現代確率論の起源，形成および発展　（II）

― 無限次元確率解析における飛田の仕事：「ホワイトノイズ解析と関連した話題」の起りから現在に至る展望 ―

The Origin, Formation and Development of the Modern Theory of Probability　(II)

― Perspectives from the Beginnings to the Present of Hida's Work in Infinite Dimensional Stochastic Analysis: White Noise Analysis and Related Topics ―

芝浦工業大学名誉教授　阿部剛久（Takehisa Abe）

Professor Emeritus,　Shibaura Institute of Technology

Abstract. These two papers with the same title are composed of Parts I (Briefly we write (I)) and II (similarly to the Former, (II)). The former, namely (I), means contents of a subtitle given here, especially in the theory of stochastic processes, those on the origin, formation and development of its modern theory which were described as a central theme in (I): innovation theory by Paul P. Lévy (1886-1971) and T. Hida (飛田武幸 1927-), and its development occurred before and after the theory with the related historical background([1], [2]).　After our arguments have finished, an outline of the perspectives on stochastic analysis including white noise analysis as a main theme in (II) will be given ([3]), finally, we shall refer to those on promising creative subjects in the probabilistic category.

まえおき

主題（II）を先の（I）におけるイノベーション理論の三段階に位置する議論，すなわちAnalysisとみなせば,それは確率論における一つの数学の始まりとなり，無限次元の確率解析として新しい解析学の展開を意味するものである．後で知るるように，その意義は数学とその応用において極めて大きいものと云わねばならない．

ここでいう主題（I），(II）とは，それぞれ（I）：特に確率過程論におけるこれら（このシリーズの全体テーマ）の歴史的背景と飛田のイノベーション理論，（II）：無限次元確率解析における飛田の仕事：「ホワイトノイズ解析と関連した話題」を意味し，これらの解説および展望を試みることを目的とする．

主題（I）の概略　先の（I）で述べた事項を参考のために目次形式にまとめておく：

確率論の構成内容と現代論の主要対象分野

１．基礎概念

２．確率過程論と主要対象過程への案内：

（１）Brown 運動と Poisson 過程

（２）確率変数の独立性とイノベーション理論（Lévy‐飛田の仕事）

３．確率解析への序章と発展（Analysis の実際と確率解析の歴史）

本論 (I)

１．現代の確率過程論に関する歴史的背景とその考察からの結論

（１）‘現代’の言葉の意味と確率過程論の主題

（２）現代の主要な確率過程論と確率解析

（３）結論：現代確率論の代表的主題の決定と飛田の仕事

２．イノベーション理論からホワイトノイズ解析（無限次元確率解析）へ

（１）P. Lévy と飛田武幸

１$^{\mathrm{o}}$. イノベーション理論関係

２$^{\mathrm{o}}$. ホワイトノイズ解析関係

（２）イノベーション理論再訪

１$^{\mathrm{o}}$. 無限小方程式とイノベーション

２$^{\mathrm{o}}$. 変分方程式とイノベーション

注意 １，注意 ２． 謝辞

参考文献

現在までに基本的に達成された飛田の主要な仕事の史的展開　飛田の確率論における仕事は，基礎概念から確率過程論，確率解析および応用分野に至るまで，多岐にわたってそれぞれの課題の解決と発展に寄与してきた（たとえば，[4]，[5]）．現代確率論における飛田の業績の中でも，顕著にしてその価値の極めて普遍的なものは，このシリーズの二つの主題である，イノベーション理論とホワイトノイズ解析であり，これらと密接に関係する Brown 運動の理論である．これらは十分満足のゆく完成度の高い成果であることに異論はない．他に多くの分野への飛田の確率解析の基本的結果の応用が，飛田をはじめ専門領域の異なる研究者たちによっても活発に問題解決に当てられていて，将来的に最も有望視される研究領域の一つを形成しつつある（[6]，[7]，[8]，[9]）．

なお確率論全体に関する基礎概念と応用関係の仕事は，本シリーズの趣旨と紙数の制約から前者を割愛し，後者は発展途上にあるため大略的にのみ触れるにすぎないであろうが，上記のうちの飛田による主要な仕事：イノベーション理論，（Brown 運動のさらに進んだ研究），ホワイトノイズ解析，のうちの三番目のものを除く展開過程を参考上年代的に記載して要約的に示しておく（上記カッコ内に記載のテーマに関する仕事は，一般に Gauss 系に関わり，他の二つのものにつながることによって，その価値の重要性に注目すべきであろう．[10] 参照).

イノベーション理論：Lévy のアイディア提起（１９３７［11］，再版１９５４［12］：離散的パラメータ

の場合のイノベーションの議論，初版のアイディアの明確化）→　イノベーションの実現に関する成果（１９５６［13］：５５年の第３回バークリー・シンポジウムでの講演）→　飛田の Gauss 過程に対するイノベーション理論の達成（１９６０［14］：用語イノベーションに代って両者は‘標準表現’を使用.，飛田の使用による先の用語は後に公式的用語となり，飛田の論文は本理論に決定的結果をもたらす.）：基礎理論の完成； 一方，Lévy による無限小方程式（または変分方程式）の提案（１９５３［15］：Gauss 過程の標準表現に関する当初のアイディアに従うが，パラメータの連続化による方程式を得て，最初の確率過程に対応する新生過程（イノベーション）を適切な条件下で求めること）→　Lévy からの飛田へ上記の方程式の意義の解明の勧め（１９６８：飛田，パリに Lévy を訪問の折）→　飛田を中心に理論の数学的定式化の成功と変分方程式の解析的解法の確立（２００４［16］

＆２００８［17］: 一連の結果の集大成）⇒　Gauss 過程に対するイノベーション理論とその実現を達成 : 確率場のイノベーション理論の形成と発展へ（[18]，［19]）.

（**Brown 運動の研究の深化と二つの仕事** : Lévy による１９３７［20］以来の一連の研究（省略）→　１９６５［21］: Lévy の Brown 運動に関する顕著な業績の集大成　→　Lévy の飛田への Brown 運動研究の一層の奨励（１９６８ : パリに Lévy を訪問の折）　→　Lévy の仕事を含む飛田の Brown 運動に関する総合的仕事（１９７５の日本語版（１９８０の英語版）: 飛田の Princeton 講義（録）（１９６７－８（１９７０）［22]）＆ Carleton 講義録（１９７５［23]）: 確率解析の基本的な仕事, すなわちホワイトノイズを超汎関数とする Brown 運動の確率解析（ホワイトノイズ解析）の無限次元解析の確率論史上初の創始　→　展開（たとえば１９９３［24]）⇒　結論的注意 : Brown 運動（を特別な場合とする Gauss 型過程）の研究は, ここでの主題であるイノベーション理論における最終段階にある Analysis ともう一つの主題であるホワイトノイズ解析における出発点にある解析的対象である超汎関数をそれぞれ誘導する役割を演じた. つまり, A-nalysis は先の主題の終わりを意味すると同時に, その終わりは後の主題の本格的な始まりを意図するものに他ならないと云えよう. このような前後の緊密な結びつきは一連の主題にあるべき要請(整合性)から生じる数学の内部的必然性の結果であろう.）.

ホワイトノイズ解析 : ここから述べられることは, 上記の場合と異なり, 本論（II）の新しい主題内容でその中心となるもの, とだけ述べておく. また下記の目次は主な項目の記載にとどめ, 詳細は該当項目を参照頂きたい :

主題（II）の概略　下記の三つの章からなる.

まえおき : 本著(II)の冒頭から以上に述べた事柄

本論（II）

１. ノイズ小史　（１）確率論の常識語 : ノイズと偶然事象（または現象）

（２）ノイズの構成からホワイトノイズへ　　参考文献 :「ノイズ小史」関係

２. ホワイトノイズ解析　（１）主題に寄与した主要な仕事　（２）主題の概要

３. ホワイトノイズ解析に関連した主要な話題　（１）確率論の第二進化を目指して

（２）基礎的および応用的主題（３）関連領域と創造的新領域　　謝 辞　参考文献

上記の要約的なまえおきを基に, このシリーズの最終目標である飛田の最大の仕事の一つ, 「ホワイトノイズ解析」の理論と応用の概略を述べる.　ノイズの歴史に関しては過去から現在にかけて, ホワイトノイズ解析に関しては現状を中心に, 応用に関しては現状から将来に焦点を合わせて「展望」を試みる.

ここで云う展望とは, 歴史的評価にかぎらず, 創始者たちが数学を中心に据えて彼らに固有の哲学的, 思想的見解に基づき, 鋭い批評を交えつつ, 新たな問題を提起し数学の進歩に寄与する彼らの創造的活動のあり方をも理解に努め, 主題への大局観, 諸問題の相互関連の見通しや将来的予見を得ることを意味するものである.

