さく、3 種地盤において最も大きなばらつきを示すことがわかる。

時刻歴応答解析による検証

本設計法の妥当性を例証するために、1～3 種地盤に対する各 4 個計 12 個のモデルについて時刻歴応答解析を実施した。1～3 種地盤に対する各 10 個の異なる人工地震波を 4-1 節で示したように作成した。

図 4.23 に、 $\bar{\delta} = 1.5(cm)$ の条件下で設計した 1～3 種地盤に対する 10,15,20,30 層の各 4 個の剪断型構造物に、上記の各 10 個の人工地震波を入力し、Newmark- β 法を用いて時刻歴解析した時の平均最大層間相対変位分布を ○ 印で示す。本解析において、系全体の減衰行列は、上部剪断型構造物の減衰行列に、杭の減衰係数を重ね合わせたものを採用した。そして、行列によって表現される運動方程式を直接数値積分することにより

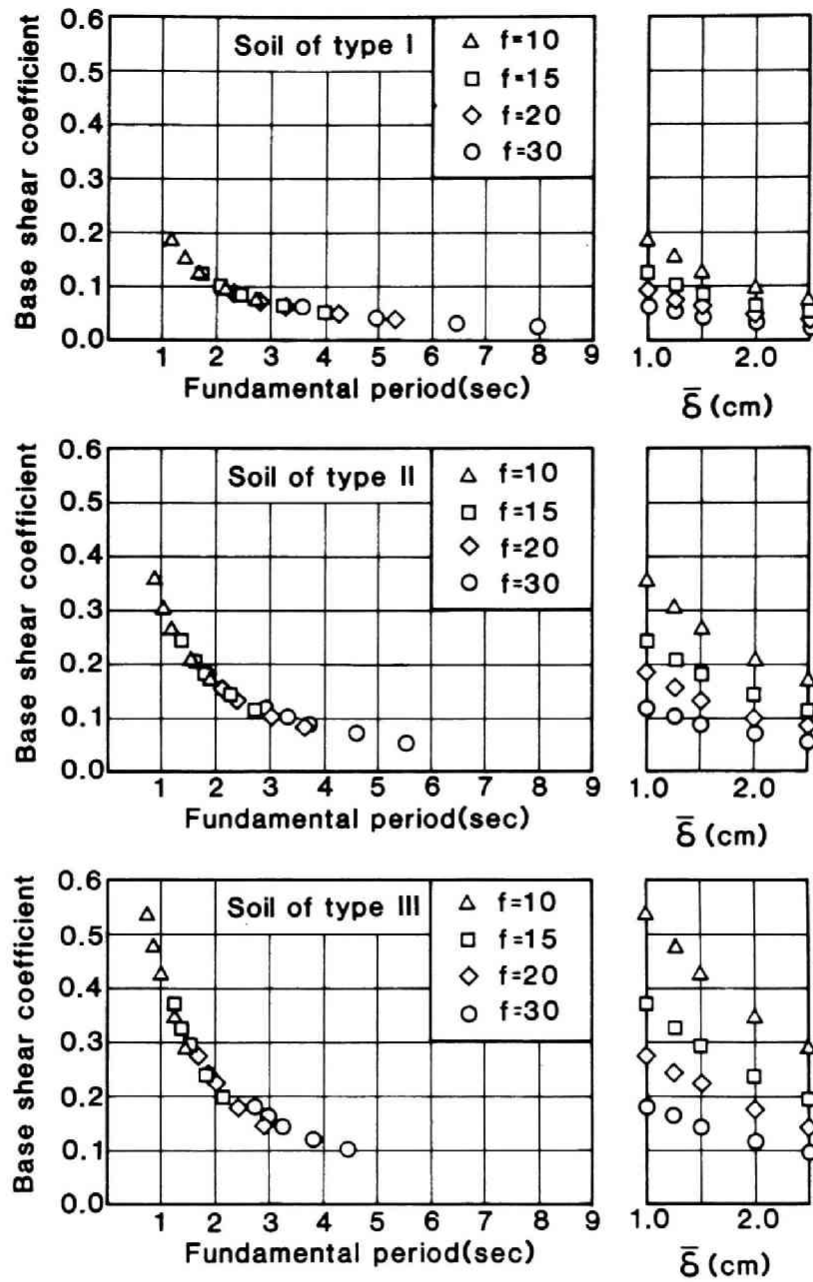


図4.21 各地盤に対する一次固有周期－ベースシヤ－係数関係

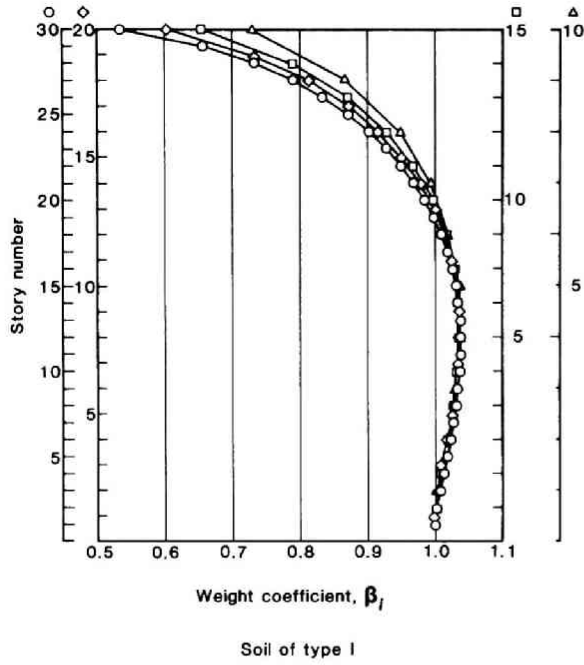


図4.22(a) 各地盤に対する重み係数分布 (1種地盤)

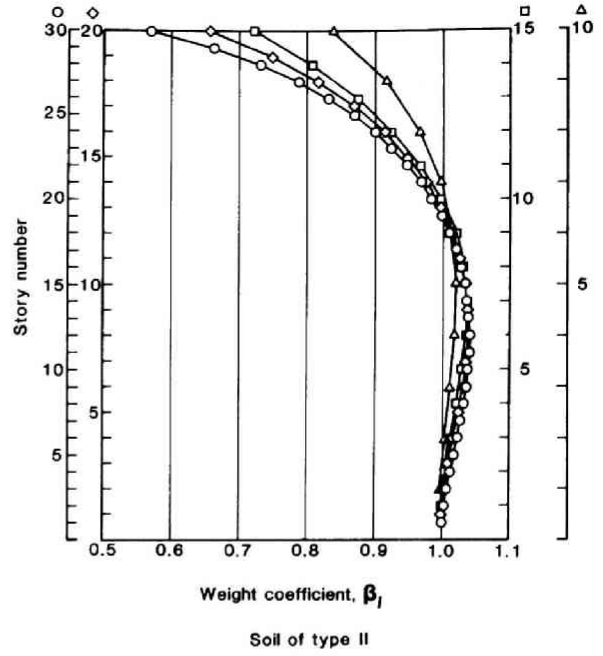


図4.22(b) 各地盤に対する重み係数分布 (2種地盤)

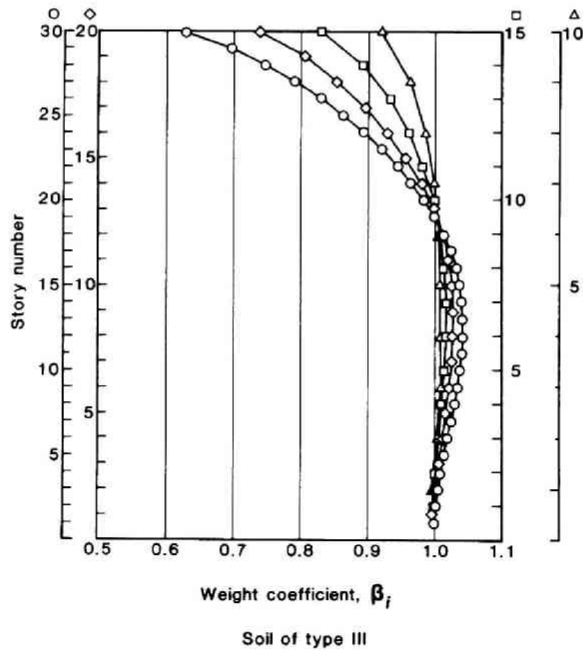


図4.22(c) 各地盤に対する重み係数分布 (3種地盤)

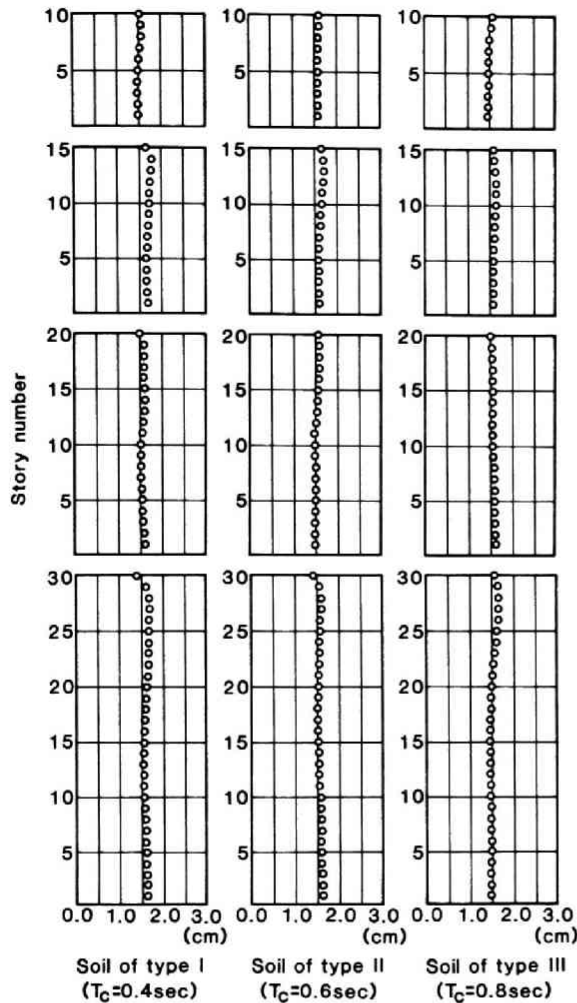


図4.23 人工地震波各10波に対する平均最大層間相対変位分布

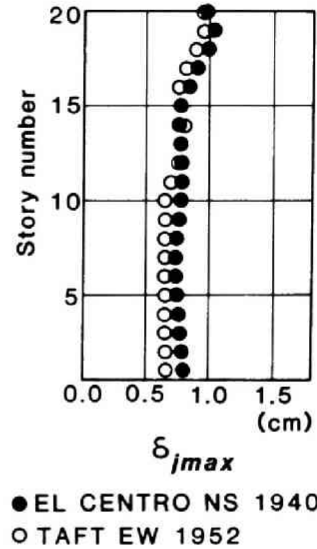


図4.24 EL CENTRO NS 1940波とTAFT EW 1952波に対する最大層間相対変位分布

応答を求めた。図4.23より、1～3種地盤の10,15,20,30層のすべてについて、応答値は指定値を少し上回っているものの、かなりよく一致していることがわかる。

次に、本設計法は記録地震波に対しても有効な設計法であることを示すために、EL CENTRO NS 1940波とTAFT EW 1952波を入力した時の時刻歴解析を実施した。図4.24は、1種地盤に対して $\bar{\delta} = 1.5(\text{cm})$ の条件下で設計した20層剪断型構造物に、減衰定数2%に対する速度応答スペクトルが、1種地盤の設計用速度応答スペクトルに内接するように増幅した上記2波の記録地震波を入力して時刻歴応答解析を行なったときの層間相対変位の最大値分布を示す。いずれの場合も1.5cm以下の応答を示しており、かつ層方向にほぼ様な分布となっていることがわかる。従って、本設計法により設計された剪断型構造物は、設計用速度応答スペクトルに内接する速度応答スペクトルを有する記録地震波に対して指定値以下の応答を示すといえる。

4-5 結論

本章では、二章において展開した振動数非依存型の弾性ばねで支持された剪断型構造物モデルに対する一次固有周期制約条件下の最適設計理論を用いて、最適設計問題における重み係数を応答調整パラメータと見なすことにより、レベル1設計用地震動に対する地震時応答制約設計法を展開した。本章において得られた主な成果は以下の通りである。

4-2 節

- (1) 著者らが既に閉形表現で導いている、指定された弾性ばねで支持された剪断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計解を有効に利用して、その重み係数を応答調整パラメータと見なすことにより、基礎弾性支持の場合の地震時応答制約設計法を展開した。
- (2) 地震時応答制約設計法により設計された構造物は、設計用応答スペクトル（NH スペクトル）に適合するように作成した人工地震波に対して、その最大値の平均がほぼ指定値通りの応答を示すことを時刻歴応答解析により例証した。

4-3 節

- (1) 2-2 節における重み係数を応答調整パラメータとみなすことにより、指定した杭の地震時最大応力度比（応答応力度の許容応力度に対する比）および指定した剪断型構造物の地震時最大層間相対変位を呈する剪断型構造物—杭系の杭断面積および層間剛性分布を見いだす地震時応答制約設計法を展開した。
- (2) 場所打ちコンクリート杭に対して本地震時応答制約設計法を用いた設計例を示し、本設計法の有効性および妥当性を示した。
- (3) 設計用速度応答スペクトル（NH スペクトル）に適合するように作成した人工地震波 10 波に対して時刻歴応答解析を実施し、本設計法の妥当性を例証した。また、複素固有値解析による減衰定数と本論文で採用した方法による減衰定数を比較し、両者はかなりよく一致することを示した。

また、場所打ちコンクリート杭に対して本地震時弾性応答制約設計法を適用した例題解析から、以下のようない知見を得た。

- (1) 同一の最大層間相対変位を指定した場合には、低層構造物では連成系モデルの方が基礎固定モデルよりも、高層構造物では基礎固定モデルの方が連成系モデルよりも大きな層間剛性を必要とすることを明らかにした。
- (2) 最大応力度比の指定値を一定とし、最大層間相対変位の指定値を変化させた場合には、3 層構造物においてベースシャー係数の上限値が存在することを示し、その原因を明らかにした。
- (3) 剪断型構造物の剛性分布が同一であれば、スウェイおよびロッキングのばね剛性が少し変動しても応答層間相対変位の最大値にはあまり影響しないが、杭の最大応力度比には大きく影響することを明らかにした。

4-4 節

- (1) 杭支持された剪断型構造物を、相関効果を有する水平および回転の二種類の弾性ばねで支持された剪断型構造物モデルに置換する方法を示し、地盤特性依存型の設計用応答スペクトル (MA スペクトル) に対して層間相対変位の平均最大値を制約した場合の地震時応答制約設計法を展開した。
- (2) 上記の問題に対する設計例を示し、地盤条件が上部構造物の設計に及ぼす影響を明らかにした。
- (3) 時刻歴応答解析により本設計法の妥当性を例証した。

文献

- Cakmak, A.S., A.M. Abdel-Ghaffar and C.A. Brebbia (eds.) (1982): Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.I, II: *Proc. of the Conf. on Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, A.A.Balkema.
- Gasparini, D.A. and E.H. Vanmarcke (1976): *Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra-SIMQKE*, A computer program distributed by NISEE/ Computer Applications, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Luco, J.E.(1980): *Linear Soil-structure Interaction*. UCRL-15272, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California.
- Moore, P.J.(ed.)(1985): *Analysis and Design of Foundations for Vibration*, A.A.Balkema.
- Mostaghel, N. and G. Ahmadi (1979): Smooth Site Dependent Spectra, *Nuclear Engineering and Design*, Vol.53, pp263-300.
- 中村 恒善、中村 豊 (1982): 偏心のある構造物モデルの 1 次固有周期制約条件下の最適設計、日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北)、pp801-802.
- 中村 恒善、中村 豊 (1986): 2 軸偏心せん断型構造物の地震時弾性応答制約設計法、日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道)、pp731-732.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1981): ロッキングを考慮した建築ラーメンの一次固有周期制約条件下の最適設計、日本建築学会大会学術講演梗概集、構造、pp833-834.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1983): 弾性支持された建築ラーメンの一次固有周期及び最小曲げ剛性制約条件下の最適設計、同上、構造、pp1043-1044.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1985): 弾性支持されたせん断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計、構造工学論文集、Vol.31B, pp93-102.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1986): 弾性支持されたせん断型構造物の地震時応答制約設計法、第 7 回日本地震工学シンポジウム論文集、pp1735-1740.
- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1989a): Earthquake-response Constrained Design of Pile-supported Elastic Shear Buildings for Site-dependent Response Spectra, *Proc. of 9th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol.V, pp1043-1048.
- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1989b): Optimal Elastic Structures with Frequency-dependent Elastic Supports, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.25, No.5, pp539-551.

- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1989c): Ductility Design via Optimum Design of Nonlinear Elastic Frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.115, No.3, pp608-625.
- 中村 恒善, 竹脇 出, 島野 幸弘 (1988): 弾性剪断型構造物—杭系の最適設計及び地震時応答制約設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 I, pp857-858.
- 中村 恒善, 竹脇 出, 島野 幸弘 (1989): 平面弾性剪断型構造物—杭系の地震時応答制約設計, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 403 号, pp125-137.
- 中村 恒善, 山根 尚志 (1981): 一次固有周期制約条件下の最適設計解とそれに基づく地震時応答変位の最大値の制御, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), pp1041-1042.
- Nakamura, Tsuneyoshi and T. Yamane(1986): Optimum Design and Earthquake-response Constrained Design of Elastic Shear Buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, pp797-815.
- Newmark, N.M. and W.J. Hall (1982): *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA.
- Novak, M. and B.E. Sharnouby (1983): Stiffness Constants of Single Piles, *J. Geotech. Eng.*, ASCE, Vol.109, No.7, pp961-974.
- 日本道路協会 (1980): 道路橋示方書・同解説 IV 下部構造編.
- 日本建築センター (1984): 地震力に対する建築物の基礎の設計指針.
- 日本建築学会 (1982): 鉄筋コンクリート構造計算基準・同解説.
- 日本建築学会 (1987): 地震荷重—その現状と将来の展望.
- Singh, M.P. (1980): Seismic Response by SRSS for Nonproportional Damping, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.106, EM6, pp1405-1419.
- Thomson, W.T., T. Calkins and P. Caravani (1974): A Numerical Study of Damping, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.3, pp97-103.
- Waas, G. and H.G. Hartmann (1984): Seismic Analysis of Pile Foundations Including Pile-soil-pile Interaction, *Proc. of 8WCEE*, Vol.V, pp55-62.
- Wolf, J.P.(1985): *Dynamic Soil-structure Interaction*, Prentice-Hall.
- Wolf, J.P. and G.A. von Arx (1978): Impedance Function of a Group of Vertical Piles, *Proc. of the ASCE Geotech. Eng. Div. Specialty Conf. on Earthquake Eng. and Soil Dynamics*, Vol.II, pp1024-1041.

五章 振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物の地震時弾性応答制約設計

地盤と構造物の動的相互作用に関する研究の急速な進展に伴い、如何に複雑な基礎形状を有する構造物の地震時における挙動も、適当なモデル化によって相当の精度で予測可能な状況となりつつある(たとえば Luco, 1980; Wolf, 1985, 1988; 日本建築学会, 1987)。しかしながら、地盤と構造物の動的相互作用に関する研究のほとんど全ては、その挙動解析に関するものであったといってもよい。一方、強震レベルの設計用地震動に対して指定した平均最大局所応答分布を示す設計(部材剛性集合)を求める「直接的な理論」は、弾性支持された弾性剪断型構造物に対してさえも、これまでに著者らの論文(中村、竹脇、1986; Nakamura and Takewaki, 1989a) 以外には提示されていない。ここでいう「直接的な理論」とは、設計感度解析法等による膨大な回数の設計変更手続きによらずに指定した応答分布を示す構造物の剛性分布を求める理論を意味する。

本章の目的は、地盤と基礎の動的相互作用をモデル化した振動数依存型の複素剛性ばねで支持された剪断型構造物の、強震時弾性応答制約設計法を展開することにある。その際に、動的サブストラクチャー法を用いる。また、Nakamura and Takewaki(1989b) が振動数依存型構造物と振動数非依存型構造物に対して導き証明した定理(3-3節)を用いる。

本章で展開する理論は次のような意義を有している。(i) 一般に振動数依存型剛性部材を有する構造物の地震波に対する応答を予測するには、周波数領域での応答解析を必要とする。この応答解析を設計用地震動に適合する複数個の地震波に対して実施し、その情報に基づいて設計変更を行なうことは極めて非効率的である。それに対して、ここでは、対応する振動数非依存型剛性ばねモデルを用いた応答予測法を提案し、前述の方法よりも格段に効率的かつ組織的な設計法を提案している。(ii) 如何に複雑な基礎形状を有する構造物においても、波動論を用いれば、その動的相互作用の中の inertial interaction は振動数依存型の複素剛性ばねとして算出される。ここでは、一般的な複素剛性ばねモデルに対する理論を展開しているため、本理論は如何に複雑な基礎形状を有する構造物に対しても適用可能である。

5-1 複素剛性ばねとしての地盤の剛性の表現

地盤と基礎の動的相互作用を簡潔に表現するモデルとして振動数依存型の複素剛性ばねがある。基礎のある点(たとえば重心)の水平移動および回転に関する複素剛性を、各々 $K_H(\omega)$ 、 $K_R(\omega)$ で表わせば、それらは次式で与えられる。

$$K_H(\omega) = k_H(\omega) + i\omega c_H(\omega) \quad (5.1a)$$

$$K_R(\omega) = k_R(\omega) + i\omega c_R(\omega) \quad (5.1b)$$

ここで i は虚数単位を表わし、 ω は excitation frequency を表わす。(5.1) 式の表現は、半無限弾性地盤上あるいは層地盤上の剛基礎に限らず、地盤内に埋設された剛な基礎構造物についても適用可能である。また、剛な基礎版が杭基礎で支持されている場合についても適用可能である。 $k_H(\omega)$ 、 $k_R(\omega)$ 、 $c_H(\omega)$ 、 $c_R(\omega)$ の表現は、数式表示されている必要はなく、数値的に求められていればよい。

5-2 地震時弾性応答制約設計問題

図5.1 のモデルに対する運動方程式の周波数領域における表現は次式で与えられる (Luco, 1980; 井口, 1985)。

$$\mathbf{S}(\omega)\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) \quad (5.2)$$

ここで、 $\mathbf{S}(\omega)$ 、 $\mathbf{U}(\omega)$ 、 $\mathbf{P}(\omega)$ は次のような行列あるいはベクトルである。

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} & -\omega^2 m_1 & -\omega^2 m_1 H_1 \\ & \vdots & \vdots \\ \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} & -\omega^2 m_i & -\omega^2 m_i H_i \\ & \vdots & \vdots \\ & -\omega^2 m_f & -\omega^2 m_f H_f \\ \text{Sym.} & K_H(\omega) - \omega^2 E_1 & -\omega^2 E_2 \\ & & K_R(\omega) - \omega^2 E_3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{U}(\omega)^T = \{U_1(\omega) \dots U_i(\omega) \dots U_f(\omega) \quad U_F(\omega) \quad \Theta_F(\omega)\} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{P}(\omega)^T = -S_H(\omega)\ddot{U}_g(\omega)\{m_1 \dots m_i \dots m_f \quad E_1 \quad E_2\} \quad (5.5)$$

ただし、 E_1, E_2, E_3, H_i は次の量を表わす。

$$E_1 = \sum_{i=1}^f m_i, \quad E_2 = \sum_{i=1}^f m_i H_i$$

$$E_3 = \sum_{i=1}^f m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^f I_{Ri}, \quad H_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad (5.6)$$

また、 $\mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{M}$ は剪断型構造物の基礎固定時の剛性行列、減衰行列、質量行列を表わし、 $S_H(\omega)$ は自由地表面上の水平地動と基礎重心水平変位との関係を表わす周波数伝達関数、 $\ddot{U}_g(\omega)$ は自由地表面上の水平加速度波形の Fourier 変換、 $U_1(\omega), \dots, U_f(\omega), U_F(\omega), \Theta_F(\omega)$ は応答変位の Fourier 変換を表わす。ここで、 $u_F(t)$ およびその Fourier 変換の $U_F(\omega)$ は、基礎と自由地表面の相対変位から、kinematic interaction による効果を取り除いた成分を表わすことに注意する必要がある。

ここでは、後に示す補助モデルと区別するために、図5.1 のモデルを新たに FD2 モデルと呼ぶことにする。図5.2(a) に示されるこの FD2 モデルを、自由地表面上において指定された設計用応答スペクトル (MA スペクトル) に適合する多数の人工地震波群 (レベル1) に対するその平均最大応答量の分布が指定された分布となるように設計しようとする。そこで、次のような問題を考える。

[問題 RCDFD]

指定された複素剛性ばね $K_H(\omega)$ 、 $K_R(\omega)$ で支持された弾性剪断型構造物が、自由地表面上において定義される設計用応答スペクトル (MA スペクトル) に適合する多数の人工地震波群 (レベル1) の作用を受ける時、最大層間相対変位制約条件

$$\delta_j = \bar{\delta}_j \quad (j = 1, \dots, f) \quad (5.7)$$

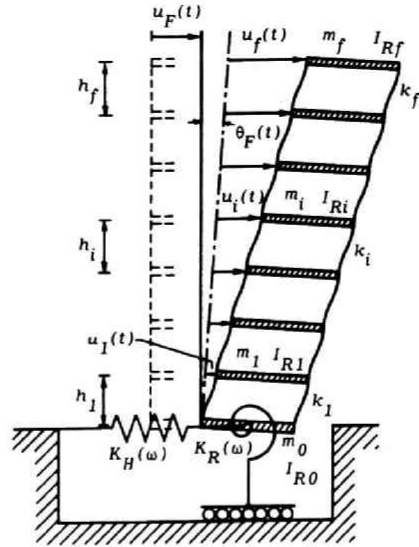


図5.1 振動数依存型剛性ばねで支持された剪断型構造物

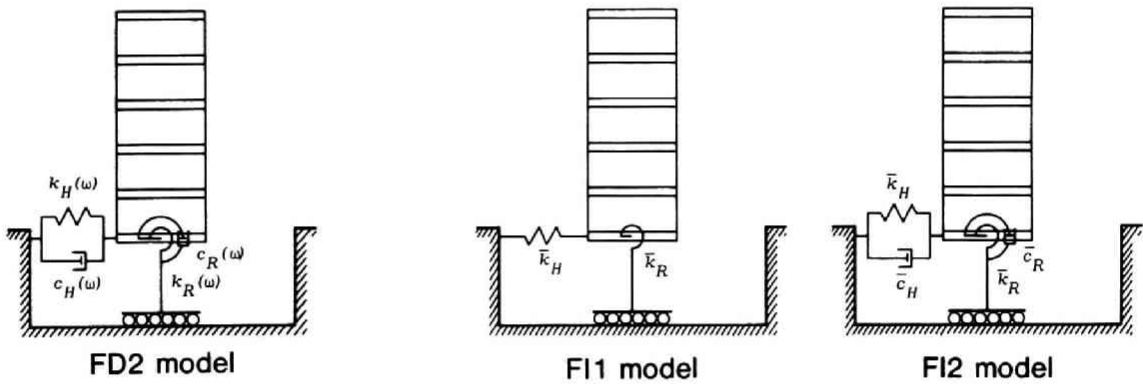


図5.2(a) 複素剛性ばねで支持された剪断型構造物モデル

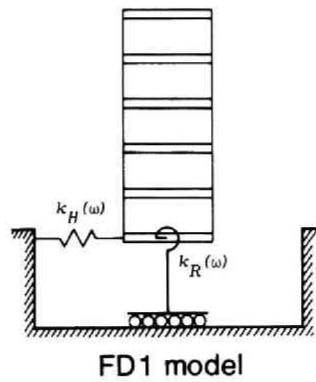


図5.2(b) 弾性支持された剪断型構造物の三種類の補助モデル

を満足する設計 $\mathbf{k} = \{k_1 \dots k_f\}$ を求めよ。

ここで、 $\bar{\delta}_j$ は、第 j 層最大層間相対変位の指定値を表わす。

5-3 振動数非依存型剛性ばねで支持された剪断型構造物の一次固有振動数制約条件下の最適設計

振動数依存型剛性を有するばねで支持された構造物の確定地震外乱に対する時刻歴応答を求めるには、周波数領域での応答解析が必要である。この周波数領域での応答解析は、特別な場合 (Lin and Wu, 1984) を除き数値的手法に頼らざるを得ない。この数値計算はかなりの演算時間を必要とするため、初期設計の段階で用いることはかなり困難である。また、設計用地震動を考えると、複数の地震波を考慮する必要があるため、各々の地震波に対してこのような応答解析を実施することは極めて非現実的である。そこで本章では、振動数依存型剛性ばねを、対応する振動数非依存型剛性ばねで近似表現し、振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物モデルにより振動数依存型剛性ばねで支持された構造物モデルの応答を近似評価する。振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物の地震時最大応答評価は、SRSS 評価法により実行することができる。

以下では上記の目標を達成するために、図 5.2(b) に示されるような三つの補助モデルを考える。 $\{k_H(\omega), k_R(\omega)\}$ で支持された設計 \mathbf{k} の構造物を設計 \mathbf{k} の FD1 モデル、 $\{k_H(\omega), k_R(\omega), c_H(\omega), c_R(\omega)\}$ で支持された設計 \mathbf{k} の構造物を設計 \mathbf{k} の FD2 モデルと呼び、 $\{\bar{k}_H, \bar{k}_R\}$ で支持された設計 \mathbf{k} の構造物を設計 \mathbf{k} の FI1 モデル、 $\{\bar{k}_H, \bar{k}_R, \bar{c}_H, \bar{c}_R\}$ で支持された設計 \mathbf{k} の構造物を設計 \mathbf{k} の FI2 モデルと呼ぶ。ただし、 $\bar{k}_H = k_H(\omega_a)$, $\bar{k}_R = k_R(\omega_a)$, $\bar{c}_H = c_H(\omega_a)$, $\bar{c}_R = c_R(\omega_a)$ である。FI2 モデルに対する地震時応答制約設計法を展開するために、まず次のような FI1 モデルに対する一次固有振動数制約条件下の最適設計問題を考える。

設計 \mathbf{k} の FI1 モデルについて、 ω_a を一次固有振動数として制約した時の次のような最適設計問題を考える。

[問題 ODSBA]

一次固有振動数制約条件

$$\omega_1(\mathbf{k}) = \omega_a \quad (5.8)$$

を満し、かつ評価関数

$$w = \sum_{i=1}^f \beta_i^2 k_i \quad (5.9)$$

を最小にする剛性集合 $\mathbf{k} = \{k_i\}$ を求めよ。

ここで $\omega_1(\mathbf{k})$ は、設計 \mathbf{k} の FI1 モデルの非減衰一次固有振動数である。また β_i は、第 i 層の層間剛性に対する重み係数の平方根を表わし、 $\omega_a^2 = \Omega_a$ とする。

[問題 ODSBA] に対する大域最適解は、中村、竹脇 (1985) により次のように導かれている。

$$k_j = \frac{\Omega_a}{\beta_j} \sum_{i=1}^j m_i (U_F^* + \Theta_F^* H_i + \sum_{r=1}^i \beta_r) \quad (5.10)$$

ここで、 U_F^* , Θ_F^* は次式で表わされる量である。

$$U_F^* = \frac{D_2 D_5 - D_3 D_4}{D_1 D_4 - D_2^2}, \quad \Theta_F^* = \frac{D_2 D_3 - D_1 D_5}{D_1 D_4 - D_2^2} \quad (5.11)$$

また、 $D_1 \sim D_5$ は次のような量である。

$$D_1 = \sum_{i=0}^f m_i - \frac{\bar{k}_H}{\Omega_a}, \quad D_2 = \sum_{i=1}^f m_i H_i, \quad D_3 = \sum_{i=1}^f m_i \sum_{j=1}^i \beta_j$$

$$D_4 = \sum_{i=1}^f m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^f I_{Ri} - \frac{\bar{k}_R}{\Omega_a}, \quad D_5 = \sum_{i=1}^f m_i H_i \sum_{j=1}^i \beta_j \quad (5.12)$$

5-4 FI2 モデルによる FD2 モデルの地震時弾性応答の平均最大値の近似的評価法

剪断型構造物 (FI2 モデル) の減衰行列は、基礎固定時の一次の減衰定数を指定した初期剛性比例型のものを採用する。スウェイばねおよびロッキングばねに対応する減衰係数としては、 $\bar{c}_H = c_H(\omega_a)$, $\bar{c}_R = c_R(\omega_a)$ を採用する。本論文では、連成系の減衰行列として、上述の基礎固定時の剪断型構造物の減衰行列に、スウェイ及びロッキングの減衰係数を重ね合わせたものを採用する。従って、本モデルは非比例減衰系となるため、一般には古典的基準座標を用いたモード分解を行なうことが不可能である。ここでは、モード分解を行う過程において、非対角項を無視するという近似的手法を用いることにより連成系の r 次減衰定数 $h^{(r)}$ を次式により評価する。

$$h^{(r)} = \frac{1}{2\omega_r} \frac{\Phi^{(r)T} \mathbf{C} \Phi^{(r)}}{\Phi^{(r)T} \mathbf{M} \Phi^{(r)}} \quad (5.13)$$

