Chapter 1. Real numbers and Functions

1.1 sets and functions

집합(set), 원소(element), $x \in S$, $x \notin S$

$A \subseteq B$: A is subset of B. (A는 B의 부분집합)

$A = B$: A and B are equal. (같은 집합) : $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$

$A \subset B$: A is proper subset of B. (A는 B의 진부분집합) : $A \subseteq B$ and $A = B$

$A \cup B$: A union B, $A \cap B$: A intersection B, A' : complement of A $(U - A)$

데카르트 곱(cartesian product) : 두 개 이상 정의 가능
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$

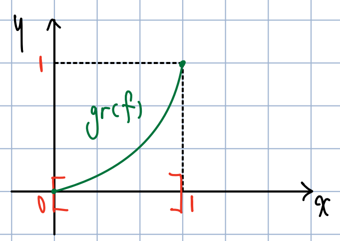
Def 1.1

A function is a nonempty set X, a nonempty set Y, and a rule of correspondence f which associated with each element $x \in X$ a unique element $y \in Y$.

notation : $y = f(x)$, $f : X \longrightarrow Y$
y is called the image of x under f, x is called a preimage(원상) of y

graph of f, $gr(f)$, is a subset of $X \times Y$ and is defined by $gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

ex)
$f(x) = x^2$, $X = [0, 1]$ $\quad gr(f) = \{(x, x^2) \mid x \in [0, 1]\}$



1.2 The Natural Numbers ; 자연수 집합

Peano Postulates (페아노공리)

P1. $1 \in \mathbb{N}$; $\mathbb{N}$은 공집합이 아니다.

P2. For each $n \in \mathbb{N}$, $\exists_1\, n^* \in \mathbb{N}$ called the successor (바로 뒤의 원소) of n

P3. For each $n \in \mathbb{N}$, $n^* \neq 1$; 1은 $\mathbb{N}$의 어떠한 원소의 successor가 아니다.

P4. For each pair $n, m \in \mathbb{N}$ with $n \neq m$, $n^* \neq m^*$

P5. The Principle of Mathematical induction (수학적 귀납법의 원리)

If (a) $A \subseteq \mathbb{N}$, (b) $1 \in A$, (c) $p \in A$ implies $p^* \in A$
then $A = \mathbb{N}$

All the known properties of natural numbers can be shown to be consequence of P.P.

Naming the natural numbers in the conventional way

(a) $1 \in \mathbb{N}$ ($\because$ P1)

(b) $1^* \in \mathbb{N}$ ($\because$ P2) and $1 \neq 1^*$ ($\because$ P3)
Name $1^* = 2$, then $2 \in \mathbb{N}$ and $1 \neq 2$

(c) $2^* \in \mathbb{N}$ ($\because$ P2) and $2^* \neq 1$ ($\because$ P3). $2^* \neq 2$ ($\because$ P4) since $2 = 1^*$, $2^* \neq 1^*$ ($\because$ P4), $2 \neq 1$.
Name $2^* = 3$; then $1, 2, 3 \in \mathbb{N}$ are distinct.

By continuing to name natural numbers in this way indefinitely, we get a set $A = \{1, 2, \cdots\}$ of distinct numbers.

A satisfies the induction hypothesis of P5, $A = \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$

Def 1.3

Addition (+) : $n+1 = n^*$ for each $n \in \mathbb{N}$
$n + p^* = (n+p)^*$ for each $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}$

Multiplication ($\cdot$) : $n \cdot 1 = n$ for each $n \in \mathbb{N}$
$n \cdot p^* = (n \cdot p) + n$ for each $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}$.

Properties of natural numbers

Associative law for addition (덧셈에 대한 결합법칙)
: $(m+n)+p = m+(n+p)$ for all $m,n,p \in \mathbb{N}$

pf) Let $m,n \in \mathbb{N}$ be fixed but arbitrary and define $A = \{p \in \mathbb{N} \mid (m+n)+p = m+(n+p)\}$
$A \subseteq \mathbb{N}$! (! means 'unique'.)

Claim : " $A = \mathbb{N}$ " by mathematical induction

i) $1 \in A$ since $(m+n)+1 \overset{\text{add1}}{=} (m+n)^* \overset{\text{add2}}{=} m+n^* \overset{\text{add1}}{=} m+(n+1)$

ii) $p \in A \Rightarrow p^* \in A$

$\underline{(m+n)+p^*} \overset{\text{add2}}{=} [(m+n)+p]^* \overset{(\text{since } p\in A)}{=} [m+(n+p)]^* \overset{\text{add2}}{=} m+(n+p)^* \overset{\text{add2}}{=} \underline{m+(n+p^*)}$

Thus $(m+n)+p = m+(n+p)$ for every natural number p.
Since m and n were arbitrary, the associative law for addition is established ∎

Commutative law for addition (덧셈에 대한 교환법칙)
: $m+n = n+m$ for all $m,n \in \mathbb{N}$

Distributive laws (분배법칙)
: $p\cdot(m+n) = (p\cdot m)+(p\cdot n)$, $(m+n)\cdot p = (m\cdot p)+(n\cdot p)$ for all $m,n,p \in \mathbb{N}$

Associative law for multiplication (곱셈에 대한 결합법칙)
: $(m\cdot n)\cdot p = m\cdot(n\cdot p)$ for all $m,n,p \in \mathbb{N}$

Cancellation laws

① $p+m = p+n \Rightarrow m=n$ for all $m,n,p \in \mathbb{N}$

② $p\cdot m = p\cdot n \Rightarrow m=n$ for all $m,n,p \in \mathbb{N}$

pf of ①

Let $S(p)$ be the statement "$p+m=p+n$ implies $m=n$"

$S(1) = 1+m = 1+n \Rightarrow m^* = n^* \Rightarrow m=n$ (by P4) Then $S(1)$ is true.

Suppose $S(p)$ is true
If $p^*+m = p^*+n$, then $(1+p)+m = (1+p)+n \Rightarrow 1+(p+m) = 1+(p+n)$
Since $S(1), S(p)$ are true, $p+m = p+n \Rightarrow m=n$

$\therefore S(p^*)$ is true ∎

It follows from the principle of mathematical induction that $S(p)$ is true for every natural number p
that is, $p+m=p+n \Rightarrow m=n$ for all $m, n, p \in \mathbb{N}$

proof of ② 도 같은 방식으로 증명하면 됨!