さらに展望の内容が適正にして妥当であるためには, 展望的観察者にとって貢献者たる人々の創造上の歴史的過程の詳細な分析と学理面への万全な理解が必要であることは当然であろうが, 他にも固有の創造性とよぶべきものがあってもいいのではないだろうか. .展望する側の地平の開拓も今後の大きな課題と考えられる.

本論（II）の主題 : .

１. ノイズ小史

現在も依然として研究に余念ない飛田は, 現代確率論の基礎から無限次元解析の応用へわたる広汎な範疇で国内・外の講演と執筆活動に多忙な日々を送っている. 最近, 氏から筆者に届けられた数々の貴重な論考のうち, Si Si【１】に次いでホワイトノイズに関する３冊のノート（２０１１【２】,【３】,【４】）は, その歴史的記述とともに, イノベーション理論と合わせて新たに再考がなされた結果の集約である.

上記を含むいずれのノートも読み解くことは決して簡単ではないが, これまで確率論上あたかも常識語とみなされた言葉, たとえば‘偶然事象（または現象）’や‘ランダム’等を常識語とせず, 数学的に明確に定義すること等によって確率論の基礎を再考したいと望む. そのことは, イノベーション理論の各段階

における概念の厳密な定式化に基づいた，常識語の数学的表現を可能として，ここに同理論とノイズの概念との出会いをもつ．その近代的思想は，H. Poincaré（１９０８【５】）に始まり，P. Lévy のイノベーション理論の提起（１９３７【６】）の後に時を経て出版された彼の講義録（１９５３【７】）以後とみられる．

この章では，厳密な新しい解析（ホワイトノイズ解析）の実行が可能となる直前までをまず理解しておきたい．

（１）確率論の常識語：ノイズと偶然事象（または現象）　上記の趣旨に沿う方法は，「幾何学の基礎」に見られるような Hilbert 流の対応の仕方を唯一とせず，確率論固有の思想を踏まえた議論の展開を尊重してゆく．なお確率過程は Brown 運動または Gauss（型）過程とする．

ノイズとイノベーション理論　イノベーション理論の段階別対応が有効視されよう：

１）Reduction（イノベーションの第一段階：帰納化または要素還元）の視点から：

この段階は，元の確率過程から素な（事象のσ‐field を変えずに，自明でない二つ以上の独立変数の和として表せない）独立確率変数を取り出す段階であるから，これらの関数として元の過程を表すことができれば，後はこの関数の解析的な問題に帰着する．したがって，最終的には Synthesis の段階を経て Analysis の段階に至り，イノベーションを得ることを目指すことに他ならない．しかし最初の段階では偶然現象，その他の言葉を数学的に定義するには十分とは云いきれないであろう．よって曖昧な常識語のすべてを数学的に明確化するには上述のようにイノベーションを得ておくことが必須であるとする考えは妥当である．この段階で議論できる常識語はノイズに関する概念である．

ここでノイズの数学的定義，または数学的概念を定めておきたい．：**ノイズ**とは，ある順序集合，または対称空間等をパラメータ空間（T）とする独立確率変数 $X(t)$ の系 $\{X(t), t \in T\}$ である．殊に独立変数系が **i.i.d.**（independent identically distributed：独立同分布）確率変数のとき，この変数系を**ホワイトノイズ**という．各確率変数の確率分布が・・・分布であれば，この変数系は**・・・型ホワイトノイズ**という．（**例.** 確率分布：標準 Gauss 分布，Poisson 分布ならば，これらの変数系：（Gauss 型）ホワイトノイズ，Poisson 型ホワイトノイズという．）

２）Idealized elemental random variables（i.e.r.v.'s：理想的基幹確率変数[*1]）の視点から：

この立場は，１）の視点から見れば，その特別な場合として変数の分布の同一性であることを要請された系である．したがって１）へのアプローチとして，特にホワイトノイズ解析が考えられる．

＊1.この専門用語には変数が素であることと独立であることが予め要請されている（１９４８【8】）．

３）Synthesis → Analysis(イノベーションの第二段階：要素復元[*2] → 第三段階：解析)の視点から：

パラメータが離散的な場合は，時刻 $n(n = 0,1,2,\cdots)$ での時系列 $X(n)$ の**イノベーション** $Y(n)$ を求めることが問題となるが，理由は何であれ，今日まで顕著な結果は知られていない．よってここでは，パラメータ（t）が連続である場合を問題とする．この場合の議論はすでに本論（I）で基本的部分が詳しく説明されたが，要点だけをふり返っておく．

P. Lévy によって，元の素な独立変数系 $X(t)$ に対するイノベーション（新生過程）を $Y(t)$ とする確率無限小（または変分）方程式の提起がなされた（１９５３【7】）：

$$\delta X(t) = \Phi(X(t), s \le t, Y(t), t, dt).$$

方程式の左辺の意味するものは，$X(t)$ が微小時間区間 $[t, t+dt)$ において得た情報である．一般にこの方程式の解を得ることは困難であるが，Gauss 過程や線形過程などの場合は解ける可能性が極めて高いことが知られている．

ところでイノベーション$\{Y(t)\}$は各時点で独立であるということ（Si Si, T. Hida）から，この系はノイズの候補とみなされる．

確率論における常識語‘ノイズ’は，上で見たように，イノベーションの各段階と密接な関係にあること、および‘ホワイトノイズ’は制約付き独立確率変数系によって起こされること等を知った．

＊2．Reduction の段階で元の変数は，素である独立変数に還元されて，各変数$X(\alpha)$は$\{Y(\beta), \beta \in B\}$の関数として表される：$X(\alpha) = f(\alpha, Y(\beta), \beta \in B)$. よって，Reduction の逆とみなして,Synthesis を元の変数の復元操作の段階とみなした場合の筆者の可逆的な対訳である．ここに，f は一般に汎関数であり，超汎関数である場合も起こり得る．

４）偶然事象（または現象）とその表現　最後に偶然事象の数学的定義を明らかにしておきたい：

１°H. Poincaré の考察　確率論の近代化以前にその本質を究めたものというべきであろう：

この言葉については古くから議論されていたらしいが，ここでは１９０８年に Poincaré によって述べられた，今日もなお注目すべき考察がある．彼が云うには，偶然現象とは‘われわれの無知を測る尺度’あるいは‘法則が未知の現象’などとよんでいる．直観的にわかりやすく，味わい深い言葉である．

２°飛田武幸の考察　確率空間において本事象の本格的な一般的定義が行なわれる：

この言葉は本来的にイノベーション理論とは無関係にかつ先んじて存在してきたもので，ノイズの語と異なり，より広く多用されていると考える．このことも含むかのように飛田のノート（【３】，【８】）にはこの言葉のより包括的な学理的記述がなされていてその記述の妥当性は極めて高い．尤も偶然事象（または現象）は確率論の発端に位置する事柄のせいによるものだからであろう．これを確率変数（正確には，可測関数系；後出）で表せば，その解明のために前述のようにイノベーション理論の適用が必要とされよう．

さて偶然現象を簡潔に述べれば，確率空間を(Ω, B, P)とする（[25]）．対象とする事象または現象がこの確率空間上のそれとして表される場合に，**偶然事象**（または**現象**）という．この定義はもっと厳密に表されなければならない．より専門的に述べるならばつぎのように云い表せる：

確率空間を抽象ルベーグ空間とする **B** の要素で，**B**-可測関数である確率変数を**偶然事象**（または**現象**）という．（この定義によって **B** は可算基底をもち，可測関数は可分性が保証され，イノベーション理論の適用性を強化する（【３】））．抽象ルベーグ空間については，V. A. Rohlin【１０】，飛田の要約【３】参照．

上記はノイズと偶然事象（または現象）を確率論の常識語を代表するものとみなして，飛田が歴史的かつ思想的または哲学的考察を交えつつ徹底的に数学的再考を行なった結果の筆者による要約である．

結論：飛田と確率論の進化

偶然現象やノイズをはじめとする言葉，他にも揺らぎ，ランダム，でたらめなど確率論における常識語は外部から与えられたかのように目立って存在するが，それはわれわれの脳裏に確率論の感覚的に占める印象からくるものであろうか．このような印象または思いを払拭して，確率論独自の内部的表現を形成し確立していくこと等が創造につながることだと飛田は強調する．それへの出発点の一つがこれらの常識語を明確に数学用語として定義すること，または厳密に構成し直すことであるという．その結果は直ちにこれらの用語がイノベーションと呼応し，あるいはその可能性が見出されてくるという，確率論にとって各種概念の視野の拡大・深化と有用性の増大につながれば本当に喜ばしいことである．

