

# 不可能立体

## —錯視エンタテインメントへの一つの挑戦—

杉原 厚吉

不可能立体の絵と呼ばれるだまし絵の中に、立体として作れるものがあることを見つけた経緯と、それを素材に用いた新しい錯視エンタテインメントの創作の試みを紹介する。与えられた絵を投影図にもつ立体の集合は、ある線形方程式・不等式系の充足可能解の集合と一致する。この解の中には、人が絵を見たときには思い至ることのできない立体が含まれており、それを作ることによって、あり得ない立体やあり得ない動きが生じていると感じる錯視を生成できる。この錯視立体は、初期のものから次第にエンタテインメント性を強めるという進化を遂げている。

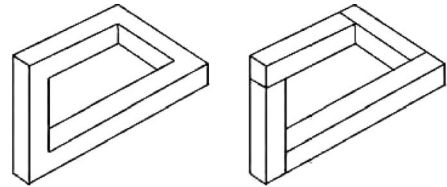
キーワード：立体錯視、だまし絵、不可能立体、不可能モーション

### 1. はじめに

不可能立体の絵と呼ばれるだまし絵がある。見た人に立体が描かれているという印象を与えるが、同時にそんな立体は作れそうにないという気持ちも起こさせる不思議な絵である [5]。オランダの版画家エッシャーが、作品の中で素材として用いたことでも有名である [12]。作れそうにないにもかかわらず立体感をもってしまうという矛盾した知覚をもたらすので、これは一種の錯視である [5, 10]。

私は、若い頃、線画からそこに描かれている立体を読み取ることでできるコンピュータを作る研究に没頭した。その過程で、不可能立体の絵と呼ばれるだまし絵の中に、立体として作れるものがあることを見つけた。そのことを、当時は面白いとは思ったが、研究の目的から見ると脇道なので、そのままにしておいた。しかし、年月を経るにつれて、その面白さをより効果的に示す方法もいくつか思い付き、私の中で不可能立体は次第に進化していった。そして、いつの間にか、このテーマが私の研究の中心の一つとして居座るようになった。

本稿では、立体化できるだまし絵という偶然見つけた素材を、エンタテインメントの視点からどのように進化させることができたかを紹介し、今後の夢についても触れてみたい。



(a) (b)

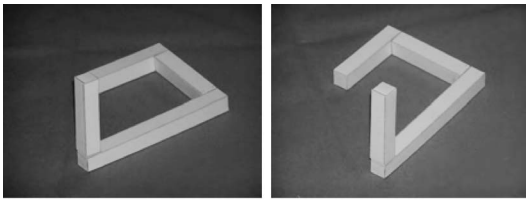
図 1 だまし絵「ペンローズ四角形」

### 2. だまし絵の立体化

不可能立体のだまし絵から、実際に立体を作ろうとする試みは古くからあった。これを例で示そう。図 1(a) は、4 本の角材が環状につながれた構造を表しているが、ひねりが加わっているという印象をもつであろう。だから、角材を素直につないだのでは作れそうにない。だからだまし絵である。これは、ペンローズの三角形という有名なだまし絵に角材を 1 本追加して作ったものである。この絵を最初に示したのは、Draper [3] であろう。この構造に 4 本の角材が使われていることを強調するために、角材のつなぎ目に線を入れたのが、同図の (b) である。だからこれもだまし絵である。

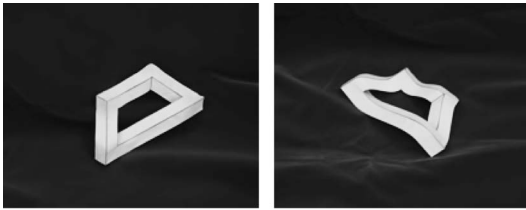
だまし絵を立体化する有名なトリックは二つある。その第一は、絵の中でつながっているように見えるところを不連続な構造で作るものである [4]。不連続であるが、ある方向から見るとつながっているように見えるために、不可能立体が実現されているという印象を与える。この方法で図 1(b) のだまし絵を立体化したものが図 2 である。(a) はだまし絵と同じに見える方向

すぎはら こうきち  
 明治大学大学院先端数理科学研究科  
 〒 214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1  
 E-mail: kokichis@isc.meiji.ac.jp