Order relation (순서관계) $<$ "less than"
: $m<n$ provided $\exists p \in \mathbb{N}$ such that $m+p=n$
Since $n+1=n^*$ for every $n \in \mathbb{N}$, $n<n^*$ and so $1<2<3<\cdots$

Law of trichotomy (삼분법)

For every pair $m, n \in \mathbb{N}$ exactly one of the following holds
: (a) $m=n$. (b) $m<n$ (c) $m>n$

The following law is fundamental and can be provided directly from the definition of the order relation in $\mathbb{N}$ice

Thm 1.2 Well-ordering principle for $\mathbb{N}$ (자연수의 정렬원리)

Every nonempty subset $A \subseteq \mathbb{N}$ has a first element
; that is, there is a $p \in A$ such that $p \le a$ for every $a \in A$

pf) every nonempty subset 이니까 귀류법 사용.

We assume that A has no first element and show that this leads to a contradiction.

Define $M \subseteq \mathbb{N}$ by $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x<a \text{ for each } a \in A\}$ (모든원소에 대해 a보다 작은 원소만을 가짐)

Then $M \cap A = \emptyset$ by the law of trichotomy. (모든 원소에 대해 $M<A$ 니까)

$1 \notin A$; 1 would surely be the first element in A.

Hence $1<a$ for each $a \in A \Rightarrow 1 \in M$

Assume $p \in M \Rightarrow p<a$ for each $a \in A$

If $p+1 \in A$, $p+1$ would be the first element in A $(p \in M)$
in contradiction to our assumption that A has no first element.

Thus $p+1 \notin A$ so $p+1 < a$, $\forall a \in A$

Hence $p+1 \in M$ and by induction $M = \mathbb{N}$. But $M \cap A = \emptyset$.
, and so $A = \emptyset$, which is a contradiction. ($\because A$ is nonempty subset) ∎

1.5 Properties of Real Numbers

The set of all real number $\mathbb{R}$ is a nonempty set together with two binary operations, $(+)$ addition and $(\cdot)$ multiplication, which satisfy the following axioms: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

1. 체의 공리

① $(a+b)+c = a+(b+c)$ for all $a,b,c \in \mathbb{R}$	결합
② $a+b = b+a$ for all $a,b \in \mathbb{R}$	교환
③ 모든 $a \in \mathbb{R}$에 대해, $a+0=a$인 $0 \in \mathbb{R}$이 존재.	0 : "+에 대한 영원(zero element)"
④ 모든 $a \in \mathbb{R}$에 대해, $a+(-a)=0$인 $-a \in \mathbb{R}$이 존재	$-a$: a의 "+에 대한 역원(inverse element)"
⑤ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ for all $a,b,c \in \mathbb{R}$	결합
⑥ $a \cdot b = b \cdot a$ for all $a,b \in \mathbb{R}$	교환
⑦ 모든 $a \in \mathbb{R}$에 대해, $a \cdot 1 = a$인 $1 \in \mathbb{R}$이 존재	1 : "·에 대한 항등원"
⑧ $a \neq 0$인 각각의 $a \in \mathbb{R}$에 대해, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$인 $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$이 존재	$\frac{1}{a}$: a의 "·에 대한 역원"
⑨ $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, for all $a,b,c \in \mathbb{R}$	분배

2. 순서공리 : There is a subset P of $\mathbb{R}$ which satisfies the following three properties

① $a, b \in P$ 이면, $a+b \in P$
② $a, b \in P$ 이면, $a \cdot b \in P$
+와 ·에 대해 P는 "닫힌 집합"

③ $a \in \mathbb{R}$ 이면, 다음 중 하나만 성립 : $a \in P$ 또는 $-a \in P$ 또는 $a=0$

위 성질 1~3을 만족하는 부분집합 P를 갖는 체는 순서체라 부른다.

순서관계 $<$는 $b-a \in P$ 이면 $a<b$로 정의한다.

P는 모든 양의 실수들의 집합이고 다음이 성립한다.

① $a<b$ 이고 $b<c$ 이면 $a<c$ (전이법칙, 추이법칙)

② 모든 $a, b \in \mathbb{R}$에 대해, 다음 중 단 하나만 성립 : $a<b$ 또는 $b<a$ 또는 $a=b$ (삼분법)

③ $a<b$ 이면, 모든 $c \in \mathbb{R}$에 대해 $a+c < b+c$

④ $a<b$ 이고 $c>0$ 이면 $a \cdot c < b \cdot c$

3. 완비성 공리 (Completeness axiom) : 공집합이 아닌 위로 유계인 $\mathbb{R}$의 부분집합은 최소상계를 가진다.

$\mathbb{R}$: 완비순서체 (Complete ordered field)

$u \in \mathbb{R}$: an upper bound (상계) of the nonempty set $S \subseteq \mathbb{R}$ if $u \geq x$ for every $x \in S$

$l \in \mathbb{R}$: an lower bound (하계) of S if $l \leq x$ for every $x \in S$

S : bounded above (위로 유계) if S has an upper bound.

S : bounded below (아래로 유계) if S has a lower bound.

S : bounded (유계) if it is bounded above and below.

Let U_S be the set of all upper bounds of S.
L_S be the set of all lower bounds of S.

Def 1.12

$M \in \mathbb{R}$ is called the least upper bound of S (= supremum, 최소상계, 상한)
if (a) $M \in U_S$, (b) $M \leq u$ for every $u \in U_S$, write $M = \sup S$.

$m \in \mathbb{R}$ is called the greatest lower bound of S (= infimum, 최대하계, 하한)
if (a) $m \in L_S$, (b) $m \geq l$ for every $l \in L_S$, write $m = \inf S$.