飛田によるこれらの論考は，真の創造者による確率論の新しい革命的発展へ向かう試みの一つにすぎず，基礎理論から他に応用分野の将来的展望を加えると，そこに壮大なパノラマを観る思いである．このように，飛田にとって既成の事柄は常に変化変容し，進化の途上にあり続けるかのようである．

（２）ノイズの構成からホワイトノイズへ　これから述べることは，Lévy の１９３４年の結果（【１１】）を参考に標準的なノイズの構成を，パラメータ空間$I =$［0,1］対して実数の２進法展開をモデルとした離

散変数による近似によって行なう．最後に先に得た標準的ノイズから代表的なホワイトノイズを見出す．

構成に当っては，いくつかの要請を設ける：ノイズは抽象ルベーグ空間の上に構成（この空間では可算性や可分性が要求される），逐次近似法での無限連続化は，上記のように実数の２進法展開をモデルとする，独立変数と増分は同等（$X_n \Leftrightarrow S_n = \sum_1^n X_i$），他．これらの要請下でノイズの構成はつぎの二つの場合：下記の (i) と (ii) が考えられる．

なお構成手続きの説明にはかなりのスペースを要するので，ここでは要点のみ記して,詳細は飛田の論考ノート参照を頂きたい（【２】または【９】）．

１）標準的ノイズの構成

(i) 区間I を2^n 個の小等区間$\Delta_k^n, 1 \le k \le 2^n$ に分割，各小区間にi.i.d.の要素X_k^n を対応させ，各X_k^n の平均値=0として，分散の和＝$\sum_1^{2^n} V(X_k^n) =$ 一定（＝１）とするために$V(X_k^n) = 2^{-n}$ とする．各確率変数の標準偏差（スケール）＝$2^{-n/2}$．また$\sum_1^n X_k^n$ は正規化されているから，その分布は標準 Gauss（または正規）分布 $N(0,1)$ の近似となっている．さらに，連続する小区間の和が区間［a,b］であれば，$\sum_k X_k^n = S(n;a,b) \xrightarrow{n\to\infty} N(0,b-a)$：Gauss 分布．また［$a,b$］と［$c,d$］が重なり合うどんな区間もなければ,$S(n;a,b)$ と$S(n;c,d)$ とは独立．よって離散的確率変数系$\{X_k^n\}$はBrown 運動$B(t), t \in [0,1]$ を近似しているとみられる．このとき，X_k^n はGauss 型ホワイトノイズ$\dot{B}(t)$ [*3] を近似する．

(ii) 区間I の分割は (i) に同じとする．ここでの注目は分散に対してでなく，平均値とする．X_k^n は，素であることから最も簡単な場合，二つの値だけとして，標準偏差は負でない値に注意して１および0，それぞれの値をとる確率をp_n および$1-p_n$ とする．和$S(n) = \sum_1^{2^n} X_k^n$ の平均値$= np_n$ であるが，標準偏差値に対する条件からn に無関係な値$(\lambda > 0)$ であるとする．ここで，$S(n)$ の分布$\xrightarrow{n\to\infty} P(\lambda)$：平均値（強度）λの Poisson 分布であることが知られている [*4]．また (i) と同様にI の部分区間に対応する部分和，部分区間の独立性についての結果から,和$S(n)$ は強度λの Poisson 過程$P(t) = P(t,\lambda)$ の近似をなしていると云える．したがって (i) と同様に，X_k^n は強度λの Poisson 過程$P(t,\lambda)$ の時間微分としての Poisson 型ホワイトノイズ$\dot{P}(t)$ を近似する．

異なる Poisson 型過程の系（λの違いによる）の組合せによる複合 Poisson 過程も定められるが，組合せ方も多くの自由度をもつ．

(i) と (ii) への結論：上記の方法によるノイズの構成は，すでに見たように,二種類あって，本質的にこれらに尽きる．そのわけは，加法過程（つぎの条件を満たす：$\{X, t \ge 0\}$が　１．$X(0)=0$　２．$\forall t$ と $h>0$ に対して，$X(t+h)-X(t)$ は$\{X(s), s \le t\}$と独立）がさらに三つの条件（たとえば，３．$\forall t$ に対して，$X(t+h)-X(t)$ の分布はt によらない．他（略；飛田［26］参照））を満たせば，この加法過程を

Lévy 過程といい，この過程はそれ自身は素でないが，素なものに分解され，その成分となる基本的要素が Brown 運動と Poisson 過程から成るという事実に基づいているということである．

＊３．Brown 運動 B のホワイトノイズ（連続パラメータの Gauss 型ホワイトノイズ）が $\dot{B}$ で与えられる理由または根拠は何であるか．これは難しく厄介な問題にみえる．第一に，連続パラメータの場合へのホワイトノイズの一般化だけでも確率空間の測度に関係して簡単ではない場合も生じ得て（前述の抽象ルベーグ空間の性質の欠如），一般化への有効な考えとはならないが、Brown 運動の時間微分の採用は有効的（定常超過程でのスペクトルのフラットなこと）である．しかしながら，問題の Brown 運動の時間微分の厳密な定義は容易でなさそうである（いたるところ微分不能な超関数らしいが一点での値が決められない）．よって，この時間的導関数にホワイトノイズとしての identity を要請するためには一層詳細な議論を要する．結論的には，ここまでの回答ではホワイトノイズを B の時間微分とする数学的明確性が得られないままであるが，これが Gauss 型ホワイトノイズの実体であると云われる．しかし飛田の【１２】による提案以来，このホワイトノイズの厳密な意味をめぐる数学的，物理学的実体の認識を深めてきたが，得られた究明結果は，他の要請は多少犠牲にしても独立性を唯一重視したものであると云えよう．Poisson 型ホワイトノイズに関してもほぼ同様である（詳しくは飛田［２７］を参照）．Gauss 型については，２の（２）の１）で再論する．

＊４．小確率（または小数）の法則とよばれる（飛田［28］参照）．

２）代表的ホワイトノイズ

以上の議論をとおして代表的ホワイトノイズを再度まとめておくとしよう：

１°. Brown 運動の時間微分としてのホワイトノイズ $\dot{B}(t)$.

２°. 強度λの Poisson 過程 $P(t,\lambda)$ の時間微分としての Poisson 型ホワイトノイズ $\dot{P}(t)$.

空間微分に関してはここでは省略する．またホワイトノイズ解析の最も主要な対象とするホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ がつぎから議論される．

参 考 文 献 :「ノイズ小史」関係

【１】Si Si, 確率論におけるノイズの歴史, 第１７回数学史シンポジウム報告集, 183-195, 2006.
【２】飛田武幸, ノイズの歴史, 津田塾大学・数学史研究会講演ノート, 平成２３年１０月２９－３０日.
【３】飛田武幸, ホワイトノイズ, 第1部, ノート：「新しい確率論」への誘い, 平成２３年１１月記.
【４】飛田武幸, Revisiting the dawning of white noise analysis, ノート：White Noise Theory の展望, 2011, July.
【５】H. ポアンカレ, 科学と方法,（ 吉田洋一　訳, 改訂版, 岩波文庫）岩波書店, １９５３．（原著：H. Poincaré, Sciences et méthode, Flammarion, 1908）.
【６】P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937. 2ème ed., 1954.
【７】P. Lévy, Random functions:General theory with special reference to Laplacian random functions. Univ . of California Pub.in Statistics. 1, 331－388, 1953.
【８】P. Lévy, Univ Processus stochastiques et mouvement browniwn Gauthier-Villars, 1948. 2ème ed.,1965.
【９】飛田武幸, Stochasticity 序論, 平成２３年１２月記.
【１０】V. A. Rohlin, On the fundamental ideas of measure theory, AMS English Translation Ser. 1, vol. 10,1-54, 1962; Russian Original, Mat. Sbornik 25, 107-150, 1949.
【１１】P. Lévy, Sur les integrals don't les éléments sont des variables aléatoires indépendant, Ann.,Scuola Norm, Pisa, 337-366, 1934.
【１２】T. Hida, Analysis of Brownian functionals, Carlton Math. Lecture Notes, no. 13, 1975.
Univ. of Calif. Pub. in Statistics, vol. I, 331-388, 1953.