(a) (b)

図2 不連続のトリックによるペンローズ四角形の立体化



(a) (b)

図3 曲面のトリックによるペンローズ四角形の立体化

から撮影したもので、(b)は別の角度から撮影したものである。

第二のトリックは、平面に見えるところに曲面を使う方法で、これもある方向から見たとき面の境界が曲線ではなくて直線に見えるために、不可能立体が実現されているという印象を与えることができる[4]。図1(a)のだまし絵をこの方法で立体化した例を図3に示す。(a)はだまし絵と同じように見える方向から撮影したもので、(b)は別の方向から見たところである。

では、これらのトリックを使わなければだまし絵を立体化することはできないのであろうか。そんなことはない。不連続のトリックや曲面のトリックを使わなくても、立体化できるだまし絵がある。これは、与えられた絵を投影図にもつ立体を方程式を立てて探すという素直な方法で見つけることができる。まずこれを紹介しよう。

図4に示すように、 $xy$ 正規直交座標系の平面 $z=1$ 上に絵が固定され、原点においた視点からこれを眺めたとき、平面だけで囲まれた立体が空間に固定され、与えられた絵は、これを原点から眺めたとき得られる投影像であると仮定する。絵の中の頂点に1番から通し番号をつけたとき、第 $i$ 頂点の座標を $(x_i, y_i, 1)$ とする。この点を投影像にもつ立体の頂点は、原点とこの点を通る直線上にあるから、その座標は

$$(x_i/t_i, y_i/t_i, 1/t_i) \quad (1)$$

と表すことができる。ただし、 $t_i$ は未知の実数である。

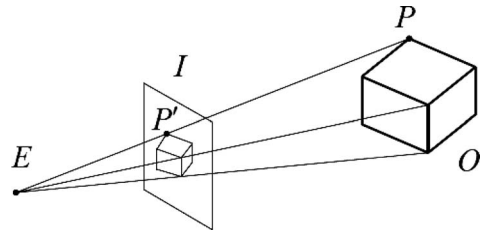


図4 立体とその投影像

絵の中に描かれている面にも1番から通し番号をつけよう。そして第 $j$ 面に対応する立体の面を含む平面の方程式を

$$a_j x + b_j y + c_j z + 1 = 0 \quad (2)$$

とおこう。 $a_j, b_j, c_j$ はすべて未知数である。

今、第 $i$ 頂点が第 $j$ 面に乗っていることが、絵から読み取れたとしよう。このとき、(1)を(2)へ代入した式が成り立つから

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j + t_i = 0 \quad (3)$$

が得られる。 $x_i, y_i$ の値は絵から得られるから、式(3)は未知数 $t_i, a_j, b_j, c_j$ に関する線形な方程式である。

頂点とそれを含む面のすべての対に対して同様の方程式が得られる。それらを集めて得られる連立一次方程式を

$$A\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (4)$$

と表すことにする。ただし $\mathbf{w}$ は未知数を並べてできるベクトル

$$\mathbf{w} = (t_1, t_2, \dots, t_n, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m) \quad (5)$$

で、 $n$ は頂点の数、 $m$ は面の数を表し、 $A$ は定数行列である。

絵の中には、立体の各部分の相対的な遠近関係を表す手がかりもある。例えば、図5(a)に+のラベルで示すように、二つの面が山の尾根のように出っ張って交わって稜線を作っているとき、一方の面(これを第 $j$ 面とする)を延長してできる平面は、もう一方の面上の頂点(これを第 $i$ 頂点とする)より視点の近くを通過する。このことは