★★★ Useful

$M = \sup S \Leftrightarrow$ (i) $M \geq x$, $\forall x \in S$
(ii) For every $\varepsilon > 0$, $\exists y \in S$ s.t. $M - \varepsilon < y \leq M$

$m = \inf S \Leftrightarrow$ (i) $m \leq x$, $\forall x \in S$
(ii) For every $\varepsilon > 0$, $\exists w \in S$ s.t. $m + \varepsilon > w \geq m$

Lemma / $M=\sup S$ 이고 $y<M$ 이면, $y<x_0$ 인 S의 원소 x_0 가 적어도 하나 존재한다.

pf) 모든 $x\in S$ 에 대해 $x\le y$ 라 가정하면, $y\in U_S$ 이다.
Lemma의 가정에 의해 $y<M=\sup S$ 이므로 모순이 된다.
따라서 집합 S에는 $x_0>y$ 인 원소 x_0가 적어도 하나 존재한다. ■

Thm 1.8 : 아르키메데스 성질 (Archimedean property)

$a,b\in\mathbb{R}$ 이고 $a>0$ 이면, $na>b$ 가 되는 자연수 n이 존재한다.

pf) 모든 자연수 $n\in\mathbb{N}$에 대해, $na\le b$ 라 가정하자.
$S=\{na \mid n\in\mathbb{N}\}$ 라 하면 집합 S는 위로 유계이다. ($\because b\in U_S$)
완비성공리에 의해 S의 최소상계가 존재하므로, $M=\sup S$ 라 하자.
$M-a<M \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t. $M-a<n_0 a$ (Lemma 보기)
$M<(n_0+1)a$ 이므로 $M=\sup S$에 모순된다. ($\because n_0+1\in\mathbb{N}$, $(n_0+1)a\in S$) ■

Corollary / 임의의 $\varepsilon>0$ 에 대해서, $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 인 자연수 n이 존재한다.

pf) $a=\varepsilon,\ b=1 \xrightarrow{A.P} \exists n\in\mathbb{N}$ s.t. $n\varepsilon>1 \Rightarrow \varepsilon>\frac{1}{n}$ ■

Thm 1.9 모든 열린구간 (a,b)는 적어도 하나의 유리수를 포함한다.

pf) case 1 : $0<a<b$
아르키메데스의 성질에 의해, $\frac{1}{k}<b-a$ 인 자연수 k가 존재한다. ($\because$ A.P에서 $k\in\mathbb{N}$ 이므로 $k(b-a)\ge 1$)
$A:=\{n\in\mathbb{N} \mid \frac{n}{k}>a\}$ 라 하면 $A\ne\emptyset$ 이다. (by A.P)
자연수의 정렬원리에 의해 집합 A는 최소원소를 갖는다. n_0를 A의 최소원소라 하자.

그러면 $\frac{n_0}{k}>a$ 이고 $\frac{(n_0-1)}{k}\le a$ 이다. ⟶ $a<\frac{n_0}{k}\le a+\frac{1}{k}<a+(b-a)=b$ 이므로 유리수 $\frac{n_0}{k}\in(a,b)$ ■
$\left(\frac{n_0-1}{k}+\frac{1}{k}\right)$

case 2 : $a\le 0<b$
$0<b$ 이므로 아르키메데스 성질에 의해 $\exists k\in\mathbb{N}$ s.t. $a\le 0<\frac{1}{k}<b$
따라서 $\frac{1}{k}\in(a,b)$ ■

case 3 : $a<b\le 0$
$0\le -b<-a$ 이므로 case 1 에 의해 $\exists$ 유리수 $r\in(-b,-a)$, 즉 $-r\in(a,b)$ ■

Corollary / 모든 열린구간 (a,b)는 무한히 많은 유리수를 포함한다. ⇒ 모든 구간은 무한히 많은 유리수를 포함한다.

Thm 1.10 실수집합의 모든 구간 I는 적어도 하나의 무리수를 포함한다.

pf) $a<b$, $a, b \in I$ 라 하자.
$\exists r \in \mathbb{Q}$ s.t $a/\sqrt{2} < r < b/\sqrt{2} \longrightarrow a < r\sqrt{2} < b$
$r\sqrt{2}$는 무리수이고 $r\sqrt{2} \in I$ 이다. ■

※ 집합 $D \subseteq \mathbb{R}$가 $\mathbb{R}$에서 조밀하다. ($D \subseteq \mathbb{R}$ is dense in $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ 모든 구간 I에 대해, $D \cap I \neq \emptyset$.

Thm 1.9, Thm 1.10에 의해 유리수 집합과 무리수 집합은 $\mathbb{R}$에서 조밀함을 알 수 있다.

※ 정리 : 제곱하여 2가 되는 양의 실수 α가 유일하게 존재한다.

'유일하게 존재'함을 보이기 위해 '존재성'과 '유일성'을 각각 증명

pf)
① 존재성
집합 $S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 \leq 2, \alpha > 0\}$ 이라 하자.
$1 \in S$ 이므로 S는 공집합이 아니고 위로 유계이다. (완비성 공리)
완비성 공리에 의해 S의 상한이 존재하므로, $\sup S = \alpha$ 라 하자.

case 1 : $\alpha^2 < 2$
$2-\alpha^2 > 0$, $2\alpha+1 > 0$. 아르키메데스 성질에 의해 $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t $n(2-\alpha)^2 > 2\alpha+1$.
$2-\alpha^2 > \frac{1}{n}(2\alpha+1) \geq \frac{1}{n}(2\alpha+\frac{1}{n})$
$2 > \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} = (\alpha+\frac{1}{n})^2$ 이므로 $\alpha+\frac{1}{n} \in S$가 되어 모순.

case 2 : $\alpha^2 > 2$
$\alpha^2-2 > 0$, $2\alpha > 0$. 아르키메데스 성질에 의해 $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t $n(\alpha^2-2) > 2\alpha$
$\alpha^2-2 > \frac{2\alpha}{n} \geq \frac{2\alpha}{n} - (\frac{1}{n})^2$
$\alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + (\frac{1}{n})^2 = (\alpha-\frac{1}{n})^2 > 2$ 이므로 $\alpha-\frac{1}{n}$이 S의 상계가 되어 모순.

$\Rightarrow \alpha^2 = 2$가 성립한다.

② 유일성
$\beta^2 = 2$인 양의 실수 β가 존재한다고 하자.
만일 $\beta > \alpha$ 이면 $\beta^2 > \alpha^2 = 2$ 가 되어 모순.
만일 $\beta < \alpha$ 이면 $\beta^2 < \alpha^2 = 2$ 가 되어 모순.

$\Rightarrow \beta = \alpha$ 이다. ■

Chapter 2. Sequences and Sets of Real Numbers

2.1 Limits of Sequences

열(sequence) : 정의역이 자연수 집합 $\mathbb{N}$인 함수

실수열(sequence of real numbers) : 정의역이 자연수 집합 $\mathbb{N}$이고 치역이 실수집합 $\mathbb{R}$의 부분집합인 함수 $(f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R})$

ex) 등비수열(geometric progression) : $r \in \mathbb{R}$, $a_1 = 1+r$, $a_n = 1+r+\cdots+r^n$

$$a_n = 1+r+\cdots+r^n$$
$$ra_n = r+r^2+\cdots+r^{n+1}$$
$$(1-r)a_n = 1-r^{n+1}$$

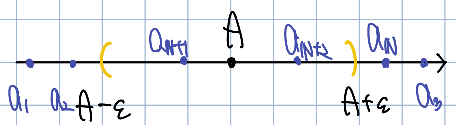
$\therefore a_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$, $r \neq 1$ ($-1<r<1 \longrightarrow$ a_n의 값은 $\frac{1}{1-r}$에 가까워짐.
$|r| \geq 1 \longrightarrow$ a_n은 어떠한 실수값에도 가까워지지 않음.)