ここで、 ω_r , $\Phi^{(r)}$, \mathbf{C} は、それぞれ連成系 (FI2 モデル) の r 次非減衰固有円振動数、連成系 (FI2 モデル) の r 次非減衰固有ベクトル、連成系 (FI2 モデル) の減衰行列を表わす。この手法は、非比例減衰系を扱った初期の段階の研究 (たとえば Thomson, Calkins and Caravani, 1974) において用いられた手法である。本手法を用いることの妥当性については、中村と竹脇 (1986) が時刻歴応答解析結果との比較により明らかにしている。この減衰定数を用いて、FI2 モデルの地震時最大層間相対変位を従来の SRSS 評価法により求める。

5-5 地震時弾性応答制約設計を求める手順

前述したように本章では、振動数依存型剛性ばねを、対応する振動数非依存型剛性ばねで近似表現し、振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物モデルにより振動数依存型剛性ばねで支持された構造物モデルの応答を近似評価する。従って、一次固有振動数の変更の度に FI2 モデルの支持ばね剛性係数および減衰係数が変化するモデルを扱うことになる。支持ばね剛性係数および減衰係数が変化する場合の、FI2 モデルに対する地震時弾性応答制約設計を求める手順を以下に示す。

- (i) 全ての層において $\beta_j^{c1} = 1.0$ とする。また、初期値 T_a^{c1} (or $\omega_a^{c1}, \Omega_a^{c1}$) を仮定する。
- (ii) $\{\bar{k}_H = k_H(\omega_a^{c1}), \bar{k}_R = k_R(\omega_a^{c1}), \bar{c}_H = c_H(\omega_a^{c1}), \bar{c}_R = c_R(\omega_a^{c1})\}$ を求める。
- (iii) (5.10) 式を用いて T_a^{c1} に対する $\{k_j^{c1}\}$ を求める。
- (iv) 設計 $\{k_j^{c1}\}$ の FI1 モデルに対する固有値解析を行なう。
- (v) $\delta_{1max}^{c2} = \bar{\delta}_1$ となる $T_a^{c2}, \{k_j^{c2}\}$ を求める。また、設計 $\{k_j^{c2}\}$ の FI2 モデルに対する $\{\delta_{jmax}^{c2}\}$ を求める。
- (vi) もし $\epsilon = \max |(\delta_{jmax}^{c2}/\bar{\delta}_j) - 1|$ が指定値よりも小さければ、 $\{k_j^{c2}\}$ が近似解として採用される。

- (vii) もし(vi)が満足されない時は、 $\beta_j^{c2} = \beta_j^{c1}(\bar{\delta}_j/\delta_{jmax}^{c2})$ として(ii)から(vi)までの手続きを繰り返す。

ただし、 $c1, c2$ は繰り返し回数を表す。(iii)で求められた設計 $\{k_j^{c1}\}$ のFI1モデルが、 ω_a^{c1} を一次固有振動数として有するからといって、設計 $\{k_j^{c1}\}$ のFD1モデルが ω_a^{c1} を一次固有振動数として有するとは限らない(Nakamura and Takewaki, 1989b)。 $k_H(\omega), k_R(\omega)$ がともに正の非増加一価関数の場合には、両者のモデルは同一の一次固有振動数を有することが示せる(Nakamura and Takewaki, 1989b)。この性質は重要であり、一次モード成分が卓越する構造物においては、両者の対応関係はFD2モデルとFI2モデルの地震時応答評価の良好な対応を与えるといえる。 $k_H(\omega), k_R(\omega)$ の中の少なくとも一方が非増加一価関数でない場合においても、上記の方法は適用可能であるが、(iii)の段階において、設計 $\{k_j^{c1}\}$ のFI1モデルと設計 $\{k_j^{c1}\}$ のFD1モデルの一次固有振動数の対応関係を調べておく必要がある。その対応関係が崩れる場合には、上記の方法を変更する必要がある。

5-6 地震時弾性応答制約設計の例題

前節の設計法を用いて設計した、5,10,15層剪断型構造物の例題を示す。基礎は半無限弾性地盤上に置かれた剛基礎で $10m \times 10m$ の正方形とし、複素ばね剛性を評価する際は同一支配面積を有する半径 $r_o=5.64(m)$ の円形基礎として扱う。その複素ばね剛性としては、Veletsos and Verbic(1974)により提案されている次式を採用する。

$$K_H(\omega) = k_H(\omega) + i\omega c_H(\omega) = \frac{8Gr_o}{2-\nu} \left[K_{11} \left(\frac{\omega r_o}{V_s} \right) + i \frac{\omega r_o}{V_s} C_{11} \left(\frac{\omega r_o}{V_s} \right) \right] \quad (5.14a)$$

$$K_R(\omega) = k_R(\omega) + i\omega c_R(\omega) = \frac{8Gr_o^3}{3(1-\nu)} \left[K_{22} \left(\frac{\omega r_o}{V_s} \right) + i \frac{\omega r_o}{V_s} C_{22} \left(\frac{\omega r_o}{V_s} \right) \right] \quad (5.14b)$$

ここで、 G, V_s, ν, ρ は、それぞれ地盤の剪断弾性係数、剪断波速度、ポアソン比、地盤の密度を表わす。また、 $K_{11}(\cdot), K_{22}(\cdot), C_{11}(\cdot), C_{22}(\cdot)$ は、無次元関数で、Veletsos and Verbic(1974)によりその近似関数表現が示されている。各層床質量は $m_0=180(ton)$ 、 $m_1 \sim m_f=60(ton)$ 、各層床の回転慣性は $I_{R0} = 1.5 \times 10^7 (ton \cdot cm^2)$ 、 $I_{R1} \sim I_{Rf} = 5.0 \times 10^6 (ton \cdot cm^2)$ 、階高は $h_1 \sim h_f=350(cm)$ とする。

設計用速度応答スペクトルとして、4-1節に示すMostaghel and Ahmadi(1979)の提案する地盤特性依存型スペクトルを採用する。また、ここでは簡単のため、基礎の埋め込みがなく、SV波が鉛直下方から入射する場合を扱う。従って(5.5)式において、 $S_H(\omega) = 1$ の場合を扱うことになる。

ここでは、地盤の種類として3種類を考え、地盤の卓越周期 $T_c=0.4(s)$ (剪断波速度 $V_s=200(m/s)$)、 $T_c=0.6(s)(V_s=133(m/s))$ 、 $T_c=0.8(s)(V_s=100(m/s))$ のものを各々、第1、第2、第3種地盤と呼ぶ。ただし、地盤の密度およびポアソン比は全ての地盤において同一とし、それぞれ、 $\rho = 1.8(ton/m^3)$ 、 $\nu = 1/3$ とする。ここでは、地動の最大加速度として $201(cm/s^2)$ を採用している。また、基礎固定時の一次の減衰定数を2.0(%)とする。5層、10層、15層モデルについて剪断型構造物の層間相対変位の最大値の指定値(全層一定)を $\bar{\delta}=1.0, 1.5, 2.0(cm)$ とした3通りについて設計解を求めた。

図5.3の実線は、5層、10層、15層構造物の $\bar{\delta}=1.0, 1.5, 2.0(cm)$ の場合の層間剛性分布を表わしている。また、図5.3には、Nakamura and Yamane(1986)が基礎固定の場合について展開した理論を用いて、層間相対変位の指定値が $\bar{\delta}=1.0, 1.5, 2.0(cm)$ となるように設計したときの層間剛性分布が破線で示してある。図5.3

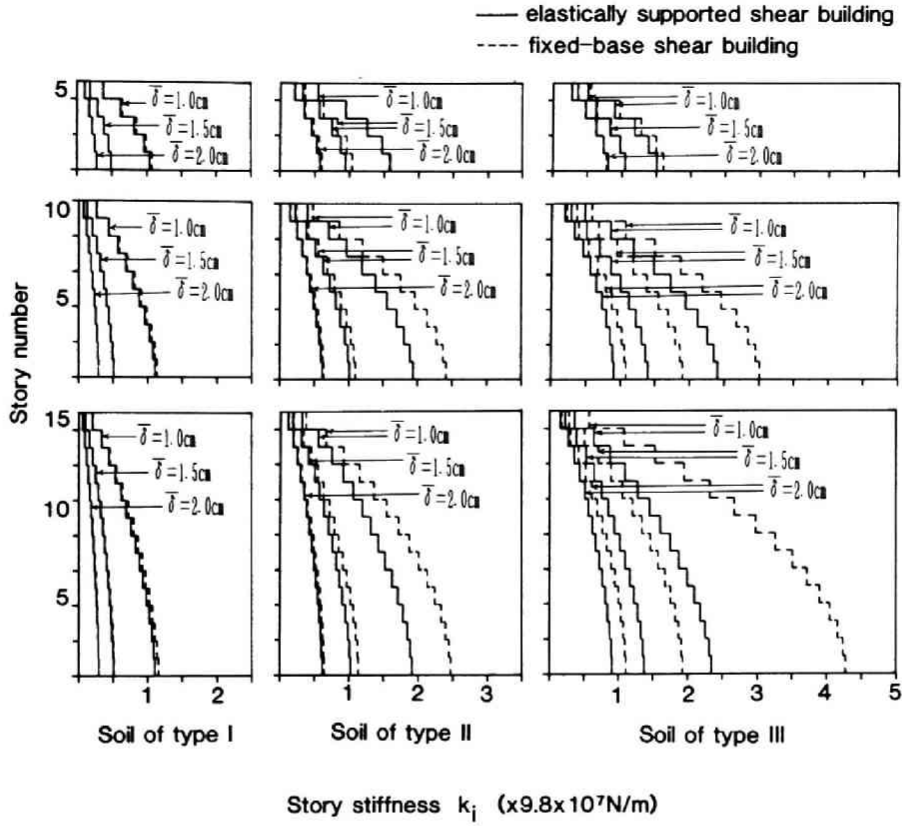


図5.3 地震時応答制約設計された弾性支持剪断型構造物および基礎固定剪断型構造物の層間剛性分布

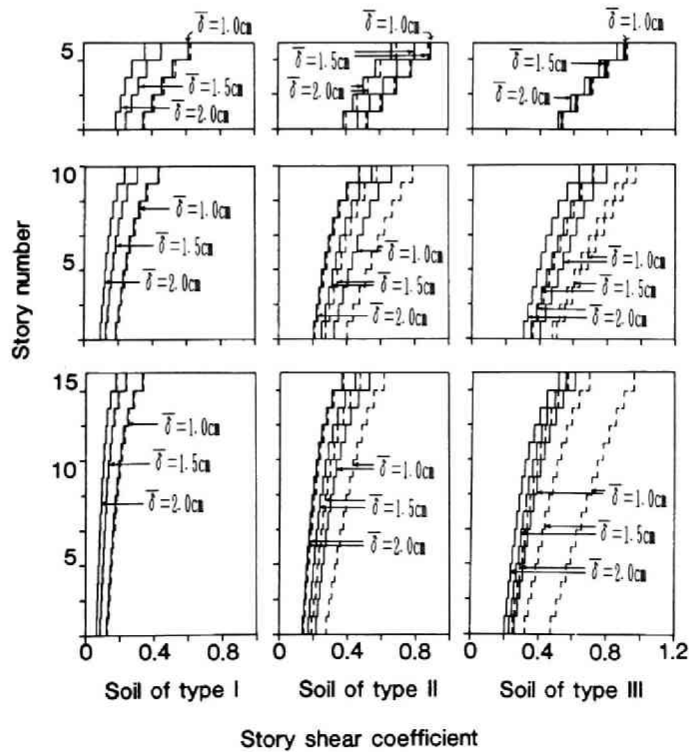


図5.4 地震時応答制約設計された弾性支持剪断型構造物および基礎固定剪断型構造物の層剪断力係数分布

より、同一の最大層間相対変位を示す設計については、基礎固定モデルの方が連成系モデルよりも大きな層間剛性を必要とすることがわかる。

図 5.4 の実線は、5 層、10 層、15 層構造物の $\bar{\delta}=1.0, 1.5, 2.0(\text{cm})$ の場合の層剪断力係数分布を表わしている。また、図 5.4 には、Nakamura and Yamane(1986) が基礎固定の場合について展開した理論を用いて設計した構造物の層剪断力係数分布が破線で示してある。図 5.4 より、同一の最大層間相対変位を示す設計については、基礎固定モデルの方が連成系モデルよりも大きな層剪断力係数分布を示すことがわかる。

図 5.5 は、連成系モデル、連成系モデルについて得られた設計を有する構造物の基礎固定時、および基礎固定モデル (Nakamura and Yamane, 1986) の一次固有周期を、指定最大層間相対変位に対してプロットした図を示す。図 5.5 は、図 5.3 における連成系モデルおよび基礎固定モデルの層間剛性分布の大小関係を詳細に表わしている。

図 5.6 は、連成系モデルおよび基礎固定モデル (Nakamura and Yamane, 1986) (破線) の一次固有周期—ベースシヤー係数関係を示している。図 5.6 より、3 種地盤における連成系モデルについては、一次固有周期—ベースシヤー係数関係に極大値が存在することがわかる。ただし、3 種地盤における連成系モデルについては、この極大値の特性をより明らかにするために、5, 10, 15 層以外のモデルについても設計し、その点をプロットしてある。

5-7 FD2 モデルに対する時刻歴応答解析による検証

FI2 モデルを用いた本設計法により設計した剪断型構造物モデルが、振動数依存型剛性ばねで支持されたモデルに対して指定した最大応答値を示すことを例証するために、4-1 節で作成した人工地震波による時刻歴応答解析を実施した。

解析モデルとしては FD2 モデルを用い、上部剪断型構造物に関する減衰行列は、基礎固定時の減衰定数を 2% とする剛性比例型減衰行列を採用した。Fourier 変換された応答変位は、(5.2) 式より次のように求められる。

$$\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{S}(\omega)^{-1} \mathbf{P}(\omega) \quad (5.15)$$

ただし、数値計算上は(5.15) 式を直接用いず、各振動数ごとに(5.2) 式の連立方程式を解くことにより $\mathbf{U}(\omega)$ を求めた。

各変位の時刻歴応答は(5.15) 式の逆 Fourier 変換として次のように求められる。

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (5.16)$$

$\mathbf{P}(\omega)$ の算出および(5.16) 式の演算は FFT を用いて実行できる (Liu and Fagel, 1971; Fagel and Liu, 1972; Liu and Fagel, 1973)。図 5.7 は、27 個の設計の 1, 2, 3 種地盤各 10 波の地震波 (4-1 節) に対する最大層間相対変位の平均値分布を示す。図より、10, 15 層モデルにおいて平均最大値が指定値から少しはずれるモデルが存在するものの、かなり精度よく指定した応答を呈しているといえる。尚、応答値が指定値からずれる原因としては、地震時応答制約設計を求める際に用いているモデル (FI2 モデル) と、時刻歴応答解析で用いたモデル (FD2 モデル) の相違が挙げられる。振動数依存型複素剛性ばねで支持された構造物の地震時応答の平均最大値を評価する、一層精度の高い効率的な方法が提案されることにより、本地震時応答制約設計法の精度も向上するものと期待される。

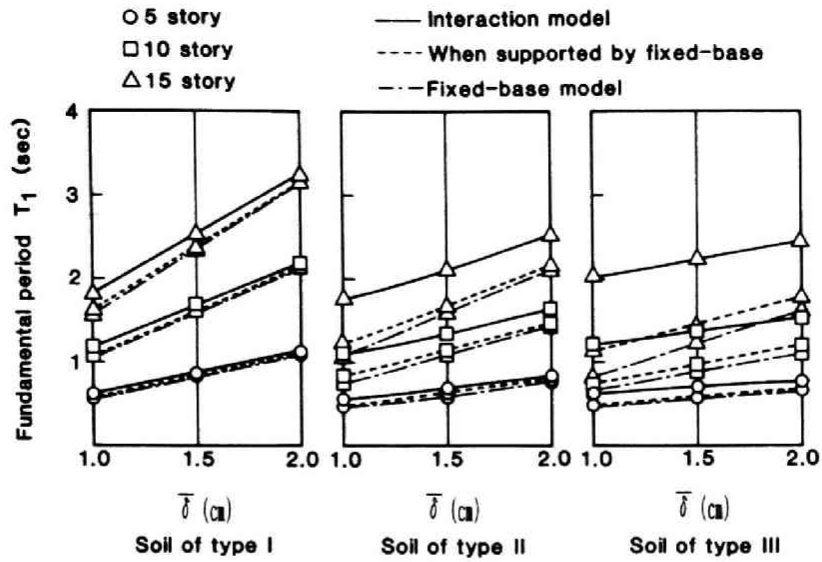


図5.5 各地盤に対する指定層間相対変位—一次固有周期関係

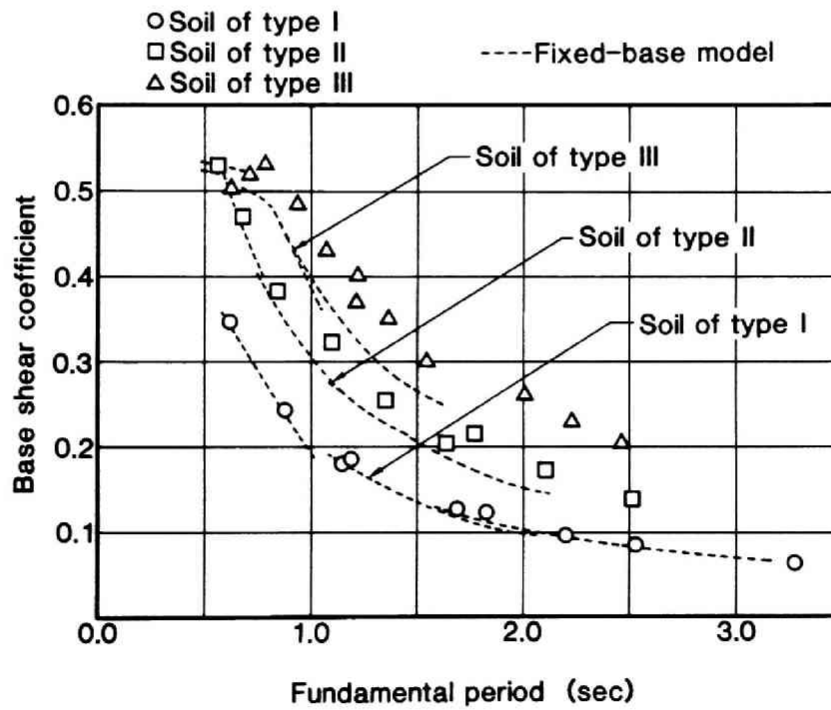


図5.6 各地盤に対する一次固有周期—ベースシヤー係数関係

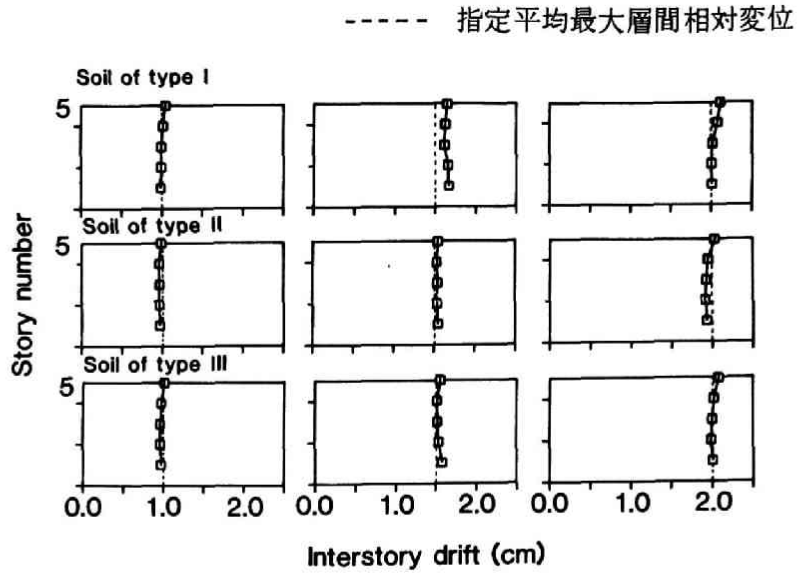


図5.7(a) 人工地震波各10波に対する平均最大層間相対変位分布 (5層)

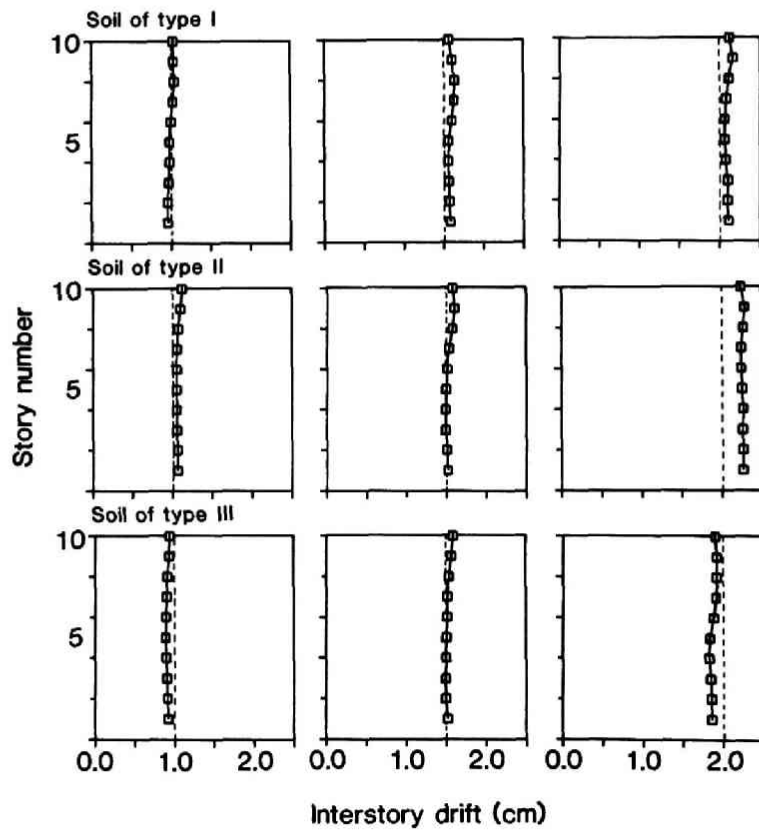


図5.7(b) 人工地震波各10波に対する平均最大層間相対変位分布 (10層)

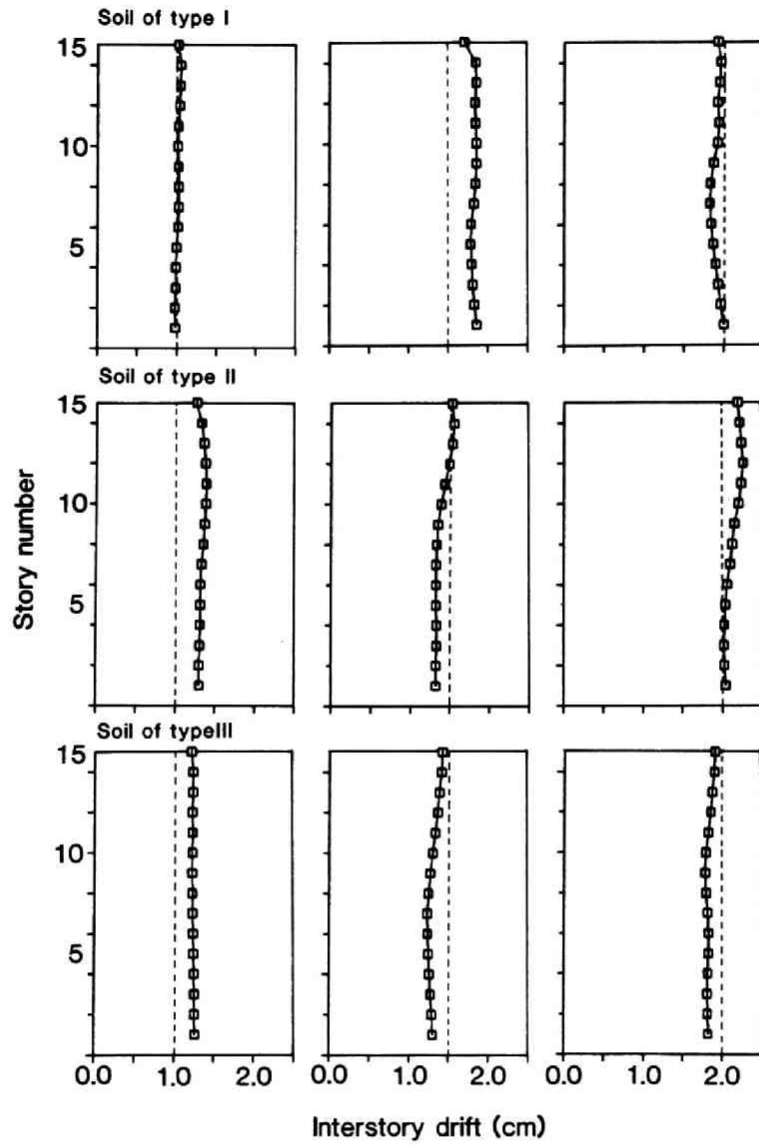


図5.7(c) 人工地震波各10波に対する平均最大層間相対変位分布 (15層)

5-8 結論

本章では、三章において導いた振動数依存型の弾性ばねで支持された構造物と対応する振動数非依存型の弾性ばねで支持された構造物の一次固有振動数の対応関係に関する二つの定理に基づき、振動数依存型の複素剛性ばねで支持された剪断型構造物の、レベル1設計用地震動に対する地震時応答制約設計法を展開した。本章において得られた主な成果は以下の通りである。

- (1) 振動数依存型の指定された複素剛性ばねで支持された弾性剪断型構造物モデルに対して、指定された地震時平均最大変位応答を呈する構造物の層間剛性分布を求める地震時弾性変位応答制約設計法を展開した。その際に、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された弾性剪断型構造物モデルを定義し、そのモデルに対する地震時平均最大応答の評価法を用いて原モデルの地震時平均最大応答を近似評価する方法を新たに提案した。
- (2) 如何に複雑な基礎形状を有する構造物においても、inertial interaction の効果は、振動数依存型の複素ばね剛性として求められるため、本理論はあらゆる基礎形状を有する建築構造物に対して適用可能である。また、kinematic interaction の効果を前もって求めておくことにより、如何なる入力地震動を用いた場合に対しても、本理論は適用可能である。ただし、その場合は、kinematic interaction の効果を組み込んで、構造物の地震時平均最大応答を近似評価する新たな手法を考案する必要がある。
- (3) 設計用速度応答スペクトルに適合するように作成した人工地震波 10 波に対して FD2 モデルによる周波数領域での応答解析を実施し、いくつかの場合において応答値は指定値と少しずれるものの、本設計法により設計された構造物は、ほぼ指定値通りの応答を示すことを例証した。

文献

- 井口 道雄 (1985): 構造物と地盤の動的相互作用の概念、構造物と地盤の動的相互作用シンポジウム, pp1-8.
- Fagel, L.W. and S.C. Liu (1972). Earthquake Interaction for Multistory Building. *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, Vol.98, EM4, pp929-945.
- Lin, Y.K. and W.F. Wu (1984): A Closed Form Earthquake Response Analysis of Multistory Buildings on Compliant Soil. *J. Struct. Mech.*, Vol.12(1), pp87-110.
- Liu, S.C. and L.W. Fagel (1971). Earthquake Interaction by Fast Fourier Transform. *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, Vol.97, EM4, pp1223-1237.
- Liu, S.C. and L.W. Fagel (1973). A Fast Fourier Transform Approach to Earthquake Soil-structure Interaction Problems. *Proc. 5WCEE*, Vol.2, pp1861-1870, Rome.
- Luco, J.E.(1980). *Linear Soil-structure Interaction*. UCRL-15272, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California.
- Mostaghel, N. and G. Ahmadi (1979): Smooth Site Dependent Spectra, *Nuclear Engineering and Design*, Vol.53, pp263-300.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1985), 弾性支持されたせん断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計、構造工学論文集, Vol.31B, pp93-102.
- 中村 恒善、竹脇 出 (1986): 弾性支持されたせん断型構造物の地震時応答制約設計法, 第7回日本地震工学シンポジウム論文集, pp1735-1740.

- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1989a): Earthquake-response Constrained Design of Pile-supported Elastic Shear Buildings for Site-dependent Response Spectra, *Proc. of 9th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol.V, pp1043-1048.
- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1989b) : Optimal Elastic Structures with Frequency-dependent Elastic Supports, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.25, No.5, pp539-551.
- Nakamura, Tsuneyoshi and T. Yamane (1986) : Optimum Design and Earthquake-response Constrained Design of Elastic Shear Buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, pp797-815.
- 日本建築学会 (1987): 地震荷重—その現状と将来の展望.
- Thomson, W.T., T. Calkins and P. Caravani (1974): A Numerical Study of Damping, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.3, pp97-103.
- Veletsos, A.S. and B. Verbic (1974). Basic response functions for elastic foundations. *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, Vol.100, EM2, pp189-202.
- Wolf, J.P. (1985) : *Dynamic Soil-structure Interaction*, Prentice-Hall.
- Wolf, J.P. (1988) : *Soil-structure Interaction in Time Domain*, Prentice-Hall.