２．ホワイトノイズ解析

確率解析において，現在最も活発に研究がなされている主題の一つ，ホワイトノイズ解析とその関連課題について最終的に述べることとなった．ここでは当初の目標どおりに，これらの内容に可能なかぎり歴史的話題を交えながら現状についての概要を述べるが，詳細はこれまでの主要文献（[29]，[30]，[31]，[32]，他）を参照されるとよい．解説したりない部分は適切な機会に補足したいと考えている．

本題の説明に入る前に，「ホワイトノイズ解析」の理論とその関連領域（または課題），および応用的主題等の構成について数学的方法を含めて簡潔に述べておきたい．これは，これから問題とするテーマの背景や位置，全体的構造を前もって多少とも理解しておくこは無益ではあるまいと考えるからである．

扱う一般的な解析的対象は，Brown 運動の時間微分としてのホワイトノイズ汎関数（非線形）であり，その解析をホワイトノイズ解析とよぶ．特に，汎関数が超汎関数である場合，これをホワイトノイズ超汎関数，その解析手法を Hida（飛田）calculus とよぶ．超汎関数とその関連課題はここでの中心的話題であるとともに，ホワイトノイズ解析の基礎と応用における本質的に重要な概念となる．これらの議論を推進させる数学的方法が高度に発展した関数解析（汎関数解析）の諸結果である．特にここでは複雑な関数空間とその上の固有の偏微分作用素の導入によって，対象とその研究手段の整合性と調和の重要性が理解されよう．以上はホワイトノイズ解析の基礎理論として，つぎに関連領域（基礎的･応用的課題をもつ）に触れて，最後に実用的応用域が一瞥できれば幸いである．関連域は従来的確率論の外部にあって，それぞれが個別に扱われていた課題も少なくないであろう．これらが基礎的に見直されるとき，ホワイトノイズ解析は数学として独立な分野の形成に寄与することを将来的に期待したい．

（１）主題に寄与した主要な仕事：「始まり」から「現状」に至るまでの展望を通して　Lévy によるイノベーション理論が１９３７年に提起されてから，飛田のこの理論研究への参加と協力を得て，前者による１９５６年，後者による１９６０年に三段階からなるイノベーション理論を基本的た確立した．これはその後の確率解析の進歩に多大な寄与を行なってきたことは周知のことである．その後の Brown 運動の研究と合わせて，やがて後の偉大な道の開拓につながる核心的主題「ホワイトノイズ解析」の研究へ大きく舵がとられた．以下にこの課題の発展に貢献した，またはしつつある主要事項を整理しておこう．

１）イノベーション理論と Brown 運動　[33] によれば，端緒となった研究のうちで特に顕著な文献は１９７５年出版の講義録 [34] であるが，実質的には１９６７－６８年に行った１９７０年出版の講義録 [35] である（Brown 運動に関して，これらの議論を含む飛田の集大成：日本語文献 [36] とその英語版 [37] がある）．飛田のここでの主題はイノベーションにおける Reduction の考えであった．そのときの変数系は Brown 運動の時間微分をホワイトノイズとするもので，これには１９６０年の研究 [38] に示唆されるものがあった．他方で，Lévy の１９５３年の論文 [39] で変分式による連続パラメータの場合のイノベーションの意義に言及し，後にこの解の導出をめぐり飛田を中心とする研究者たちによる決定的な成果を得るに至ったことは前の主題（I）でかなり詳しく述べておいたとおりである．他に，非線形予測理論の台頭を予知する動向とともに，N. Wiener, P. Masani たちによるイノベーションの考えの適用は飛田たちに大きく影響を与えた（[40]）．通信理論はノイズをも対象とするから Gauss 過程の表現問題に関係した．昨年（２０１１年）に至って，「新しいノイズ」（空間のパラメータに依存するノイズ）の確たる認識を得（Si Si [41]，飛田の一連の論考ノート：「ノイズ小史」関係の参考文献参照），さらにホワイトノイズ解析の基本的体系に繰り込まれこの理論の拡大化が将来的にも見込まれることが期待される．つぎにホワイトノイズ解析の発展のために本質的な役割を投じたのはイノベーション理論における Synthesis と Analysis の各段階であった．イノベーションの三段階論はこれまで何度か説明を繰り返したことであったから，これら二つの段階のホワイトノイズ解析への寄与も概ね察しのつくことであろう．これらに伴う関連領域の課題（非線形予測理論や通信理論）への影響も注目すべきである．

２）標準的ホワイトノイズ解析とその方法　離散パラメータおよび連続パラメータのホワイトノイズに対して，それらノイズの確率分布の厳密な定義をはじめ，存在やホワイトノイズの分布の実態を明らかにすることは，この主題への入門的位置にある基本的かつ重要な問題である．この点に関しては，いずれのパラメータの場合にも必要な役割を演ずるボホナー･ミンロス（Bochner-Minlos）の定理が決定的である．それぞれの場合に対応するこの定理は形式的にもよく類似していることも特徴の一つであろう．たと

えば，連続パラメータの場合，$C(\xi)$ ：ヒルベルト空間 $E(,\xi \in E)$ 上の特性汎関数 $\in E^*(:E$ の共役空間)

で，E 上で正定符号，$C(0)=1 \quad \Rightarrow \quad E^*$ 上の確率測度で，$C(\xi)=\int_{E^*}\exp\left[i(x,\xi)\right]d\mu(x)$ となる μ が一意的に存在する．長い証明はいくつかの段階に分けて行なわれ，それぞれで得られる結果（有限次元周辺分布，測度空間の系の一致性，有限加法的測度空間の完全加法的なそれへの拡張手続き）は測度空間の拡張定理と合わせて確率空間の構成へ応用される．

上記の議論は標準的な手法である古典的（碩学の云れる既成の，確立されたという意味の）関数解析を主に用い，部分的に汎関数に対する解析的方法を導入することによって標準的なものから方法的レベルの向上による主題への仲介と有効性を可能とするものである．これらの設定のための背景にある関数空間は，標準的なものとして，たとえば各ノルムをヒルベルト的とするこれらの族 $\left\{\|\cdot\|_{n,}\ n\geq 0\right\}$（第 0 番目のノルム：最初に選ばれた関数空間 A のノルムとする）に対して，上記のノルムをもつ，空間 A の稠密な部分ヒルベルト空間を A_{n}、$,A_n$ の共役空間を $A_{-n} \Rightarrow$ つぎの包含的増加列をもつ：

$$\cdots\subset A_{n+1}\subset A_n\subset\cdots\subset A\subset\cdots\subset A_{-n}\subset A_{-n-1}\subset\cdots.$$

ここで，$\mathbf{A}=\bigcap A_n$ は核型空間とよばれ，A_{-n} の射影的極限である共役空間は $\mathbf{A}^*$ で示される．また $\mathbf{A}$ のトポロジーは通常の仕方で入れられる．ここで $A=L^2(R)$ とするとき，$\mathbf{A}\subset L^2(R)\subset\mathbf{A}^*$ (A 上の連続線形汎関数の全体）である三つ組みをゲルファント（Gel'fand）の三つ組みとよんでいる．$\mathbf{A}$: テスト関数の全体, A^* : A 上の超関数の全体．このような三つ組は後に高度な内容を含む形で何度か現れる(［42］).

また，関数空間上の線形（常または偏）微分作用素等．.フーリエ変換，ラプラス変換等の古典的な積分変換は周知のものであろう．これらは，ホワイトノイズ解析にとって適切な数種の微分作用素および類似した変換が定義され，高度に発展した関数解析とホワイトノイズ解析を結ぶ役割をもつ重要な手段となる．

これ以後説明すべき事柄は上記のそれにも増して広大にして豊かな内容を見せるが，ここではその全容の一端を示すにすぎない．それでも多くの準備を要するので，必要最小限の事項に言及しながら，一路目標に向かって最短なコースを得ることができれば幸いである．

（２）主題の概要：ホワイトノイズ超汎関数論　飛田の超関数論（またはホワイトノイズ超汎関数論）を中心とする無限次元確率解析の典型的主題について，ここに偉大な創始者の言葉を添えたい：

Generalized white noise functional is one of the most significant subjects of our white noise theory. Indeed, the study of generalized white noise functionals is the foundation of the advanced theory.