Def 2.1 : '수열 $\{a_n\}$의 극한(limit)이 A이다.' $(= \lim_{n\to\infty} a_n = A)$

임의의 양의 실수 $\varepsilon>0$에 대하여 다음이 성립하는 자연수 $\mathbb{N}$이 존재 ; $n > \mathbb{N}$ 이면 $|a_n - A| < \varepsilon$

극한을 가지면 수렴(converge)
〃 X 발산(diverge)

$\{a_n\}$이 A로 수렴한다면 $\{a_n\}$의 항들 중 유한개를 제외한 항들이 열린 구간 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$에 속함을 의미!



$\mathbb{N}$: ε에 의존하는 값

Example 2.1 / $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 임을 증명하시오.

Sol) 임의로 주어진 양의 실수 $\varepsilon>0$이 있다.
아르키메데스 성질에 의해 $1/\mathbb{N} < \varepsilon$이 성립하는 자연수 $\mathbb{N}$이 존재하여
$n>\mathbb{N}$ 이면, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\mathbb{N}} < \varepsilon$ 이 성립한다.
즉, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 이다.

Example 2.2 / $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ 이다. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ 임을 보이시오.

Sol) $|a_n - 2| = \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{(1+1)^n} \leq \dfrac{1}{1+n}$ $(\because (1+x)^n \geq 1+nx)$,

$< \frac{1}{n} < \frac{1}{\mathbb{N}} < \varepsilon$ ∎

Example 2.3 / $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n} = 2$ 임을 보여라.

Sol) $\left| \frac{2n^2+1}{n^2+3n} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2+1-2(n^2+3n)}{n^2+3n} \right| = \left| \frac{1-6n}{n^2+3n} \right| = \frac{6n-1}{n^2+3n} < \frac{6n}{n^2} = \frac{6}{n}$

임의의 주어진 양의 실수 $\varepsilon>0$에 대하여 $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{6}$ 이 되도록 충분히 큰 자연수 N을 잡으면 $N > \frac{6}{\varepsilon}$이 되도록 잡으면 된다.

$\forall n > N$에 대해, $\left| \frac{2n^2+1}{n^2+3n} - 2 \right| < \frac{6}{n} < \frac{6}{N} < \varepsilon$ 이 성립한다.

Lemma / 두 실수 $x, y \in \mathbb{R}$ 가 $x=y \iff$ 임의의 실수 $\varepsilon>0$ 에 대하여, $|x-y| < \varepsilon$이다.

pf) $(\Rightarrow)$! 자명함

$(\Leftarrow)$ $S = \{\varepsilon>0 \mid \varepsilon>0\}$ 이라 하자. 그러면 $|x-y|$ 는 S의 하계이다.

$\inf S = 0$ 이므로 $|x-y| \le 0$ 이고, $|x-y| \ge 0$ 이므로 $|x-y| = 0$, 즉 $x=y$ 이다 ∎

Thm 2.1 : $\lim_{n\to\infty} a_n$이 존재한다면, 극한값은 유일하다. (*the limit*)

pf) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = A'$ 이라 가정하자.

임의의 주어진 양의 실수 $\varepsilon>0$에 대해,
$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 이므로 정의에 의해 $n > N_1$ 이면, $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ 이되는 자연수 N_1 존재한다.
또한 $\lim_{n\to\infty} a_n = A'$ 이므로 $n > N_2$ 이면, $|a_n - A'| < \frac{\varepsilon}{2}$ 이 되는 자연수 N_2 존재한다.

$n > \max(N_1, N_2)$ 이면 (여기서 $\max(N_1, N_2)$는 N_1과 N_2 중 더 큰 자연수를 뜻함.)
$|A-A'| = |A-a_n+a_n-A'| \le |A-a_n| + |a_n-A'| = |a_n-A| + |a_n-A'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

cf) $N = \max(N_1, N_2)$ 라 정의
$\longrightarrow$ $\forall n > N$, ~~~ ∎

Lemma에 의해 $A=A'$ 이다 ∎

Thm 2.2 : 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $a_n \le b_n \le c_n$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n$ 이면, $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ 이다.

pf) $a_n - A \le b_n - A \le c_n - A$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_n - A \le |c_n - A| \\ -(b_n - A) \le -(a_n - A) \le |a_n - A| \end{cases}$$

임의의 실수 $\varepsilon>0$에 대해 $n > N_1$ 이면 $|a_n - A| < \varepsilon$인 자연수 N_1이 존재.
$n > N_2$ 이면 $|c_n - A| < \varepsilon$ 인 자연수 N_2 가 존재.

$n > \max(N_1, N_2)$ 이면 $\begin{matrix} b_n - A \le |c_n - A| < \varepsilon \\ -(b_n - A) \le |a_n - A| < \varepsilon \end{matrix}$ 이므로 $|b_n - A| < \varepsilon$ 이다. 즉, $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ ∎

Def/ 수열 $\{a_n\}$이 유계(bounded) $\Leftrightarrow$ 모든 자연수 n에 대해 $|a_n| \le K$가 성립하는 음이 아닌 실수 K가 존재.

Lemma/ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$이면, 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.

pf) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 이므로 $\varepsilon = 1$에 대하여, $n > N$ 이면 $|a_n - A| < 1$ 이 되는 자연수 N이 존재한다.