第六章 弾性支持された非線形弾性建築骨組のコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計と応答制約設計*

建築骨組の構造設計を行う際には、その規模あるいは重要度にもよるが、激震時において非線形応答を許容することが一般的な設計理念となりつつある。非線形構造物を設計感度解析手法に基づく最適設計法を用いて設計する場合には、非線形構造解析に起因する数値計算と、最適化に起因する数値計算の両者を同時に実施しなければならないため、大規模構造物においてその計算量は膨大なものとなる（たとえばRyu et al., 1985）。建築骨組は一般に、平面骨組が並列する多自由度構造物であるため、この設計感度解析手法に基づく最適設計法を建築骨組に適用することは、その計算量から考えて現実的だとはいえない。また、得られた解の大域的最適性を見極めることも極めて困難である。一方、システム性能を制約条件とする解析的最適設計理論によれば、局所応答に関する任意の制約条件を扱うことはできないが、与えられた問題に対する大域的最適設計解が閉形表現で得られるという長所があるだけでなく、システム性能と局所応答の関係を明らかにしておくことにより、最適解を用いた局所応答の直接的制御も可能である。

激震レベルの地震動に対して建築構造物を設計する際には、構造物全体としての剛性や強度を確保するのみならず、部材剛性、強度、変形性能の適切な配分を行なうことが重要である。

指定した層間相対変位の最大値分布に対して非弾性骨組を設計する最適耐震設計のこれまでの数値的手法のほとんど全ては、多数回の設計感度解析操作と数値計画法の適用を必要とする(Balling et al., 1983; Austin and Pister, 1985)。設計用地震動に対する建築骨組の非弾性最大応答は、非弾性応答スペクトル法や非弾性時刻歴応答解析により予測することが可能であり、指定された最大層間相対変位分布を呈する非弾性剪断型構造物を設計するための有効な数値的方法が、Polak, Pister and Ray(1976), Ray, Pister and Polak(1978) や Bhatti and Pister(1981) によって提案されてきている。

これらの数値的手法は極めて一般的であり有用であるが、より単純な静的設計用荷重に対する解析的手法は、別の意味で有用であり、より実用的な耐震設計法を展開する際に役立つものと期待される。最小原理によって特徴づけられるシステム性能制約条件下の最適設計理論は、解析的で効率的な方法を提供し、次のような特徴を有している。。

- (1) その理論は大域最適性の十分条件を提供する。
- (2) その最適性条件は、各部材の局所応答が一定値あるいは一定値以内に収まることを要求する。
- (3) 規則的幾何学特性を有する骨組に対して導き得る閉形表現解は、局所応答を制御するための直接的な手段を提供するか、あるいはそれを組み込んだ有効な数値的方法を構築する際に極めて有用である。

たとえば、線形弾性建築骨組のコンプライアンス制約条件下の最適設計解は、層間相対変位を制御するための設計公式とも見なせる(Nakamura and Takenaka, 1983)。また、Nakamura and Yamane(1986)は、一次固有周期制約条件下の最適設計の閉形表現解は、設計用地震動に対する層間相対変位制約設計問題において重要な役割を果たすことを示した。

静的荷重に対する非線形弾性構造物の最適設計問題に関しては、次のような論文が発表されてきている。Dems and Mroz(1978)は、一項べき級数型応力-ひずみ関係に従う材料で構成される非線形弾性構造物について全ポテンシャルエネルギー量を構造物の平均剛性として定義し、形状最適設計問題を定式化した。Kaneko

* 本章の一部は、1-2節の論文[4]の一部に加筆しまとめたものである。

and Maier(1981)は、非線形弾性材料から構成されるトラス構造物の変位制約条件下の最適設計問題について、数値計画法に基づく数値的方法を提案している。また、Cinquini(1984)、Cinquini and Contro(1985)およびMrozら(1985)は、非線形弾性構造物の変位制約条件下および変位、応力両制約条件下の最適設計問題を定式化し、最適性の必要条件を誘導している。さらにその最適性条件を用いた数値的方法を示している。Ryuら(1985)およびBensoe and Sokolowski(1987)は、変位および応力制約条件下の最適設計問題に対して、設計感度解析法に基づく数値的解法を提示した。

本章の第一の目的は、一項べき級数型の非線形弾性応力-歪関係に従う材料で構成され、サンドイッチ断面を有する部材からなる建築骨組について、骨組全体としての平均的な柔性を表わす重要な指標であるコンプライアンスを定義し、そのコンプライアンス制約条件下の最適設計理論を定式化することにある。コンプライアンスというシステム性能量は、Prager and Sheu(1968)によって線形弾性骨組に対して導入され、その後線形弾性構造物に対する多くの論文が発表されている(たとえば(Haug, 1981))。その最適設計理論においては、大域最適性の必要十分条件が導かれ、さらにそれを用いて閉形表現の解公式が得られる。第二の目的は、コンプライアンス制約条件下の最適設計問題に対する設計解公式を平均化最大歪の制約設計公式として用いる方法を展開することにある。サンドイッチ断面部材の材端モーメント-材端回転角関係が、現実的な中実断面部材のそれと等価になるように断面諸量を換算することにより、本平均化最大歪の制約設計公式は、現実的な部材の部材塑性率の制約設計公式として用いることが可能である。本章で展開する理論は、七章で展開する一層現実的なモデルを用いた理論を展開する際に基礎的な役割を果たす。

現実の建築骨組は非弾性材料から構成されているため、その構造設計理論を扱うには非弾性部材により構成された骨組の理論を展開する必要がある。本章および七章で展開する非線形弾性骨組に対する理論を展開する意義は次のように要約できる。(i) 建築骨組の準静的荷重による単調荷重過程を考える場合には、座屈等の現象を生起させない範囲においては、同じ処女応力-歪関係を有する材料から構成される非線形弾性骨組の挙動と、対応する非弾性骨組の挙動を区別することはできない。安定な非線形弾性材料で構成される構造物の静的荷重に対する挙動に関しては、上記の座屈等の現象を生起させない範囲においては最小ポテンシャルエネルギーの原理が成立するため、非線形弾性構造物扱う方が非弾性構造物を直接扱うよりも適している。(ii) 非線形弾性構造物の応答を制約することは、動的外乱の作用を受ける非弾性構造物のスケルトン曲線上の履歴ループの尖点の応答レベルを簡易的に制約するという意義をも有している。

6-1 最小コスト設計問題

図6.1に示すスパン方向に単位ユニットを有する骨組(以下では単位ユニット骨組と呼ぶ)を対象とする。その部材中心線寸法及び設計用荷重 H_j, V_j は前もって指定されているものとする。骨組を構成する各部材は、垂直応力のみを支持する2枚の薄いフランジと、垂直応力を支持しない剪断抵抗コアからなる、図6.2のような部材ごとに一様な理想化サンドイッチ断面を有するものとする。第 j 層柱の2枚のフランジ間距離は $2d_{Cj}$ で前もって指定されている。

また、梁のフランジ間距離は、上層梁(第 k 層上梁以上)については $2d_{BU}$ 、下層梁(第 k 層下梁以下)については $2d_{BL}$ で表示され、前もって指定されている。ここでは、梁のフランジ間距離として上層、下層で各々一定の場合を示すが、第 k 層において提示する手法を他の層において適用することにより、梁のフランジ間距離が特定層毎に変化する場合も同様に扱うことが可能である。ここでのサンドイッチ断面の歪は、現実の中実断面部材の縁歪ではなく、材端力-材端変位関係が現実の中実断面部材のそれとある尺度で等価となるように設定された応力-歪関係の歪を表すことに注意する必要がある。

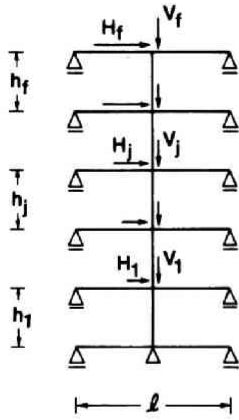


図6.1 設計用荷重

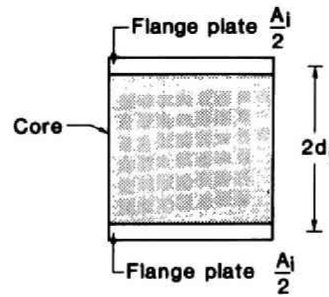


図6.2 理想化サンドイッチ断面

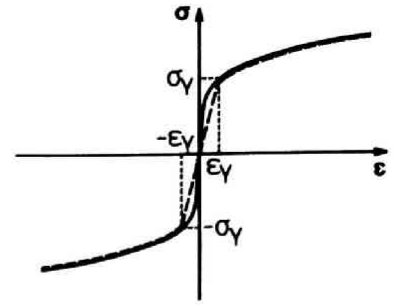


図6.3 一項べき関数型応力-歪関係曲線（実線）と線形弾性域をもつ材料の応力-歪関係曲線（破線）

各部材のフランジは、次のような1項べき関数型の構成法則に従う非線形弾性体で構成されているものとする(図6.3)。

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} \left| \frac{\sigma}{\sigma_y} \right|^{n-1} \quad (n > 1) \quad (6.1)$$

(6.1) 式における n は、鋼材の応力-歪関係における降伏棚および歪硬化域の形状を考慮して決定される。式(6.1)で定義される非線形弾性体は、最小ポテンシャルエネルギーの原理(Drucker, 1958)が成立する安定な材料の一つである。現実の材料の多くは、Ramberg-Osgood 式の第1項や図6.3の破線で示されるような初期線形弾性域をもつが、最適設計された骨組の材端近傍のフランジ歪が、設計荷重の作用下で $5\epsilon_y$ あるいはそれ以上のオーダー値を呈するような問題においては、式(6.1)はよい近似を与える。すなわち、そのような場合には、変形が材端近傍に集中し、その部分の応力、歪状態が(6.1)式の構成法則と現実の構成法則の形状が類似している部分(図6.3参照)に存在することを考慮すれば、材端力-材端変位のレベルでは、(6.1)式の構成法則に従う骨組は、現実の骨組のかなりよい近似を与えるといえる。変形後の単位ユニット骨組は、その構造の左右対称性と水平荷重の逆対称性により、鉛直荷重による柱の軸方向縮みが生じた後に梁の両端をローラー支持したものとみなせる。通常の骨組では、鉛直荷重が先に載荷され、それによって生じる柱の垂直応力が $(0.1 \sim 0.3)\sigma_y$ のオーダーに収まり、その後に水平荷重が載荷されることを考慮すれば、(6.1)式の非線形弾性体で構成される骨組の呈する両設計荷重載荷後の変形状態は、現実の非線形弾塑性体で構成される骨組の呈する変形状態のかなりよい近似を与えるものと考えられる。

A_{Bj}, A_{Cj} は各々第 j 層の梁と柱のフランジ断面積を表す。また、 l, h_j はスパン長と第 j 層階高を表し、 β_B, β_C は梁と柱に各々共通のコスト係数を表す。ここでは設計変数は断面積集合 $\mathbf{A}^T = \{\{A_{Bj}\}^T; \{A_{Cj}\}^T\}$ である。()^T は転置を表す。層数を f で表し評価関数を次のように定義する。

$$w = \beta_B \sum_{j=0}^f A_{Bj} l + \beta_C \sum_{j=1}^f A_{Cj} h_j \quad (6.2)$$

骨組に作用する設計用荷重 H_j, V_j の作用点の作用方向変位は設計 \mathbf{A} に依存するので、 $u_j(\mathbf{A}), v_j(\mathbf{A})$ と表示する。この時、コンプライアンスは次のように定義される。

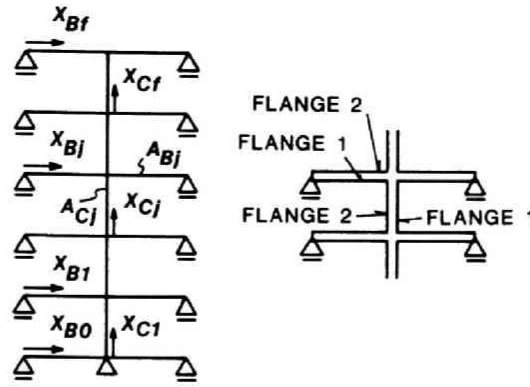


図6.4 座標系とフランジ番号

$$C(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^f \{H_j u_j(\mathbf{A}) + V_j v_j(\mathbf{A})\} = \mathbf{P}^T \mathbf{U}(\mathbf{A}) \quad (6.3)$$

ここで $\mathbf{P}^T = \{\{H_j\}^T; \{V_j\}^T\}$ 、 $\mathbf{U}(\mathbf{A})^T = \{\{u_j(\mathbf{A})\}^T; \{v_j(\mathbf{A})\}^T\}$ である。また、その他の設計条件により部材の断面積をある値以下にしたいという要求も生じるため、ここでは最小断面積制限を設け、第 j 層の梁と柱の最小断面積制限値を \bar{A}_{Bj} 、 \bar{A}_{Cj} で表わす。さらに、コンプライアンスの制限値を \bar{C} で表わせれば、最小コスト設計問題は次のように述べられる。

[問題 ODSC]

コンプライアンス制約条件

$$\mathbf{P}^T \mathbf{U}(\mathbf{A}) \leq \bar{C} \quad (6.4)$$

および最小断面積制約条件

$$A_{Bj} \geq \bar{A}_{Bj} \quad (j = 0, 1, \dots, f) \quad (6.5)$$

$$A_{Cj} \geq \bar{A}_{Cj} \quad (j = 1, \dots, f) \quad (6.6)$$

を満たし、式(6.2)で定義される評価関数 w を最小にする断面積集合 \mathbf{A} を求めよ。

ここで $\mathbf{U}(\mathbf{A})$ は、(6.1)式の構成法則に従う設計 \mathbf{A} の骨組が荷重 \mathbf{P} の作用を受ける時の解析問題の解の一部である。ここでの解析は、線形の曲率-変位関係式と、変形の効果を考慮に入れない釣合式に基づいて行なうものとする。また、部材座標系の設定と梁および柱のフランジの番号付けを図6.4のように行なう。

6-2 最適性条件の誘導

大域最適性の必要十分条件を導く Prager の手法 (Prager and Taylor, 1968; Prager, 1972; Prager, 1974) を、Ramberg-Osgood 式のような現実的な非線形弾性構成法則に従う骨組のコンプライアンス制約条件下の最適設計問題に拡張することはできない。ここでは、構成法則として (6.1) 式の一項べき関数型表現を採用した時に、その特性を利用して [問題 ODSC] に対する大域最適性の必要十分条件が導かれ得ることを示す。

すべての制約条件(6.4,5,6)を満足する任意の設計を $\mathbf{A}^T = \{\{A_{Bj}\}^T; \{A_{Cj}\}^T\}$ で表わし、[問題ODSC]に対する最適解を $\tilde{\mathbf{A}}^T = \{\{\tilde{A}_{Bj}\}^T; \{\tilde{A}_{Cj}\}^T\}$ で表わす。この節では、梁と柱を統一的に扱い、梁と柱を表わす下添字 B, C を取り去り、部材番号を表わす文字として $i (i = 1, 2, \dots, 2f + 1)$ を用いる。コスト係数についても β_i とする。設計荷重 \mathbf{P} によって生じる第 i 部材の両フランジの歪分布と応力分布は設計に依存するため、それぞれ $\epsilon_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A}), \sigma_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A}) (j = 1, 2)$ と表示する。 j はフランジ番号を表わす。また第 i 部材の部材長を l_i で表示する。(6.4)式の左辺のコンプライアンスは、仮想仕事の原理における仮想変位モードに実際に生じている変位モードを用いることにより、フランジ歪分布を用いて次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T \mathbf{U}(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^{2f+1} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} A_i \int_0^{l_i} \sigma_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A}) \epsilon_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A}) dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{2f+1} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} A_i \int_0^{l_i} \sigma_y \epsilon_y \left| \frac{\epsilon_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A})}{\epsilon_y} \right|^{(n+1)/n} dx_i \end{aligned} \quad (6.7)$$

最適設計 $\tilde{\mathbf{A}}$ の骨組の変位成分ベクトル $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\tilde{\mathbf{A}})$ と歪分布 $\{\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)\} = \{\epsilon_i^{(j)}(x_i; \tilde{\mathbf{A}})\}$ は、設計 \mathbf{A} の骨組に対する一つの運動学的に許容な組であるから、設計 \mathbf{A} の骨組に対する最小ポテンシャルエネルギーの原理(Drucker, 1958)において次のように用いることができる。

$$\sum_{i=1}^{2f+1} A_i l_i D_i[\{\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)\}] - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{U}} \geq \sum_{i=1}^{2f+1} A_i l_i D_i[\{\epsilon_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A})\}] - \mathbf{P}^T \mathbf{U}(\mathbf{A}) \quad (6.8)$$

ここで $D_i[\{\epsilon_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A})\}]$ は第 i 部材の部材あたりの平均歪エネルギー密度を表わし、次式で与えられる。

$$D_i[\{\epsilon_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A})\}] = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2l_i} \int_0^{l_i} \frac{n}{n+1} \sigma_y \epsilon_y \left| \frac{\epsilon_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A})}{\epsilon_y} \right|^{(n+1)/n} dx_i \quad (6.9)$$

(6.7)式を(6.8)式の右辺に代入し、さらに(6.8)式の右辺に制約条件(6.4)式を適用すれば次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2f+1} A_i l_i D_i[\{\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)\}] - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{U}} &\geq -\frac{1}{n+1} \mathbf{P}^T \mathbf{U}(\mathbf{A}) \\ &\geq -\frac{1}{n+1} \bar{C} \end{aligned} \quad (6.10)$$

最適設計 $\tilde{\mathbf{A}}$ の骨組に仮想仕事の原理を適用すれば次式が導かれる。

$$\sum_{i=1}^{2f+1} \tilde{A}_i l_i D_i[\{\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)\}] - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{U}} = -\frac{1}{n+1} \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{U}} \quad (6.11)$$

(6.10)式から(6.11)式を辺々引くと次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{2f+1} (A_i - \tilde{A}_i) l_i D_i[\{\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)\}] + \frac{1}{n+1} (\bar{C} - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{U}}) \geq 0 \quad (6.12)$$

最小断面積制約条件(6.5,6)式は次のように表現できる。

$$\{(A_i - \tilde{A}_i) + (\tilde{A}_i - \bar{A}_i)\} l_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2f + 1) \quad (6.13)$$

また、制約条件(6.4,5,6)式を満足するすべての設計 \mathbf{A} の中で $\bar{\mathbf{A}}$ が最小コスト設計であるという条件は次のように表現できる。

$$\sum_{i=1}^{2f+1} \beta_i (A_i - \bar{A}_i) l_i \geq 0 \quad (6.14)$$

不等式(6.12)、(6.13)、(6.14) は次のようにベクトルの内積を用いて表現できる。

$$\mathbf{r}^T \mathbf{D} \geq 0 \quad (6.15)$$

$$\mathbf{r}^T \mathbf{g}_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2f + 1) \quad (6.16)$$

$$\mathbf{r}^T \mathbf{b} \geq 0 \quad (6.17)$$

ここで、 \mathbf{r} , \mathbf{D} , \mathbf{g}_i , \mathbf{b} は次の $(4f + 3)$ 個の成分からなるベクトルである。

$$\mathbf{r}^T = \{(A_1 - \bar{A}_1)l_1, \dots, (A_i - \bar{A}_i)l_i, \dots, (A_{2f+1} - \bar{A}_{2f+1})l_{2f+1}, 1, \dots, 1, \dots, 1, 1\} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{D}^T = \{D_1[\{\tilde{\epsilon}_1^{(j)}(x_1)\}], \dots, D_i[\{\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)\}], \dots, D_{2f+1}[\{\tilde{\epsilon}_{2f+1}^{(j)}(x_{2f+1})\}], 0, \dots, 0, \dots, 0, (\bar{C} - \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{U}})/(n+1)\} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{g}_i^T = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, (\bar{A}_i - A_i)l_i, 0, \dots, 0, 0\} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{b}^T = \{\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_{2f+1}, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0\} \quad (6.21)$$

Farkas の定理によれば、もし \mathbf{b} が \mathbf{D} , $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{2f+1}$ の非負線形結合によって与えられるベクトルならば、またその時に限り不等式(6.17)は、不等式(6.15)、(6.16)から導かれる。もし非負係数が $1/\mu, \nu_1, \dots, \nu_{2f+1}$ で表わされるならば、[問題 ODSC] に対する大域最適性の必要十分条件は、最適設計 $\bar{\mathbf{A}}$ の骨組において、荷重 \mathbf{P} の下で生じる歪分布 $\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)$ および変位 $\bar{\mathbf{U}}$ が次式を満足することである。

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{b} \quad (6.22)$$

$$\boldsymbol{\nu} \geq 0 \quad (6.23)$$

ここで、 \mathbf{G} , $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{0}$ は次の行列およびベクトルを表わす。

$$\mathbf{G} = [\mathbf{D}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \dots, \mathbf{g}_{2f+1}] \quad (6.24)$$

$$\boldsymbol{\nu}^T = \{1/\mu, \nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_{2f+1}\} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{0}^T = \{0, 0, \dots, 0, \dots, 0\} \quad (6.26)$$

最適性条件(6.22),(6.23) は次のような内容を意味している。

(1) 制約条件(6.4) 式が等号で満たされる時。すなわち $\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{C}}$ の時。

$$\frac{1}{\mu} > 0 \rightarrow \begin{cases} \tilde{A}_i > \bar{A}_i \rightarrow \nu_i = 0 \rightarrow D_i[\{\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)\}] = \beta_i \mu \\ \tilde{A}_i = \bar{A}_i \rightarrow \nu_i \geq 0 \rightarrow D_i[\{\tilde{\epsilon}_i^{(j)}(x_i)\}] \leq \beta_i \mu \end{cases} \quad (6.27a, b)$$

$$\frac{1}{\mu} = 0 \rightarrow \nu_i = \beta_i \rightarrow \tilde{A}_i = \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2f + 1) \quad (6.28)$$

(2) 制約条件(6.4) 式が不等号で満たされる時。すなわち $\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{U}} < \bar{\mathbf{C}}$ の時。

$$\frac{1}{\mu} = 0 \rightarrow \nu_i = \beta_i \rightarrow \tilde{A}_i = \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2f + 1) \quad (6.29)$$

式(6.27a)の最適性条件は、最小断面積制約条件がすべて不等号で満たされる場合は、「部材あたりの平均歪エネルギー密度が、その部材のコスト係数に比例して分配される」ことを示している。

6-3 最小コスト設計解の誘導

前節で導いた最適性条件を用い、[問題ODSC]に対する最小コスト設計解の閉形表現を導出する。ただし、ここでは基本的な解を導くという目的で、コンプライアンス制約条件(6.4) 式が等号で満足され、最小断面積制約条件(6.5,6) 式の全てが不等号で満足される場合を扱う。特定部材が最小断面積制約条件を等号で満足するときの解は、中村、竹中(Nakamura and Takenaka, 1983) が提示した設計領域法の考え方を適用して誘導できる。前節ではコスト係数を β_i と表示したが、本節では、6-1 節に従い、再び梁については β_B 、柱については β_C と表示する。なお以下では最小コスト設計解のみ扱うので、(˘) 記号は省略する。また、歪、応力の正規化量として次の諸量を定義する。

$$e_{B_j}^{(i)}(x_{B_j}) = \epsilon_{B_j}^{(i)}(x_{B_j})/\epsilon_y, \quad e_{C_j}^{(i)}(x_{C_j}) = \epsilon_{C_j}^{(i)}(x_{C_j})/\epsilon_y$$

$$s_{B_j}^{(i)}(x_{B_j}) = \sigma_{B_j}^{(i)}(x_{B_j})/\sigma_y \quad (6.30)$$

最適性条件(6.27a) を梁に対して書けば次式を得る。

$$\frac{1}{2l} \int_0^l \frac{n}{n+1} \sigma_y \epsilon_y \left\{ |e_{B_j}^{(1)}(x_{B_j})|^{(n+1)/n} + |e_{B_j}^{(2)}(x_{B_j})|^{(n+1)/n} \right\} dx_{B_j} = \beta_B \mu \quad (6.31)$$

第 j 梁の正規化フランジ歪分布を梁の正規化材端歪 e_{B_j} で表現すれば次式となる (図 6.5)。

$$e_{B_j}^{(1)}(x_{B_j}) = -e_{B_j} \left(\frac{2x_{B_j}}{l} \right)^n \quad \left(0 \leq x_{B_j} \leq \frac{l}{2} \right) \quad (6.32)$$

$$e_{B_j}^{(2)}(x_{B_j}) = e_{B_j} \left(\frac{2x_{B_j}}{l} \right)^n \quad \left(0 \leq x_{B_j} \leq \frac{l}{2} \right) \quad (6.33)$$

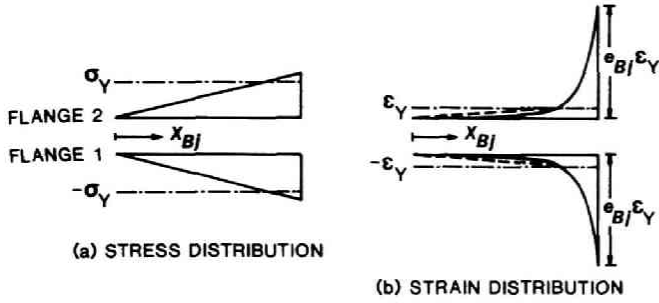


図6.5 梁の応力分布と歪分布（図中の破線は、図6.3の破線で示される初期線形弾性域をもつ応力-歪関係を採用した時の、(a)と同一の応力分布に対応するフランジ歪分布を表わす。）

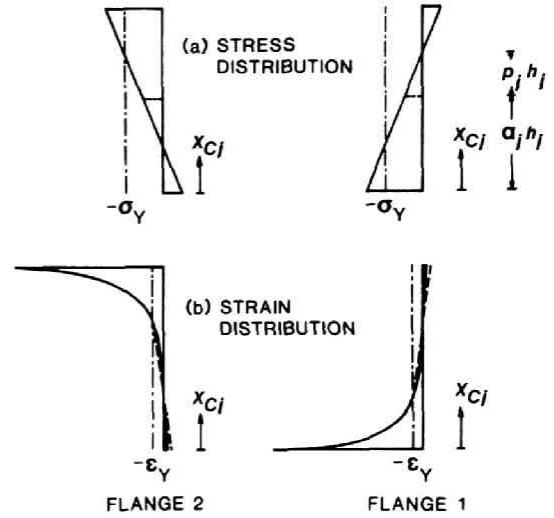


図6.6 柱の応力分布と歪分布

対称な構造物に逆対称荷重が作用していることより、梁の応力分布は梁と柱の接合部に関して点対称となる。この性質を用いて(6.32,33)式を(6.31)式に代入すれば次式が得られる。

$$e_{Bj} = \left\{ \frac{(n+1)(n+2)\beta_B\mu}{n\sigma_y\epsilon_y} \right\}^{n/(n+1)} = e_B (= \text{const.}) \quad (j = 0, 1, \dots, f) \quad (6.34)$$

また、梁のたわみ曲線の微分方程式を2回積分することにより、第j層節点の節点回転角は次のように表現できる。

$$\theta_j = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^n \frac{\epsilon_y}{d_{Bj}} e_{Bj}^{(2)} \left(\frac{l}{2} - \xi \right) d\xi d\eta \quad (6.35)$$

ただし、 $d_{Bj} = d_{BL} (j = 0, 1, \dots, k-1)$ 、 $d_{Bj} = d_{BU} (j = k, \dots, f)$ である。(6.35)式に(6.33)式を代入し、(6.34)式を用いて整理すれば次式を得る。

$$\theta_j = \frac{l\epsilon_y e_{Bj}}{2d_{Bj}(n+2)} = \frac{l\epsilon_y e_B}{2d_{Bj}(n+2)} \quad (6.36)$$

ただし、 $d_{Bj} = d_{BL} (j = 0, 1, \dots, k-1)$ 、 $d_{Bj} = d_{BU} (j = k, \dots, f)$ である。(6.36)式より第k層以下の節点回転角および第(k+1)層以上の節点回転角は各々一定でなければならない。

$$\theta_j = \theta_L \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \quad (6.37)$$

$$\theta_j = \theta_U \quad (j = k, \dots, f) \quad (6.38)$$

一方、柱の正規化フランジ応力分布は、無次元化反曲点高さ α_j （階高で無次元化）を用いて次のように表現できる（図6.6）。

$$s_{Cj}^{(1)}(x_{Cj}) = 2m_j \left(\frac{x_{Cj}}{h_j} - \alpha_j - p_j \right) \quad (6.39)$$

$$s_{C_j}^{(2)}(x_{C_j}) = -2m_j \left(\frac{x_{C_j}}{h_j} - \alpha_j + p_j \right) \quad (6.40)$$

ただし、(6.37,38) 式より $\alpha_j = 1/2 (j \neq k)$ であり、第 j 層は上下の節点回転角が異なるため、一般に $\alpha_k \neq 1/2$ である。また、 $p_j = N_j d_{C_j} / (Q_j h_j)$ (N_j は第 j 層柱軸方向力で、 Q_j は第 j 層層剪断力) で、 p_j は柱フランジ応力が 0 となる点の柱反曲点位置からの無次元化距離を表わす。ここでは、 $p_j \leq 1/2 (j \neq k)$ 、 $\alpha_k + p_k \leq 1$ を満足する場合のみ扱う。 $p_j \leq 1/2 (j \neq k)$ 、 $\alpha_k + p_k \leq 1$ は、それぞれ第 k 層以外の層および第 k 層の柱のフランジ応力が 0 となる点が、その当該の層の柱内部に存在することを意味している。また、 m_j は第 j 層層モーメントを降伏層モーメントで無次元化したもので、 $m_j = Q_j h_j / (2A_{C_j} \sigma_y d_{C_j})$ を表わす。以下では式表現の簡略化のため次の記号を用いる。

$$F_1(\alpha_j, p_j) = \frac{1}{2} \{ (1 - \alpha_j + p_j)^{n+2} + (1 - \alpha_j - p_j)^{n+2} + (\alpha_j + p_j)^{n+2} + (\alpha_j - p_j)^{n+2} \}$$

$$F_2(\alpha_j, p_j) = (1 - \alpha_j + p_j)^{n+1} + (1 - \alpha_j - p_j)^{n+1}$$

$$F_3(\alpha_j, p_j) = (\alpha_j - p_j)^{n+1} + (\alpha_j + p_j)^{n+1}$$

$$F_4(\alpha_j, p_j) = \frac{1}{2} \{ (1 - \alpha_j + p_j)^{n+1} - (1 - \alpha_j - p_j)^{n+1} + (\alpha_j + p_j)^{n+1} - (\alpha_j - p_j)^{n+1} \}$$

$$F_5(\alpha_j, p_j) = \left\{ F_1(\alpha_j, p_j) \frac{\beta_B}{\beta_C} \right\}^{-n/(n+1)} \left\{ \frac{1}{2} F_2(\alpha_j, p_j) - \frac{1}{n+2} F_1(\alpha_j, p_j) \right\}$$

$$F_6(\alpha_j, p_j) = \left\{ F_1(\alpha_j, p_j) \frac{\beta_B}{\beta_C} \right\}^{-n/(n+1)} \left\{ \frac{1}{2} F_3(\alpha_j, p_j) - \frac{1}{n+2} F_1(\alpha_j, p_j) \right\} \quad (6.41)$$

最適性条件(6.27a) 式を柱に対して書けば次式を得る。

$$\frac{1}{2h_j} \int_0^{h_j} \frac{n}{n+1} \sigma_y \epsilon_y \left\{ |s_{C_j}^{(1)}(x_{C_j})|^{(n+1)/n} + |s_{C_j}^{(2)}(x_{C_j})|^{(n+1)/n} \right\} dx_{C_j} = \beta_C \mu \quad (6.42)$$

(6.39,40) 式を (6.42) 式に代入すれば次式を得る。

$$\frac{n\sigma_y \epsilon_y}{(n+1)(n+2)} (2m_j)^{n+1} F_1(\alpha_j, p_j) = \beta_C \mu \quad (6.43)$$

ただし、 $\alpha_j = 1/2 (j \neq k)$ である。また、(6.34) 式と (6.43) 式から μ を消去すれば、 m_j が梁の共通の正規化材端歪 e_B で次のように表現できる。

$$(2m_j)^n = e_B \left\{ F_1(\alpha_j, p_j) \frac{\beta_B}{\beta_C} \right\}^{-n/(n+1)} \quad (6.44)$$

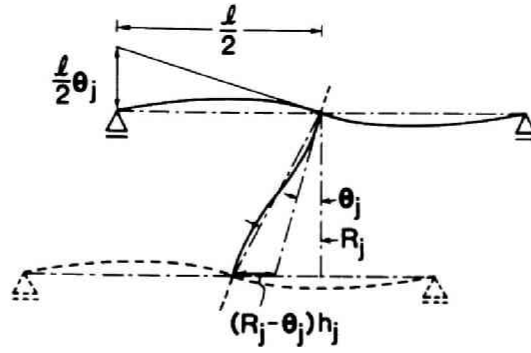


図6.7 第j層変形図

柱のたわみ曲線の微分方程式より次式を得る (図6.7)。

$$R_j - \theta_j = -\frac{1}{h_j} \int_0^{h_j} \int_0^\eta \frac{\epsilon_y}{2d_{Cj}} \left\{ e_{Cj}^{(2)}(h_j - \xi) - e_{Cj}^{(1)}(h_j - \xi) \right\} d\xi d\eta \quad (6.45)$$

(6.1) 式を用いて (6.39,40) 式を (6.45) 式に代入し、さらに (6.36)、(6.44) 式を用いれば、層間変形角は梁の共通の正規化材端歪 e_B を用いて次のように表現できる。

$$R_j = e_B \epsilon_y \left\{ \frac{l}{2d_{Bj}(n+2)} + \frac{h_j}{d_{Cj}(n+1)} F_5(\alpha_j, p_j) \right\} \quad (6.46)$$

ただし、 $d_{Bj} = d_{BL}(j = 0, 1, \dots, k-1)$ 、 $d_{Bj} = d_{BU}(j = k, \dots, f)$ 、 $\alpha_j = 1/2 (\neq k)$ である。(6.46) 式より、層間変形角 R_j は梁の共通の正規化材端歪 e_B に比例することがわかる。

また、柱の縮み量は次のように表現できる。

$$\Delta_j = -\int_0^{h_j} \frac{\epsilon_y}{2} \left\{ e_{Cj}^{(1)}(x_{Cj}) + e_{Cj}^{(2)}(x_{Cj}) \right\} dx_{Cj} \quad (6.47)$$

(6.1) 式を用いて (6.47) 式に (6.39,40) 式を代入すれば次式を得る。

$$\Delta_j = \frac{e_B \epsilon_y h_j}{n+1} \left\{ F_1(\alpha_j, p_j) \frac{\beta_B}{\beta_C} \right\}^{-n/(n+1)} F_4(\alpha_j, p_j) \quad (6.48)$$

第 k 層柱のたわみ曲線の微分方程式を 2 回積分した式は、境界条件の与え方により (6.45) 式とは異なる次式としても表現できる。

$$R_k - \theta_L = \frac{1}{h_k} \int_0^{h_k} \int_0^\eta \frac{\epsilon_y}{2d_{Ck}} \left\{ e_{Ck}^{(2)}(\xi) - e_{Ck}^{(1)}(\xi) \right\} d\xi d\eta \quad (6.49)$$

(6.1) 式を用いて (6.49) 式に (6.39,40) 式を代入すれば次式となる。

$$R_k - \theta_L = \frac{\epsilon_y h_k}{d_{Ck}(n+1)} (2m_k)^n \left\{ \frac{1}{2} F_3(\alpha_k, p_k) - \frac{1}{n+2} F_1(\alpha_k, p_k) \right\} \quad (6.50)$$

(6.36)、(6.44) 式を (6.50) 式に代入すれば、第 k 層の層間変形角 R_k の別表現が次のように得られる。

$$R_k = e_B \epsilon_y \left\{ \frac{l}{2d_{BL}(n+2)} + \frac{h_k}{d_{Ck}(n+1)} F_6(\alpha_k, p_k) \right\} \quad (6.51)$$