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j + t_i > 0 \quad (6)$$

と表すことができる。

逆に同図(b)に示すように、二つの面が谷底のように引っ込んで交わってきた稜線の場合は、逆向きの不等式

$$a_j x_i + b_j y_i + c_j + t_i < 0 \quad (7)$$

が得られる。

このような不等式を集めて得られる連立一次不等式を

$$B\mathbf{w} > \mathbf{0} \quad (8)$$

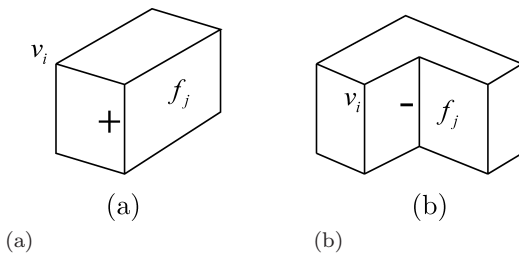


図5 遠近関係の手がかり

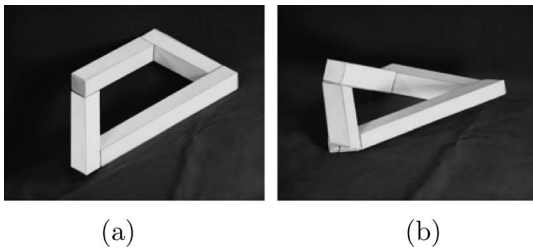


図6 新しい方法によるペンローズ四角形の立体化

と表すことにする.  $B$  は定数行列, 不等号は成分ごとの不等号を表す.

連立方程式 (4), 連立不等式 (8) をある系統的な方法で集めると, (4) と (8) を満たす解が存在することが, 与えられた絵が立体を表すために必要かつ十分であることが証明できる [7, 11]. したがって, 解があればそのだまし絵が立体化できることがわかり, 解から実際にその立体を作ることもできる. この方程式・不等式系は, 誤差に対して脆弱であるが, それを克服して, 立体化できるか否かをロバストに判定する方法も構成できている [7, 11].

この方法で, 図 1(b) のだまし絵を調べると, 立体が存在することがわかる. 図 6 は, この方法で作った立体の画像である. (a) はだまし絵と同じに見える方向から見たもので, (b) は別の方向から見たものである. 連立方程式は, すべての面が平面であり, つながっていると解釈したところではつながっているという制約を表しているから, その解として得られた立体は, 不連続のトリックも曲面のトリックも使わないで, 実現されている. この立体化の方法は, 古くから知られたものとは異なる新しい方法である.

このようにして, だまし絵を立体化できるものとはできないものに分類できた [6]. ただし, 既存のだまし絵で立体化できるものはそれほど多くはなかったので, 立体化できるだまし絵を新たに創作する努力もした. その結果, だまし絵の描き方のルールも開発でき [8], 多くの不可能立体を作ることができた.

### 3. エンタテインメントから見た不可能立体

だまし絵を立体化して得られる不可能立体は, 次のような特徴をもつ. エンタテインメントの観点から見ると, このうち特徴 1 は利点に見えるが, 特徴 2~6 は欠点のように見える.

**特徴 1.** 新種の立体錯視である. これを見た人は, 目の前の立体を見ているにもかかわらず, そんな立体はあるはずがないという不思議な印象をもつ.

**特徴 2.** 錯視の生じる視点位置は一つしかない.

**特徴 3.** 普通に照明を当てると明るさの濃淡が不自然になる.

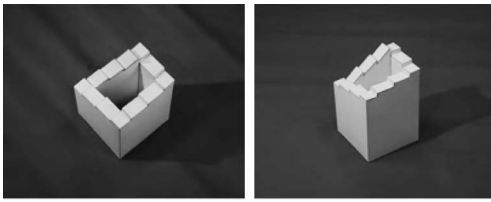
**特徴 4.** 一般の方向から照明を当てると, 影の姿から立体の本当の形がわかってしまう.

**特徴 5.** 直角以外の角度がたくさん現れるので, 通常の方法 (板材や角材) を使った通常の加工法では, 作るのが難しい.

**特徴 6.** 面白さ・不思議さを理解できるのは, ある程度の年齢になってからである. 小学校へ入る前の子供に見せても, あまり不思議がってもらえない.

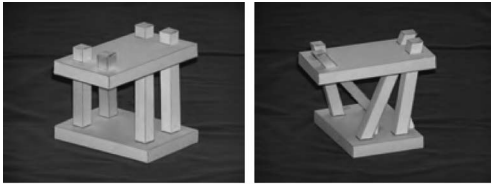
不可能立体を楽しめるものにするためには, 特徴 2 から特徴 6 までの欠点を克服しなければならなかった. まずなにより, 前節で述べた方法によって, だまし絵を実現する立体をコンピュータの中の数値データとして得ることができても, 特徴 5 に阻まれて, それを実際の物理的立体として作って手に取ったり眺めたりすることは容易ではなかった. そこで考えたのが展開図から紙工作で立体を作る方法である. これなら, お金をかけないで自分の手で立体を作ることができる. その結果, いろいろな形状を手軽に作って, 錯視の効果を確認めることができるようになった.