$|a_n| - |A| \le |a_n - A| < 1$, $n > N$
$|a_n| < |A| + 1$, $n > N$

$M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1+|A|)$ 라 하면 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \le M$ 이다. ■

위 보조정리는 어떤 수열이 발산함을 보이는데 유용. [$\{a_n\}$: 유계가 아님 $\longrightarrow$ $\{a_n\}$: 발산]

역은 성립하지 않는다. ($\{a_n\}$: 유계 $\not\longrightarrow$ $\{a_n\}$: 수렴)

ex)
$$a_n = \begin{cases} 1, & n : \text{홀수} \\ -1, & n : \text{짝수} \end{cases}$$
이라 하면, 수열 $\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$은 발산

$\because$ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$라 하자. $\varepsilon = \frac{1}{2}$에 대해 $|1-A| < \frac{1}{2}$ 이고 $|-1-A| < \frac{1}{2}$ 이어야,
즉 $\frac{1}{2} < A < \frac{3}{2}$ 이고, $-\frac{3}{2} < A < -\frac{1}{2}$ 이어야 한다. 그런데 어떠한 실수 A도 부등식 $\frac{1}{2} < A < \frac{3}{2}$과 $-\frac{3}{2} < A < -\frac{1}{2}$을 동시에 만족할 수 없으므로
주어진 수열은 발산한다 ■

★★★

Thm 2.3

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ 이면 (수렴하면)

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A+B$

(b) $\lim_{n\to\infty} ka_n = kA$, k는 임의의 실수

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}$, 이 때 $b_n \ne 0$ 이고 $B \ne 0$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, 이 때 $b_n \ne 0$ 이고 $B \ne 0$ ※ $\{a_n\}\{1/b_n\}$

pf(a)
임의의 $\varepsilon > 0$에 대해, $\exists N$ s.t. $\forall n > N$,
$|(a_n + b_n) - (A+B)| = |a_n - A + b_n - B| \le |a_n - A| + |b_n - B|$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ■

pf(b)
(i) $k = 0$ 이면 결과는 자명함.

(ii) $k \ne 0$ 이고 $\varepsilon > 0$ 이 주어졌다 하자. 그러면 $n > N$에 대해
$|a_n - A| < \varepsilon/|k|$ 이 성립하는 자연수 N이 존재
따라서 $|ka_n - kA| = |k||a_n - A| < |k| \cdot \varepsilon/|k| = \varepsilon$ ■

pf(c)
Lemma에 의해 수열 $\{a_n\}$은 유계, 즉 모든 자연수 n에 대해
$|a_n| \le M$이 성립하는 양의 실수 M이 존재한다. $\varepsilon > 0$이 주어졌다 하자.
$n > N_1 \rightarrow |a_n - A| < \varepsilon/2(1+|B|)$ 이 성립하는 자연수 N_1이 존재
$n > N_2 \rightarrow |b_n - B| < \varepsilon/2M$ 이 성립하는 자연수 N_2가 존재.

만약 $\lim_{n\to\infty} b_n = B = 0$ 이라면 $(1+|B|) \ne 0$ 임을 보장.

$n > \max(N_1, N_2) \rightarrow |a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \le |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB|$
$= |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |B| \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} < \varepsilon$ ■

$\varepsilon/2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

pf(d)

$\varepsilon>0$ 이 주어졌다하자.

$n>N_1$ 이면 $|b_n-B|<\frac{|B|}{2}$ 인 자연수 N_1 이 존재

$|B|-|b_n|\le|b_n-B|<\frac{|B|}{2}$ 이므로, $n>N_1$ 이면 $\frac{|B|}{2}<|b_n|$.

$n>N_2$ 이면 $|b_n-B|<\varepsilon|B|^2/2$ 인 자연수 N_2 가 존재.

$n>\mathrm{Max}(N_1,N_2)$ 이면 $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}\right|=\left|\frac{B-b_n}{b_nB}\right|=|b_n-B|/|b_n||B|<\dfrac{\varepsilon\cdot\frac{|B|^2}{\cancel{2}}}{\frac{|B|}{\cancel{2}}\cdot|B|}=\varepsilon$ ∎

pf(e) : (c)와 (d)에 의해 성립함. ∎

Example 2.4 / Find $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+3n^2+2n+1}{7n^3-2n^2+3n}$

Sol) 분모, 분자에 각각 n^3으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+3/n+2/n^2+1/n^3}{7-2/n+3/n^2}=\frac{\lim_{n\to\infty}4+3\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}+2\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n^2}}+\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n^3}}}{\lim_{n\to\infty}7-2\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}+3\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n^2}}}$$

0 0 0 0 0

(※ $\lim_{n\to\infty}ka_n=k\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$)

$$=\frac{4}{7}.$$

Example 2.5 / Find $\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}$, where a is a fixed positive real number.

Sol)

case1) $a\ge1$

$a^{\frac{1}{n}}\ge1$, $b_n:=a^{\frac{1}{n}}-1$ 로 정의하면, $a^{\frac{1}{n}}\equiv1+b_n$ 이 때 $b_n\ge0$

$a=(1+b_n)^n\ge1+nb_n$ (by Bernoulli's inequality). 따라서 $0\le b_n\le\frac{a-1}{n}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=(a-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Thm 2.2(샌드위치 정리)에 의해 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. 따라서 $\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+b_n)=1$.

case2) $0<a<1$

$\frac{1}{a}>1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1}=1$

$\therefore\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$ ∎

Def 2.2 : 코시수열 (Cauchy sequence)

주어진 $\varepsilon>0$에 대해, $m,n>N$ 이면 $|a_m-a_n|<\varepsilon$ 인 자연수 N 이 존재한다.

※ 수렴하는 수열은 코시수열이다. ($\lim_{n\to\infty}a_n=A\to\{a_n\}$: 코시수열)

pf) $\varepsilon>0$, $\exists N$ s.t. $\forall n>N$, $|a_n-A|<\varepsilon/2$. $|a_m-a_n|=|a_m-A+A-a_n|\le|a_m-A|+|A-a_n|<\varepsilon$ ∎

★★★ **Thm 2.4 : 코시수열은 유계이다.**

★★★ pf) 수열 $\{a_n\}$이 코시수열이라 하자. $\varepsilon=1$에 대해, 적당한 자연수 N이 존재하여, $n, m > N$이면 $|a_m - a_n| < 1$이다.
$n_0 > N$을 고정하자. $n > N$에 대해 $|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \le |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$
$M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1+|a_{n_0}|)$로 놓으면, $|a_n| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ■

어떤 수열이 유계임을 밝히는 데 유용한 증명이 될 수 있음!

Example 2.1 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 임을 증명하시오

Sol) 임의로 주어진 양의 실수 $\varepsilon > 0$이 있다.
아르키메데스 성질에 의해 $\frac{1}{N} < \varepsilon$이 성립하는 자연수 N이 존재하여
$n > N$이면 $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$이 성립한다.
즉, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$이다.