(6.46) 式 ($j = k$) と (6.51) 式より、 α_k を決定する次式を得る。

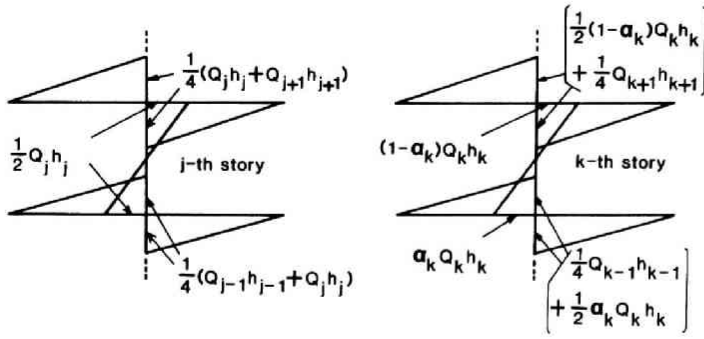


図6.8 曲げモーメント分布 ($j \neq k-1, k, k+1$)

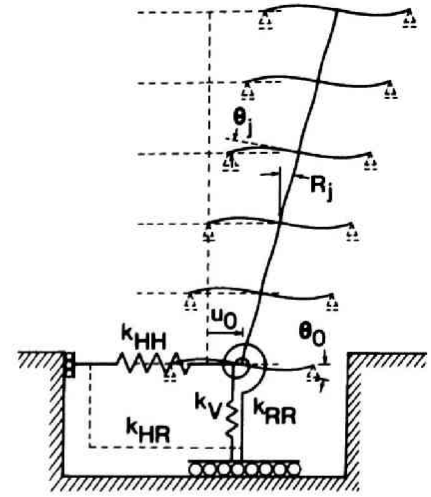


図6.9 弾性支持された単位ユニット骨組モデル

$$\frac{l}{n+2} \left(\frac{1}{d_{BU}} - \frac{1}{d_{BL}} \right) = \frac{2h_k}{(n+1)d_{Ck}} \{F_6(\alpha_k, p_k) - F_5(\alpha_k, p_k)\} \quad (6.52)$$

梁の共通の正規化材端歪 e_B は、次のコンプライアンス制約条件より求められる。

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \sum_{j=1}^f H_j u_j + \sum_{j=1}^f V_j v_j \\ &= \sum_{j=1}^f H_j \sum_{i=1}^j R_i h_i + \sum_{j=1}^f V_j \sum_{i=1}^j \Delta_i \\ &= \sum_{j=1}^f Q_j R_j h_j + \sum_{j=1}^f N_j \Delta_j \\ &= e_B \epsilon_y \sum_{j=1}^f h_j \left[Q_j \left\{ \frac{l}{2d_{Bj}(n+2)} + \frac{h_j}{d_{Cj}(n+1)} F_5(\alpha_j, p_j) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_j}{n+1} \left\{ F_1(\alpha_j, p_j) \frac{\beta_B}{\beta_C} \right\}^{-n/(n+1)} F_4(\alpha_j, p_j) \right] \end{aligned} \quad (6.53)$$

ただし、(6.53)式において $d_{Bj} = d_{BL} (j = 0, 1, \dots, k-1)$ 、 $d_{Bj} = d_{BU} (j = k, \dots, f)$ 、 $\alpha_j = 1/2 (j \neq k)$ である。また α_k は(6.52)式より定まる値を用いる。

図6.8の曲げモーメント図を用いて、第 j 層節点回りの節点方程式を書き、構成法則を用いれば、梁の最適断面積が次のように求められる。

$$A_{Bj} = \frac{1}{2\sigma_y d_{Bj}} \{ (1 - \alpha_j) Q_j h_j + \alpha_{j+1} Q_{j+1} h_{j+1} \} e_B^{-1/n} \quad (6.54)$$

ただし、(6.54)式において $d_{Bj} = d_{BL} (j = 0, 1, \dots, k-1)$ 、 $d_{Bj} = d_{BU} (j = k, \dots, f)$ 、 $\alpha_j = 1/2 (j \neq k)$ 、 $Q_0 h_0 = Q_{f+1} h_{f+1} = 0$ である。

一方、柱の最適断面積は(6.44)式より次のように求められる。

$$A_{Cj} = \frac{Q_j h_j}{\sigma_y d_{Cj}} e_B^{-1/n} \left\{ F_1(\alpha_j, p_j) \frac{\beta_B}{\beta_C} \right\}^{1/(n+1)} \quad (6.55)$$

ただし、 $\alpha_j = 1/2(j \neq k)$ 。また、(6.54),(6.55) 式の α_k, e_B には、(6.52),(6.53) 式から求められる値を代入するものとする。

柱の正規化材端ひずみ e_{Cj} は、(6.39) 式 (ただし $x_{Cj} = 0$) を (6.1) 式に代入し、さらに、(6.44) 式を用いることにより、梁の正規化材端歪 e_B を用いて次のように表現できる。

$$e_{Cj} = e_B \left\{ F_1(\alpha_j, p_j) \frac{\beta_B}{\beta_C} \right\}^{1/(n+1)} (\alpha_j + p_j)^n \quad (6.56)$$

ただし、 $\alpha_j = 1/2(j \neq k)$ 。(6.56) 式より、柱の正規化材端歪は梁の正規化材端歪に比例することがわかる。

尚ここでは、 $p_j \leq 1/2(j \neq k)$ 、 $\alpha_k + p_k \leq 1$ を満足する場合を扱ったが、実際の計算上その条件がどのようにチェックされるかについて述べる。 $p_j \leq 1/2(j \neq k)$ は、 $p_j = N_j d_{Cj} / (Q_j h_j)$ を計算することによりチェックできる。一方、 $\alpha_k + p_k \leq 1$ については、(6.52) 式を満たす α_k が存在するか否かによってチェックできる。もし (6.52) 式を満たす α_k が存在しなければ、(6.42) 式から (6.43) 式を導く際に定義される $F_1(\alpha_k, p_k)$ 等の表現を変更しなければならない。その後の計算は、本論文で示した手順と同様に行える。しかしながら、上下層の梁のフランジ間距離 d_{BU}, d_{BL} の差や、柱フランジ間距離 d_{Ck} の梁フランジ間距離に対する比、スパン長一階高比 l/h_k に非現実的な値を採用しない限り、 $\alpha_k + p_k \leq 1$ を満足する α_k が存在することが確認できる。すなわち、 $p_j \leq 1/2(j \neq k)$ 、 $\alpha_k + p_k \leq 1$ を満足する設計解領域と、その条件を満足しない設計解領域が存在するが、ここでは、現実的な幾何学的パラメータを採用したときに対象となる、基本的な設計解領域の解表現を導いたともいえる。

6-4 弾性支持されたモデルへの拡張

図 6.9 に示すような、弾性ばねで支持された f 層単位ユニット骨組モデルを扱う。設計荷重としては、 \mathbf{P} の他に 1 層柱脚節点に水平荷重 H_0 と鉛直荷重 V_0 が作用するものとする。弾性ばねは、杭剛性をモデル化したものであり、一層柱脚節点の水平変位、回転、鉛直変位に関する剛性と、水平変位および回転の相関剛性が存在するものとする。その節点の水平変位、回転、鉛直変位に関する剛性行列は、次式で与えられ、以下では指定されているものとして扱う。

$$[K_P] = \begin{bmatrix} k_{HH} & k_{HR} & 0 \\ k_{RH} & k_{RR} & 0 \\ 0 & 0 & k_V \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

(6.57) 式の剛性としては、Novak and Sharnouby(1983) による単杭 (single pile) としての剛性を採用してもよい。この剛性は、波動論に基づき導かれた剛性を振動数非依存型のものとして近似化したものである。この時、図 6.9 のモデルに対するコンプライアンス $C(\mathbf{A})$ は、次のように定義できる。

$$\begin{aligned} C(\mathbf{A}) &= \mathbf{P}^T \mathbf{U}(\mathbf{A}) + H_0 u_0(\mathbf{A}) + V_0 v_0(\mathbf{A}) \\ &= \sum_{i=1}^f \{ H_i (u_i(\mathbf{A}) - u_0(\mathbf{A})) + V_i (v_i(\mathbf{A}) - v_0(\mathbf{A})) \} + u_0(\mathbf{A}) \sum_{i=0}^f H_i + v_0(\mathbf{A}) \sum_{i=0}^f V_i \\ &= \sum_{i=1}^{2f+1} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} A_i \int_0^{i_i} \sigma_y \epsilon_y \left| \frac{\epsilon_i^{(j)}(x_i; \mathbf{A})}{\epsilon_y} \right|^{(n+1)/n} dx_i + \{ u_0(\mathbf{A}) \theta_0(\mathbf{A}) v_0(\mathbf{A}) \} [K_P] \begin{Bmatrix} u_0(\mathbf{A}) \\ \theta_0(\mathbf{A}) \\ v_0(\mathbf{A}) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.58)$$

ただし、 $u_0(\mathbf{A}), \theta_0(\mathbf{A}), v_0(\mathbf{A})$ は、設計 \mathbf{A} の骨組の一層柱脚節点の水平変位、回転角、鉛直変位を表わす。

骨組全体の水平方向および鉛直方向の釣合式より次式を得る。

$$\sum_{i=0}^J H_i = k_{HH}u_0(\mathbf{A}) + k_{HR}\theta_0(\mathbf{A}) \quad (6.59)$$

$$\sum_{i=0}^J V_i = k_V v_0(\mathbf{A}) \quad (6.60)$$

図 6.9 のモデルに対するコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計問題は次のように述べられる。

[問題 ODSCS]

コンプライアンス制約条件

$$C(\mathbf{A}) = \bar{C} \quad (6.61)$$

を満たし、(6.2) 式で定義される評価関数 w を最小にする断面積集合 \mathbf{A} を求めよ。

[問題 ODSCS] に対する大域最適性の必要十分条件は、基礎固定時の場合と同様に導くことができ、最終的には(6.27a) 式と同一のものとなる。[問題 ODSCS] に対する最適設計解を求める過程も [問題 ODSC] の場合とほぼ同様である。ただし、(6.54) 式の梁の断面積の中で、 $j = 0$ に対する表現が異なり、次のように表現される。

$$A_{B0} = \frac{1}{2\sigma_y d_{B0}} \{ \alpha_1 Q_1 h_1 - k_{RH}u_0(\mathbf{A}) - k_{RR}\theta_0(\mathbf{A}) \} e_B^{-1/n} \quad (6.62)$$

これは、一層柱脚節点の節点方程式に弾性支持ばねの項が付加されることを意味している。基礎固定時には、基礎梁の断面積が隣接する梁の断面積の約 $1/3 \sim 1/2$ となり、非現実的なものとなったが、弾性支持の場合には、支持ばねの存在により、(6.62) 式から明らかなように、そのような事態は発生しない。

6-5 応答制約設計

前節までは、コンプライアンス制約条件下の最適設計理論を扱ってきた。6-3 節で提示した設計公式は、コンプライアンス制約条件下の設計公式であり、設計公式中の梁の(平均化)正規化材端歪 e_B はコンプライアンス制約条件(6.53) 式から決定された。しかしながら、実際の設計においては、コンプライアンス値を直接指定するよりも、骨組および部材の変形能力を考慮して梁の正規化材端歪 e_B を指定する方が有用である。また、(6.56) 式を用いて、柱の正規化材端歪 e_{Cj} を指定値以下にするような e_B を求めることも可能である。その時、指定した e_B に対するコンプライアンス値は(6.53) 式から算出できる。この意味で、前節までに展開したコンプライアンス制約条件下の最適設計公式は、平均化歪の最大値の制約設計公式と見なすこともできる。さらに、コンプライアンス制約条件下の最適設計問題においてコスト係数として導入された係数を、(6.56) 式の意味で梁と柱の正規化材端歪比の調整パラメーターと見なすことも可能である。あるいは、その係数を層ごとに変化させることにより、梁と柱の正規化材端歪の層方向分布の調整パラメーターと見なすことも可能である。

ここでは、サンドイッチ断面部材から構成される骨組に対する理論を展開しているが、前述のように、サンドイッチ断面部材の材端モーメント-材端回転角関係が、現実的な中実断面部材のそれと等価になるように断面諸量を換算することにより、本平均化最大歪の制約設計公式は、現実的な部材の部材塑性率の制約設計公式として用いることが可能である。

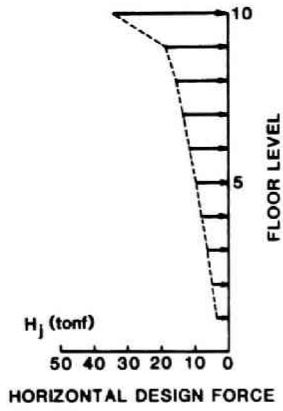


図6.10 設計用水平荷重

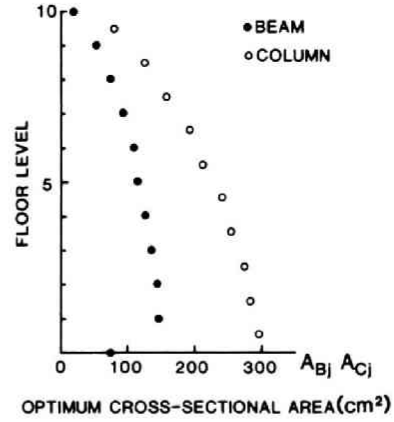


図6.11 最適断面積分布

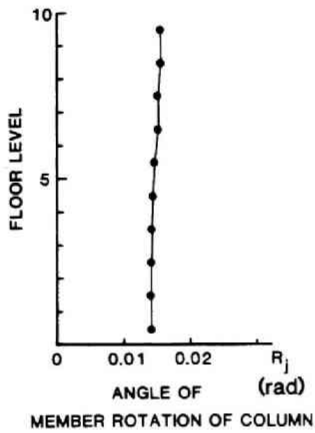


図6.12 層間変形角分布

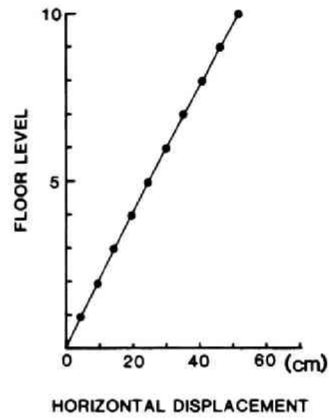


図6.13 水平変位分布

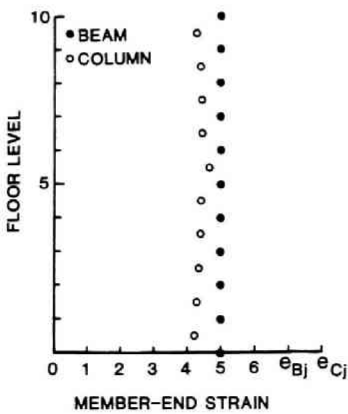


図6.14 正規化材端歪分布

j	h_j (cm)	d_{Cj} (cm)	d_{Bj} (cm)	V_j (tonf)
10	350.0	21.0	33.0	33.0
9	350.0	21.0	33.0	30.0
8	350.0	22.0	33.0	30.0
7	350.0	22.0	33.0	30.0
6	350.0	23.0	33.0	30.0
5	350.0	23.0	35.0	30.0
4	350.0	24.0	35.0	30.0
3	350.0	24.0	35.0	30.0
2	350.0	25.0	35.0	30.0
1	350.0	25.0	35.0	30.0
0			35.0	

表6.1 非制御パラメーター

6-6 設計例

前節の応答制約設計法（平均化歪の最大値の制約設計法）を用いて設計した固定基礎を有する10層の骨組例を示す。非制御パラメータの一部を表6.1に示す。その他の非制御パラメータは、 $l = 700(\text{cm})$, $n = 5.0$, $\sigma_y = 3.0(\text{tonf/cm}^2)$, $\sigma_y/\epsilon_y = 2100(\text{tonf/cm}^2)$, $\beta_B/\beta_C = 1.8$ である。設計用水平荷重 H_j は、建築基準法の2次設計で定められている図6.10に示す分布形を採用した。その際に塑性率は5.0とした。ただし、ここでは構造特性係数に着目しているため、地域係数 $Z = 1.0$ 、振動特性係数 $R_t = 1.0$ 、形状係数 $F_{cs} = 1.0$ とした。この時、(6.53)式から求められるコンプライアンスの値は、 $\bar{C} = 5034.5(\text{tonf} \cdot \text{cm})$ である。

式(6.54),(6.55)を用いて設計した骨組の梁と柱の断面積分布を図6.11に示す。図より、柱の断面積分布は上層に向かうに従い徐々に減少する滑らかな分布となっていることがわかる。一方、梁の断面積分布は1～9層においては滑らかな分布となっているが、最上層梁と最下層梁は隣接する梁の断面積の1/3～1/2となっている。より実用的な解を得るためには、他の設計条件に基づき導入される最小断面積制限を考慮する必要がある。あるいは、6-4節で提示した弾性支持されたモデルに対する理論を用いれば、このような事態は発生しない。

図6.12、6.13、6.14はそれぞれ、層間変形角分布、水平変位分布と梁および柱の正規化材端歪分布を示す。図より層間変形角分布は層方向にほぼ一様な分布となっていることがわかる。また、柱の正規化材端歪分布も第6層(上記の*k*層)を除いてほぼ一様となっていることがわかる。

6-7 結論

本章では、非線形弾性骨組の最適設計理論および静的設計用荷重に対する応答制約設計法を展開した。本章の理論は、七章で展開する一層現実的なモデルを用いた理論を展開するための基礎理論としての意義を有している。本章で得られた主な成果は以下の通りである。

- (1) 安定な構成法則を有する材料から構成される非線形弾性平面骨組に対して、骨組全体としてのひずみエネルギーあるいは骨組全体としての平均化剛性の一つの指標であるコンプライアンスというシステム性能を定義し、それを制約した最小コスト設計問題を定式化した。
- (2) 最小コスト設計問題に対する大域最適性の必要十分条件を最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いて導いた。最小断面積制約条件がすべて不等号で満たされるときに最適性条件は、「最適設計された骨組においては、部材あたりの平均ひずみエネルギー密度が、その部材のコスト係数に比例して分配される」ことを示している。
- (3) 単位ユニット骨組モデルを一例として取り上げ、最適性条件を用いて部材の最適断面積の閉形表現を導出する過程を示した。
- (4) 本理論を弾性支持されたモデルに対して拡張するための方法を展開し、基礎固定モデルからの設計公式の変更点を明示した。
- (5) 変形モードも閉形表現で得られるため、指定コンプライアンス値と梁の平均化材端歪が一对一で関係づけられることを示した。その結果、平均化材端歪の最大値を直接制約することが可能となり、本最小コスト設計理論は、平均化材端歪の最大値の制約設計理論ともみなせることを示した。サンドイッチ断面部材の材端モーメント-材端回転角関係が、現実的な中実断面部材のそれと等価になるように断面諸量を換算することにより、本平均化最大歪の制約設計公式は、現実的な部材の部材塑性率の制約設計公式として用いることが可能である。

文献

- Austin, M.A. and K.S. Pister (1985): Design of Seismic-resistant Friction-braced Frames. *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol.111, No.12, pp2751-2769.
- Balling, R.J., K.S. Pister and V. Ciampi (1983): Optimal Seismic-resistant Design of a Planar Steel Frame. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.11(4), pp541-556.
- Bensoe, M.P. and J. Sokolowski (1987): Sensitivity Analysis and Optimization of Elastic-plastic Structures. *Engineering Optimization*, Vol.11, pp31-38.
- Bhatti, M.A. and K.S. Pister (1981): A Dual Criteria Approach for Optimal Design of Earthquake-resistant Structural Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.9(6), pp557-572.
- Cinquini, C. (1984): Optimality Criteria for Materials with Nonlinear Behavior: Application to Beams in Bending. *Engineering Structures*, Vol.6(1), pp61-64.
- Cinquini, C. and R. Contro (1985): Optimal Design of Beams Discretized by Elastic Plastic Finite Element. *Computers and Structures*, Vol.20, pp475-485.
- Dems, K. and Z. Mroz (1978): Multiparameter Structural Shape Optimization by the Finite Element Method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.13(2), pp247-263.
- Drucker, D.C. (1958): Variational Principles in the Mathematical Theory of Plasticity. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, McGraw-Hill, Vol.8, pp7-22.
- Gasparini, D.A. and E.H. Vanmarcke (1976) : *Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra-SIMQKE*, A computer program distributed by NISEE/ Computer Applications, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Haug, E.J. (1981): A Unified Theory of Optimization of Structures with Displacement and Compliance Constraints. *J. Struct. Mech.*, Vol.9(4), pp415-437.
- Kaldjian, M.J. (1967): Moment-curvature of Beams as Ramberg-Osgood Functions. *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol.93, No.5, pp53-65.
- Kanaan, A.E. and G.H. Powell (1973): *A General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures - DRAIN-2D*. Computer Program Distributed by NISEE, Berkeley, CA.
- Kaneko, I. and G. Maier (1981): Optimum Design of Plastic Structures under Displacement Constraints. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.27, pp369-391.
- Mroz, Z., M.P. Kamat and R.H. Plaut (1985): Sensitivity Analysis and Optimal Design of Nonlinear Beams and Plates. *J. Struct. Mech.*, Vol.13(3&4), pp245-266.
- 中村 恒善(1980): 建築骨組の最適設計. 丸善.
- Nakamura, Tsuneyoshi and Y. Takenaka (1983): Optimum Design of Multistory Multispan Frames for Prescribed Elastic Compliance. *J. Struct. Mech.*, Vol.11(3), pp271-295.
- 中村 恒善、竹脇 出(1982): 非線形弾性平面ラーメンの静的コンプライアンス制約条件下の最適設計. 日本建築学会学術講演梗概集(東北)、pp1051-1052.
- 中村 恒善、竹脇 出(1986): 非線形弾性平面骨組のコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計と最大ひずみ制御法. 日本建築学会構造系論文報告集、No.362, pp26-36.

- Nakamura, Tsuneyoshi and T. Yamane(1986) : Optimum Design and Earthquake-response Constrained Design of Elastic Shear Buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, pp797-815.
- Newmark, N.M. and W.J. Hall (1982) : *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA.
- Novak, M. and B.E. Sharnouby (1983) : Stiffness Constants of Single Piles, *J. Geotech. Eng.*, ASCE, Vol.109, No.7, pp961-974.
- Polak, E., K.S. Pister and D. Ray (1976): Optimal Design of Framed Structures Subjected to Earthquakes. *Engineering Optimization*, Vol.2(1), pp65-71.
- Prager, W.(1972): Conditions for Structural Optimality. *Computers and Structures*, Vol.2, pp833-840.
- Prager, W.(1974): *Introduction to Structural Optimization*. Springer Verlag.
- Prager, W. and C.Y. Sheu (1968): Minimum-weight Design with Piecewise Constant Specific Stiffness. *J. Optim. Theory Appl.*, Vol.2, pp179-186.
- Prager, W. and J.E. Taylor (1968): Problems of Optimal Structural Design. *J. Appl. Mech.*, Vol.35, pp102-106.
- Ray, D., K.S. Pister and E. Polak (1978): Sensitivity Analysis for Hysteretic Dynamic Systems: Theory and Applications. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.14, pp179-208.
- Ryu, Y.S., M. Harririan, C.C. Wu and J.S. Arora (1985): Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response. *Computers and Structures*, Vol.21(1&2), pp245-255.

七章 弾性支持された非線形弾性建築骨組のシステム柔性 制約条件下の最小コスト設計と応答制約設計*

本章の第一の目的は、非線形弾性構造物の構造物全体の柔性を表わす指標として新たに「システム柔性」と呼ばれるシステム性能量を定義し、そのシステム柔性制約条件下の最適設計問題に対して大域最適性の必要十分条件を導き、その問題に対する準閉形解を誘導することである。第二の目的は、システム柔性制約条件下の最適設計問題に対する設計解公式を用いて、静的設計用荷重に対して指定した部材塑性率分布を示す骨組の部材剛性を設計公式として誘導することである。ここで展開する手法は、前章でも述べたように、次の事実から非弾性構造物に対する理論とも見なし得る。すなわち、「如何なる載荷経路においても除荷が生じなければ、非線形弾性構造物に対する理論は、同じ処女応力-歪関係を有する非弾性構造物に対する理論とも見なし得る」。Dems and Mroz(1978)も非線形弾性構造物に対する構造物全体の剛性としてポテンシャルエネルギー量を取り上げ、形状最適設計問題を定式化しているが、彼らの理論は一項べき級数型の応力-歪関係に従う材料で構成される構造物に限定されていることに注意する必要がある。それに対して、ここで展開する理論は、任意の非線形弾性構成法則に従う材料で構成される構造物に対して適用可能である。

前章では、一項べき級数型の非線形弾性応力-歪関係に従う材料で構成され、サンドイッチ断面を有する部材からなる建築骨組に対してコンプライアンスというシステム性能を定義し、そのコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計理論および応答制約設計法を展開した。本章では、任意の構成法則に従い、かつ中実断面を有する非線形弾性骨組のより一般的な設計理論を展開するために、上記のシステム柔性を制約条件とする最小コスト設計理論および応答制約設計法を展開する。さらに、非線形弾性構造物に対する設計感度解析法を有効に利用して、連続変数として求められた断面の幾何学的パラメータを、最も近傍の实在断面のパラメータ値に変更した場合の非線形応答の変化量を評価する方法を提示する。

7-1 最小コスト設計問題

図7.1に示すようなスパン方向に単位ユニットを有する f 層骨組モデルを扱う。実務において構造設計者は、次のような設計目標を設定する場合が多い。すなわち、激震レベル(レベル2)の設計用地震外乱に対して梁はある程度の塑性変形を経験してもよいが、柱の応答は弾性範囲内にとどめたいと考える。このような設計を実現させるために、上記のモデルの柱は全てヤング係数 E の線形弾性材料で構成されるものと仮定する。一方、梁はDruckerの論文(Drucker, 1958)の意味で安定な次のような任意の非線形弾性応力-歪関係に従う材料で構成されるものとする。

$$\sigma = \frac{dW_B(\epsilon)}{d\epsilon} \quad (7.1)$$

第 j 層の階高および同一層の2つの支持ローラー間距離をそれぞれ h_j , L で表わす。部材中心線寸法が指定された骨組を、図7.1に示される設計用荷重 $\mathbf{H} = \{H_j\}$ に対して設計しようとする。下から j 番目の床を第 j 床と呼び、第 $(j+1)$ 床を支持する梁および第 j 層柱をそれぞれ「第 j 梁」, 「第 j 柱」と呼ぶ。各梁は図7.2に示すように、指定断面せい $2d_{1j}$ および指定フランジ厚 $d_{1j} - d_{2j}$ を有するH型断面部材で構成されるものとする。設計変数は、梁についてはフランジ厚 $\{b_j\}$ である。第 j 梁のウェブ厚は、指定係数 α を用いて αb_j

* 本章の一部は、1-2節の論文[6]の一部に加筆しまとめたものである。

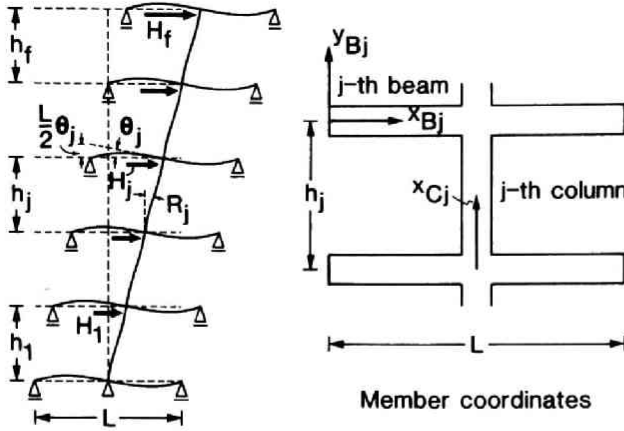


図7.1 単位ユニット骨組モデルに作用する設計用水平荷重および部材座標系

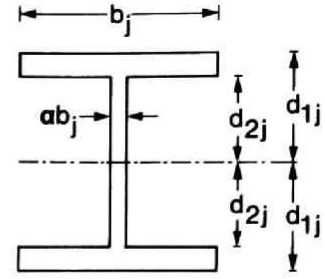


図7.2 梁の断面形状 (H型断面部材)

で表わされるものとする。一方、柱に対する設計変数は曲げ剛性集合 $\{J_j\}$ である。第 j 柱の断面 2 次半径は r_j で指定されているものとする。

設計変数の集合を $\mathbf{k}^T = \{\{b_j\}^T \{J_j\}^T\}$ で表わす。以下では設計 \mathbf{k} によって定義される骨組を「設計 \mathbf{k} の骨組」と呼ぶ。荷重 H_j の載荷点の載荷方向変位は設計 \mathbf{k} に依存するため $u_j(\mathbf{k})$ と表示する。設計 \mathbf{k} の骨組の第 j 梁の歪分布および第 j 柱の曲率分布もまた設計 \mathbf{k} の関数となるため、それぞれ $\epsilon_j(x_{Bj}, y_{Bj}; \mathbf{k})$, $\kappa_j(x_{Cj}; \mathbf{k})$ と表示する。ここで、 x_{Bj}, y_{Bj}, x_{Cj} は、図 7.1 に示される部材座標を表わす。以下では表現の簡略化のため梁の歪分布および柱の曲率分布は、 $\epsilon_j(\mathbf{k}), \kappa_j(\mathbf{k})$ と表示する。

荷重 \mathbf{H} の作用下で実際に変形している状態を基準とした無変形状態の非線形弾性骨組の全ポテンシャルエネルギーレベルは、構造物全体の柔性を表わす一つのシステム性能量と考えられるため、ここでは「システム柔性」と呼ぶ。設計 \mathbf{k} の骨組のシステム柔性を $F_s(\mathbf{k})$ で表わすことにすると、それは次式のように定義される。

$$F_s(\mathbf{k}) = - \sum V_{Bj} D_{Bj}[\epsilon_j(\mathbf{k})] - \sum V_{Cj} D_{Cj}[\kappa_j(\mathbf{k})] + \mathbf{H}^T \mathbf{U}(\mathbf{k}) \quad (7.2)$$

ここで、 $\mathbf{U}(\mathbf{k})$ は $\{u_j(\mathbf{k})\}$ を表わし、 $V_{Bj} = 2b_j\{d_{1j} - (1-\alpha)d_{2j}\}L$, $V_{Cj} = J_j h_j / (Er_j^2)$ は第 j 梁と第 j 柱の体積を表わす。(7.2) 式以降においては、梁および柱に関する総和記号は、それぞれ $j = 0$ から $j = f$ までと $j = 1$ から $j = f$ までを表わす。(7.2) 式における $D_{Bj}[\epsilon_j(\mathbf{k})]$ と $D_{Cj}[\kappa_j(\mathbf{k})]$ はそれぞれ第 j 梁と第 j 柱の平均歪エネルギー密度を表わし、次のように表現できる。

$$D_{Bj}[\epsilon_j(\mathbf{k})] = \frac{1}{[d_{1j} - (1-\alpha)d_{2j}]L} \left\{ \int_0^L \int_0^{d_{1j}} W_B[\epsilon_j(\mathbf{k})] dy_{Bj} dx_{Bj} - (1-\alpha) \int_0^L \int_0^{d_{2j}} W_B[\epsilon_j(\mathbf{k})] dy_{Bj} dx_{Bj} \right\} \quad (7.3)$$

$$D_{Cj}[\kappa_j(\mathbf{k})] = \frac{Er_j^2}{2h_j} \int_0^{h_j} \kappa_j(\mathbf{k})^2 dx_{Cj} \quad (7.4)$$

(7.3) 式では、梁には軸力が存在しないという条件を用いている。

Dems and Mroz(1978) は、形式上(7.2) 式と同じ表現を扱っているが、コンプライアンスを制約する彼らの理論は、一項べき級数型の応力-歪関係に従う材料で構成される構造物に限定されており、任意の応力-歪関係に従う材料で構成される構造物に直接適用することはできない。それに対して、ここで展開する理論は、任意の安定な応力-歪関係に従う材料で構成される構造物に対して適用可能である。

第 j 梁と第 j 柱の重み係数 (コスト係数) をそれぞれ β_{Bj} と β_{Cj} で表わす。評価関数を、 β_{Bj} と β_{Cj} を重み係数とする重み付き体積和として次のように定義する。

$$w = \sum \beta_{Bj} V_{Bj} + \sum \beta_{Cj} V_{Cj} = \sum \beta_{Bj} 2b_j \{d_{1j} - (1 - \alpha)d_{2j}\} L + \sum \frac{\beta_{Cj} J_j h_j}{(Er_j^2)} \quad (7.5)$$

システム柔性の指定値を \bar{F}_s で表わす。この時、システム柔性を制約条件とする最小コスト設計問題は次のように述べられる。

[問題 ODSF]

システム柔性制約条件

$$F_s(\mathbf{k}) = \bar{F}_s \quad (7.6)$$

を満たし、(7.5) 式で定義される評価関数 w を最小化する設計 $\mathbf{k}^T = \{\{b_j\}^T \{J_j\}^T\}$ を求めよ。

7-2 最適性条件の誘導

大域最適性の必要十分条件を導く Prager らによる一般的な方法(Prager and Taylor, 1968; Prager, 1972; Prager, 1974) は、[問題 ODSF] に対しても適用可能である。