この方法である程度の数の不可能立体ができたころ, 最初に注目していただいたのは, エッシャー展へ付加価値を与えることができるかもしれないという可能性であった. エッシャーは根強い人気のある芸術家で, 折りにふれて, 日本のどこかの美術館で, エッシャー展が開かれている. このエッシャーの作品の中には不可能立体のだまし絵を素材に用いたものがある. その代表例は, 登り続けるともとへ戻る無限階段を素材にした「上昇と下降」(1960), 柱の前後関係が床と天井で逆転する「もの見の塔」(1958) などである. これらのだまし絵も立体化できることを見つけた. 「無限階段」は図 7 に示すように立体化でき, 「もの見の塔」の柱の構造は図 8 に示すように立体化できる. どちらの図も (a) はだまし絵と同じに見える方向から見たところ



(a) (b)

図7 不可能立体「無限階段」



(a) (b)

図8 不可能立体「じょうだんの好きな4本の柱」

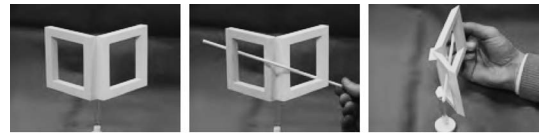
で、(b)は同じ立体を別の方向から見たところである。

このようにエッシャーが絵に描いた構造が立体としても作れることを、エッシャー展の併設展示として示せば、エッシャー展に新しい要素を加えることができるだろうというわけである。この観点から、実際にいくつかのエッシャー展で、立体を展示していただけた。古いものでは大分県美術館のエッシャー展、最近では2012年の佐川美術館のエッシャー展などである。ただし、錯覚の起こる視点は一つしかない(特徴2)ので、のぞき穴をセットして、そこから見てもらうという展示方法である。

#### 4. 静止立体からモーションへ

不可能立体を人に見てもらう際には、特徴6が大きなバリアであった。子供でなくても何が不思議なのか何が面白いのかを、こちらから説明しないとわかってもらえないことが多い。何しろあり得ない印象をもつ絵がもとになっているから、立体自体が不自然で、それを見た人は最初から、だまされまいという警戒の目で見ることになる。でも説明してはじめて面白さを理解してもらうのでは、しらけた面白さになってしまう。

これを克服する方法を見つけた。不可能立体から構造の一部を取り除き、不可能ではないありきたりの立体に見える部分のみを残す。そして、見た人が、ありきたりの立体を思い浮かべたあとで、先ほど取り除いた部分を加える。すると、あり得ない動きが起こっているという印象を与えることができる。はじめから疑い



(a) (b) (c)

図9 不可能モーション「ゆがんだ窓空間」



(a) (b) (c)

図10 不可能モーション「反重力3連すべり台」.

の目で見ると違って、信じたものが裏切られるという効果が生じるので、錯視はより強烈になる。この展示方法には、不可能モーションという名前をつけた。

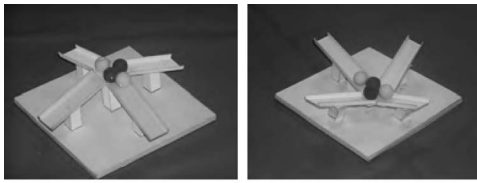
図9に、不可能モーションの一例を示す。図の(a)はありきたりの立体に見えるシーンであるが、ここに棒を通すというモーションを加えると、(b)に示すようにあり得ないことが起こっている印象を与えることができる。この状況を別の角度から見ると(c)に示すように立体自体が(a)から思い浮かべるものとは異なっており、モーションは別に不思議なものではないことがわかる。

もう一つの不可能モーションの例を図10に示す。(a)に示すように三つの斜面が並んでいるが、(b)に示すように左端に玉を置くと、斜面を登り、次の斜面へ飛び移ることをくり返して、右端まで動いていく。実際の立体の形は(c)に示すとおりである。この動きは重力に逆らって玉が斜面を登るように見えるので、反重力斜面という総称をつけた。