2.2 Bounded Sequences

수렴하는 수열 $\xrightarrow[\cancel{\longleftarrow}]{\text{by Lemma}}$ 유계수열

수열 $\{a_n\}$: 단조증가(monotone increasing) $\Leftrightarrow a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
증가(strictly increasing) $\Leftrightarrow a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
단조감소(monotone decreasing) $\Leftrightarrow a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
감소(strictly decreasing) $\Leftrightarrow a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Thm 2.5 단조수렴정리 (단조증가수열 / 단조감소수열에 대한..)

$\{a_n\}$이 단조증가(감소)이고 위(아래)로 유계인 수열이면 $\{a_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n (\inf a_n)$이다.

pf) 집합 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$이 위로 유계이므로, 완비성공리에 의해 $\exists \sup a_n = L$
주어진 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해, $L - \varepsilon < a_N \le L$인 자연수 N이 존재한다
$n > N$이면, $L - \varepsilon < a_N \le a_n < L$이므로 $|a_n - L| < \varepsilon$이 된다.
따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \sup a_n$ ■

☆ $M = \sup S$
$\Leftrightarrow$ (i) $M \ge x$, $\forall x \in S$
(ii) For every $\varepsilon > 0$, $\exists y \in S$ s.t. $M - y < y \le M$

Example 2.6 / $d_i \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, $i = 1, 2, \cdots$, 그러면 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$은
$a_1 = 0.d_1$
$a_2 = 0.d_1d_2$ ① 단조증가이고! ② 위로 유계이다.
$\vdots$
$a_n = 0.d_1d_2\cdots d_n$
$\vdots$

Sol) ① 단조증가수열 : $a_{n+1} \ge a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
즉 $a_{n+1} - a_n \ge 0$이다.
; $a_{n+1} - a_n = 0.000\cdots 0d_{n+1} \ge 0$

② 상한 : 1

⟶ 단조수렴정리에 의해, $\{a_n\}$은 유일한 극한을 갖고, 그 극한은 소수 $0.d_1\cdots$이 나타내는 실수이다.

Example 2.7/ 수열 $\{b_n\} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 의 수렴성을 조사하시오.

Sol)

① 먼저 단조증가수열임을 보이자.

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{1}{n})^k + \cdots + n\cdot(\frac{1}{n})^{n-1} + (\frac{1}{n})^n \quad (\text{이항정리})$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{1}{n})^k$$

$$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{k!}(\frac{1}{n+1})^k$$

(b_{n+1}의 k번째 항) ≥ (b_n의 k번째 항) 임을 보이면 $\{b_n\}$은 단조증가수열이다.

$$(b_{n+1}\text{의 } k\text{번째 항}) = \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n+1-k+1)}{k!}(\frac{1}{n+1})^k = \cancel{\frac{n+1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n+1-k+1}{n+1}\cdot\frac{1}{k!} = 1\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})\frac{1}{k!}$$

$$1\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})\frac{1}{k!} \geq 1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\cdot\frac{1}{k!} = \frac{n}{n}(\frac{n-1}{n})\cdots(\frac{n-k+1}{n})\frac{1}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} : (b_n\text{의 } k^{th})$$

또한 b_{n+1}은 한 개의 $\underset{(1/n+1)^{n+1}}{\underline{\text{양항}}}$을 더 가지고 있으므로, $b_{n+1} \geq b_n$, 즉 $\{b_n\}$은 단조증가수열이다.

② $\{b_n\}$이 유계수열임을 보이자.

$$b_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{1}{n})^k + \cdots + n\cdot(\frac{1}{n})^{n-1} + (\frac{1}{n})^n$$

$$\leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^0} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\because 2^{n-1} \leq n!,\ ^\forall n\in\mathbb{N} \longrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \geq \frac{1}{n!})$$

$$= 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < 1 + \frac{1-1/2}{1-1/2} = 3 \quad (\because \text{무한등비급수 } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r})$$

Thm 2.5에 의해 수열 $b_n = (1+\frac{1}{n})^n$ 은 수렴하며, 극한은 3을 넘지 않음! ∎

cf) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2.718$

수열 $\{a_n\}$의 부분수열(subsequence) $\{b_k\} \Leftrightarrow \{a_{n_k}\}$ 인 자연수 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 가 존재.

ex) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \cdots$

$b_1 = a_1$, $b_2 = a_3$, $b_3 = a_4$, $b_4 = a_6$

$n_1 = 1$
$n_2 = 3$
$n_3 = 4$
$n_4 = 6$
$\vdots$

※ $k \leq n_k$
$^\forall k\in\mathbb{N}$, $k = n_k \longrightarrow \{b_k\} = \{a_n\}$

Example 2.8 / $c_n = (1-\frac{1}{n})\sin\frac{n\pi}{2}$ 이면 $\{c_n\}$은 발산. 하지만 여러 $\{c_n\}$의 부분수열은 수렴

ex) $c_{2k} = (1-\frac{1}{2k})\sin k\pi = 0 \quad (k=1,2,\cdots)$

$c_{4k+1} = (1-\frac{1}{4k+1})\sin\frac{(4k+1)\pi}{2} = (1-1/4k+1) \longrightarrow 1 \quad (k=1,2,\cdots)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \{a_n\}$의 모든 부분수열이 A로 수렴

(⇒) $\{b_k\} = \{a_{n_k}\}$로 수렴하는 수열 $\{a_n\}$의 임의의 부분수열이라 하자.
임의의 $\varepsilon > 0$에 대해, $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 $n \ge N \longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon$ ··①이 성립한다.

부분수열의 정의에 의해 $n_N \ge N$이고 $n_N < n_{N+1} < n_{N+2} < \cdots$ 이므로 $n_k \ge k \ge N \longrightarrow |b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon$ (①)
$\therefore \lim_{k\to\infty} b_k = A$

(⇐) 대우명제 "각기 다른 극한으로 수렴하는 두 개의 부분수열을 갖는 수열은 발산한다."로 증명 ■

Thm 2.6 축소구간정리 (Nested-Interval property)

구간의 길이

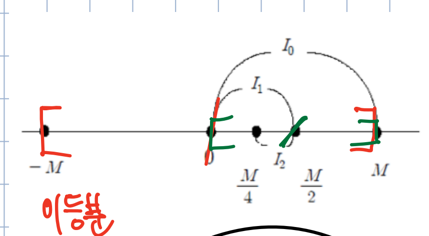
구간열 $\{I_n\} = \{[a_n, b_n]\}$이 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ 이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 이면 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{A\}$이다.
① ②

모든 구간 I_n에서 공통으로 속하는 유일한 실수!