制約条件(7.6) を満たす任意の設計を $\mathbf{k}^T = \{\{b_j\}^T \{J_j\}^T\}$ で表わし、[問題 ODSF] の最適設計解を $\bar{\mathbf{k}}^T = \{\{\bar{b}_j\}^T \{\bar{J}_j\}^T\}$ で表わす。最適設計 $\bar{\mathbf{k}}$ の骨組の変位 $\mathbf{U}(\bar{\mathbf{k}})$ 、梁の歪分布 $\{\epsilon_j(\bar{\mathbf{k}})\}$ 、柱の曲率分布 $\{\kappa_j(\bar{\mathbf{k}})\}$ は、設計 \mathbf{k} の非線形弾性骨組にとって運動学的に許容なモードであるため、設計 \mathbf{k} の骨組に対する最小ポテンシャルエネルギーの原理 (Drucker, 1958) において次のように用いることができる。

$$\sum V_{Bj} D_{Bj}[\epsilon_j(\bar{\mathbf{k}})] + \sum V_{Cj} D_{Cj}[\kappa_j(\bar{\mathbf{k}})] - \mathbf{H}^T \mathbf{U}(\bar{\mathbf{k}}) \geq \sum V_{Bj} D_{Bj}[\epsilon_j(\mathbf{k})] + \sum V_{Cj} D_{Cj}[\kappa_j(\mathbf{k})] - \mathbf{H}^T \mathbf{U}(\mathbf{k}) \quad (7.7)$$

設計 \mathbf{k} の骨組と設計 $\bar{\mathbf{k}}$ の骨組は、制約条件(7.6) により同じシステム柔性値を有するため、次の関係が成立する。

$$F_s(\mathbf{k}) = F_s(\bar{\mathbf{k}}) \quad (7.8)$$

(7.8) 式を、(7.7) 式の右辺に代入すれば、次式が得られる。

$$\sum (V_{Bj} - \bar{V}_{Bj}) D_{Bj}[\epsilon_j(\bar{\mathbf{k}})] + \sum (V_{Cj} - \bar{V}_{Cj}) D_{Cj}[\kappa_j(\bar{\mathbf{k}})] \geq 0 \quad (7.9)$$

ここで、 \bar{V}_{Bj} 、 \bar{V}_{Cj} は設計 $\bar{\mathbf{k}}$ の骨組の第 j 梁と第 j 柱の体積を表わす。

一方、 $\tilde{\mathbf{k}}$ が制約条件(7.6)を満たす全ての設計の中で最適設計であるという条件は次のように表現できる。

$$\sum \beta_{Bj}(V_{Bj} - \tilde{V}_{Bj}) + \sum \beta_{Cj}(V_{Cj} - \tilde{V}_{Cj}) \geq 0 \quad (7.10)$$

(7.9),(7.10)式は次のようなベクトルの内積とも見なせる。

$$\mathbf{r}^T \mathbf{D} \geq 0 \quad (7.11)$$

$$\mathbf{r}^T \mathbf{q} \geq 0 \quad (7.12)$$

ここで、 $\mathbf{r}, \mathbf{D}, \mathbf{q}$ は次の諸量を表わす。

$$\mathbf{r}^T = \{V_{B0} - \tilde{V}_{B0} \quad V_{B1} - \tilde{V}_{B1} \dots V_{Bf} - \tilde{V}_{Bf} \quad V_{C1} - \tilde{V}_{C1} \dots V_{Cf} - \tilde{V}_{Cf}\} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{D}^T = \{D_{B0}[\epsilon_0(\tilde{\mathbf{k}})] \quad D_{B1}[\epsilon_1(\tilde{\mathbf{k}})] \dots D_{Bf}[\epsilon_f(\tilde{\mathbf{k}})] \quad D_{C1}[\kappa_1(\tilde{\mathbf{k}})] \dots D_{Cf}[\kappa_f(\tilde{\mathbf{k}})]\} \quad (7.14)$$

$$\mathbf{q}^T = \{\beta_{B0} \quad \beta_{B1} \dots \beta_{Bf} \quad \beta_{C1} \dots \beta_{Cf}\} \quad (7.15)$$

(7.11)式と(7.12)式にFarkasの定理を適用すると、[問題ODSF]に対する大域最適性の必要十分条件が次のように導かれる。

$$\mathbf{D} = \nu \mathbf{q} \quad (7.16)$$

ここで ν は正の定数である。

最適性条件(7.16)は、具体的には次のように表現される。

$$D_{Bj}[\epsilon_j(\tilde{\mathbf{k}})] = \nu \beta_{Bj} \quad \text{for beam} \quad (7.17)$$

$$D_{Cj}[\kappa_j(\tilde{\mathbf{k}})] = \nu \beta_{Cj} \quad \text{for column} \quad (7.18)$$

換言すれば、(7.17,18)式は「最適設計された骨組においては、各部材の平均歪エネルギー密度は、部材のコスト係数に比例して分配される」ことを意味している。

7-3 最小コスト設計解の誘導

[問題ODSF]に対する閉形表現の解を前節で導いた最適性条件を用いて誘導する。以下では最適設計解のみ扱うので、 $(\tilde{\mathbf{k}})$ 記号は省略する。

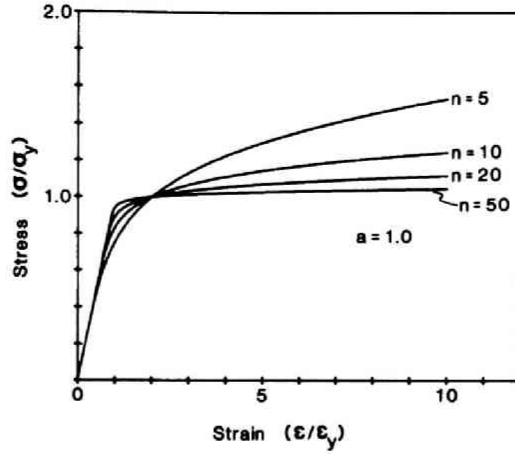


図7.3 Ramberg-Osgood型応力-歪関係

ここでは、梁に対する現実的な応力-歪関係として、次のような Ramberg-Osgood 型のものを採用する (図7.3)。

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} \left\{ 1 + a \left| \frac{\sigma}{\sigma_y} \right|^{n-1} \right\} \quad (7.19)$$

ここで、 $a, n, \epsilon_y, \sigma_y$ は材料定数である。 $n \rightarrow \infty$ の場合は完全弾塑性型の応力-歪関係に対応する。

Ramberg-Osgood 型の応力-歪関係に基づく鋼梁の単調載荷時の解析的な曲げモーメント-曲率関係は、物理実験結果と良好な対応を示すことはよく知られている (Kaldjian, 1967)。

(7.19) 式は応力を歪で表現するには適していないため、 $W_B(\epsilon)$ の陽な表現を得ることはできない。しかしながら、ここでは $W_B(\epsilon)$ および対応する $D_{Bj}(\epsilon_j)$, $D_{Cj}(\kappa_j)$ の数値のみが各 $\epsilon, \epsilon_j, \kappa_j$ に対して求められればよく、その積分実行に際してどの変数をパラメータとして選定するかは問題ではない。そこで、 $W_B(\epsilon)$ を計算するために、次のような関数 $\bar{W}_B(\sigma)$ を導入する。

$$W_B[\epsilon(\sigma)] \equiv \bar{W}_B(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y \left\{ \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2 + \frac{2na}{n+1} \left| \frac{\sigma}{\sigma_y} \right|^{n+1} \right\} \quad (7.20)$$

$\bar{W}_B(\sigma)$ はコンプリメンタリーエネルギー密度関数ではないことに注意する必要がある。 ϵ の与えられた値 ϵ^* に対する σ の対応する値 σ^* は、(7.19) 式を解くことにより数値的に求められる。この値 σ^* が (7.20) 式に代入されると、 $W_B(\epsilon^*)$ が求められる。以下の閉形表現の解の導出においては、 $W_B(\epsilon)$ の値は (7.20) 式を用いて計算される。

本モデルにおける設計用荷重は梁に軸力を生ぜしめないため、第 j 梁の応力分布は次のように表現できる。

$$\sigma_j(x_{Bj}, y_{Bj}) = 2\sigma_j \left(\frac{L}{2}, y_{Bj} \right) \left(\frac{x_{Bj}}{L} \right) \quad \left(0 \leq x_{Bj} \leq \frac{L}{2} \right) \quad (7.21)$$

表現の簡略化のために、次のような無次元量を導入する。

$$s_j(x_{Bj}, y_{Bj}) = \frac{\sigma_j(x_{Bj}, y_{Bj})}{\sigma_y}, \quad \eta_1 = \frac{y_{Bj}}{d_{1j}}, \quad \eta_2 = \frac{y_{Bj}}{d_{2j}} \quad (7.22)$$

(7.21) 式を(7.20) 式に代入することにより $\overline{W}_B[\sigma_j(x_{Bj}, y_{Bj})]$ が求められる。その値は $D_{Bj}(\epsilon_j)$ を計算する際に(7.3) 式で用いられる。その時(7.17) 式は次の表現に帰せられる。

$$\frac{\sigma_y \epsilon_y}{2[d_{1j} - (1 - \alpha)d_{2j}]} \left\{ d_{1j} \left[\frac{1}{3} T_{1j} + \frac{2na}{(n+1)(n+2)} T_{2j} \right] - (1 - \alpha)d_{2j} \left[\frac{1}{3} T_{3j} + \frac{2na}{(n+1)(n+2)} T_{4j} \right] \right\} = \nu \beta_{Bj} \quad (7.23)$$

ここで、 T_{1j}, \dots, T_{4j} は次の量を表わす。

$$T_{1j} = \int_0^1 \left[s_j \left(\frac{L}{2}, \eta_1 d_{1j} \right) \right]^2 d\eta_1, \quad T_{2j} = \int_0^1 \left[s_j \left(\frac{L}{2}, \eta_1 d_{1j} \right) \right]^{n+1} d\eta_1, \\ T_{3j} = \int_0^1 \left[s_j \left(\frac{L}{2}, \eta_2 d_{2j} \right) \right]^2 d\eta_2, \quad T_{4j} = \int_0^1 \left[s_j \left(\frac{L}{2}, \eta_2 d_{2j} \right) \right]^{n+1} d\eta_2 \quad (7.24)$$

第 j 梁の材端回転角 θ_j は、(7.19),(7.21) 式を用いて梁の曲率分布を積分することにより次のように求められる (図 7.1 参照)。

$$\theta_j = \frac{\epsilon_y L}{2d_{1j}} \left\{ \frac{1}{3} s_j \left(\frac{L}{2}, d_{1j} \right) + \frac{a}{n+2} \left[s_j \left(\frac{L}{2}, d_{1j} \right) \right]^n \right\} \quad (7.25)$$

一方、第 j 層の層間変形角 R_j は、柱の曲率分布を最適性条件(7.18) 式に代入し、さらに演算を施すことにより、節点回転角と正の定数 ν を用いて次のように表現できる。

$$R_j = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j) + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{6\beta_{Cj} h_j^2}{E r_j^2} \nu - 3(\theta_{j-1} - \theta_j)^2} \quad (7.26)$$

第 j 梁の最適フランジ幅の表現は、梁の材端断面における応力分布とその断面における曲げモーメントの関係をj用いて次のように求められる。

$$b_j = \frac{M_{Bj}}{2\sigma_y [d_{1j}^2 T_{5j} - (1 - \alpha)d_{2j}^2 T_{6j}]} \quad (7.27)$$

ここで、 T_{5j}, T_{6j} は次の諸量を表わす。

$$T_{5j} = \int_0^1 s_j \left(\frac{L}{2}, \eta_1 d_{1j} \right) \eta_1 d\eta_1, \quad T_{6j} = \int_0^1 s_j \left(\frac{L}{2}, \eta_2 d_{2j} \right) \eta_2 d\eta_2 \quad (7.28)$$

(7.27) 式における梁端曲げモーメント M_{Bj} は、層剪断力 $\{Q_j\}$ を用いて次のように表現できる。

$$M_{Bj} = \frac{1}{2} [(1 - \zeta_j) Q_j h_j + \zeta_{j+1} Q_{j+1} h_{j+1}] \quad (7.29)$$

ここで、 $\zeta_j = (3R_j - \theta_j - 2\theta_{j-1})/[3(2R_j - \theta_j - \theta_{j-1})]$ であり、 $\zeta_0 = \zeta_{f+1} = Q_0 = Q_{f+1} = 0$ である。

第 j 柱の最適曲げ剛性 J_j は、たわみ角法公式と層方程式より、次のように求められる。

$$J_j = \frac{Q_j h_j^2}{6(2R_j - \theta_j - \theta_{j-1})} \quad (7.30)$$

(7.30) 式において、 Q_j の代わりに $(Q_j + N_j R_j)$ を代入すれば柱の $P - \Delta$ 効果を考慮した時の解を得ることができる。ここで、 N_j は第 j 層柱の軸力である。

一旦梁の正規化材端縁応力 s_{1j} が決定されると、 T_{1j} と T_{2j} は数値的に計算できるため、(7.24) 式における T_{1j} と T_{2j} は、 s_{1j} のみの関数とも見なせる。以下では、表現の簡略化のため、第 j 梁の正規化材端縁応力 $s_j(L/2, d_{1j})$ および $y_{Bj} = d_{2j}$ における正規化応力 $s_j(L/2, d_{2j})$ を、それぞれ s_{1j} および s_{2j} と表現する。同様に、(7.24) 式で定義される T_{3j} 、 T_{4j} は、 s_{2j} の関数と解釈できる。断面の平面保持および法線保持の仮定により、 s_{1j} と s_{2j} の間には次のような関係が存在する。

$$s_{1j} (1 + as_{1j}^{n-1}) = s_{2j} (1 + as_{2j}^{n-1}) \frac{d_{1j}}{d_{2j}} \quad (7.31)$$

従って(7.23) 式の左辺は s_{1j} のみの関数と見なせる。それゆえ、(7.23) 式により s_{1j} は ν の関数と理解できる。さらに、第 j 梁の材端回転角 θ_j は、(7.25) 式により ν の関数と解釈でき、 R_j, M_{Bj}, J_j もまた(7.26, 29, 30) 式により ν の関数と解釈できる。従って、(7.27) 式の右辺もまた(7.31) 式により ν の関数と理解できる。

最適性条件(7.17, 18) を(7.2) 式に代入すれば、次式が得られる。

$$\bar{F}_s = - \sum V_{Bj} \beta_{Bj} \nu - \sum V_{Cj} \beta_{Cj} \nu + \mathbf{H}^T \mathbf{U} \quad (7.32)$$

(7.27, 30, 26) 式が(7.32) 式に代入されれば、(7.32) 式の右辺は ν のみの関数となる。その時 ν は(7.32) 式から \bar{F}_s を用いて一意に決定される。一旦 ν が決定されると、 b_j, J_j, θ_j, R_j もまた決定される。

梁のコスト係数 β_{Bj} と比 d_{2j}/d_{1j} が全層で一定の場合には、梁に対する最適性条件(7.23) は、全ての梁の材端縁歪が一定 ($= \epsilon_B$) となることを要求することになる。梁の共通の正規化材端縁歪を $e_B = \epsilon_B/\epsilon_y$ で表示すれば、 ν は(7.23) 式と応力-歪関係(7.19) 式により e_B の関数と見なすことができる。従って、(7.32) 式の右辺は、 e_B のみの関数と見なせる。(7.24)、(7.28) 式の $T_{1j} \sim T_{6j}$ は、直接的には \bar{F}_s 値に対してではなく、 e_B に対して計算可能である。(7.32) 式において、指定した \bar{F}_s の値に対応する e_B の値を見いだすために、ここでは Newton-Raphson 法を採用する。まず、(7.32) 式に対して次の関数を定義する。

$$f(e_B) = - \sum V_{Bj}(e_B) \beta_{Bj} \nu(e_B) - \sum V_{Cj}(e_B) \beta_{Cj} \nu(e_B) + \mathbf{H}^T \mathbf{U}(e_B) - \bar{F}_s, \quad (7.33)$$

関数 $f(e_B)$ は、 e_B の陽な関数ではないので、 $f(e_B)$ の e_B に関する導関数を計算するには、次のような数値的手法によらざるを得ない。

$$\left. \frac{df(e_B)}{de_B} \right|_{e_B=e_B^0} = \frac{f(e_B^0 + \Delta e_B) - f(e_B^0)}{\Delta e_B} \quad (7.34)$$

もし図7.4 に示されるような $e_B - F_s$ 曲線が前もって描かれていれば、指定値 \bar{F}_s に対する e_B の初期値を精度よく求めることができる。図7.4 で採用されている幾何学および力学的パラメータ、および設計用荷重は、後述の設計例題で用いられているものと同じである。システム柔性制約条件下の最適設計問題に対する解を見いだすためのフローチャートを図7.5(a) に示す。 β_{Bj} と d_{2j}/d_{1j} が全層において一定でない場合には、ある特定の梁の材端縁歪を主パラメータとして選定し、その他の梁の材端縁歪は(7.23) 式より iterative に求めることにより、(7.32)~(7.34) 式と同様の方法を展開することができる。

最上層梁と最下層梁に対する(7.29) 式の右辺においては、一項のみ存在するため、それらの梁の M_{Bj} 値は隣接する梁のその約1/2あるいは1/3となる。そのため、そのような梁のフランジ幅も、隣接する梁のその約1/2あるいは1/3となる。もしそのような設計が実用上受け入れられないものであるならば、中村、竹中の論文(Nakamura and Takenaka, 1983) と同様に最小剛性制限を付加して理論を改修する必要がある。実

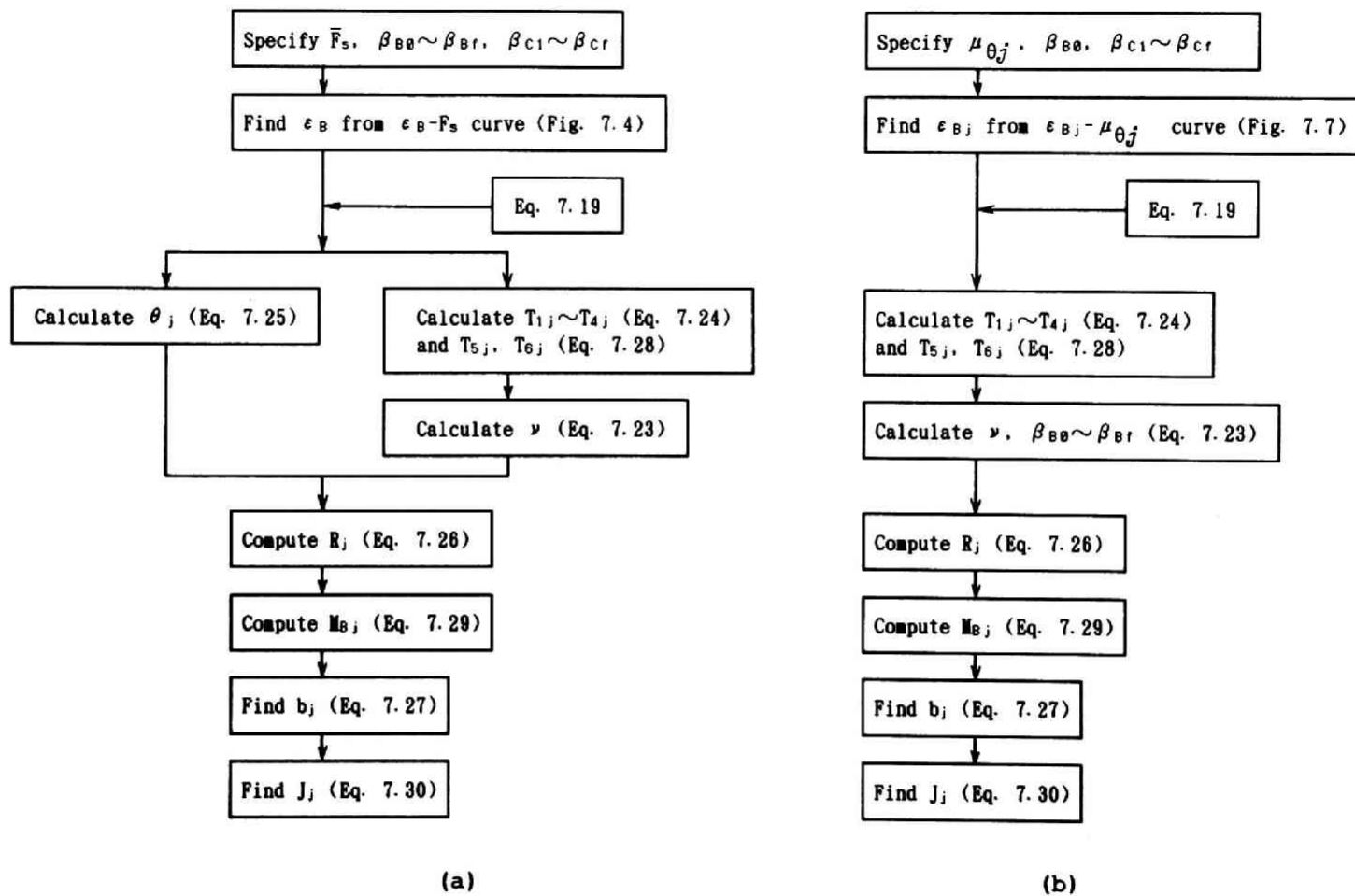


図7.5 (a)システム柔性制約条件下の最適設計を求めるフローチャート, および(b)梁の部材塑性率制約設計を求めるフローチャート

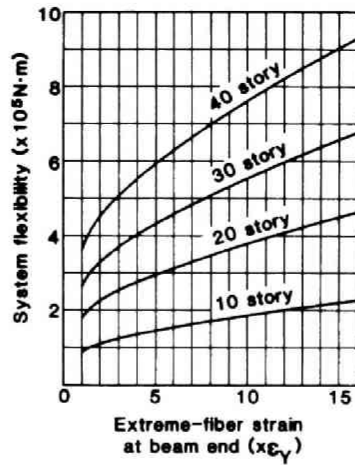


図7.4 10, 20, 30, 40層最適設計骨組における梁の材端縁歪—システム柔性値関係

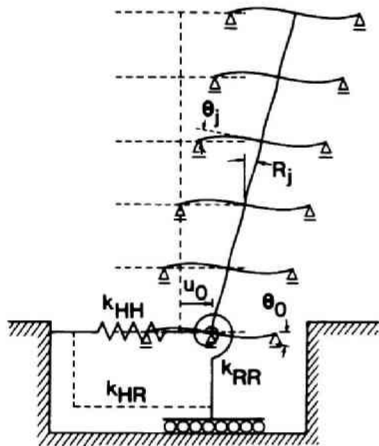


図7.6 弾性支持された単位ユニット骨組モデル

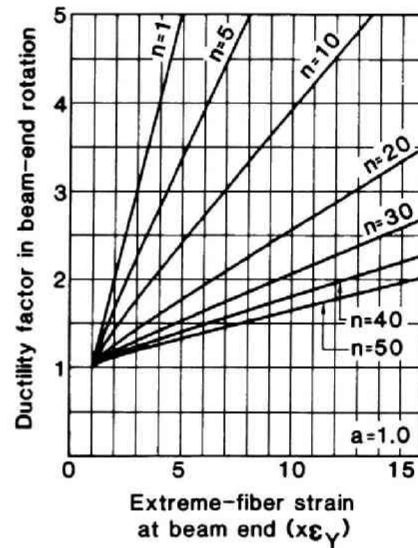


図7.7 種々の構成法則に対する梁の材端縁歪—部材塑性率関係

用的に受け入れられるような設計を得るためには、そのような梁にかなり大きな最小剛性制限値が割り当てられる必要がある。

7-4 弾性支持されたモデルへの拡張

図7.6に示すような、弾性ばねで支持された f 層単位ユニット骨組モデルを扱う。設計荷重としては、 H の他に1層柱脚節点に水平荷重 H_0 が作用するものとする。弾性ばねは、杭剛性をモデル化したものであり、一層柱脚節点の水平変位および回転に関する剛性と、その両者の相関剛性が存在するものとする。その節点の水平変位および回転角に関する剛性行列は、次式で与えられ、以下では指定されているものとして扱う。

$$[K_P] = \begin{bmatrix} k_{HH} & k_{HR} \\ k_{RH} & k_{RR} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

(7.35) 式の剛性としては、(6.4) 節と同様に、Novak and Sharnouby(1983) による単杭(single pile) としての剛性を採用してもよい。この時、図 7.6 のモデルに対するシステム柔性 $F_s(\mathbf{k})$ は、次のように定義できる。

$$\begin{aligned} F_s(\mathbf{k}) &= - \sum V_{Bj} D_{Bj}[\epsilon_j(\mathbf{k})] - \sum V_{Cj} D_{Cj}[\kappa_j(\mathbf{k})] + \mathbf{H}^T \mathbf{U}(\mathbf{k}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{u_0(\mathbf{k}) \theta_0(\mathbf{k})\} [K_P] \begin{Bmatrix} u_0(\mathbf{k}) \\ \theta_0(\mathbf{k}) \end{Bmatrix} + H_0 u_0(\mathbf{k}) \\ &= - \sum V_{Bj} D_{Bj}[\epsilon_j(\mathbf{k})] - \sum V_{Cj} D_{Cj}[\kappa_j(\mathbf{k})] + \sum_{i=1}^J H_i (u_i(\mathbf{k}) - u_0(\mathbf{k})) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{u_0(\mathbf{k}) \theta_0(\mathbf{k})\} [K_P] \begin{Bmatrix} u_0(\mathbf{k}) \\ \theta_0(\mathbf{k}) \end{Bmatrix} + u_0(\mathbf{k}) \sum_{i=0}^J H_i \end{aligned} \quad (7.36)$$

ただし、 $u_0(\mathbf{k})$, $\theta_0(\mathbf{k})$ は、設計 \mathbf{k} の骨組の一層柱脚節点の水平変位および回転角を表す。骨組全体の水平方向の釣合式より次式を得る。

$$\sum_{i=0}^J H_i = k_{HH} u_0(\mathbf{k}) + k_{HR} \theta_0(\mathbf{k}) \quad (7.37)$$

図 7.6 のモデルに対するシステム柔性制約条件下の最小コスト設計問題は次のように述べられる。

[問題 ODSFS]

システム柔性制約条件

$$F_s(\mathbf{k}) = \bar{F}, \quad (7.38)$$

を満たし、(7.5) 式で定義される評価関数 w を最小にする設計 \mathbf{k} を求めよ。

[問題 ODSFS] に対する大域最適性の必要十分条件は、基礎固定時の場合と同様に導くことができ、最終的には(7.17,18) 式と同一のものとなる。[問題 ODSFS] に対する最適設計解を求める過程も [問題 ODSF] の場合とほぼ同様である。ただし、(7.29) 式の梁端曲げモーメントの表現の中で、 $j = 0$ に対する表現が異なり、次のような表現に帰せられる。

$$M_{B0} = \frac{1}{2} \{ \zeta_1 Q_1 h_1 - k_{RH} u_0(\mathbf{k}) - k_{RR} \theta_0(\mathbf{k}) \} \quad (7.39)$$

これは、一層柱脚節点の節点方程式に弾性支持ばねの項が付加されることを意味している。基礎固定時には、基礎梁の断面積が隣接する梁の断面積の約 1/3 ~ 1/2 となり、非現実的なものとなったが、弾性支持の場合には支持ばねの存在により、(7.39) 式から明らかなように、そのような事態は発生しない。

7-5 静的部材塑性率制約設計

7-3 節では、梁の最適断面積および柱の最適曲げ剛性が指定されたシステム柔性値に対して求められた。ここでは、7-3 節で導かれた設計解公式を最大部材塑性率制約設計のための公式として用いる方法について述べる。

まず、梁の材端回転角に関する塑性率（荷重の載荷時に部材のいたるところで除荷が生じなければ、同一の処女応力-歪関係を有する材料から構成される非線形弾性部材と、非弾性部材の挙動は区別できないため、ここでは敢えて塑性率という用語を用いる）を定義する。第 j 梁の材端回転角 θ_j は、(7.25) 式において材端縁応力により表現されている。第 j 梁において、材端縁歪が ϵ_Y となる時の材端回転角を θ_{Yj} と表示すれば、第 j 梁の材端回転角に関する部材塑性率は次式で定義できる。

$$\mu_{\theta j} = \frac{\theta_j}{\theta_{Yj}} \quad (7.40)$$

第 j 梁の材端回転角に関する部材塑性率の指定値を $\bar{\mu}_{\theta j}$ で表わす。このとき、次のような問題を考える。

[問題 SIRFR]

設計用荷重 \mathbf{H} に対して、幾何学的、力学的パラメータおよび $\{\beta_{Cj} \text{ (for all } j), \{\beta_{B0} \sim \beta_{Bf}\}$ の中の一つ} が与えられたとき、梁の最大部材塑性率制約条件

$$\mu_{\theta j} = \bar{\mu}_{\theta j} \quad (j = 0, \dots, f) \quad (7.41)$$

を満足する設計 $\mathbf{k}^T = \{b_j\}^T \{J_j\}^T$ を求めよ。

(7.25) 式から、その部材塑性率は梁の材端縁歪と一対一に対応することがわかる。一旦部材塑性率 $\mu_{\theta j}$ が指定されると、対応する梁の材端縁歪 $e_{Bj}\epsilon_Y$ は、(7.25) 式と (7.19) 式から求められる（図 7.7 を用いれば、指定した部材塑性率に対する梁の材端縁歪が視覚的にも求められる）。その時、前節で導いた最適設計解公式を用いて、その材端縁歪に対する梁の断面積および柱の曲げ剛性が求められる。

システム柔性制約条件下の最適設計問題においてはコスト係数 $\{\beta_{Bj}\}, \{\beta_{Cj}\}$ は完全に指定されたが、その最適性条件は中村と山根の論文 (Nakamura and Yamane, 1986) と同じ意味で別の解釈が可能である。すなわち、最適性条件 (7.17, 18) は、 $\{\beta_{Bj}\}, \{\beta_{Cj}\}$ を重み係数とする設計規定条件とも解釈できる。この時 $\{\beta_{Bj}\}, \{\beta_{Cj}\}$ は、塑性率制約設計において塑性率を制御するためのパラメータと理解される。この塑性率制約設計においては梁の塑性率が指定されるため、 $\{\beta_{Bj}\}, \{\beta_{Cj}\}$ の全てを与えることはできない。塑性率制約設計においては、 β_{B0} と $\{\beta_{C1} \sim \beta_{Cf}\}$ が指定できる。その時、正の定数 ν は (7.23) 式の第一式 ($j = 0$) から求められ、 $\{\beta_{B1} \sim \beta_{Bf}\}$ は、(7.23) 式の他の式から求められる。また、比 $\{\beta_{Cj}/\beta_{B0}\}$ を柱の材端縁歪の基礎梁の材端縁歪に対する比を制御するための係数と理解することも可能である。このことは、第 j 柱の材端曲率が、 β_{B0} と $\{\mu_{\theta j}\}$ を指定した後では、(7.23), (7.25), (7.26) 式から β_{Cj}/β_{B0} のみの関数と理解されるからである。

システム柔性制約条件下の最適設計解公式を用いた塑性率制約設計法のフローチャートを図 7.5(b) に示す。梁の指定塑性率分布が全層で一定の場合には、最下層と最上層の梁のフランジ幅が隣接する梁のその約 1/2 から 1/3 となる。もしこのような設計が非現実的であるならば、そのような梁に対しては、比較的小さな塑性率を指定する必要がある。梁の塑性率指定設計においては、梁の材端縁歪あるいは梁の部材塑性率を指定することが必要となるため、この設計変更手続きは、最適設計問題において最小剛性制限を設定することよりも簡単である。

これまで、断面の幾何学的パラメータを連続変数として扱ってきた。しかし、現実の設計では、採用される部材断面の種類は有限であり、そのパラメータ値は離散的に与えられる。あるいは、特定層ごとに同一断面部材を採用するのが一般的である。これまでに展開した理論を用いてこれらの問題に答える有力な方法の一つは、連続パラメータとして求められた値を最も近傍の实在断面のパラメータ値に変更した時の非線形応答の

変化量を設計感度解析法により評価することである。Ryuら(1985)が示しているように、非線形弾性構造物の静的荷重に対する設計感度解析を実施するには、静的荷重を載荷したときの最終段階における接線剛性行列を求める必要がある。一般にこの接線剛性行列を求めるには、各設計について増分型の非線形解析を実施しなければならない。しかし、この解析を微小にパラメータ値が変化させられた各設計について実施することは、計算時間の面で非現実的である。本理論では、梁のみに塑性化を許容し、かつその部材接線剛性行列は、材端縁歪値を少し変動させた有限差分近似により比較的容易に求められるため、全体の接線剛性行列を求めることも比較的容易である。従って、本理論で求めた連続変数パラメータ値を離散的なパラメータ値に変更したときの非線形応答の感度を計算することは、比較的単純なアルゴリズムを用いて実行可能である。