―［43］, ch. 2, p. 35. ―

１）主要な基本的概念　＊３で Gauss 型ホワイトノイズ（Brown 運動の時間微分）に関してこれまで問題とされてきたことに触れたが，その回答は数学的意味において明確さを十分に満たすものではないであろう．Gel'fand の意味の超過程とする解釈も飛田の目的と要求に応えるものでなかった．ホワイトノイズの意味するものは，素な独立確率変数系であって，その過程の同じ（型の確率）分布からなるノイズであるが，個々の $\dot{B}(t)$ は独自性をもつべきである．ここでは，このホワイトノイズの数学的な定式化による定義を与える．歴史的には，本ノイズが１９７０年前後にかけて飛田によって多くの観点に基づいて提唱され（[44]），ホワイトノイズ超汎関数の概念に至るきっかけが与えられた（１９７５［45]）．

$B(t), t\in T$ の時間微分の平均化を通して，これを通常の確率変数にとるとき，その表示はよく見かけ

るように汎関数としての積分形式で書かれ，$\langle \dot{B}, \xi \rangle = \int \dot{B}(t)\xi(t)\,dt = -\int B(t)\xi'(t)dt, \langle \dot{B}, \xi \rangle =$ $\dot{B}(\xi)$ とも書かれる．さてパラメータ空間を $I = [0,1]$ とする．このとき，共分散は

$$E(\dot{B}(\xi)\dot{B}(\eta)) = \int_0^1 \xi(t)\eta(t)dt.$$

この等式から，確率分布が $N(0,\|f\|^2)$ である Gauss 変数 $f \in L^2(I)$ に対して，$\dot{B}(\xi)$ を $\dot{B}(f)$ へ拡張可能である．これは，ほとんど至るところ定義された確率的双一次形式である．この意味は，部分空間 H_1（パラメータ空間が上記の I である Fock 空間（＊５参照）の構成要素である空間）と Hilbert 空間 $L^2(I)$ の間に同形写像が存在して，

$$H_1 \cong L^2(I). \qquad (*)_1$$

ここで Sobolev 空間の基本的事項を挙げておく（Si Si［46］参照. 他［47]）．Sobolev 空間の定義: $K^m(R^n) = \{f; \hat{f}(1+\lambda^2)^{m/2} \in L^2\}, m > 0, \hat{f} : f$ の Fourier 変換． $m = 0 \Rightarrow K^0(R^n) = L^2(R^n)$. $K^{-m}(R^n)$ は，$L^2(R^n)$ - ノルムに関して $K^m(R^n)$ の共役空間である．すなわち，

$$K^m(R^n) \subset L^2(R^n) \subset K^{-m}(R^n). \qquad (*)_2.$$

上記の結果から，次数－１の Sobolev 空間 $K^{-1}(I)$ は次数１の Sobolev 空間 $K^1(I)$ の共役空間である．

$L^2(I)$ に関するこれらの包含関係は， $K^1(I) \subset L^2(I) \subset K^{-1}(I)$, 左辺から右辺への写像は Hilbert-Schmidt 型（＊６参照）の連続な単射である．

同形写像$(*)_1$ を $K^1(I) \cong H_1^1$ の左辺へ制限して，この同形性が成り立つように右辺を定めることができるから，H_1^1 の共役空間 H_1^{-1} が定義され得て，H_1 に関して $H_1^1 \subset H_1 \subset H_1^{-1}$. ここで注意すべきことは，$H_1^{-1}$ の元は確率的双一次形式の拡張である $\dot{B}(g), g \in H^{-1}(I)$ として書かれるかもしれない．. g をデルタ関数 δ_t であるとすれば，$\dot{B}(\delta_t) = \dot{B}(t)$ となって，これは上記の双一次形式の拡張となっている．$\dot{B}(t)$ はこの定式化に見られる意味で定義されると考える．そのとき，H_1^{-1} の元は‘線形ホワイトノイズ超汎関数’とよばれ，$\dot{B}(t)$ の分布の型の同一性は H_1^{-1} の元として与えられると云ってもよい．これらの定義から得られる概念は $\dot{B}(t)$ を関数解析学的に特徴付けるものである．

＊５．直和分解が可能な空間. たとえば，複素 Hilbert 空間 $(L^2)(= (E^*, B, \mu), \mu$: 可測空間 (E^*, B) 上に導入されたホ

ワイトノイズ測度, E^* : 核型空間 E の共役空間) は, $H_n(<x,\eta>)$, $x \in E^*, \eta \in E$ によって張られた (L^2) の部分空間 H_n (重複 Wiener 積分の空間)を用いて, $(L^2) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_n$ と表せる. このような空間を指す.

＊6. 有限次元の値域をもつ作用素によるコンパクト作用素の近似が Hilbert 空間での可能性に依存している手法の総称.

2）その他の重要事項 1）で述べたホワイトノイズ超汎関数は線形の場合の定式化（三つ組）による定義であった. つぎに B の時間微分を一般の非線形超汎関数に拡張する関数のクラスを定めることである. また超汎関数に関わる関数空間上の重要な作用素と変換に触れておきたい.

1°. 超汎関数への拡張 議論の詳細はかなり長いから, ごく結論的にまとめておくとしたい. 問題の要点は, ホワイトノイズ汎関数が超汎関数であるような関数空間の構成, すなわち当初の汎関数空間をどんな関数空間に拡張すればその元が超汎関数であり得るかということである. その示し方には典型的な二つの方法があって, それぞれは Gel'fand の三つ組を介して結果が得られる. 当初の出発点とする Hilbert 空間（L^2）は＊5の Fock 空間を用いる. このとき直和因子は $H_n \cong \sqrt{n!}\hat{L}^2(R^n)$. 対称な L^2 空間である $\hat{L}^2$ の拡張をとおして(上式の右辺を R^n 上の, 次数 $-(n+1)/2$ の対称な Sobolev 空間⇒右辺＝$H_n^{(-n)}$ を得る）, n 次の超汎関数空間, したがって適当な c_n (.>0)を用いて, $(L^2)^- = \oplus c_n H_n^{(-n)}$ と書けて,

$$(L^2)^+ \subset (L^2) \subset (L^2)^- \qquad (\sharp)_1$$

上記三つ組$(\sharp)_1$の右辺の元は, ホワイトノイズ超汎関数とよばれ, L.Streit がよんで後に, よく飛田超関数ともよばれる. ($L^2)^+$ は云うまでもなく与えられたノルムの下で右辺と同様に Hilbert 空間としてテスト汎関数の空間である. 三つ組$(\sharp)_1$の導出は総じて Sobolev 空間の果す役割が大きい. 詳しくは下記の場合も含めて, [48]（２００８）, [49]（２０１１）, [50]（１９９３）, [51]（１９８０）, [52]（１９９１）等を参照されるとよい. 原典は上記１９８０年の Kubo-Takenaka によるものである.

上記以外のもう一つの方法は、L. Scwartz の超関数論の場合の手法を模してなされるが, 基本的にはこれまでの Gel'fand の三つ組の構成に尽きる. Schwartz の超関数空間の事柄： 簡単のため R^1 上の実数値急減少関数 f, f の滑らかさ, これら全体の関数空間 $S(R^1)$ 上のノルム, この関数空間はこれらのノルムによって位相化されて, 核型の位相空間となる.こと, 最後に $L^2(R^1)$ に関して上記の関数空間とその共役空間 $S'(R^1)$ の三つ組を得ること (これを得る過程は, 最初のノルムに同値なノルムの導入によって得られる Gel'fand の三つ組の左辺の射影的極限, 右辺の帰納的極限をとる操作に基づく）等の詳しい説明は割愛する.

ホワイトノイズ超汎関数は第二量子化の方法によって定義される. 線形作用素 A が $L^2(R^1)$ 上に稠密に定義されているとする. このとき, 対称的 Fock 空間 $(L^2) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(R^n, \sqrt{n!}d^n u)$ ((・, ・) : 内積) に作

用する作用素$\Gamma(A)=\oplus A^{\otimes n}$ ｛第二量子化作用素｝が存在する．このことから(L^2) でその領域が稠密な (L^2) 上の作用素$\Gamma(A)^p=\Gamma(A^p),(p\geq 0)$ に対して，$(S_p)=D(\Gamma(A^p)),(D:$領域） とおく．(S_p)はノルムが定義される Hilbert 空間，(S_{-p})を(S_p)の共役空間とする．このとき，(S_p)の射影的極限としてテスト汎関数の空間を，$(S)=\bigcap_p (S_p)$と定めると，左辺は可算 Hilbert 空間で核型であり，(S)の共役空間$(S)^*$は$(S)^*=\bigcup_p (S_p^*)$で与えられる．$(S)^*$の元はホワイトノイズ超汎関数であり，これはこの種の超汎関数の第二番目の定義となる．よって，つぎの Gel'fand の三つ組を得る：

$$(S)\subset(L^2)\subset(S)^* \qquad (\#)_2$$

ここで重要な注意がある．ホワイトノイズ超汎関数の空間を与える二つの三つ組$(\#)_1$ ，$(\#)_2$が得られたが，これらはすでに確立された事実であって，問題はそれぞれの空間$(L^2)^-,(S)^*$の間に矛盾があってはならないことである．.この結果が正当であることを理解し確認するためには，‘くり込み’(renor - malization)の手法と Hermite 多項式が有用である.. また$(\#)_1$と$(\#)_2$の特徴付けや比較も得られている.

２°． 変換と作用素 ここではこれらのすべてに対してそれぞれの役割を述べる余裕はないので，それぞれの項目から基本的で,重要なものを二つずつ挙げるにとどめる.