pf) $\{a_n\}$은 단조증가이고 위로 유계이다. $(\because \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le b_1)$ $\xrightarrow{\text{단조수렴정리}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{let}{=} A = \sup a_n \le b_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$
(∵①)
그러므로 $a_k \le A \le b_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$, 즉 $A \in I_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$
이제 $B \in I_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ 이라 가정하자
$a_n \le B \le b_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \le B - a_n \le b_n - a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}(B - a_n) = 0 \Rightarrow B = \lim_{n\to\infty} a_n = A$
★목표
따라서 A는 모든 구간 I_n에서 공통으로 속하는 유일한 실수이다. ■

Thm 2.7 볼짜노-바이어스트라스 정리

유계인 수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.



pf) $\{a_n\}$이 유계수열이라 하자. $\Rightarrow |a_n| \le M$인 $M > 0$이 존재, 즉 $a_n \in [-M, M],\ \forall n \in \mathbb{N}$
구간 $[-M, 0]$과 $[0, M]$ 중 적어도 한 구간은 무한히 많은 자연수 n에 대하여 a_n을 포함한다.
수열 : 자연수 전체 집합에 대해 정의됨.
따라서 유한 개의 n에 대해서만 포함X

그러한 구간을 I_0라 하자. I_0를 이등분하여 얻는 두 구간 중 적어도 한 구간은 무한히 많은 자연수 n에 대하여 a_n을 포함한다.
그 구간을 I_1이라 하자. 이러한 방법으로 구간열 $\{I_n\}$을 정의하면
$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ 이고 $\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} M/2^n = 0$ 이다.
축소구간정리에 의해 $\bigcap_{n=1} I_n = \{A\}$인 실수 A가 존재한다.

Thm 2.6 축소구간정리 (Nested-Interval property)

구간열 $\{I_n\} = \{[a_n, b_n]\}$이 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ 이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 이면 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{A\}$이다.

$a_{n_1} \in I_1$, $a_{n_2} \in I_2$ $(n_2 > n_1)$, $a_{n_3} \in I_3$ $(n_3 > n_2 > n_1)$ 이 되도록 $\{a_n\}$의 부분수열 $\{a_{n_k}\}$를 택하자.
이렇게 a_{n_k}를 택할 수 있는 이유는 구간열 $\{I_n\}$의 정의방식(적어도 한 구간은 무한히 많은 자연수 n에 대해 a_n을 포함) 때문이다.

그러면 $a_{n_k}, A \in I_k$ 이므로 $|a_{n_k} - A| < \frac{M}{2^k}$ 이 되어 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$ 가 된다. ■

같은 구간에 포함된 원소 / 그 구간의 길이

<'코시수열은 수렴하는 수열이다'를 증명할 준비가 되었다.>

Thm 2.8 모든 코시수열은 수렴한다.

pf) $\{a_n\}$: 코시수열 $\xrightarrow{\text{Thm 2.4}}$ $\{a_n\}$: 유계 $\xrightarrow{\text{Thm 2.7}}$ $\exists \{a_{n_k}\}$ with $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$

이제 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 임을 보이자.
$\{a_n\}$이 코시수열이므로, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해, $\forall n, m > N$ 이면 $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ 이 되는 자연수 N이 존재한다.
$|a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ 이고 $n_k > N$ 인 충분히 큰 자연수 n_k를 택하자.
그러면 $\forall n > N$, $|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ■

<주어진 수열의 수렴성을 보이기 위해 부분수열과 단조수열의 개념을 사용한 예>

Example 2.9 / 수열 $\{a_n\}$은 피보나치수열이다. 즉 $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$
수열의 항을 나열해보면, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \cdots$ 이 되어 이 수열은 발산함을 알 수 있다.
$\{r_n\} = \{a_n / a_{n-1}\}$ 으로 정의하면 $\{r_n\}$은 수렴함을 보이시오.

Sol) $\{r_n\}$을 나열해보면 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \cdots$ 소수형태로 적으면 $1, 2, 1.5, 1.67, 1.6, 1.62, 1.61, \cdots$ 이다.

(i) $\{r_{2k}\}$: 단조감소이고 아래로 유계, $\{r_{2k-1}\}$: 단조증가이고 위로 유계이다.
먼저 수학적 귀납법을 써서 $1 \le r_n \le 2$ 임을 보이자
$r_1 = 1$ 이다. (!)

$1 \le r_k \le 2$ 라 가정하면 $r_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_k + a_{k-1}}{a_k} = 1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} = 1 + \frac{1}{r_k}$ 이다.

$\frac{1}{2} \le \frac{1}{r_k} \le 1$ 이므로 $1 \le 1 + \frac{1}{2} \le 1 + \frac{1}{r_k} \le 1 + 1 = 2$ 이 되어 $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \le r_n \le 2$ 이다.

$n \ge 3$에 대해, $r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{r_{n-2}}} = 1 + \frac{r_{n-2}}{1 + r_{n-2}}$ 이다.

$r_{n+2} - r_n = \left(1 + \frac{r_n}{1 + r_n}\right) - \left(1 + \frac{r_{n-2}}{1 + r_{n-2}}\right) = \frac{r_n - r_{n-2}}{(1 + r_n)(1 + r_{n-2})}$ 이 되어 $(r_{n+2} - r_n)$과 $(r_n - r_{n-2})$는 같은 부호를 갖는다.

$r_3 - r_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$ 이므로 $r_{2k+1} - r_{2k-1} > 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \longrightarrow \{r_{2k-1}\}$: 단조증가
$r_4 - r_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$ 이므로 $r_{2k+2} - r_{2k} < 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \longrightarrow \{r_{2k}\}$: 단조감소
단조수렴정리에 의해 $\{r_{2k-1}\}$, $\{r_{2k}\}$는 수렴한다!
$l_1 = \lim_{k\to\infty} r_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \cancel{r_{2k-3}} / r_{2k-3} + 1\right) = 1 + \frac{l_1}{l_1 + 1}$; $l_1 = 1 + \frac{l_1}{l_1 + 1} \longrightarrow l_1^2 - l_1 - 1 = 0$
$l_2 = \lim_{k\to\infty} r_{2k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \cancel{r_{2k-2}} / r_{2k-2} + 1\right) = 1 + \frac{l_2}{l_2 + 1}$; $l_2 = 1 + \frac{l_2}{l_2 + 1} \longrightarrow l_2^2 - l_2 - 1 = 0$
l_1과 l_2는 방정식 $l^2 - l - 1 = 0$ 의 해이다. 즉 $l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 이므로 $l_1 = 1 + \sqrt{5} / 2 = l_2$ 이다. $(\because \{r_n\} > 0)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ■

< B-W 정리는 유계수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다는 것은 보장한다. 유계가 아닌 수열은 수렴하는 부분수열을 가질수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. >

Def 2.3 집적점 (Cluster point)

실수 x : 수열 $\{a_n\}$의 집적점(cluster point) $\Leftrightarrow \exists \{a_{n_k}\} \to x$

유계인 수열은 적어도 하나의 집적점을 갖는다.

ex) 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1 ⋯ 의 집적점은? $C = \mathbb{N}$ (집합 C를 수열 $\{a_n\}$의 집적점들의 집합이라 하자.)