7-6 設計例

[Example 7.1] 20層骨組 (システム柔性制約条件下の最適設計)

システム柔性制約条件下の最適設計問題に対する例題を示す。ここでは、次のような設計条件を採用する。全ての梁は(7.19)式 of 非線形弾性材料で構成されるものとする。ただし、材料特性を規定するパラメータとしては、 $a = 1.0, n = 10.0, \sigma_Y = 2.94(N/m^2), \sigma_y/\epsilon_y = 2.06(kN/m^2)$ を採用する。一方柱は、ヤング係数 $E = 2.06(kN/m^2)$ の線形弾性材料で構成されるものとする。また、コスト係数およびその他の非制御パラメータは次の通りである。 $\beta_{Bj} = 6.0, \beta_{Cj} = 1.0; d_{2j}/d_{1j} = 37.5/40.0$ (for all j), $h_1 = 450.0(cm), h_2 \sim h_{20} = 350.0(cm), d_{1(2j-1)} = d_{1(2j)} = 41.0 - j(cm), r_{2j-1} = r_{2j} = 31.0 - j(cm)$ ($j = 1, \dots, 10$), $d_{1(0)} = 40.0(cm), L = 700(cm), \alpha = 3/80$ 。

現実的な設計例を得るために、設計用水平荷重は、建築基準法(1981)の2次設計で規定されている分布形を採用した。その際に許容塑性率としては $\mu = 3.0$ を採用し、骨組の一次固有周期としては、 $T = 2.13(s)$ を仮定した。この一次固有周期は、梁および柱ともヤング係数 $E = 2.06(kN/m^2)$ の材料で構成されているとみなした時の一次固有周期である。システム柔性の指定値としては、 $\bar{F}_s = 3.5 \times 10^5(N \cdot m)$ を採用した。その時の梁の材端縁歪は Newton-Raphson 法から計算され、 $\epsilon_B/\epsilon_y = 8.30$ となる。図7.5(a)の設計フローチャートを用いて求めた梁の最適断面積分布および柱の最適曲げ剛性分布を図7.8に示す。

[Example 7.2] 20層骨組 (静的部材塑性率制約設計)

次に静的部材塑性率制約設計の例題を示す。まず最初に、梁の部材塑性率として全層一様な分布を指定したときの例を示す。幾何学および力学的非制御パラメータは Example 7.1 と同じである。また、塑性率指定設計で指定可能な重み係数は、 $\beta_{B0} = 6.0, \beta_{C1} = \dots = \beta_{Cf} = 1.0$ とする。その他の係数 $\beta_{B1} \sim \beta_{Bf}$ は(7.23)式から計算され、 $\beta_{B1} = \dots = \beta_{Bf} = 6.0$ となる。

設計用水平荷重は、数種類の梁塑性率に対するシステム柔性の直接的な比較を目的として、Example 7.1 と同じものを採用した。梁の指定部材塑性率としては、 $\mu_\theta = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ を指定した。図7.5(b)の設計フローチャートを用いて求めた梁の断面積分布と柱の曲げ剛性分布を図7.9に示す。

[Example 7.3] 10,20,30,40層改修骨組

次に1層および2層床梁を改修した10,20,30,40層骨組の例を示す。20層骨組の幾何学および力学的非制御パラメータは Example 7.1 と同じである。20層以外の骨組の梁の断面成の半分および柱の断面二次半径は以下の通りである。

$$[10層骨組] \quad d_{1(2j-1)} = d_{1(2j)} = 42.0 - 2j(cm), r_{2j-1} = r_{2j} = 32.0 - 2j(cm) \quad (j = 1, \dots, 5), \\ d_{1(0)} = 40.0(cm)。$$

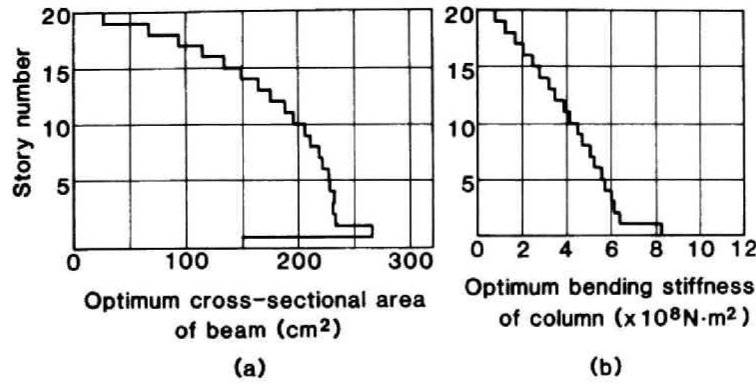


図7.8 システム柔性制約条件下で最適設計された骨組の梁の断面積分布および柱の曲げ剛性分布

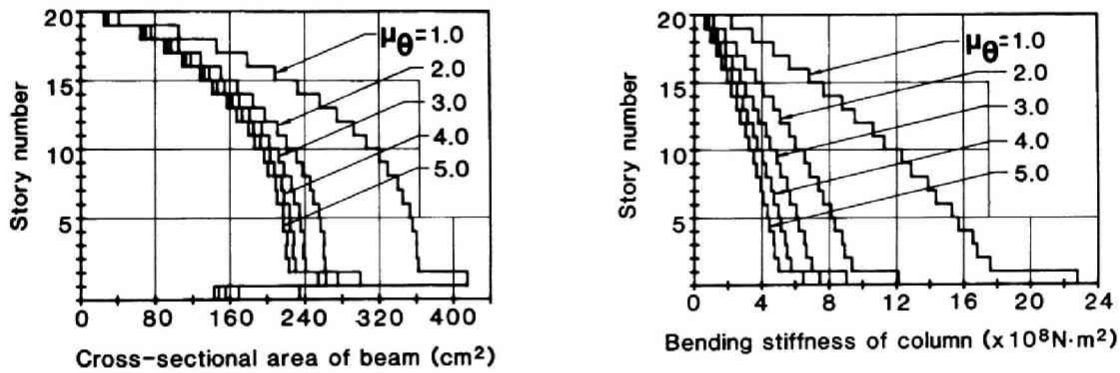


図7.9 部材塑性率制約設計された20層骨組の梁の断面積分布および柱の曲げ剛性分布（一定部材塑性率指定）

[30層骨組] $d_{1(2j-1)} = d_{1(2j)} = 40.5 - (j/2)(cm), r_{2j-1} = r_{2j} = 30.5 - (j/2)(cm) \quad (j = 1, \dots, 15),$
 $d_{1(0)} = 40.0(cm)。$

[40層骨組] $d_{1(2j-1)} = d_{1(2j)} = 40.5 - (j/2)(cm), r_{2j-1} = r_{2j} = 30.5 - (j/2)(cm) \quad (j = 1, \dots, 20),$
 $d_{1(0)} = 40.0(cm)。$

また階高は、 $h_1 = 450.0(cm), h_2 \sim h_f = 350.0(cm)$ である。

ここでは、同一の層数を有する骨組については同一の設計用荷重を設定した。それらは、建築基準法で規定されているものとし (A_i 分布)、一次固有周期としては、10,20,30,40層骨組に対して、それぞれ1.08,2.13,3.18,4.23(sec)を仮定した。また、塑性率としては3.0を仮定した。

これらの設計用荷重に対して、1層および2層床梁以外の梁の指定部材塑性率として $\mu_\theta = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ を設定した時の例を以下に示す。

1層および2層床梁を改修した設計を得るために、それらの梁の指定塑性率として $0.25\mu_\theta, 0.80\mu_\theta$ を設定した。ここで μ_θ はそれ以外の梁の指定塑性率を表わす。本例題では、係数 β_{B2} および $\beta_{C1} \sim \beta_{Cf}$ として、

$\beta_{B2} = 6.0$ および $\beta_{C1} = \dots = \beta_{Cj} = 1.0$ を選定した。その他の係数は、 $\mu_\theta = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ に対してそれぞれ、 $(\beta_{B0}, \beta_{B1}) = (0.359, 0.373), (0.406, 0.419), (0.513, 0.438), (0.643, 0.447), (0.764, 0.451)$ である。また、 $\beta_{B3} = \dots = \beta_{Bj} = 6.0$ である。図 7.5(b) のフローチャートにおいては、 β_{B0} が指定されたが、ここでは β_{B0} の代わりに β_{B2} が指定されていることに注意する必要がある。

図 7.5(b) のフローチャートを用いて求めた梁の断面積および柱の曲げ剛性の分布を図 7.10 と図 7.11 に示す。図 7.10 は、この改修方法が実用的な設計を得るための妥当な方法であることを示している。この改修方法は、最上層梁についても同様にして適用可能である。

図 7.12 は、梁について一様な部材塑性率分布を指定した時の 10, 20, 30, 40 層骨組の部材塑性率—システム柔性関係曲線を表わしている。ただし、 $\beta_{Bj} = 6.0, \beta_{Cj} = 1.0$ (for all j) である。また、図 7.12 において、設計用荷重は、各層数骨組ごとに一定のものを採用した。図 7.12 により、指定した梁の部材塑性率に対応するシステム柔性の値を比較することができる。

本理論の妥当性を検証するために、設計用荷重分布に対する増分型非線形応答解析を実施した。理論との整合性を考慮して材料非線形性のみ考慮した。梁の材端曲げモーメント—節点回転角関係における接線剛性は、微小な材端縁歪増分を与えたときの復元力特性値から有限差分の概念を用いて数値的に算出した。一例として、 $\mu_\theta = 3.0$ (全層一定) の条件下で設計した 20 層骨組を解析した。梁の材端節点回転角と層間変形角について理論値と増分解析値を比較したところ、両者の最大誤差は 1.3% であった。図 7.13 は本増分解析結果による梁の材端曲げモーメント—材端節点回転角関係を表わす。

7-7 結論

本章では、六章の理論をさらに発展させた、非線形弾性骨組に対する最適設計理論および静的設計用荷重に対する部材塑性率制約設計法を展開した。本章において得られた主な成果を以下に示す。

- (1) 任意の安定な非線形弾性応力—歪関係に従う材料特性を有する部材から構成される骨組の、静的荷重に対する骨組全体としての柔性を表わす指標として、システム柔性と呼ぶシステム性能を新たに定義した。このシステム柔性は、静的荷重の作用下で、実際に変形している状態を基準とした無変形状態の非線形弾性骨組の全ポテンシャルエネルギーレベルとして定義されている。
- (2) 設計用水平荷重の作用を受ける単位ユニット骨組モデルについて、システム柔性制約条件下の最小コスト設計問題を定式化し、非線形弾性構造物に対する最小ポテンシャルエネルギーの原理と Farkas の定理を用いてその問題に対する大域最適性の必要十分条件を導いた。この最適性条件は、最適設計された骨組においては、各部材の平均歪エネルギー密度が、コスト係数に比例して分配されることを示している。
- (3) 最適性条件と釣合式を用いて、梁の最適断面幅および柱の最適曲げ剛性の準閉形表現を導いた。
- (4) 基礎固定モデルに対する最適設計理論を弾性支持された単位ユニット骨組モデルに拡張するための理論を展開した。
- (5) 最小コスト設計問題におけるコスト係数を部材塑性率の応答調整パラメータと見なす部材塑性率制約設計法を展開した。
- (6) 数個の設計例により、本システム柔性制約条件下の最小コスト設計解公式および部材塑性率制約設計公式の有用性を例証した。また、設計用荷重に対する静的増分型弾塑性応答解析を実施し、本設計解公式の妥当性を例証した。

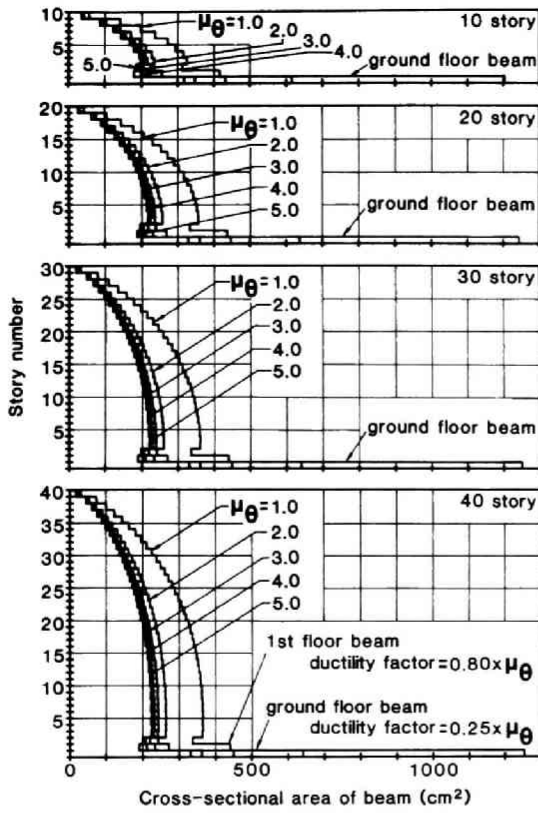


図7.10 部材塑性率制約設計された10, 20, 30, 40層骨組の梁の断面積分布 (非一定部材塑性率指定)

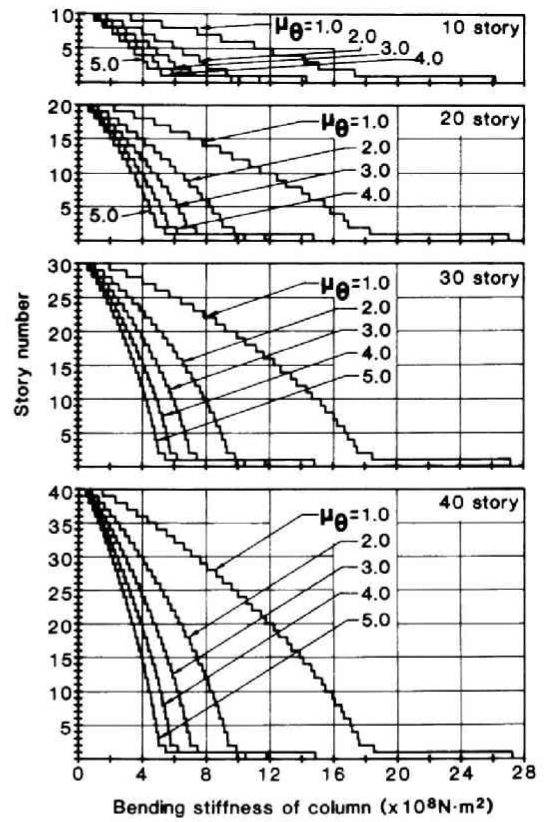


図7.11 部材塑性率制約設計された10, 20, 30, 40層骨組の柱の曲げ剛性分布 (非一定部材塑性率指定)

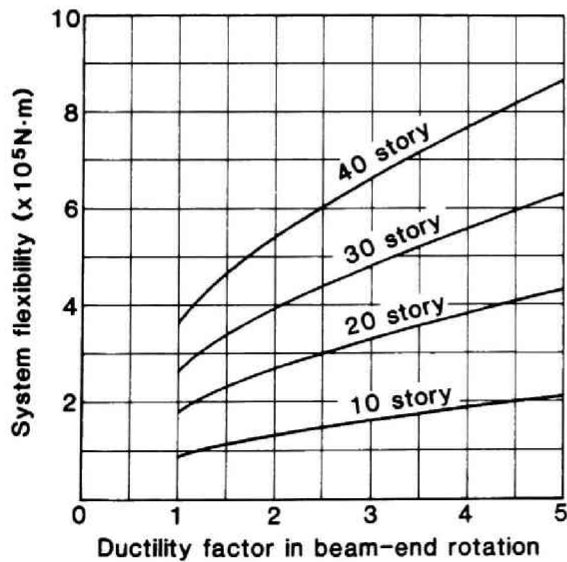


図7.12 梁の部材塑性率—システム柔性値関係

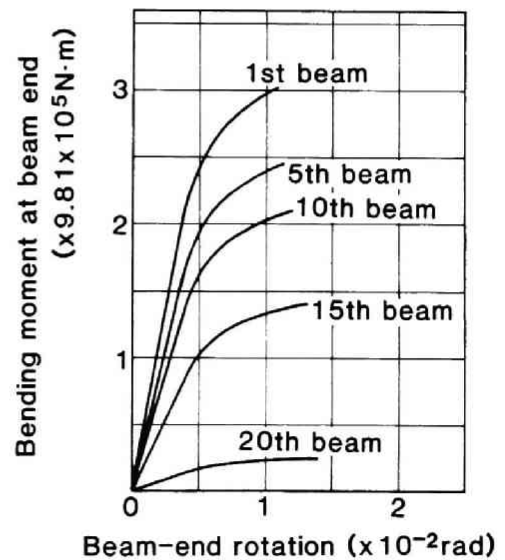


図7.13 部材塑性率制約設計された骨組の静的弾塑性解析による梁端曲げモーメント—梁端回転角関係

文献

- Austin, M.A. and K.S. Pister (1985): Design of Seismic-resistant Friction-braced Frames. *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol.111, No.12, pp2751-2769.
- Balling, R.J., K.S. Pister and V. Ciampi (1983): Optimal Seismic-resistant Design of a Planar Steel Frame. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.11(4), pp541-556.
- Bensoe, M.P. and J. Sokolowski (1987): Sensitivity Analysis and Optimization of Elastic-plastic Structures. *Engineering Optimization*, Vol.11, pp31-38.
- Bhatti, M.A. and K.S. Pister (1981): A Dual Criteria Approach for Optimal Design of Earthquake-resistant Structural Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.9(6), pp557-572.
- Cinquini, C. (1984): Optimality Criteria for Materials with Nonlinear Behavior: Application to Beams in Bending. *Engineering Structures*, Vol.6(1), pp61-64.
- Cinquini, C. and R. Contro (1985): Optimal Design of Beams Discretized by Elastic Plastic Finite Element. *Computers and Structures*, Vol.20, pp475-485.
- Dems, K. and Z. Mroz (1978): Multiparameter Structural Shape Optimization by the Finite Element Method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.13(2), pp247-263.
- Drucker, D.C. (1958): Variational Principles in the Mathematical Theory of Plasticity. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, McGraw-Hill, Vol.8, pp7-22.
- Gasparini, D.A. and E.H. Vanmarcke (1976) : *Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra-SIMQKE*, A computer program distributed by NISEE/ Computer Applications, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Kaldjian, M.J. (1967): Moment-curvature of Beams as Ramberg-Osgood Functions. *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol.93, No.5, pp53-65.
- Kanaan, A.E. and G.H. Powell (1973): *A General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures - DRAIN-2D*. Computer Program Distributed by NISEE, Berkeley, CA.
- Kaneko, I. and G. Maier (1981): Optimum Design of Plastic Structures under Displacement Constraints. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.27, pp369-391.
- Mroz, Z., M.P. Kamat and R.H. Plaut (1985): Sensitivity Analysis and Optimal Design of Nonlinear Beams and Plates. *J. Struct. Mech.*, Vol.13(3&4), pp245-266.
- 中村 恒善(1980): 建築骨組の最適設計. 丸善.
- Nakamura, Tsuneyoshi and Y. Takenaka (1983): Optimum Design of Multistory Multispan Frames for Prescribed Elastic Compliance. *J. Struct. Mech.*, Vol.11(3), pp271-295.
- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1989) : Ductility Design via Optimum Design of Nonlinear Elastic Frames. *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol.115, No.3, pp608-625.
- Nakamura, Tsuneyoshi and T. Yamane(1986) : Optimum Design and Earthquake-response Constrained Design of Elastic Shear Buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, pp797-815.

- Newmark, N.M. and W.J. Hall (1982) : *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA.
- Novak, M. and B.E. Sharnouby (1983) : Stiffness Constants of Single Piles, *J. Geotech. Eng.*, ASCE, Vol.109, No.7, pp961-974.
- Polak, E., K.S. Pister and D. Ray (1976): Optimal Design of Framed Structures Subjected to Earthquakes. *Engineering Optimization*, Vol.2(1), pp65-71.
- Prager, W.(1972): Conditions for Structural Optimality. *Computers and Structures*, Vol.2, pp833-840.
- Prager, W.(1974): *Introduction to Structural Optimization*. Springer Verlag.
- Prager, W. and J.E. Taylor (1968): Problems of Optimal Structural Design. *J. Appl. Mech.*, Vol.35, pp102-106.
- Ryu, Y.S., M. Harririan, C.C. Wu and J.S. Arora (1985): Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response. *Computers and Structures*, Vol.21(1&2), pp245-255.
- Yokoo, Y. and Tsuneyoshi Nakamura (1977): Nonstationary Hysteretic Uniaxial Stress-strain Relations of a Wide-flange Steel, Part II, Empirical Formulae. *Trans. Architectural Institute of Japan*, No.260, pp71-82.

八章 弾性支持された非弾性建築骨組の 激震時最大部材塑性率制約設計*

動的弾塑性応答を考慮した設計問題に対して、設計感度解析法を適用する際には、静的問題のように最大応答を与える時の釣合式を陽に表現することができないため、静的問題に対して用いた手法を採用することができない（たとえば Pister, 1981）。従って、有限差分の概念を適用して、設計変数を一つずつ微小に変化させた時の動的弾塑性応答解析を設計変数の数に対応する回数だけ実行するか（例えば Bhatti, 1979）、あるいは、Ray らの方法 (Ray et al., 1978) を採用する必要がある。Bhatti や Ray らの方法は、理論上は如何なる構造物に対しても適用可能であるが、単純な構造物以外は、必ずしも実際上有用なレベルには達していない。

ここでは、限られた種類の問題に対してのみ適用可能であるが、上記の方法よりは格段に効率的かつ力学的基礎に基づく設計理論を展開する。

これまでに、構造物特性に関するパラメータ、あるいは設計用地震動に関するパラメータを種々変化させて、構造物の地震動に対する弾塑性応答特性を調べる研究は数多く行なわれているが、非弾性応答量を直接制約して構造物を設計するという設計問題に対する理論は極めて少ない。地震時動的弾塑性応答を考慮した設計問題に関しては、次のような研究が存在する。Hisatoku and Kobori (1970) は、剪断型構造物モデルについて、層間剛性分布および弾性限強度分布を種々変化させた時の極めて多数の弾塑性時刻歴応答解析結果に基づき、望ましい応答分布（たとえば塑性率一定）を示すパラメータ値を決定している。小堀ら (1970, 1971) は、最大変位応答制約条件下で、剪断型履歴構造物の確率応答指標を最小化する剛性分布パラメータを決定する数値的方法を示している。藤原 (1977) は、非弾性骨組モデルについて、梁と柱の層方向剛性分布、および梁と柱の層方向強度分布をパラメトリックに変化させた時の応答解析結果から、望ましい応答分布を示すパラメータ値を決定している。石丸 (1975a,b) は、非弾性応答スペクトル法と等価線形化手法を組み合わせ、梁降伏型架構に対して、指定した梁の部材塑性率を与えるような梁の降伏モーメントを求める方法を提案している。しかしながら、石丸は、梁の降伏モーメントを算出する式は提案しているが、梁の剛性や柱の剛性および強度を算出する式は提示していない。従って、一貫した設計理論とはいえない。また、梁の指定塑性率が全層で一律でない場合には直接拡張できない。山田ら (1984) は、剪断型構造物モデルについて、等価線形化手法を用いて、指定した層塑性率応答を示す構造物の剛性分布を求める理論を展開しているが、その精度については言及していない。Biggs らは、非弾性応答スペクトル手法と塑性設計法を組み合わせた設計法を提案している (Anagnostopoulos, Haviland and Biggs, 1978; Lai and Biggs, 1980)。Pister らは、設計感度解析法に基づく非線形計画法を採用している (Austin and Pister, 1985; Austin, Pister and Mahin, 1987a,b; Balling, Bhatti, Ciampi and Pister, 1981; Balling, Pister and Ciampi, 1983; Balling, Pister and Polak, 1983; Bhatti, 1979; Bhatti, Ciampi, Pister and Polak, 1981; Bhatti and Pister, 1981a,b; Polak, Pister and Ray, 1976; Pister, 1981)。Pister らは最適設計問題を扱っているのに対して、Biggs らは直接的には最適設計問題を扱っていない。また、中村と山根 (Nakamura and Yamane, 1986) および中村と小坂 (Kosaka and Nakamura, 1989) は、レベル1地震動に対する地震時弾性応答制約設計法を用いて剪断型構造物を設計し、その時の層間相対変位の指定値と降伏層間相対変位の比を調節することにより、レベル2地震動に対する非弾性応答を間接的に制御する設計法を提案している。

* 本章の一部は、1-2 節の論文 [6] の一部に加筆しまとめたものである。

8-1節では、7-5節で展開した静的部材塑性率制約設計法を一つの動的部材塑性率制約設計法として用いる方法を展開している。設計目標は、レベル2設計用地震動（4-1節）に対する動的最大梁塑性率分布が、指定した分布となる骨組の部材断面パラメータ（設計変数）を見出すことである。

8-2節では、8-1節で単位ユニット骨組モデルに対して展開した動的部材塑性率制約設計法を多層多スパン建築骨組に対して拡張する方法を示している。

8-3節では、8-1節で基礎固定の単位ユニット骨組モデルに対して展開した動的部材塑性率制約設計法を、杭基礎をモデル化した弾性ばねで支持された単位ユニット骨組モデルに対して拡張する方法を示している。

尚、本章では、レベル2設計用地震動に対する設計目標を単一の制約条件とする場合のみを扱っている。

8-1 単位ユニット骨組モデル

ここでは、図8.1に示すような単位ユニット骨組モデルを対象とする。各層の質量は床レベルに集中して存在するものとし、各部材の断面変更には拘らず指定値であるとする。また、梁および柱に対する仮定は七章と同じものとする。ここではレベル2設計用地震動に対する設計用応答スペクトルとしてNewmark and Hall(1982)の提案するスペクトル（4-1節）を採用する。この激震レベルの設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対する梁の最大部材塑性率の平均値+標準偏差値を以下では、 $\mu_{\theta_j}^{(D)}$ と表示する。また、その指定値を $\bar{\mu}_{\theta_j}^{(D)}$ と表示する。ここで扱う問題は、次のように述べられる。

[問題 DIRFR]

幾何学的、力学的パラメータおよび $\{\beta_{C_j}(\text{for all } j), \{\beta_{B_0} \sim \beta_{B_f}\}$ の中の一つ}が指定されたときに、激震レベル（レベル2）の設計用応答スペクトル（NHスペクトル）に適合する多数の人工地震波群に対して、梁の最大部材塑性率制約条件

$$\mu_{\theta_j}^{(D)} = \bar{\mu}_{\theta_j}^{(D)} \quad (j = 0, \dots, f) \quad (8.1)$$

を満足する設計 $\{b_j\}^T \{J_j\}^T$ を求めよ。

7.5節の静的部材塑性率制約設計法を一つの動的部材塑性率制約設計法として用いるには、激震レベル（レベル2）の地震波に対する最大応答層剪断力の評価が必要となる。その方法として、これまでに非弾性応答スペクトル法、等価線形化法等が提案されてきているが、現段階では、激震レベルの地震波に対して非弾性応答を示す骨組の最大応答層剪断力を正確に求める方法は、時刻歴応答解析法以外には存在しない。しかしながら、初期設計の段階で非弾性時刻歴応答解析を多数の設計用地震波群に対して実施することは極めて非現実的である。そこでここでは、一つの近似的手法として、強震時（レベル1）設計用地震動に対する応答スペクトルを用いてSRSS評価した時の弾性応答の最大応答層剪断力の Γ 倍をレベル2の地震波に対する最大応答層剪断力として採用する。この最大応答層剪断力は、骨組部材の設計変数の関数となるため、最終的に骨組部材の設計変数を求めるには繰り返し計算が必要となる。ただし、この最大応答層剪断力が、レベル2の地震波に対する最大応答層剪断力と厳密に一致していても、材料レベル、部材レベル、あるいは層レベルにおいて採用する履歴法則によっては、レベル2の地震波に対する最大応答梁塑性率が指定値と一致するとは限らない。しかしながら、指定梁塑性率分布として特定層を除いて層方向にはほぼ一様な分布を採用した場合には、上記の方法はかなりよい近似を与える。

ここで採用するアルゴリズムは次のように要約できる。

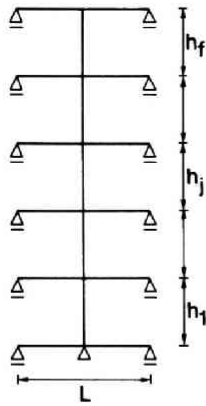


図8.1 単位ユニット骨組モデル

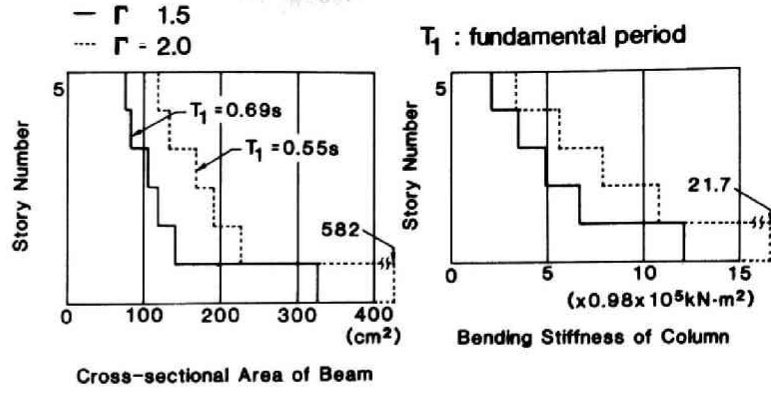


図8.2 動的部材塑性率制約設計された5層骨組の梁の断面積分布および柱の曲げ剛性分布

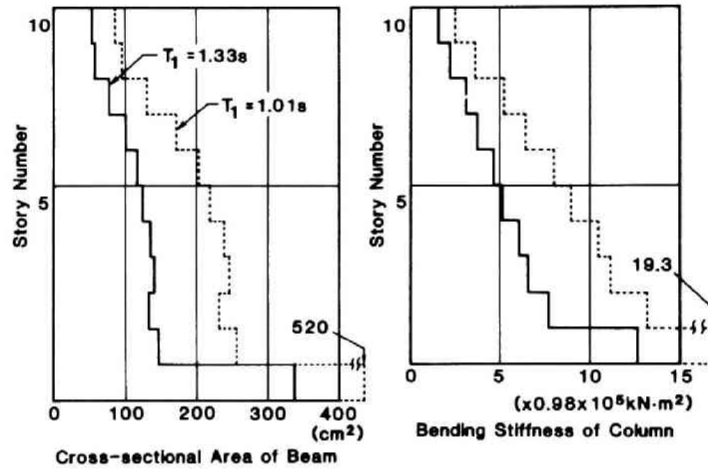


図8.3 動的部材塑性率制約設計された10層骨組の梁の断面積分布および柱の曲げ剛性分布

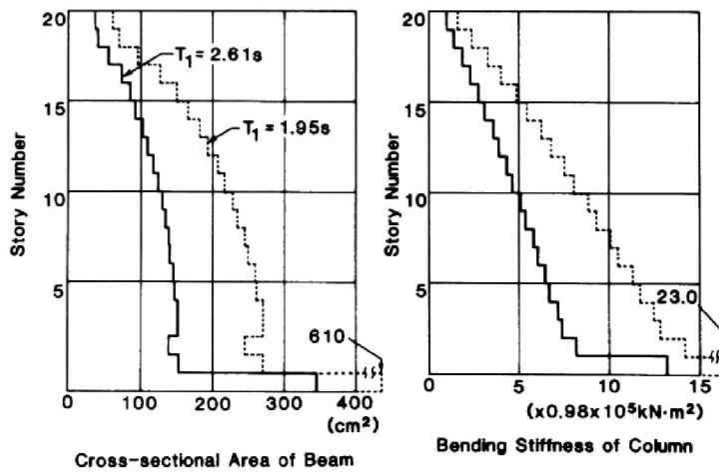


図8.4 動的部材塑性率制約設計された20層骨組の梁の断面積分布および柱の曲げ剛性分布

- [ステップ1] レベル2地震動に対応する設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対して、骨組の平均最大応答層剪断力から算出される水平荷重の初期値を設定する（たとえば建築基準法における2次設計用必要保有水平耐力から算出される水平荷重）。
- [ステップ2] 7-5節の設計解公式を用いて梁の断面積、柱の曲げ剛性を求める。
- [ステップ3] 梁を σ_y/ϵ_y をヤング係数として有する線形弾性材料から構成される部材と見なし、レベル1の設計用スペクトルに対する平均最大応答層剪断力をSRSS評価法により求める。
- [ステップ4] ステップ3で求めたレベル1設計用地震動に対する平均最大応答層剪断力の Γ 倍をレベル2設計用地震動に対する平均最大応答層剪断力として採用する。その値から、レベル2設計用地震動に対する設計用水平荷重を算出する。
- [ステップ5] ステップ4で求めた設計用水平荷重とステップ1（あるいは前回のステップ4で求めた値）における設計用水平荷重を比較し、その差がある値以下ならば終了する。そうでない場合はステップ6に進む。
- [ステップ6] ステップ4で求めた設計用水平荷重をステップ1における設計用水平荷重として採用し、ステップ2～ステップ5を繰り返す。