不可能立体という静止構造から、不可能モーションという動きのあるショーへ移ると、小さな子供にも面白さがわかってもらえる。特に、斜面を玉が転がりながら登っていく不思議さは、素直に楽しんでもらえる。不可能モーションへ移ることによって、特徴6の欠点は克服することができた。不可能モーションの動画の例は明治大学の動画サイト[2]で見ることができる。

#### 5. 反重力斜面の進化

不可能モーションの代表的クラスの一つは反重力斜面である。これは、一言でいうと、重力に逆らって玉や液体が斜面を登っていく錯視であるが、これも次第に進化していった。



(a)

(b)

図 11 不可能モーション「なんでも吸引四方向すべり台」

図 10 に示した反重力 3 連すべり台は、最も初期の反重力斜面の一つである。これをビデオに撮影したものは、普通の斜面を傾斜させた机の面に置いて撮影した場合と差はない。すなわち、立体の形を工夫しなくても、机の面を傾け、それと連動してビデオカメラも傾ければ、同じ動きを作り出すことができる。この意味で図 10 の不可能モーションは稚拙である。この例のように、立体を置く机の面を傾ければ反重力の錯視が作ってしまうものを第 1 世代の反重力斜面と呼ぶことにしよう。

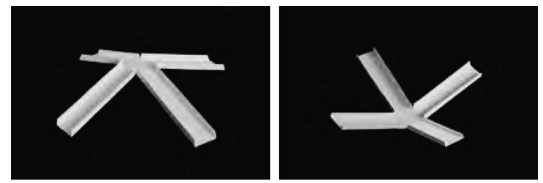
机を傾けただけでは実現できないようにするためには、互いに逆向き方向へ玉が登る斜面を作ればよいであろう。これを実現した例を図 11 に示す。(a) に示すように、中央の最も高いところから四方へ斜面が降りているように見えるが、どの斜面に玉を置いても中央へ向かって登って行くように見える。実際には、(b) に示すように中央が最も低くなっている。この例のように、机の面を傾けただけでは実現できない反重力斜面を、第 2 世代と呼ぶことにする。

なお、図 11 に紹介した不可能モーションは、2010 年にフロリダで行われた第 6 回ベスト錯覚コンテストで優勝することができた [1]。そのときの様子は [9] に詳しく紹介したのでご参照いただきたい。

第 1 世代も第 2 世代も斜面を逆向きに知覚する主な原因は、斜面を支える柱の見え方であろう。

これらの立体は、錯視の起きる位置から見たとき、柱がすべて縦方向に平行に見えるように作ってある。これを見た私たちの脳は、柱が机の面に垂直に立っていると思ひ込み、長い柱ほど高いところを支えていると解釈するのであろう。

私たちの実生活でも反重力斜面の錯視は起こる。道路を走る車のドライバーが、自分が走っている道が登り坂か下り坂かを逆に感じる錯視である。これは、縦断勾配錯視と呼ばれる。観光スポットになっているところもある。日本では、香川県の屋島ドライブウェイにあるおばけ坂が有名である。



(a)

(b)

図 12 柱に支えられないなんでも吸引四方向すべり台

ところで、この縦断勾配錯視の起こる道路には、柱はない（あるいは、都会の高架道路のように支柱の上に作られている場合もあるが、ドライバーからは柱は見えない）。それでも錯視は起こる。この例から、反重力斜面は、柱がなくても作れる可能性があることがわかる。そこで、図 11 の立体から柱を除いてみた。その結果が図 12 である。(a) と (b) は同じ立体を一つの方向とその逆の方向から見たものである。(a) では中央が盛り上がり、(b) では中央がくぼんで見える。しかし、どちらも錯視である。実際には、四つの斜面はほぼ水平でわずかに中央が低くなっているにすぎない。このように柱を除いてもやはり錯視は起こる。このように柱に支えられていないものを、第 3 世代の反重力斜面と呼ぶことにする。