まず変換については，ホワイトノイズ超汎関数論（飛田の超関数論）において本質的な役割を担う二種類の変換,T - 変換とS - 変換にかぎるが，後者は本シリーズ（I）の終わり近くに出てきた。そこでは，Volterra 形式による積分方程式に応用された．これら二つの変換を，これまで扱った空間(L^2)から数列空間$\xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i;i\in Z\}$へ写す写像として定義する． 汎関数$\varphi\in(L^2)$に対して，$T$ - 変換とは,

$(T\varphi)(\xi)=\int_{E^*}\exp\left[i\langle x,\xi\rangle\right]\varphi(x)d\mu(x),\quad \xi\in E:$Hilbert 空間$l^2=\left\{\xi=(\xi_i);\sum\xi_i^2<\infty\right\}$の部分空間でより強い位相の入った Hilbert 空間．$E=\left\{\xi=(\xi_i);\sum i^2\xi_i^2<\infty\right\}$（ノルム$\|\xi\|_1=\sqrt{\sum i^2\xi_i^2}<\infty$）．

また，$S-$変換とは，$(S\varphi)(\xi)=e^{-\|\xi\|_1^2/2}\int_{E^*}\exp\left[\langle x,\xi\rangle\right]\varphi(x)d\mu(x),\quad \xi\in E$ で定義される．両積分とも被積分関数の可積分性から定義可能である．ここで両変換の関係に触れておく．$(S\varphi)(\xi)=U(\xi):\varphi$と結合した$U-$汎関数，かつ $\varphi\in H_n \Rightarrow (T\varphi)(\xi)=i^nC(\xi)U(\xi),\quad C(\xi)=\exp\left[-\|\xi\|_1/2\right]$

確率論で（偏）微分作用素に関連深い熱の拡散方程式はよく知られている．また近年では，非可換作用素を形成する消滅作用素（∂_t）と生成作用素（∂_t^*）のペアは確率論のみならず，自然科学をはじめ関連分野の問題究明に重要な役割を果たしている．ここでは基本的な作用素としてのこれら二つのものを概観し，確率論における意義を理解しておく.

量子力学においては粒子の定常状態を規定する波動関数は，無限遠点における境界条件下で，固有値（粒子の定常状態における全エネルギーを与える）を伴う固有関数として求められる．すなわち固有値問

題（ここでは調和振動子やCoulomb場における電子の場合）を解くことである．このとき，固有関数の構成に応用される関数がHermite微分方程式の一解Hermite多項式である．このようにHermite　多項式は以下に見られるように，数学固有の問題としても作用素の微積分と結びついて現代確率論の先端事項の導入的役割の一つをなしている.他にも，たとえば Fock 空間の直和因子H_nは次数nの内積空間$<\dot{B},\xi_n>$においてHermite多項式によって張られること等，Hermite多項式の有用性はこの先も消え去ることはないであろう．さて，目標はHermite多項式を用いて微分と基本的な作用素の定義，これらの性質である.

結論的に述べれば，偏微分：$\partial_{k:}=\partial/\partial x_k = S^{-1}(\partial S/\partial \xi_k)$, $S:S$ －変換. 定義式は，ξを実数とみて，Sを１次元の場合に制限し計算,の結果：$e^{-\xi^2/2}\int_R e^{\xi x} H_n(x/\sqrt{2})(2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}dx = (\sqrt{2}\xi)^n$（＊）から帰結. $\varphi_n(x_j)=H_n(x_j/\sqrt{2})$として，（＊）を適用すれば，$\partial_k H_n(x_j/\sqrt{2})=\cdots=\delta_{j,k}\sqrt{2}nH_{n-1}(x_j/\sqrt{2})$（定義式から）.形式的計算$\partial_k\varphi_n(x)=\sqrt{2}nH_{n-1}(x/\sqrt{2})$は,Hermite多項式の性質に一致して，上記の結果に整合している．また命題：$\varphi_k(x)$をn次の Fourier-Hermite 多項式:確率空間(E^*,μ)上の有限積で表された多項式　$\varphi_{\mathrm{k}}(x)=c_{\mathrm{k}}\prod H_{n_k}(x_k/\sqrt{2})$（$c_{\mathrm{k}}:\forall$定数，$\mathrm{k}=\{k_1,k_2,\cdots\}$,$|n|=\sum n_k$：有限とする和の値を$\varphi_{\mathrm{k}}$の次数とよぶ）⇒　$(S\varphi_{\mathrm{k}})(\xi)=c_{\mathrm{k}}2^{n/2}\prod(\xi_i)^{n_i}$（証明には，式（＊）の利用による）．この命題から，つぎの結果を得る：H_nの元の$S-$変換は，すべてξのn次斉次式である．この命題は,Fourier-Hermite多項式に関する重要な結果（略）の別証明を与えるのみならず，偏微分作用素自体の特性に言及している：作用素∂_kは（L^2）空間の基底となるFourier-Hermite多項式の次数を１だけ減ずるから消滅作用素(annihilation operator)とよばれる（が，すべてを０化する意味ではない）.他方,この作用素に対して

双対的に生成作用素が存在し（特別および一般の場合），$(\partial_k\varphi,\psi)=(\varphi,\partial_k^*\psi)$, φ,ψ :Fourier-Hermite多項式，から∂_k^*　はψの因子φ_{n_k}を$\sqrt{1/2}\varphi_{n_k+1}$に換える作用素となる（$n=0$の場合も含む）．このこと（定理の中の一結果）により∂_k^*を生成作用素(creation operator)とよぶ. 他にこの結果に並ぶ重要な結果もあるが，これらと両作用素の交換関係も含めて，他の作用素（Number, Laplace-Beltramiの各作用素等）の話題は省略する．詳しくは，先に挙げたHida, Hida-Si Si, Si Si, 飛田による文献を参照されるとよい．ここまで述べてきたことは，この方面の専門家にとってはごく常識的なことであろうが，初めて接する人々には多少なりとも参考に供せられればまことに幸いである.

なお２章(ホワイトノイズ解析)，１節の２)(標準的ホワイトノイズ解析とその方法)において，専ら関数解析に的を絞ったが、この方法と密接な関係にある「調和解析(または Fourier 解析)」にはこの箇所では全く触れることがなかった. 次章において触れる機会があればと思う.

３．　ホワイトノイズ解析に関連した話題 —今後の課題と「夢」の実現を目指して —

本題の最後の章を迎えたが，近年稀に見る碩学飛田と彼の学派によって達成された業績の意義とその重大さを知らされて，大きく距離を隔てて後からやってきた筆者は，ここに記載される飛田の熱い思い－数々の数学上の将来的課題の提示と貴重な展望的事項－に僭越ながらも深い共感を得させて頂き，われわれの‘近未来’J に向けての発信内容と後の学術の進歩の実際を比較検証をするためにまたの機会を待つことにしたい．特に予見的に述べられたものが，今後の批判や反論にどこまで耐え得るかは苦痛ながらも楽しみな検証課題となってくれることを期待したい．

さて，今日の数学の枠内での確率論は極度に現代化され，洗練された記述形式は他分野の数学と同様に，内容をよく表現し優美さえある．ここに至ったその原点は，１７１３年のJ. BernoulliのArs Conjectandi. であったことは既に（I）において触れた．それから３００年が経過する中で，A. Einstein の Brown 運動(1905)，N. Wiener の Differential Space.の理論等(1923)，P. Lévy の Calcul des Probabilités の方法等(1925)，A. N. Kolmogoroff の確率論の基礎(1933)をはじめ，様々な画期的仕事が起り，現在におよんだことも以前に述べた．この３００年にもわたる現今の確率論のさらに飛躍的な進展を願うならば，学術上の如何なる犠牲も辞さないとする飛田の並外れた決意がここに伺われる：

> 今確率論をどう解釈するか，すなわち確率論の構造改革を迫られているのではないか？確率論（名称は変るであろう，Stochasticity の内容も含めて）という名を掲げる以上は，その対象となるべき内容が**想定外の広さ**になることを**いま**自覚すべきである．―［53］，２節, p. 4 ―

（1）確率論の第二進化を目指して　飛田の上記のノートやごく最近の一連の論説［54］は，確率論の現状とその将来にかけて，終わりなき確率論の主題を熱く語っている．ここでその全容を述べることはできないが，上記の趣旨にかなう論点の概略のみを述べるにとどめる．

1）Stochastice から Stochasticity へ　飛田は問う，われわれは確率論研究の本来の精神を忘れてはいないかと．Bernoulli の Ars Conjectandi こそ確率解析の始まりの第一歩であったことを顧みるとき，３００年前の stochastice の初心に郷愁の念を禁じ得ず，それこそがさらに確率解析の進化を目指す stochasticity の精神を顧みることに他ならないと云う．そして活発な世界の動きの中で，日本は stochasticity を理解する上でかなり遅れていると強調する．この結果が上記の引用文に結果した．