適用例

一例として、5,10,20層骨組に対して、本設計法を適用した場合を示す。各層の質量は等質量とし、30 (ton)とした。骨組の幾何学的および力学的非制御パラメータは、10層および20層骨組については7-6節と同じである。5層骨組については、力学的パラメータのすべておよび幾何学的パラメータの一部は、10, 20層骨組の場合と同じであり、梁の断面成の半分および柱の断面2次半径は以下の通りである。 $d_{1(0)} = 40.0(\text{cm}), d_{1(j)} = 42.0 - 2j(\text{cm}), r_j = 32.0 - 2j(\text{cm})(j = 1, \dots, 5)$ 。減衰としては、一次の減衰定数を0.02とする初期剛性比例型のものを採用した。図8.2-8.4は係数 Γ として1.5（実線）と2.0（破線）を採用した時の梁の断面積分布および柱の曲げ剛性分布を示す。ここでは上記の繰り返し計算を10回実施した。尚、図8.2-8.4には、各骨組の一次固有周期も示されている。

上記の方法の妥当性を検証するために、本設計法を用いて設計した5,10,20層の各2個（ $\Gamma = 1.5, 2.0$ ）、計6個の骨組の激震時の時刻歴応答解析をDRAIN-2Dプログラム(Kanaan and Powell, 1973)を用いて実施した。その際に、梁の材端モーメント-材端回転角関係は理論曲線をバイリニア-近似したものを採用した。その第一勾配は、梁を σ_y/ϵ_y をヤング係数として有する線形弾性材料から構成される部材と見なしたときの剛性として算出した。また、第一折点に対応する回転角は、理論曲線上で材端縁歪が丁度 ϵ_y になる時の回転角とし、第一折点に対応する曲げモーメントは、その回転角に上記の第一勾配の剛性を乗じたものとした。さらに、第二勾配は、上記第一折点と、理論曲線上における材端回転角に関する塑性率が2.0である点を通るように選定した。

梁の指定塑性率を、図8.5-8.10に●で示す。以下では、梁の材端回転角に関する塑性率 (ductility factor in beam-end rotation) を単に梁塑性率 (beam ductility factor)、層間相対変位に関する塑性率を単に層塑性率 (story ductility factor) と呼ぶ。ただし、層塑性率を定義する際の降伏層間相対変位としては、当該の層におけるレベル1地震動時の { 降伏応力 / 最大応答材端縁応力 } の比の最小値をレベル1地震動時の最大応答層間相対変位に乗じたものとして定義した。

レベル2地震動に対する人工地震波10波を、上記のレベル2地震動に対する設計用速度応答スペクトル (減衰定数 0.02) に適合するようにSIMQKEプログラム (Gasparini and Vanmarcke, 1976) を用いて作成

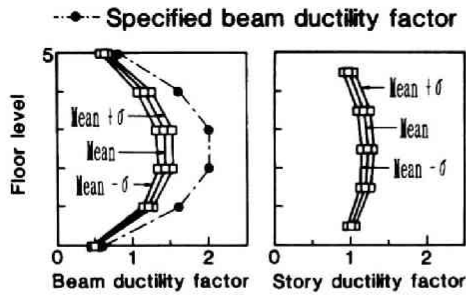


図8.5 動的部材塑性率制約設計された5層骨組の人工地震波10波に対する平均最大梁塑性率分布および平均最大層塑性率分布 ($\Gamma=2.0$)

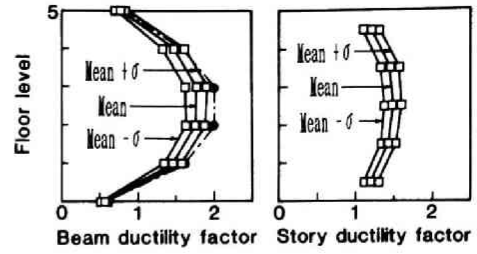


図8.6 動的部材塑性率制約設計された5層骨組の人工地震波10波に対する平均最大梁塑性率分布および平均最大層塑性率分布 ($\Gamma=1.5$)

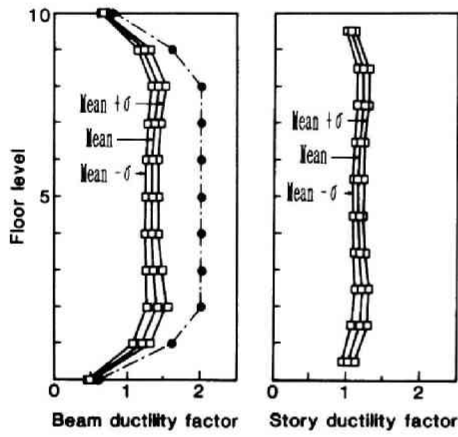


図8.7 動的部材塑性率制約設計された10層骨組の人工地震波10波に対する平均最大梁塑性率分布および平均最大層塑性率分布 ($\Gamma=2.0$)

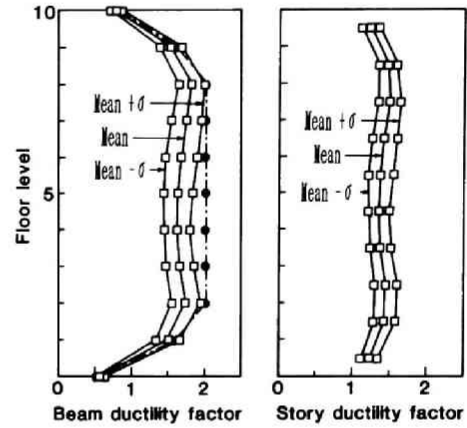


図8.8 動的部材塑性率制約設計された10層骨組の人工地震波10波に対する平均最大梁塑性率分布および平均最大層塑性率分布 ($\Gamma=1.5$)

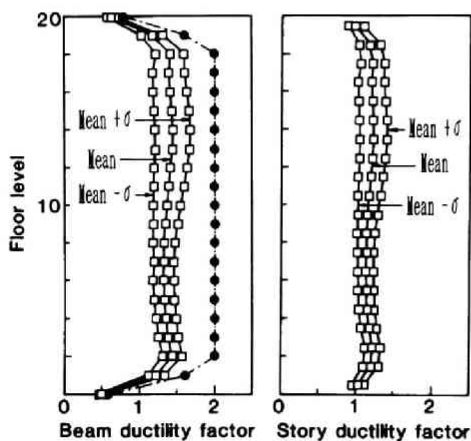


図8.9 動的部材塑性率制約設計された20層骨組の人工地震波10波に対する平均最大梁塑性率分布および平均最大層塑性率分布 ($\Gamma=2.0$)

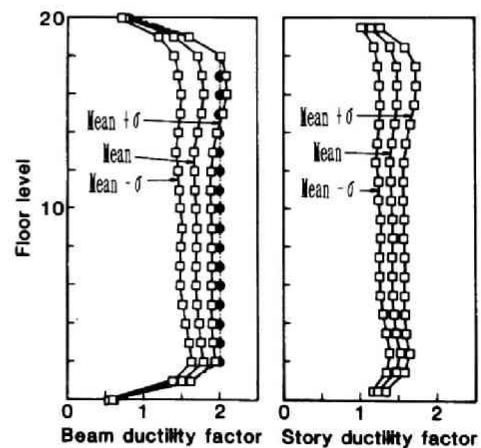


図8.10 動的部材塑性率制約設計された20層骨組の人工地震波10波に対する平均最大梁塑性率分布および平均最大層塑性率分布 ($\Gamma=1.5$)

した(4-1節)。図8.5,7,9は、上記の係数 Γ を2.0として設計した骨組の10波の人工地震波に対する最大応答梁塑性率(maximum beam ductility factor)と最大応答層塑性率(maximum story ductility factor)の平均値の分布と、それらの値の平均値±標準偏差値の分布を表わす。また、図8.6,8,10は、 $\Gamma = 1.5$ として設計した骨組の同様の分布を表わす。図8.5-8.10は、本設計法に基づき中間層において一様な指定梁塑性率分布の下で設計した骨組は、レベル2の人工地震波に対して梁塑性率のみならず、層塑性率においてもほぼ一様な応答を呈することを示している。また、図8.6,8,10は、最大層塑性率の平均値+標準偏差値分布がほぼ指定梁塑性率分布と一致するような Γ 値が存在することを示している。この Γ 値は指定梁塑性率レベル、梁の断面形状、梁と柱の剛性比等に依存すると考えられる。従って、梁の断面形状の種類や梁と柱の剛性比(例えば $\{\beta_{Cj}/\beta_{B2}\}$)等が指定されたあるグループの骨組群について $\Gamma - \mu_{\theta j}$ 関係を求めておけば、設計者が指定する $\mu_{\theta j}$ に対して Γ の値が常に求められるため、本設計法を一つの動的塑性率制約設計法として用いることが可能となる。

次に、梁の中間荷重による梁端初期応力の動的応答に及ぼす影響を明らかにするために、上記の骨組において梁端初期応力を考慮した時の時刻歴応答解析を実施した。その結果、応答は梁端初期応力を考慮しない場合と図上では区別できないほど類似したものとなった。これは、左右両方の梁端初期応力は中央鉛直軸に関して対称な分布となるのに対し、地震時荷重による梁の応力はその軸に関して逆対称となるため、一方の梁の応答が増幅されるときは、他方の梁の応答は抑制されるため、節点回転角応答は両方が平均化された性状を示すからである。しかしながら、単位ユニット骨組モデルではなく、一般の多スパン骨組の最外縁スパンにおいては、このような事態は発生しないため、初期応力を考慮した場合には、考慮しない場合よりも少し大きめの応答を示す。この事実は、多スパン骨組に対する応答解析(8-2節)からも明らかとなる。

8-2 多層多スパン骨組

8-1節のスパン方向単位ユニット骨組に対する動的塑性率制約設計法を用いた多層多スパン建築骨組の動的塑性率制約設計法を示す。

著者らは、静的設計用荷重を受ける非線形弾性骨組の構造物全体の柔性を表わすシステム性能量として新たに”システム柔性”を定義し、そのシステム柔性を制約条件とする最小コスト設計理論を展開した(Nakamura and Takewaki, 1989; および7.1-7.3節)。まずスパン方向に単位ユニットを持つ多層骨組モデルについて最適設計問題を定式化し、その問題に対する大域最適性の必要十分条件と閉形表現の解を導出した。さらに、その設計公式を静的部材塑性率制約設計のための公式および動的部材塑性率制約設計のための公式として用いる方法についても言及している。

ここでは、多層単位ユニット骨組モデルについて展開した動的部材塑性率制約設計法を多層多スパン骨組モデルに拡張する方法を示し、レベル2設計用地震動に対応する設計用応答スペクトルに適合するように作成した人工地震波群(4-1節)に対する弾塑性時刻歴応答解析によりその妥当性を検証する。

図8.11に示すような f 層 s スパン骨組を扱う。図8.11の左から k 番目のスパンの第 j 梁を、以下では第 (j, k) 梁と呼び、左から k 番目の列の第 j 柱を、第 (j, k) 柱と呼ぶ。ここでもレベル2設計用地震動に対する設計用応答スペクトルとしてNewmark and Hall(1982)の提案するスペクトル(4-1節)を採用する。この激震レベルの設計用速度応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対する第 (j, k) 梁の最大部材塑性率の平均値+標準偏差値を以下では、 $\mu_{\theta j k}^{(D)}$ と表示する。ここでは、各層においてその中の最大値を制約することを目的とし、その指定値を $\bar{\mu}_{\theta j}^{(D)}$ と表示する。ここで扱う問題は、次のように述べられる。

[問題 DIRFRM]

激震レベル (レベル2) の設計用応答スペクトル (NH スペクトル) に適合する多数の人工地震波群に対して、梁の最大部材塑性率制約条件

$$\max_k \{\mu_{\theta_{jk}}^{(D)}\} = \bar{\mu}_{\theta_j}^{(D)} \quad (j = 0, \dots, f) \quad (8.2)$$

を満足する設計 $\{b_{jk}\}^T \{J_{jk}\}^T$ を求めよ。

多層単位ユニット骨組モデルの多層多スパン骨組モデルへの最も直接的な拡張の一つは、各層の節点の節点回転角を層毎に一定とすることにより実現できる。ここでは、基本的な設計を求めることを目的として、次の条件を満足する骨組を扱う。

- (i) 梁は wide-flange 断面部材から構成されているものとし、その断面せいは層毎に $2d_{1j}$ (j は層数を表わす) で一定とする。また、ウェブ幅も $2d_{2j}$ で一定とする。その他の梁に関する仮定は、本論文七章あるいは中村と竹脇の論文 (Nakamura and Takewaki, 1989) と同じである。
- (ii) 同一層の柱の断面 2 次半径は同一で、同一層の内柱の断面積は等しいものとし、外柱の断面積は内柱の断面積の $1/2$ である。
- (iii) 同一層の節点の節点回転角は等しいものとする。(この条件が厳密に満足されるような設計解を見いだす。)
- (iv) 同一層の梁の材端曲げモーメントはすべて等しいものとする。(この条件が厳密に満足されるような設計解を見いだす。)

8-1 節の方法により、 f 層単位ユニット骨組モデルについては、動的部材塑性率制約設計が求められているものとする。その方法の概略を述べると、次のようになる。まず、7.5 節の静的部材塑性率制約設計法を用いてある設計用荷重に対する設計を求める。求められた設計を有する骨組のレベル 1 設計用地震動に対する平均最大応答層剪断力を SRSS 評価法を用いて算出する。その平均最大応答層剪断力の Γ 倍をレベル 2 設計用地震動時の平均最大応答層剪断力として採用する。その層剪断力のもとで、上記の静的部材塑性率制約設計公式を用いて新たに設計を求め直す。以上の操作を設計が収束するまで繰り返す。ただし、スパン長 L としては、図 8.11 のモデルの最小スパン長を選ぶ。これは、上記の仮定 (iii) と (7.25) 式から明らかなように、最小スパン長の梁の材端回転角に関する塑性率が最大となるため、その値を直接的に制約するためである。また、各層の質量については、図 8.11 のモデルの第 j 層質量を M_j とすれば、 f 層単位ユニット骨組モデルの第 j 層質量は M_j/s (s はスパン数) で与えればよい。節点回転角 θ_j は、 f 層単位ユニット骨組モデルに対して次式により求められている。

$$\theta_j = \frac{\epsilon_y L_0}{2d_{1j}} \left\{ \frac{1}{3} s_{j0} \left(\frac{L_0}{2}, d_{1j} \right) + \frac{a}{n+2} \left[s_{j0} \left(\frac{L_0}{2}, d_{1j} \right) \right]^n \right\} \quad (8.3)$$

ただし、 L_0 は最小スパン長を表わし、 $s_{j0}(x_{Bj0}, y_{Bj0})$ は最小スパンに存在する第 j 梁の応力分布を表わす。

一方最小スパン以外の第 k スパンに存在する第 j 梁の材端縁応力 $s_{jk}(L_k/2, d_{1j})$ は、次式により求められる。

$$\theta_j = \frac{\epsilon_y L_k}{2d_{1j}} \left\{ \frac{1}{3} s_{jk} \left(\frac{L_k}{2}, d_{1j} \right) + \frac{a}{n+2} \left[s_{jk} \left(\frac{L_k}{2}, d_{1j} \right) \right]^n \right\} \quad (8.4)$$

この時、最小スパン以外のスパンの梁の断面積は次のように求められる。

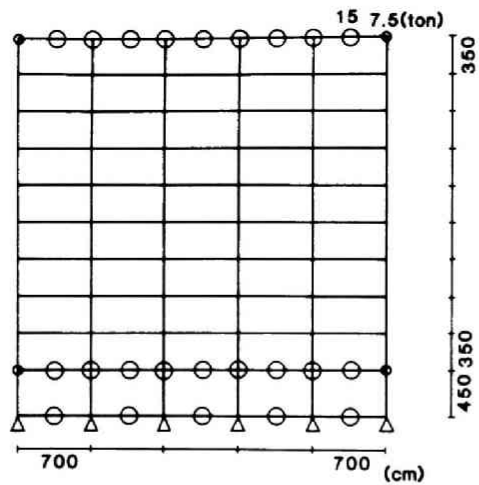


図8.11 5スパン骨組モデルおよび質量分布

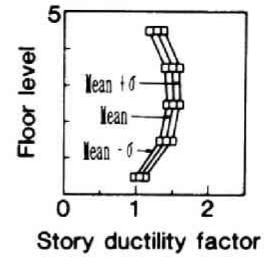


図8.13 動的部材塑性率制約設計された5層5スパン骨組の人工地震波10波に対する平均最大層塑性率分布 ($\Gamma=1.5$)

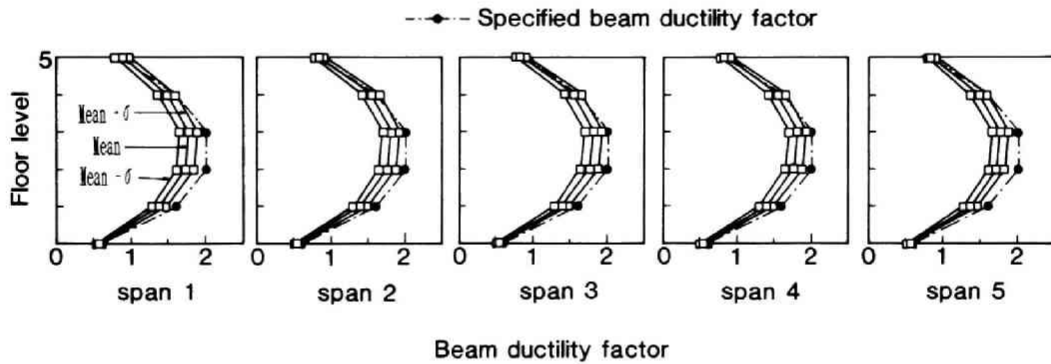


図8.12 動的部材塑性率制約設計された5層5スパン骨組の人工地震波10波に対する各スパン梁の平均最大梁塑性率分布 ($\Gamma=1.5$)

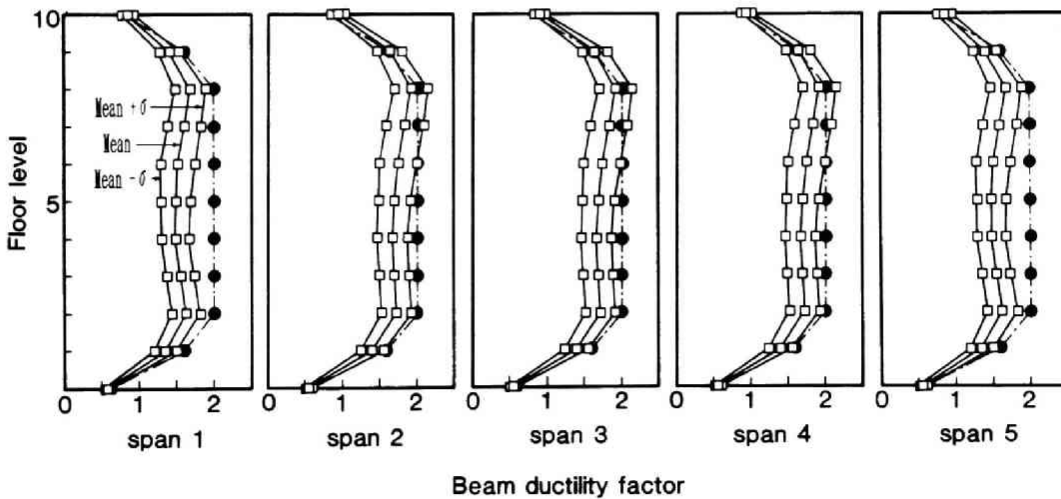


図8.14 動的部材塑性率制約設計された10層5スパン骨組の人工地震波10波に対する各スパン梁の平均最大梁塑性率分布 ($\Gamma=1.5$)

$$b_{jk} = \frac{M_{Bj}}{2\sigma_y[d_{1j}^2 T_{5jk} - (1-\alpha)d_{2j}^2 T_{6jk}]} \quad (k=0,1,2,\dots,s; \quad j=0,\dots,f) \quad (8.5)$$

ただし、 T_{5jk}, T_{6jk} は次式から計算される。

$$T_{5jk} = \int_0^1 s_{jk} \left(\frac{L_k}{2}, \eta_1 d_{1j} \right) \eta_1 d\eta_1, \quad T_{6jk} = \int_0^1 s_{jk} \left(\frac{L_k}{2}, \eta_2 d_{2j} \right) \eta_2 d\eta_2 \quad (8.6)$$

ここで採用するアルゴリズムは、次のように要約できる。

[ステップ1] 最小スパン長 L_0 を有するスパンに注目し、 M_j/s を第 j 層の質量として前節の多層単位ユニット骨組モデルに対する設計理論を用いる。ここで、 $\bar{\mu}_{\theta_j}^{(D)}$ を最大部材塑性率の指定値として選ぶ。 θ_j, J_j, M_{Bj} はこの段階で求められる。

[ステップ2] (8.4)式を用いて、 $s_{jk}(L_k/2, d_{1j})$ を求める。

[ステップ3] (8.5)式を用いて b_{jk} を求める。

適用例

等スパン長を有する5層5スパン骨組と10層5スパン骨組に対して本手法を適用した例を示す。各節点および梁中央点において質量を図8.11のように設定した。梁、柱の部材断面は、前節で示した方法に基づき、多層単位ユニット骨組の部材断面を用いて決定した。

上記の骨組の人工地震波10波に対する弾塑性時刻歴応答解析をDRAIN-2Dプログラム(Kanaan and Powell, 1973)により実施した。各梁の材端モーメント-材端回転角関係は前節と同様にバイリニア近似とした。その際の第一勾配、第一折点、第二勾配の設定方法は前節と同様である。一方、減衰としては初期剛性比例型(一次の減衰定数0.02)のものを採用し、骨組の非減衰一次固有周期は、多層単位ユニット骨組の値を用いた。また、各質点位置において自重による鉛直方向荷重を行なってから時刻歴解析を実施した。従って、この場合には、梁の中間荷重による初期応力の効果が自動的に考慮されることになる。

図8.12は、5層5スパン骨組の第1～第5スパン梁(図8.11の左側から)の応答部材塑性率の最大値の平均および最大値の平均±標準偏差を示す。ここでいう梁の部材塑性率とは、梁の剛体回転成分を取り除いた正味の材端回転角を逆対称曲げモーメント発生時の降伏材端回転角 θ_{Yj} で除した値をいう。また、図8.13は、5層5スパン骨組の層塑性率の最大値の平均および最大値の平均±標準偏差を示す。ここで、層塑性率を定義する時の降伏層間変位としては、前節で定義された単位ユニット骨組モデルにおける降伏層間変位を採用した。

一方、図8.14は、10層5スパン骨組の第1～第5スパン梁(図8.11の左側から)の応答部材塑性率の最大値の平均および最大値の平均±標準偏差を示す。また、図8.15は、10層5スパン骨組の応答層塑性率の最大値の平均および最大値の平均±標準偏差を示す。5層および10層骨組とも、梁の応答部材塑性率の最大値の平均値+標準偏差値分布は、ほぼ目標分布となっていることがわかる。

次に、スパン長の異なる5層3スパン骨組と10層3スパン骨組に対する設計例を示す。骨組の幾何学的形状を図8.16に示す。その時の梁の断面積分分布を図8.17,18に示す。ただし、柱の曲げ剛性分布は、図8.2, 8.3の実線と同じである。

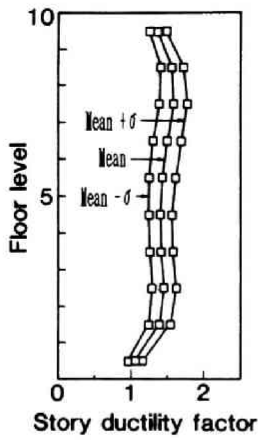


図8.15 動的部材塑性率制約設計された10層5スパン骨組の人工地震波10波に対する平均最大層塑性率分布 ($\Gamma=1.5$)

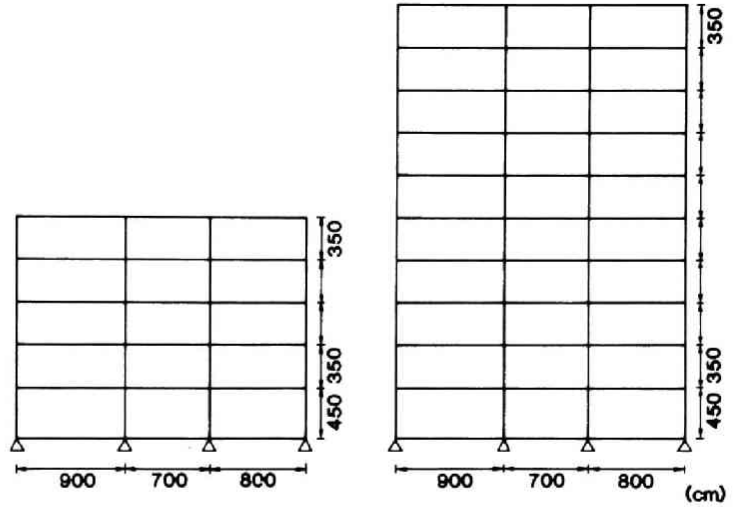


図8.16 異なるスパン長を有する5層3スパン骨組および10層3スパン骨組

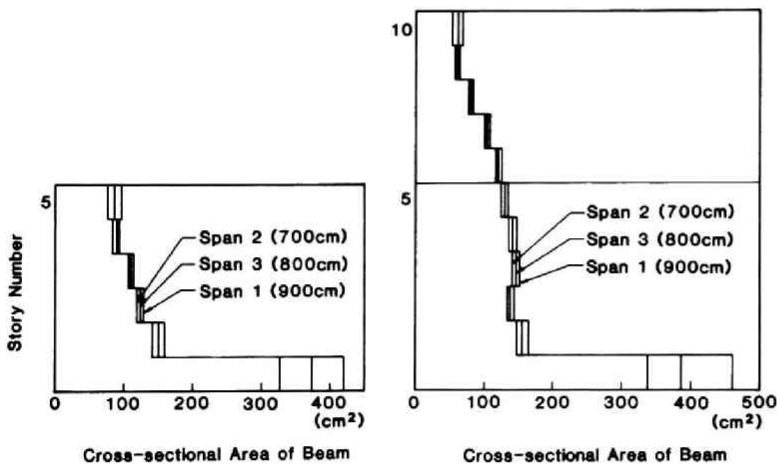


図8.17 動的部材塑性率制約設計された5層3スパン骨組の各スパン梁の断面積分布 ($\Gamma=1.5$)

図8.18 動的部材塑性率制約設計された10層3スパン骨組の各スパン梁の断面積分布 ($\Gamma=1.5$)

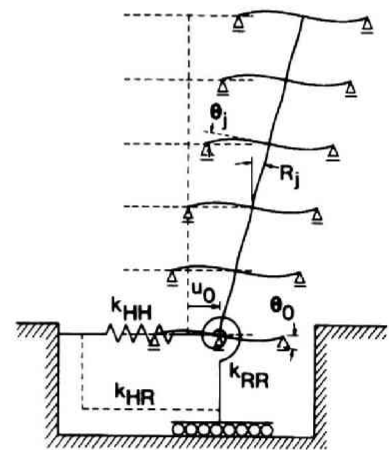


図8.19 弾性支持された単位ユニット骨組モデル

8-3 弾性支持された単位ユニット骨組モデル

8-3節では、7-4節で展開した、弾性支持された単位ユニット骨組モデルのシステム柔性制約条件下の最小コスト設計解公式を7-5節と同様の意味で静的部材塑性率制約設計公式と見なし、さらに8-1節と同様の手法を適用した動的部材塑性率制約設計法を展開する。8-1節と同様に、レベル2の設計用速度応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対する梁の最大応答部材塑性率の平均値+標準偏差値を以下では、 $\mu_{\theta_j}^{(D)}$ と表示する。また、その指定値を $\bar{\mu}_{\theta_j}^{(D)}$ と表示する。ここでは、8-1,8-2節とは異なり、レベル2設計用地震動に対する応答スペクトルとして、Mostaghel and Ahmadi(1979)のスペクトル(4-1節)を採用する。

ここでは、次のような問題を扱う。

[問題 DIRFRS]

図8.19に示す弾性支持された単位ユニット骨組モデルについて、幾何学的、力学的パラメータおよび $\{\beta_{Cj}(\text{for all } j), \{\beta_{B0} \sim \beta_{Bf}\}$ の中の一つ}が指定されたときに、激震レベル(レベル2)の設計用応答スペクトル(MAスペクトル)に適合する多数の人工地震波群に対して、梁の最大応答部材塑性率制約条件

$$\mu_{\theta_j}^{(D)} = \bar{\mu}_{\theta_j}^{(D)} \quad (j = 0, \dots, f) \quad (8.7)$$

を満足する設計 $\{\{b_j\}^T \{J_j\}^T\}$ を求めよ。

上部骨組の減衰とは独立に与えられる水平ばねおよび回転ばねに対応するダッシュポットの減衰係数の存在により、系全体としては非比例減衰系となる。この非比例減衰系の各次の減衰定数を近似的に評価するために4-2~4-4節と同様の手法を採用する。この時、[問題 DIRFRS]に対する解法アルゴリズムは、基礎固定時の8-1節の場合とほぼ同様に次のように構築できる。

ここで採用するアルゴリズムは次のように要約できる。

- [ステップ1] レベル2の設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対する骨組の平均最大応答層剪断力から算出される水平荷重の初期値を設定する(たとえば建築基準法における2次設計用必要保有水平耐力から算出される水平荷重)。
- [ステップ2] 7-5節の設計解公式を用いて梁の断面積、柱の曲げ剛性を求める。
- [ステップ3] 梁を σ_y/ϵ_y をヤング係数として有する線形弾性材料から構成される部材と見なす。前述の方法により、全体系としての各次の減衰定数を近似的に評価し、レベル1の設計用スペクトルに対する平均最大応答層剪断力をSRSS評価法により求める。
- [ステップ4] ステップ3で求めたレベル1設計用地震動に対する平均最大応答層剪断力の Γ 倍をレベル2設計用地震動に対する平均最大応答層剪断力として採用する。その値から、レベル2設計用地震動に対する設計用水平荷重を算出する。
- [ステップ5] ステップ4で求めた設計用水平荷重とステップ1(あるいは前回のステップ4で求めた値)における設計用水平荷重を比較し、その差がある値以下ならば終了する。そうでない場合はステップ6に進む。
- [ステップ6] ステップ4で求めた設計用水平荷重をステップ1における設計用水平荷重として採用し、ステップ2~ステップ5を繰り返す。

	Soil of type I	Soil of type II	Soil of type III
k_{HH} (tonf/cm)	7.215E02	3.957E02	2.034E02
k_{HR} (tonf/rad)	-8.755E04	-5.976E04	-4.102E04
k_{RR} (tonf·cm/rad)	2.192E07	1.813E07	1.526E07
c_{HH} (tonf·sec/cm)	5.183E00	4.355E00	3.058E00