第 1 世代から第 3 世代までの変化を、私は進化だと思っている。第 1 世代から第 2 世代へは、代わりのトリックは効かなくなったという意味で進化し、第 2 世代から第 3 世代への変化は、視覚を欺く手がかりがより少なくなったという意味で進化している。

## 6. おわりに—単眼制約の克服に向けて

不可能立体の絵と呼ばれるだまし絵の中に立体として作れるものがあることを偶然見つけた経緯と、その面白さをより高めようとして今までやってきた試みについて紹介した。

不可能立体の特徴の 2 から 6 は、エンタテインメントという立場からは欠点であるが、そのうち特徴 5 は展開図からの工作によって克服でき、6 は動きを加えることによって克服できた。また特徴の 3 と 4 は照明の工夫で何とかなる。残る欠点は特徴 2（すなわち錯視の生じる視点位置は一つしかない）である。これを何とか克服し、両方の目で普通に見ても錯視が起こるようにしたい。

そのための一つの可能性は、立体を十分大きく作って、それを十分遠くから眺めることであろう。左右の目の見え方の違いから奥行きがわかる——したがっ

て、立体の本当の形がわかる——のは、近くのものだけである。遠くのものを見るときには、左右の目での見え方の違いはほとんどないため、距離はわからず、立体のどこがどこより近いか遠いかという情報はなくなる。したがって、十分遠くから不可能立体を眺めれば、両目で見ても、また少しぐらいなら歩きながら見ても、錯視は起きるのである。

だから不可能立体の形をした建物を作りたいというのが、私の次の夢である。

数学を持ち込むことによって錯覚研究に新しい可能性を開きたいという目的で、有志が集まって「計算錯覚学」というプロジェクトを立ち上げた。このプロジェクトは JST の CREST「数学」領域で採択され、その研究費で学外のオフィスビルに研究活動スペースを確保できた。このスペースを利用して、2011 年に「錯覚美術館」をオープンした。プロジェクトのメンバーが研究の中で作る錯覚作品を一般の方にも見てもらおうという趣旨である。ここでは、本稿で紹介した立体も手に取って見ることができる。ただし、もともとは研究活動のためのスペースなので、研究に支障のない週末だけなら一般公開してもよいというお許しを得て、毎週土曜日に開館している。場所、開館時間などは次のとおりである。

明治大学/JST 錯覚美術館

場 所：東京都千代田区神田淡路町 1-1 神田クレ  
ストビル 2 階電話 03-5577-5647

開館日時：毎週土曜日 10 時から 17 時、入場無料（た  
だし臨時閉館することもあるので、ホー  
ムページでお確かめ下さい。）

<http://compillusion.mims.meiji.ac.jp/museum.html>

ご興味を持たれた方は、是非お立ち寄りください。ただし、道路などに案内看板はないので、道順をホームページで確かめるか、電話番号を控えてからお出かけください。

## 参考文献

- [1] Best Illusion of the Year Contest. 2010, <http://illusionoftheyear.com/>
- [2] 動画「不可能モーション 2」.  
[http://gcoe.mims.meiji.ac.jp/movie/impossible\\_motion2/index.html](http://gcoe.mims.meiji.ac.jp/movie/impossible_motion2/index.html)
- [3] S. W. Draper, The Penrose triangle and a family of related figures, *Perception*, **7**, 283–296, 1978.
- [4] B. Ernst, *Impossible Worlds*, Taschen GmbH, Köln, 2006.
- [5] L. S. Penrose and R. Penrose, Impossible objects—A special type of visual illusion, *British Journal of Psychology*, **49**, 31–33, 1958.
- [6] K. Sugihara, Classification of impossible objects, *Perception*, **11**, 65–74, 1982.
- [7] K. Sugihara, *Machine Interpretation of Line Drawings*, MIT Press, Cambridge, 1986.
- [8] 杉原厚吉, だまし絵の描き方入門, 誠文堂新光社, 2008.
- [9] 杉原厚吉, だまし絵のトリック, 化学同人, 2010.
- [10] 杉原厚吉, 錯視図鑑, 誠文堂新光社, 2012.
- [11] 杉原厚吉, だまし絵と線形代数, 共立出版, 2012.
- [12] 安田恭子 (編), ハウステンボス・コレクション M. C. エッシャー, ハウステンボス美術館, 1994.