2）Stochasticity へ向けた飛田の提唱　新しい確率論の開発進展のために飛田が提唱する三つの課題：

１°.Reductionism(確率論の常識語の数学的定義を可能にする確率変数の構造システムの構築)．

２°.Bayesian Method(Bayes 統計学の再認識と可能な議論の設定を主題とする.)．

３°.Lévy Process(多様な複合過程としての Lévy 過程の重要性の認識と応用的拡大化)．これらは Stochasticity への向上のみならず，純粋・応用基盤の拡大につながる第一歩と云えよう．飛田の提起に関連する他の人々の仕事も注目される（参考文献：［55］，［56］，［57］，［58］，［59］等）．

（2）基礎的および応用的主題　飛田［60］によれば，イノベーション理論の三段階を経て後に「豊富な応用」が展開されるという．基礎的課題も含めてこれらを分野的に眺めてみよう：

1）分野別主題：**(i) 数学において**　無限次元回転群，対称群などの表現．偏微分方程式論．パターン理論(Grenander-Mumford 理論)など　**(ii) 物理学において**　量子力学における Feynman 積分，量子場理論，Euclid 場，流体力学など　**(iii) 生物科学において**　網膜の作用の解明，微生物の行動など　**(iv) 情報社会学において**　べき分布の構造，観測データのランダム性の増幅に伴う無限次元の偶然現象への一般化と同定，未来予測，制御など　**(v) 他**　(略)．の現状が上記のように与えられている（２０１２年８月現在）．われわれはこれらすべての問題を直ちに解決し得ることではないが，確率解析的な新しい視点から飛田と彼の学派の国内・外の研究者たちの貢献が，特に１９９０年代以降，精力的に行なわれてれている．

2）主題の代表例　日新月歩する主題に関する研究は，次々と新しい価値ある知見の発見や創造に余念がないことは専門家であれば誰しもよく知るところであろう．これらの主題のいずれも代表例にふさわしいと考えられるものは決して少なくはないであろうが，ここでは飛田(［61］，［62］)にしたがって，確立が最も有望視される方法的基礎としての汎関数解析(Fourier 解析の一般化，量子力学の Feynman 積分，

流体力学のいくつかの基本方程式へつながりも見せる)等の，応用例として経路積分(Feynman 積分，ゲージ場の Chern-Simons 理論に現れる積分などを特殊例とする)等の．いずれもホワイトノイズ解析に最も身近な存在であるものをはじめとして，下記の例等が挙げられる：

１°基礎的代表例：. 調和的（確率的）汎関数解析（［63］，［64］） Lévy 過程（［65］，［66］，［67］，［68］，［69］）など

２°. 応用的代表例：経路積分(［70］，［71］) 無限次元回転群(［72］，［73］，［74］)など

１°の最初の例の呼称は，飛田の提案どおり「超調和汎関数解析」でよいと思う．汎関数を対象とする調和解析の拡張(→ 超)を意味する専門用語として常用したい．２°の例は飛田が長年取り組んできたテーマの一種であるが、基本的には測度の問題であり，汎関数解析に関係するから基礎的例とも考えられるであろう．どちらの要素が強いか，または考察目的によっていずれかに分けることの方が自然かもしれない．

温故知新：項目（１）と（２）の並列の意義

項目(1)は１７１３年の J. Bernoulli の例の著書以来の Stochastice から Stochasticity への最初の進化を N. Wiener に求めれば(この件に関しては異論があるかもしれないが)，そのインパクトによる確率論の近代化，すなわち第二の進化はまだ途上にあって，上で見たような課題の大きさと数の多さに直ぐにこの段階を完結し得ないから，しばらく時間が必要である．項目(1)は Stochasticity の精神を主張するものであり，それは非計量的で途切れることのない(analogue)古きものへの愛着の志を指すものであろう．この決意をもって確率論の発展的進化のために貢献する，バックボーンとも云える精神的支柱でもあり得よう．したがってこの精神の下での課題は常に大構造的スケールで絶えず進化の段階を迎える度にその規模を拡大し，つぎの発展に備えなければならない．その段階でのつぎの発展とはまさに個別で具体的，計量性をもつ非連続性の(digital)課題を指すであろう．これが項目(２)の役割であって，事物の進化のためには，これらの両局面がよく調和して機能することが本質的に重要である．このことが両者の並列であることの意義である．碩学の長い学問人生で得られた深い英知からの言葉であるかのように，温故知新を思う．

ここに至ってわれわれの知る碩学は，温故知新の先に何を求めようとするのか．それは既にこれまでに述べられたことであった．その究極の目標が簡潔に記述されたものがつぎに見出される：

> J. Bernoulli の Ars Conjectandi の思想に沿い，その手法と内容は digital ではなくて analogue を強調して現代的なものにしたい．また確率解析にこだわらず，見本関数に着目した一般調和解析にも留意して，総合的な確率論の発展を期待したい．―［75］，３ ∞, p. 16 ―

上記にあるように，強調すべきは「総合的な確率論の発展」である．これはいかなる碩学や天才と云えども至難の課題であろうが，数学がこの先も健全にして健在であるかぎり，いつかはこの当初の‘夢’は実現されることは確実であると約束できるであろう．数学の歴史はその証明の歴史でもある,と筆者は信じている．

われわれのテーマに関する議論もこのシリーズ(Ⅰ)および(Ⅱ)をとおして，多分不完全ながらも，どうやら終わりに近づいた思いでいる．以前に提起提案されなお現在究明中の課題の内容と進展状況や，また新しく生じた個々の主題や問題等について，説明すべきであったかもしれないが，これらは数多くしていずれも中途半端で不徹底にならざるを得ないとみて諦めた．３章の内容はそれに代わって現代確率論の発展的進化のために何をなすべきか，その方策を広い意味において求めた結果がここにある必要最小限のコメントとなって提起されることとなった．これは飛田の思想が到達し得た究極の目標であり，やがてなるべくしてなる科学の自然な発展的趨勢の中でかつて抱いた夢が実現することに他ならない．

以上に述べたことが，筆者にとってこのシリーズの最終的結論である．

（３）関連領域と創造的新領域　現代確率論が真の Stochasticity に生まれ変わった暁は，現時点では想像し得ない学術対象分野として不動の地位を確立するとともに，現象論的決定論を特殊な場合とする壮大な数学の形成と発展に寄与することが期待される．関連領域は現時点のものと上記の新領域に関わるものとが存在して，これらの相関と変容も興味深い歴史の流れを形づくるであろうと思われる．それまでには関

連領域個々の指摘や具体名の不確定をはじめ，創造的新領域ともなれば現代確率論の進化の果てに近い状況下でしか認識の行き届かぬ，いまからの想定は殆ど無理か，意味をなさないであろう．

このように単純には行きそうにないことは，その時点での全体的な学術水準の高さ，教育についても同様なことが云えそうだが，いずれも教育研究方面の構造上のシステムの改変や改造に基づいて従来からの伝統的あり方をはじめ，学術体制の不合理な面などの除去に伴う影響と必然性からかつて経験したことのない新しい制度下に置かれることにも拠ろうが，特に自然科学などにおいて大原理，大法則の発見による学術的な大変動が本質的となって，あらゆる面へ影響をおよぼす結果に基づくことになるからである．

以上のことの起こりは確率的にも低いと云えそうだが，そのことは，学術の発展的進化は突発性または偶発性による場合でしかないという旧時代から引き継ぐ先入観からのものが多い．しかしながら，科学の学術的環境の整備，技術の完備，人材の充足等が得られやすい今日ではこのような見方は常識では無くなりつつあると考える．つまり，発展の中でも最高度にその栄光の地位に位置づけられる進化はやがて日常的なものとなるか，あるいはすべてが一見落着となって進化自体の価値の階層化や序列化に応じた新しい構造的システムの変動が起り得るかもしれない．大進化なるものは起り難く，序列の低いものほど起りやすいことは，人類がかつて何十年か何百年前に経験したことと類似のスタイルの再来と云われる時代が巡り来る思いががする．

謝　辞　今回の主題（II）に対しても，新しい現代確率論の理解と認識を目標に，飛田先生からの参考文献のご案内とご教示を頼りに，筆者の取捨選択をお許し頂いて非力も省みず纏めたものである．先生の数学をはじめ数理科学の分野で世界的偉業を達成され，諸科学一般に広く深い影響を与え続けていられることは歴史上の記述を待つまでもないであろう．本シリーズの研究を進めるほどに飛田先生のお仕事の偉大さを身に染みて感じるとともに，真の碩学としての広大にして深遠な知性に圧倒される思いでいる．温厚なお人柄は人々を魅了させる大きな要素の一つであることにも驚かされる．筆者にとってこの二年間は本当にアカデミックな年月であったと思うと飛田先生へ深い感謝の気持ちで満たされる．先生がいつまでもお若く，ご壮健であられることを心から祈り申している．