表8.1 1,2,3種地盤に対する杭頭剛性係数および減衰係数

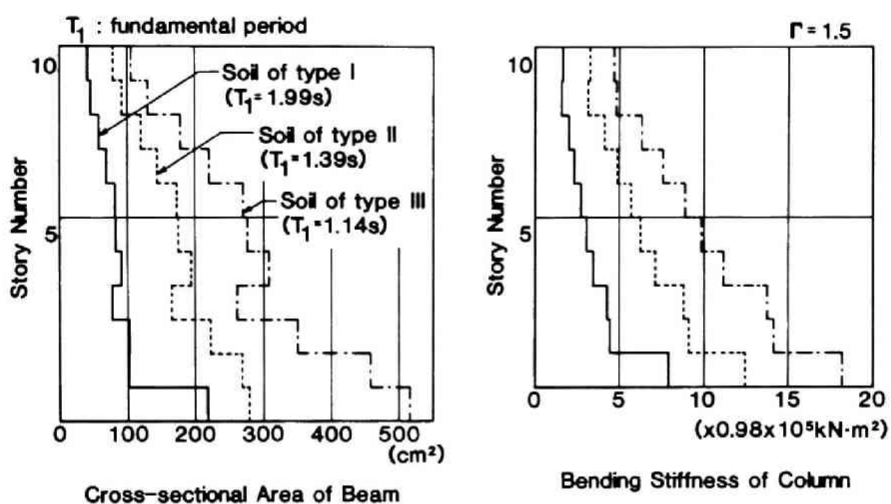


図8.20 動的部材塑性率制約設計された杭支持10層骨組の梁の断面積分布および柱の曲げ剛性分布

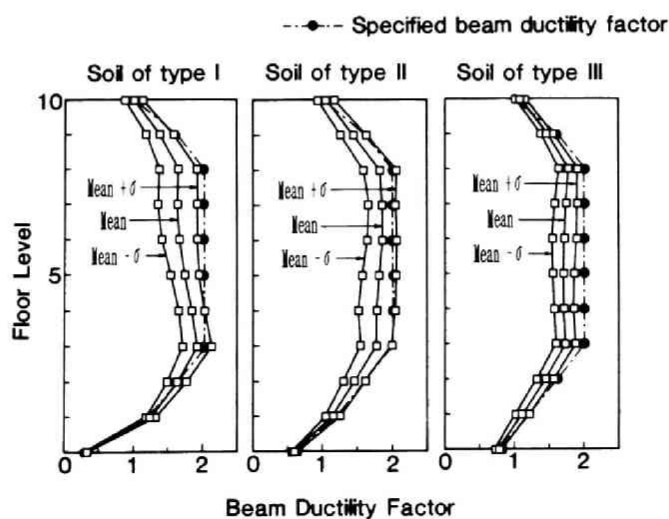


図8.21 動的部材塑性率制約設計された杭支持10層骨組の人工地震波10波に対する平均最大梁塑性率分布

適用例

弾性支持された10層単位ユニット骨組モデルに対して本手法を適用した例を示す。あらかじめ指定した骨組に関する幾何学および力学的パラメータは以下の通りである。階高 $h_1 = 450(\text{cm}), h_2 \sim h_{10} = 350(\text{cm})$, スパン長 $L = 700(\text{cm}), d_{2j}/d_{1j} = 37.5/40.0$ (for all j), $d_{1(0)} = 40.0(\text{cm}), d_{1(2j-1)} = d_{1(2j)} = 34.0 - 2j(\text{cm}) (j = 1, 2, 3), d_{1(2j-1)} = d_{1(2j)} = 31.0 - 3(j-3)(\text{cm}) (j = 4, 5), r_{2j-1} = r_{2j} = 32.0 - 2j(\text{cm}) (j = 1, \dots, 5), \alpha = 3/80, \beta_{B3} = 10.0, \beta_{Cj} = 1.0$ (for all j), $a = 1.0, n = 10.0, \sigma_y = 2.94(\text{N}/\text{m}^2), \sigma_y/\epsilon_y = 2.06(\text{kN}/\text{m}^2)$, 柱のヤング係数 $E = 2.06(\text{kN}/\text{m}^2)$, 質量 $m_0 = 90.0(\text{ton}), m_1 \sim m_{10} = 30.0(\text{ton})$ 。

激震(レベル2)時の設計用スペクトルとしては、4-1節で示したMostaghel and Ahmadiの地盤特性依存型スペクトルを採用した。地盤は1,2,3種地盤を想定し、弾性支持ばね剛性は、120(cm)径の場所打ちコンクリート杭を用いたNovak and Sharnouby (1983)の提案値を採用した。また、減衰としては、水平移動剛性 k_{HH} に対応する c_{HH} のみ考慮した。その時の弾性支持ばねの剛性および減衰係数を表8.1に示す。一方、上部骨組の減衰としては、基礎固定時(一層柱脚節点の水平変位のみ拘束)の一次の減衰定数を0.02とする初期剛性比例型のものを採用した。

図8.20は、1,2,3種地盤に対して、梁の部材塑性率を $\mu_{\theta j} = 2.0 (j = 3, \dots, 8), \mu_{\theta 1} = 1.2, \mu_{\theta 2} = 1.6, \mu_{\theta 9} = 1.6, \mu_{\theta 10} = 1.0$ と指定した時の梁の断面積分布および柱の曲げ剛性分布を表す。ただし、基礎梁については、1,2,3種地盤に対して、それぞれ $\mu_{\theta 0} = 0.3, \mu_{\theta 0} = 0.6, \mu_{\theta 0} = 0.8$ を設定した。また、係数 Γ としては、1.5を採用した。1,2,3種地盤に対する各設計骨組の一次固有周期は、それぞれ1.99(sec), 1.39(sec), 1.14(sec)である。

本手法の妥当性を例証するために、4-1節で示したレベル2の人工地震波各10波に対する時刻歴応答解析をANSR-Iプログラム(Mondkar and Powell, 1975)を用いて実施した。梁の復元力特性(材端モーメント-材端回転角関係)は、8-1節の場合とは異なり、トリリニア型のものを採用した。8-1節のバイリニア型のモデルにおいて、第2折点として理論曲線上の $\mu_{\theta j} = 2.0$ の点を選定し、第3分枝はこの第2折点と理論曲線上の $\mu_{\theta j} = 10.0$ の点を通るように選定した。図8.21は、1,2,3種地盤に対して設計された3個の骨組に対して、レベル2の各10波の人工地震波を入力して時刻歴応答解析を実施したときの梁の最大部材塑性率の平均値分布および平均値±標準偏差値分布を示す。図より、1,2,3種地盤に対して本設計法を用いて設計された骨組は、ほぼ指定した通りの平均値±標準偏差値分布を示すことがわかる。ここでは、限定された骨組特性および設計用地震動特性に対して Γ 値が提案されたが、より広範囲な設計用地震動特性、部材の復元力特性、梁と柱の剛性比および強度比、上部構造物と支持ばねの剛性比等に対して適用可能な Γ 値を提案することが望まれている。

8-4 結論

本章では、七章の静的設計用荷重に対する部材塑性率制約設計法に基づき、レベル2設計用地震動に対して、指定された最大部材塑性率分布を示す骨組の部材剛性を設計公式の形で導く動的部材塑性率制約設計法を展開した。本章において得られた成果の主なものを以下に示す。

- (1) 激震レベル(レベル2)の設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対する骨組の応答層剪断力を、強震レベル(レベル1)の設計用応答スペクトルを用いたSRSS評価法による値の係数倍として求める新しい方法を提案した。

- (2) 七章で展開した静的設計用水平荷重に対する部材塑性率制約設計法を用いて設計した骨組に、上記の方法を繰り返し適用することにより、激震レベルの設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対して、指定した最大部材塑性率分布を示す骨組を求めるアルゴリズムを構成した。この方法を動的部材塑性率制約設計法と呼ぶ。
- (3) 単位ユニット骨組モデルおよび多スパン骨組モデルに対して上記の方法を適用する過程を示した。
- (4) 杭の剛性をモデル化した弾性ばねで支持された単位ユニット骨組モデルに対して、動的部材塑性率制約設計法を適用する方法を示した。
- (5) 基礎固定時の単位ユニット骨組モデルおよび多スパン骨組モデルについて、動的部材塑性率制約設計法を用いて骨組を設計した。激震レベルの設計用応答スペクトル (NH スペクトル) に適合する人工地震波を 10 波作成し、設計した骨組の弾塑性時刻歴応答解析を実施した。その結果、本動的部材塑性率制約設計法に基づき設計された骨組は、激震レベルの設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対して、指定した最大部材塑性率応答を示すことが例証された。
- (6) 弾性支持された単位ユニット骨組モデルに対する動的部材塑性率制約設計法を用いて、3 種類の地盤に対して骨組を設計した。激震レベルの地盤特性依存型の設計用応答スペクトル (MA スペクトル) に適合する人工地震波を各 10 波作成し、設計した骨組の弾塑性時刻歴応答解析を実施した。その結果、本動的部材塑性率制約設計法に基づき設計された弾性支持骨組は、激震レベルの設計用応答スペクトルに適合する多数の人工地震波群に対して、指定した最大部材塑性率応答を示すことが例証された。

文献

- Anagnostopoulos, S.A., R.W. Haviland and J.M. Biggs (1978): Use of Inelastic Spectra in Aseismic Design. *J. of Struct. Div.*, ASCE, Vol.104, No. ST1, pp95-109.
- Austin, M.A. and K.S. Pister (1985): Design of Seismic-resistant Friction-braced Frames. *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol.111, No.12, pp2751-2769.
- Austin, M.A., K.S. Pister and S.A. Mahin (1987a): Probabilistic Design of Earthquake-resistant Structures. *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol.113, No.8, pp1642-1659.
- Austin, M.A., K.S. Pister and S.A. Mahin (1987b): Probabilistic Design of Moment-resistant Frames under Seismic Loading. *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol.113, No.8, pp1660-1677.
- Balling, R.J., M.A. Bhatti, V. Ciampi and K.S. Pister (1981): Interactive Optimal Design of Dynamically Loaded Structures Using The OPTNSR Software System. *Int. Sym. on Optimum Structural Design*, Univ. of Arizona, pp12.9-12.17.
- Balling, R.J., K.S. Pister and V. Ciampi (1983): Optimal Seismic-resistant Design of a Planar Steel Frame. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.11(4), pp541-556.
- Balling, R.J., K.S. Pister and E. Polak (1983): DELIGHT.STRUCT: An Optimization-based Computer-aided Design Environment for Structural Engineering. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.38, pp237-251.

- Bhatti, M.A. (1979): Optimal Design of Localized Nonlinear Systems with Dual Performance Criteria under Earthquake Excitations. *Report No. UCB/EERC-79/15, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, July.*
- Bhatti, M.A., V. Ciampi, K.S. Pister and E. Polak (1981): OPTNSR: An Interactive Software System for Optimal Design of Statically and Dynamically Loaded Structures with Nonlinear Response. *Report No. UCB/EERC-81/02, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, January.*
- Bhatti, M.A. and K.S. Pister (1981a): A Dual Criteria Approach for Optimal Design of Earthquake-resistant Structural Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.9(6), pp557-572.
- Bhatti, M.A. and K.S. Pister (1981b): Applications of Optimal Design to Structures Subjected to Earthquake Loading, *Optimization of Distributed Parameter Structures* (eds. E.J. Haug and J. Cea), Sitjhoff and Noordhoff, Netherlands, Vol.I, pp620-649.
- 藤原 悌三 (1977): 曲げ型架構モデルの弾塑性地震応答と適正動力学特性, 日本建築学会論文報告集, 第 255 号, pp25-34.
- Gasparini, D.A. and E.H. Vanmarcke (1976): *Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra-SIMQKE*, A computer program distributed by NISEE/ Computer Applications, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Hisatoku, T. and T. Kobori (1970): On the Optimum Aseismic Design Data for Multi-storey Structures Based on Elasto-plastic Earthquake Response, *Proc. of the Third European Symposium on Earthquake Engineering*, pp435-445.
- 石丸 辰治 (1975a): 塑性率制御法 (梁降伏型架構について - その 1 -), 日本建築学会論文報告集, 第 232 号, pp17-28.
- 石丸 辰治 (1975b): 塑性率制御法 (梁降伏型架構について - その 2 -), 日本建築学会論文報告集, 第 233 号, pp61-70.
- Kanaan, A.E. and G.H. Powell (1973): *A General Purpose Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures - DRAIN-2D*. Computer Program Distributed by NISEE, Berkeley, CA.
- 小堀 鐸二, 南井 良一郎, 河野 允宏 (1970): 建築構造物の地震応答の適正化の一方法, 京都大学防災研究所年報, 第 13 号 A, pp303-321.
- 小堀 鐸二, 南井 良一郎, 河野 允宏 (1971): 建築構造物の地震応答の適正化の一方法 (続), 京都大学防災研究所年報, 第 14 号 A, pp315-332.
- Kosaka, I. and Tsuneyoshi Nakamura (1989): Inelastic Response Constrained Design of Shear Buildings via Elastic Response Constrained Design. *Proc. 9th World Conf. on Earthquake Engineering*, Vol.V, pp965-970.
- Lai, S.-S. P. and J.M. Biggs (1980): Inelastic Response Spectra for Aseismic Building Design. *J. of Struct. Div.*, ASCE, Vol.106, No. ST6, pp1295-1310.
- Mondkar, D.P. and G.H. Powell (1975): *General Purpose Program for Analysis of Nonlinear Structural Response - ANSR-I*. Computer Program Distributed by NISEE, Berkeley, CA.

- Nakamura, Tsuneyoshi and I. Takewaki (1989) : Ductility Design via Optimum Design of Nonlinear Elastic Frames. *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol.115, No.3, pp608-625.
- Nakamura, Tsuneyoshi and T. Yamane(1986) : Optimum Design and Earthquake-response Constrained Design of Elastic Shear Buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, pp797-815.
- Newmark, N.M. and W.J. Hall (1982) : *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA.
- Polak, E., K.S. Pister and D. Ray (1976): Optimal Design of Framed Structures Subjected to Earthquakes. *Engineering Optimization*, Vol.2(1), pp65-71.
- Pister, K.S. (1981):Optimal Design of Structures under Dynamic Loading, *Optimization of Distributed Parameter Structures* (eds. E.J. Haug and J. Cea), Sitjhoff and Noordhoff, Netherlands, Vol.I, pp569-585.
- Ray, D., K.S. Pister and E. Polak (1978): Sensitivity Analysis for Hysteretic Dynamic Systems: Theory and Applications. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.14, pp179-208.
- 山田 善一, 家村 浩和, 古川 浩平, 坂本 幸三 (1984): 目標塑性率に基づく最適弾塑性耐震設計法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 341 号, pp87-95.

九章 結論

全ての建築構造物は地盤により支持されているため、その信頼性の高い耐震構造設計理論を展開するには、両者の相互作用を考慮した総合的な設計理論を展開する必要がある。地盤の剛性の最も単純で直接的なモデル化は、振動数依存型あるいは振動数非依存型のばねモデルへの置換である。

これまでに地盤と構造物の動的相互作用に関する研究は、理論的にも数値的にも精力的に行なわれ、多数の研究成果が蓄積されている。しかしながら、それに関する従来の研究のほとんどすべては、その挙動解析を行なう研究である。一方、設計用応答スペクトルで代表される設計用地震動や特定の記録地震波に対して、指定した最大局所応答分布を示す地盤-構造物連成系モデルの設計（構造物の部材剛性）を求める「直接的な方法」は、著者らの研究以外には存在しない。ここでいう「直接的な方法」とは、従来多くの場合に採用されてきた、設計感度解析法やパラメトリック時刻歴応答解析による極めて多数回の設計変更手続きによらずに、指定した応答分布を示す建築構造物の剛性分布を求める方法を意味する。

本論文は、振動数依存型あるいは振動数非依存型のばねで支持された建築構造物のシステム性能制約条件下の最適設計問題に対する解を閉形表現で求め、その中に現れる重み係数を地震時応答調整パラメータと見なす地震時応答制約設計法を展開したものである。本論文では、設計用地震動として、設計用速度応答スペクトルに適合する地震動群を採用し、構造物の並進振動のみを扱っている。本論文は上記の「直接的な方法」により、構造設計者が希望する設計条件を満足する構造物の剛性分布および強度分布を見いだす問題に対する新しい理論を展開している。

本論文の内容は次のように要約できる。

一章では、本研究の背景および目的について述べている。

二章では、振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開している。

2-1節では、指定された剛性を有する振動数非依存型ばねで支持された弾性剪断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計問題を定式化し、大域最適性の必要十分条件と閉形表現の解を導いている。最適性条件の誘導方法は、Sheu が1968年の論文で示した方法とほぼ同様であるが、最適設計解を閉形表現で導いているのが新しい点である。この閉形表現解の導出により、地盤ばねの剛性や指定一次固有周期が最適一次固有モードおよび最適解剛性に及ぼす影響が明確にされた点に意義がある。さらに、重み係数を含んだ形で得られた最適一次固有モードの閉形表現解は、後の地震時応答制約設計法の展開において重要な役割を果たしている。

2-2節では、杭支持された場合を想定し、杭剛性をも設計変数として含む弾性剪断型構造物-杭系の一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開している。上部構造物と杭基礎では、使用材料および施工方法等の種々の面で相違点があるため、重量あるいはコスト等を評価関数とする最適化を行なうに際しては、その評価関数の選定において注意深い考察が必要となる。本最適設計理論は、後で展開する地震時弾性応答制約設計法において重要な役割を果たしている。

2-3節では、2-1節と同様の理論を建築骨組について展開している。

三章では、剛性の指定された振動数依存型ばねで支持された建築構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計理論を展開している。

3-1節では、まず振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物と振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物の、一次固有振動数および一次固有ベクトルの対応関係を単純な例題を通じて明らかにしている。

3-2節では、振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物の一次固有振動数制約条件下の最適設計問題を定式化している。この種の問題はこれまでに取り扱われたことがない全く新しい問題である。

3-3節では、支持ばね剛性がすべて正の非増加一価関数で表現される場合について、振動数依存型剛性ばねで支持された建築構造物と、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物の、一次固有振動数および一次固有ベクトルの対応関係に関する二つの新しい定理を提示し、証明している。また、これらの定理に基づき、上記の問題に対する大域最適性の必要十分条件を、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された建築構造物の最適設計問題における最適性条件から導く過程を示した。ここで新たに証明した二つの定理は、最適設計問題に限らず、振動数依存型の剛性部材を有する構造物の構造設計を行なう際に極めて有用な特性を明らかにしたものである。また、本定理は、動力学における最も基礎的な原理の一つである Rayleigh の原理のみを用いて証明されている。

3-4節では、上記の問題を一次固有振動数に関する不等号制約条件下の問題に拡張した場合の取扱いについて述べ、等号制約条件下の最適設計解が不等号制約条件下の最適設計解ともなり得るための支持ばね剛性の資格条件を明らかにした。

3-5節では、上記の二つの定理の中の一つは、より一般的な振動数依存型剛性ばねで支持された場合にも成立することを示し、その場合の最適設計解の探索方法を簡潔に示した。

3-6節では、3-4節で導いた、評価関数の指定一次固有値に関する感度表現の妥当性を、単純モデルを用いて明らかにした。さらに、振動数依存型剛性ばねが適用される現実的なモデルについて、上記二つの定理の妥当性を例証した。

四章では、二章で導いた種々の数学モデルに対する一次固有周期制約条件下の最適設計解公式における重み係数を地震時応答調整パラメータと見なした場合の、地震時弾性応答制約設計法を展開している。本章の目的は、強震時の設計用地震動に対して、指定した平均最大局所応答分布を示す構造物の剛性分布を見いだすことである。

まず、4-1節では、地震時応答制約設計法において採用する設計用地震動を設計用応答スペクトルとして定義し、その設計用応答スペクトルに適合する人工地震波を作成する方法を示している。この人工地震波は、本地震時応答制約設計法の検証において用いられる。

4-2節では、2-1節のモデルに対して、そのレベル1設計用地震外乱（耐用年限中に一回以上発生すると予測される地震動）に対する平均最大応答層間相対変位分布が指定分布となる構造物の剛性分布を見出す地震時弾性応答制約設計法を展開している。

次に、4-3節では2-2節のモデルに対して、杭の平均最大応答応力の許容応力に対する比が指定値となり、同時に弾性剪断型構造物の平均最大応答層間相対変位分布が指定分布となる場合の剛性分布を見出す制約設計法を展開している。本設計法を用いることにより、上部構造と基礎構造の剛性の比率を直接的に指定した設計を得ることができる。

4-4節では、より現実的かつ実用的な設計理論を展開するために、地盤特性依存型設計用応答スペクトルを用いた、杭支持平面剪断型構造物（杭剛性は指定）の地震時弾性応答制約設計法を展開している。

五章では、指定された振動数依存型剛性を有するばねで支持された弾性剪断型構造物に対して、レベル1設計用地震外乱に対する平均最大応答層間相対変位分布が指定分布となる場合の剛性分布を見出す地震時弾性応答制約設計法を展開している。

本問題における固有値問題は従来の固有値問題とは異なる数学的構造を有するため、従来の固有値解析の手法は用いることができない。また、SRSS 評価法もそのままの形では用いることができない。ここでは、振

動数依存型剛性ばねで支持された構造物モデルの地震時平均最大応答を評価するために、対応する振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物モデルを用いている。本理論においては、振動数非依存型剛性ばねで支持された構造物モデルについて、一次固有周期および一次固有ベクトルを主制御パラメータとして採用しているため、2-1節の閉形表現の解公式の有効性が一層明らかとなる。またその際に、3-3節で証明した定理を用いている。

尚、ここでは例題として、理論の単純明快な説明のために、半無限弾性地盤上に置かれた円形剛基礎にSH波（あるいはSV波）が鉛直入射する場合を扱っているが、基礎の形状および地盤の特性が与えられていれば、kinematic interactionによる効果（基礎入力動）もinertial interactionによる効果（複素ばね剛性）ももって把握することができるため、動的サブストラクチャー法を有効に利用することにより、一層詳細な相互作用モデルを対象とした理論へと本理論を拡張することは比較的容易である。

四章各節の設計法に対しては、時間領域での応答解析による検証を実施し、五章の設計法に対しては、周波数領域での応答解析による検証を実施している。

建築骨組の構造設計を行う際には、その規模あるいは重要度にもよるが、激震時において非弾性応答を許容することが一般的な設計理念となりつつある。六章以降では、激震時の設計用地震動に対する非弾性応答を考慮したときの最適設計理論と、それに基づく非弾性応答の組織的な制約設計法を展開している。

現実の建築骨組は非弾性材料から構成されているため、その構造設計理論を扱うには非弾性部材により構成された骨組の理論を展開する必要がある。しかしながら、建築骨組の準静的荷重による単調載荷過程を考える場合には、座屈等の現象を生起させない範囲においては、同じ処女応力-歪関係を有する材料から構成される非線形弾性骨組の挙動と、対応する非弾性骨組の挙動を区別することはできない。安定な非線形弾性材料で構成される構造物の静的荷重に対する挙動に関しては、上記の座屈等の現象を生起させない範囲においては最小ポテンシャルエネルギーの原理が成立するため、非線形弾性構造物を扱う方が非弾性構造物を直接扱うよりも適している。また、非線形弾性構造物の応答を制約することは、動的外乱の作用を受ける非弾性構造物のスケルトン曲線上の履歴ループの尖点の応答レベルを簡易的に制約するという意義をも有している。そこで、六章および七章では非線形弾性骨組に対する理論を展開している。

完全弾塑性材料で構成される構造物の静的荷重に対する最適設計理論は塑性最適設計として40年近く研究され、ほぼ体系化されているといってもよい。しかしながら、ひずみ硬化材料で構成される構造物の最適設計理論は、ここ10年程の間に精力的に研究され始めた分野であり、研究論文の数もあまり多くない。建築構造物の構造設計においては強度性能だけでなく、塑性変形能力に対する設計条件も考慮に入れることが最近重要となりつつある。そのような観点にたつと、従来の塑性設計だけでは必ずしも十分ではなく、塑性変形にも注目した設計法を展開する必要がある。

設計感度解析に基づく設計法では、非線形応答の設計変数に関する感度を計算する際に、当該のステップにおける設計変数を採用した時の設計用荷重に対する弾塑性解析を実施する必要がある。この感度係数を用いた最適化手法を採用すると、各設計に対して設計用荷重を載荷した時の最終段階の接線剛性行列が必要となるため、設計変更のたびに弾塑性解析を実施する必要がある。これに対して、本論文では、設計感度解析法に基づく最適化手法に比べて一般性には乏しいが、非弾性応答を制御するにはより有効と思われるシステム性能を制約した設計法を展開している。

六章では、まず最初に、静的設計用荷重の作用を受ける非線形弾性建築骨組のコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計理論を展開し、後半では本理論に基づく非線形弾性建築骨組の最大平均化歪の制約設計法

を展開している。六章で展開している理論は、七章における一層現実的なモデルを用いた理論を展開するための基礎理論としての意義を有している。

6-1 節では、多層多スパン建築骨組の応答特性を代表する最も基本的なモデルであるスパン方向に単位ユニットを有する骨組モデルに、水平・鉛直両設計用荷重が作用した時のコンプライアンス制約条件下の最小コスト設計問題を定式化している。梁および柱はサンドイッチ断面を有するものと仮定し、そのフランジは一項べき級数型の応力-歪関係を有する非線形弾性材料で構成されるものと仮定している。

6-2 節では、本問題に対する大域最適性の必要十分条件を、非線形弾性体に対する最小ポテンシャルエネルギーの原理と数値計画法における Farkas の定理を用いて導いている。この最適性条件の誘導方法は、Prager らによる方法とほぼ同様である。得られた最適性条件は、「部材あたりの平均歪エネルギー密度が、その部材のコスト係数に比例して分配される」ことを示している。

6-3 節では、本最適性条件を全部材について書き、節点方程式と層方程式に構成法則を代入することにより、梁と柱の最適断面積の閉形表現を導いている。また、層間変形角および柱軸方向変形の閉形表現も導いている。

6-4 節では、本理論を杭基礎をモデル化した弾性ばねで支持されたモデルに拡張する方法を簡潔に示している。

6-5 節では、上記の最適設計解公式を静的設計用荷重に対する一つの最大平均化歪の制約設計解公式として用いる方法を示している。6-1 節でコスト係数として導入された量は、本設計公式では応答調整パラメータとみなされることになり、指定された最大平均化歪から求められるものとなる。サンドイッチ断面部材の材端モーメント-材端回転角関係が、現実的な中実断面部材のそれと等価になるように断面諸量を換算することにより、本平均化最大歪の制約設計公式は、現実的な部材の部材塑性率の制約設計公式として用いることが可能である。

七章では、構造物に設計用水平荷重が作用した時の構造物全体の柔性を表わす新たな指標として、「システム柔性」というシステム性能量を定義し、6-1 節と同じ単位ユニット骨組モデルについて、それを制約条件とする最小コスト設計理論を展開している。また後半では、最適設計解公式を用いた静的部材塑性率制約設計法を展開している。

7-1 節では、システム柔性制約条件下の最小コスト設計問題を定式化している。梁は H 型断面部材と仮定し、Ramberg-Osgood 型の応力-歪関係を有する非線形弾性材料で構成されるものと仮定している。一方柱は、線形弾性材料で構成されるものと仮定している。これは、梁降伏型の骨組を設計することを念頭において設定されたものである。

7-2 節では、本問題に対する大域最適性の必要十分条件を、非線形弾性体に対する最小ポテンシャルエネルギーの原理と Farkas の定理を用いて導いている。

7-3 節では、本最適性条件を全部材について書き、節点方程式と層方程式に構成法則を代入することにより、梁の最適断面積および柱の最適曲げ剛性の表現を導いている。本設計公式は、梁の材端縁歪をパラメータとして含んでいるため、その値をシステム柔性制約条件から決定する必要がある。本論文では、Newton-Raphson 法を用いてそのパラメータを決定する方法を示している。

7-4 節では、本理論を杭基礎をモデル化した弾性ばねで支持されたモデルに対して拡張する方法を簡潔に示している。

7-5 節では、7-3 節で導いたシステム柔性制約条件下の最小コスト設計解公式を梁の材端回転角に関する塑性率を制約するための設計公式として用いる設計法を展開している。本設計解公式は、本質的に梁の材端縁

歪値を指定して解を求めるという特性を有しているため、梁の材端縁歪値と梁の材端回転角に関する塑性率の間の関係が明確にされた後は、塑性率指定設計公式として用いる方が便利でありかつ実用的である。また、柱軸力による P- Δ 効果を考慮した場合の柱剛性の改修方法も示している。さらに、非線形弾性構造物に対する設計感度解析法を有効に利用して、連続変数として求められた断面の幾何学的パラメータを、最も近傍の实在断面のパラメータ値に変更した場合の非線形応答の変化量を評価する方法を提示している。

動的弾塑性応答を考慮した設計問題に対して、設計感度解析法を適用する際には、静的問題のように最大応答を与える時の釣合式を陽に表現することができないため、静的問題に対して用いた手法を採用することができない。従って、設計変数の一つずつ微小に変化させた時の動的弾塑性応答解析を設計変数の数に対応する回数だけ実行する必要がある。

八章では、7-5 節で展開した静的部材塑性率制約設計法を一つの動的部材塑性率制約設計法として用いる方法を展開している。設計目標は、レベル2 設計用地震動（当該敷地で発生する可能性のある中で最大の地震動）に対する動的最大梁塑性率分布が、指定した分布となる骨組の剛性および強度分布を見出すことである。

8-1 節では、単位ユニット骨組モデルに対する動的部材塑性率制約設計法を展開している。7-5 で展開した静的部材塑性率制約設計法を一つの動的部材塑性率制約設計法として用いるには、レベル2 の地震波に対する平均最大応答層剪断力の評価が必要となる。その方法として、これまでに非弾性応答スペクトル法、等価線形化法等が提案されてきているが、現段階では、激震レベルの地震波に対して非弾性応答を示す骨組の最大応答層剪断力を正確に求める方法は、時刻歴応答解析法以外には存在しない。しかしながら、初期設計の段階で、設計用地震動に適合する複数個の地震波に対して非弾性時刻歴応答解析を実施することは極めて非現実的である。そこでここでは、一つの近似的手法として、レベル1 設計用地震動に対する応答スペクトルを用いて SRSS 評価した時の弾性応答の平均最大層剪断力の Γ 倍をレベル2 の地震波に対する平均最大応答層剪断力として採用している。この平均最大応答層剪断力は、骨組の剛性および強度分布の関数となるため、最終的に骨組の剛性および強度分布を求めるには繰り返し計算が必要となる。ただし、この平均最大応答層剪断力が、レベル2 設計用地震動に対する平均最大応答層剪断力と厳密に一致していても、材料レベル、部材レベル、あるいは層レベルにおいて採用する履歴法則によっては、レベル2 設計用地震動に対する最大梁塑性率が指定値と一致するとは限らない。しかしながら、指定梁塑性率分布として層方向にほぼ一様な分布を採用した場合には、上記の方法はかなりよい近似を与える。本設計法を用いて5,10,20 層骨組を設計し、設計用速度応答スペクトル（NH スペクトル）に適合する多数の人工地震波に対する時刻歴応答解析により、本設計法の妥当性を例証している。

8-2 節では、8-1 節の設計法を多層多スパン骨組に対して拡張するための一つの方法を示している。

8-3 節では、8-1 節の設計法を、杭の剛性をモデル化した弾性ばねで支持された単位ユニット骨組モデルに対して拡張するための方法を簡潔に示している。さらに、本設計法を用いて1,2,3 種地盤に対して3 個の10 層骨組を設計し、設計用速度応答スペクトル（MA スペクトル）に適合する多数の人工地震波に対する時刻歴応答解析により、本設計法の妥当性を例証している。

以上、本論文は弾性地盤により支持された建築構造物のシステム性能制約条件下の最適設計理論、およびその設計解公式を利用した「直接的な」地震時応答制約設計法を展開したものである。

あとがき

著者は、京都大学工学部建築学科に入学以来、建築構造学の分野に進みたいという願望を抱いておりました。著者の非力にも拘らず、その分野に進むことができ、また研究者としての一区切りともいべき博士論文を取りまとめることができましたのは、卒業研究以来懇切なご指導を戴いている中村恒善先生の御蔭であると感謝致しております。中村恒善先生は常々、「設計力学」という新しい分野の開拓に力を注いでこられました。既に存在する研究領域においてその拡張を行なうことはそれ程困難でない場合が多いが、今までに存在しない全く新しい領域を開拓するには、計り知れない努力が必要であることは、若輩の研究者である著者にもおぼろげながら理解することができました。中村恒善先生のそのような新しい研究分野の開拓のお仕事の一助となり得たことは、著者の誇りとする点の一つであります。「設計力学」という新しい領域およびその概念に基づく真の意味の「構造物の設計理論」の分野はまだ産声を上げたばかりであり、今後ともさらに精進して研究を続けていきたいと考えております。

上谷宏二先生には、卒業研究以来、理論的および実験（物理実験）的研究の両面において、貴重な御教示を戴きました。本論文には実験的研究は含まれておりませんが、実験を通じて得た数知れない力学的直感力は、本論文の根底に横たわっているといっても過言ではないと信じております。また、理論的研究を遂行する上で上谷宏二先生から頂戴致しました御指摘はその理論の本質に関わるものばかりで、先生の御助言がなければ本論文は完成していなかったことと思います。大崎純助手には、最適設計理論に関して討論して頂き、大変参考とすることができました。また、研究を遂行するに際しての諸々の御協力に対しまして感謝申し上げます。

著者が本論文を作成するに際し感じましたことは、「研究テーマを選定することが重要であることは疑う余地がないが、しかし、ある一つの研究テーマあるいは自分のスタイルを見つけたならば、それを最後まで離さずに邁進することはもっと重要である」、ということであります。今後ともこの教訓を忘れずに研究活動を続ける所存であります。

本論文の作成にあたり、金多潔先生および南井良一郎先生からは、その具体的内容および全体構成に関する貴重な御指摘を頂きました。著者の学部在学中以来の両先生からの変わらぬ御指導に対しまして感謝申し上げます。また、中村研究室で御協力頂きました吉田亘利、高山恭仁子両氏および中村研究室で研究をともにした先輩、後輩の諸氏に対しましても心からお礼申し上げます。

最後に、いつも著者を叱咤激励してくれた両親と、著者の研究を支えてくれた妻に対して感謝の意を表します。

1990年9月

竹脇 出