さて，このような科学の起りからその現状にかけての展望を歴史的観点だけで議論するのは真に理解する上で無理があるし困難でもある．通史的叙述の不適さを可能な限り排除し，時には業績の細部に立ち入って学理的内容を知ることこそ，これからの史家に要請さるべき事柄であると筆者は心得る．特に現代史においてなされた仕事を正しく評価することは今後一層困難で厳しい立場に置かれよう．

このシリーズを記述するに当って，飛田先生の他に，きわめて有用な参考文献および資料等を度々お贈り頂いた Si Si 博士，並びに名古屋での国際会議(Nov.,2004)において，飛田先生の個々のご業績を解説された貴重な講演録の写しを筆者の求めに快く応じてくださった久保 泉 氏（広島大学名誉教授）に心から感謝の念をこめてお礼を申し上げる．また日頃，種々お世話頂いている京大数理研「数学史の研究」会の高瀬正仁(前)代表および小川　束(現)代表にはこの機会に深い謝意を捧げたい．また，本研究に関心を抱かれ，貴重なご意見をお寄せくださった研究会のメンバーの方々，並びに常々お世話を頂いている数理研の村山幸子女史をはじめ事務局の方々に対しても同様な思いでいる．

参 考 文 献

[1] 阿部剛久，現代確率論の起源，形成および発展（Ｉ），RIMS 研究集会「数学史の研究」講演会(2011年８月２３－２６日)，講演８月２５日； 講演概要３pp.，京都大学数理解析研究所.

［2］阿部剛久，現代確率論の起源，形成および発展 （Ｉ），数理解析研究所講究録「数学史の研究」，京都大学数理解析研究所，No. 1787, 304－315(2012).

［3］阿部剛久，現代確率論の起源，形成および発展(ＩＩ)，RIMS 研究集会「数学史の研究」講演会(2012年８月２７日－３０日)，講演８月２９日；講演概要５pp.，京都大学数理解析研究所.

［4］ L. Accardi, Selected papers of Takeyuki Hida, World Scientific Pub.Co.(2001).

［5］I. Kubo, The Dawn of White Noise Analysis, Int.Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum—Perspectives of White Noise Theory—November 1－5(2004).
［6］T. Hida-Si Si, An innovation approach to field: Applications of white noise theory, World Scientific Pub. Co.(2004).
［7］T. Hida-Si Si, Lectures on white noisu functionals, World Scientific Pub.(2008).
［8］飛田武幸, 確率論の基礎と発展, 共立出版(2011).
［9］Si Si, Introduction to Hida distributions, World Scientific Pub.(2011).
［10］阿部剛久, ［3］に同じ.
［11］P.Lévy, Thorie de l'addition des variables alatoires, Gauthier-Villars(1937).
［12］P. Lévy,［9］の再版(1954).
［13］P. Lévy, A special oroblem of Brownian notion, and a general theory of Gaussian random functions, Proc. 3rdBerkeley Symp. Math. Stat. Prob. II, Univ. of Calif. Pub. Press, 133-175(1956).
［14］T. Hida, Canonicald representations of Gaussian processes and their applications, Mem. Coll. Sci. Univ. of Kyoto(SA Math.)**34**, 109-155(1960).
［15］P. Lévy, Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions, Univ. of Calif.. Pub. In Statistics, I, 331-388(1953).
［16］T. Hida-Si Si,［6］に同じ.
［17］T. Hida-Si Si,［7］.に同じ.
［18］,［19］: 省略
［20］P. Lévy, ［11］に同じ.
［21］P. Lévy, Processus stochastiqueus et mouvement Brownian, Gauthier-Villars(1948), 増補版(1965).
［22］T. Hida, Stationary stochastic processes, Math. Notes, Princeton Univ., Press(1970).
［23］T. Hida, Analysis of Brownian functionals, Carleton Math. Notes no. 13(1975).
［24］T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit, White noise: An infinite dimensional calculus, Kluwer Academic Math. Pub.(1993).
［25］飛田武幸, ［8］に同じ.
［26］.上に同様.
［27］上に同様.
［28］上に同様.
［29］ 文献［6］に同じ.
［30］ 文献［7］に同じ.
［31］ 文献［8］に同じ.
［32］ 文献［9］に同じ.
［33］ 飛田【4】に同じ.
［34］ 講義録［23］に同じ.
［35］ 講義録［22］に同じ.
［36］ 飛田武幸, ブラウン運動, 岩波書店(1975).
［37］第３刷(2007)英訳：Brownian motion, Springer(1980)
［38］T. Hida,［14］に同じ.
［39］P. Lvy, ［15］に同じ.
［40］たとえば, P. Masani-N. Wiener, Nonlinear prediction, H. Cramr volume, John Wiley & Sons, 190-212(1959).
［41］Si Si, A new noise depending on a space parameter and its application, QBIC2011 Conf. 2011.
［42］I. M. Gel'fand-N. Ya. Vilenkin, Generalized functions, vol. 4. Academic Press(1964)

(Russian original, 1961).に始まって以来, 今日ではGel 'fandの手法は(汎)関数解析の基本的なモデルの一つとみられる.
［43］T. Hida-Si Si, .［7］に同じ.
［44］: 省略
［45］基本的には, Brown 運動と汎関数がホワイトノイズに対して決定的であった. 文献上は, ［23］, ［36］&［37］, 他に一般的には一連の書［6］—［9］が補充してくれる.
［46］Si Si, ［9］に同じ.
［47］他 : T. Hida, ［6］または偏微分方程式、その他への応用に関する本に広く紹介されている.
［48］たとえば, T. Hida-Si Si, ［7］.
［49］Si Si［46］, したがって［9］.
［50］［24］に同じ.
［51］I. Kubo-S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise, I－IV, Proc. Japan Academy, **56**, 376-380(1980).
［52］J. Potthoff-L. Streit, A characterization of Hida distribution, J. Functional Analysis, **101**, 212-229(1991).
［53］飛田武幸, Stochasticity 序論 :「ノイズ小史」関係の参考文献中の【９】に同じ.
［54］飛田武幸、【３】,【４】,【９】に同じ.
［55］W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley,vol.I(1950),vol.II (1966).
［56］飛田武幸-Si Si, Stochasticity and informationsociology, 2011, Nov.14, 情報社会学会, 創発パタン研究会報告.
［57］久保　泉, Multiplicative renormalization method 適用可能な測度の決定 III. ２０１０年日本数学会特別講演.
［58］D. Mumford-A. Desolneux, Pattern Theory. The stochastic analysis of real world signals, A K Peters(2010).
［59］K. Sato, Lévy processes and infinitely divisible distributions Camb. Univ. Press p. 99(1999).
［60］T. Hida,【4】に同じ.
［61］飛田武幸, 【4】に同じ.
［62］飛田武幸, 【3】に同じ.
［63］E. Hopf, Statistical hydromechanics and functional calculus, J. Rational Mechanics and Analysis, vol.1, 87-123(1952).
［64］他 :［7］および［9］.
［65］P. Lévy, Sur les intégrales don't les éleménts sont des variables aléatoires indépendantes, Ann. Della R. Scoula Normale Superiore de Pisa, ser. II, 337-366.
［66］D. Mumford, The dawning of the age of stochasticity. Mathematics: Frontiers and Perspectives, 197-218. MR 1754778 2001e, 01004.
［67］D. Mumford-B. Gidas, Stochastic models for generic images, preprint.
［68］K. Sato, ［59］に同じ.
［69］T. Hida-Si Si, ［7］に同じ
［70］R. P. Feynman-A. R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, McGraw-Hill Inc.(1965)
［71］M. Grothaus, D. C. Khandekar, J. L. da Wilva and L. Streit, The Feynman integral for time-dependent anharmonic oscillators, J. Math. Phys. 38(6), 1997(3278-3299). 他 :［7］, ［9］参照. .
［72］朝永振一郎, 角運動量とスピン, みすず書房(1989).
［73］I. Duck , E. C. G. Sudarshan, Pauli and the Spin-Statistics theorem, World-Scientific Pub. Co.(1997).
［74］B. Khesin-R. Wendt, The geometry of infinite-dimensional groups, Springer(2009).他 :［71］

に同じ.

[75] 飛田武幸, 【4】に同じ.

[76] **(補足)**: 夏季休暇中に飛田先生からのご紹介があった, つぎのシリーズを加えておきたい.

飛田武幸, 「時空 偶然」 , 4 回連載(雑誌・数学セミナー):

関心ある読者にとって, 碩学によるこのようなエッセーは本当に楽しい読みものになってくれる. 一読をお薦めする.