$\lim_{n\to\infty} a_n = A \to C = \{A\}$ / $\{a_n\}$: 유계수열 $\xrightarrow[\text{부분수열 : 수렴}]{\text{B-W thm.}}$ $C \neq \varnothing$ 이고 C: 유계집합 $\longrightarrow \exists \sup C$, $\exists \inf C$

write $\sup C = \overline{\lim}\, a_n$, write $\inf C = \underline{\lim}\, a_n$

$\{a_n\}$: 위로 유계가 아닌 수열 $\longrightarrow \overline{\lim}\, a_n = \infty$

$\{a_n\}$: 아래로 유계가 아닌 수열 $\longrightarrow \underline{\lim}\, a_n = -\infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n = A \longrightarrow \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = A$

Thm 2.9 / $L = \overline{\lim}\, a_n$ 이고 $l = \underline{\lim}\, a_n$ 이면, 주어진 $\varepsilon > 0$에 대해, $\forall n > N$, $l - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$이 성립하는 자연수 N이 존재한다.

pf) L과 l이 실수이므로 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.
주어진 $\varepsilon > 0$이 있을 때, 무한히 많은 자연수 n에 대해 $a_n \geq L + \varepsilon$ 이라 가정하자 (귀류법 사용한 것)
그러면 $a_{n_k} \geq L + \varepsilon$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 이 되는 자연수 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 이 존재하여 $\{a_n\}$의 부분수열 $\{a_{n_k}\}$를 택할 수 있다.
수열 $\{a_n\}$이 유계이므로 부분수열인 $\{a_{n_k}\}$도 유계이다. B-W 정리에 의해 $\{a_{n_k}\}$는 수렴하는 부분수열을 갖고, 그 부분수열의 극한 x는 $\{a_{n_k}\}$의 집적점이 된다. $\{a_{n_k}\}$의 부분수열은 $\{a_n\}$의 부분수열도 되므로, x는 수열 $\{a_n\}$의 집적점이 된다.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} \geq L + \varepsilon$ 이라 가정했으므로 $x \geq L + \varepsilon$이 되어 이는 $L = \overline{\lim}\, a_n$에 모순이 된다.
따라서 부등식 $a_n \geq L + \varepsilon$은 유한한 개수의 자연수 n에 대해서만 성립한다. 결과적으로 $\forall n > N_1$에 대해 $a_n < L + \varepsilon$이 성립하는 자연수 N_1이 존재한다.

유사한 방법으로 $\forall n > N_2$에 대해, $a_n > l - \varepsilon$ 이 성립하는 자연수 N_2가 존재함을 보일 수 있다.
$N = \max(N_1, N_2)$ 라 하자. $\forall n > N$ 에 대해 $l - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ 이다. ∎

Corollary / $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \overline{\lim}\, a_n = A = \underline{\lim}\, a_n$

pf)
($\Rightarrow$) !

($\Leftarrow$) Thm 2.9에 의해 $A = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n \longrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\forall n > N$, $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ 이 성립하는 자연수 N이 존재한다. 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 이다 ∎

ex) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 이면 $\{a_n\}$의 집적점들의 집합 $C = \{-1, 0, 1\}$ 이다. $\longleftarrow$ $a_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\sin k\pi = 0$

$\lim_{k\to\infty} a_{4k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(\frac{4k+1}{2}\right)\pi \to 1$

$\lim_{k\to\infty} a_{4k-1} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4k-1}\right)\sin\left(\frac{4k-1}{2}\right)\pi \to -1$

$\therefore \overline{\lim}\, a_n = 1$, $\underline{\lim}\, a_n = -1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 필연적으로 발산한다!

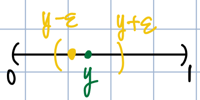
2.3 Sets of Real numbers

Def 2.4

점 x_0가 집합 S의 집적점(또는 극한점)이다. (a limit point, accumulation point)
$\Leftrightarrow$ 임의의 $\varepsilon>0$에 대해, $x \neq x_0$이고 $|x-x_0|<\varepsilon$인 점 $x\in S$가 존재한다.

직관적으로 이야기하면, x_0가 집합 S의 극한점이라는 것은 x_0에 임의로 가까이에 있으면서 x_0가 아닌 원소가 집합 S에 있다는 것이다.

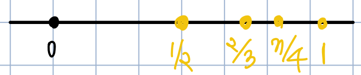
ex) 극한점 x_0는 S의 원소이어야 하나? A. 아니다!
　$S=(0,1)$이라면 집합 S의 극한점은? A. $[0,1]$

① $y\in(0,1)$  $(\varepsilon>0)$

② Is 0 a limit pt of S?
$\ulcorner \varepsilon/2 \in (-\varepsilon,\varepsilon)\cap(0,1)$, $\frac{\varepsilon}{2}\neq 0$
$\therefore$ 0 : S의 집적점.

③ Is 1 a limit pt of S?
$\underbrace{1-\frac{\varepsilon}{2}}_{\neq 1} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\cap(0,1)$
$\therefore$ 1 : S의 집적점

집합 $S=\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\}$의 극한점은?



$S=\{1\}\cup\{\frac{n-1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$

Claim: 1은 S의 유일한 극한점이다.

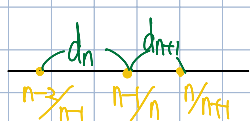
① 1이 S의 극한점

pf) $\left|1-\frac{n-1}{n}\right| = \left|\frac{n-n+1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, A.P에 의해, 임의의 $\varepsilon>0$에 대해 $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\frac{1}{N}<\varepsilon$

$1-\frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}<\varepsilon$ 즉, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\cap S \ni \frac{N-1}{N}\neq 1$

$\therefore$ 1이 S의 극한점이다.

② 유일성

pf) (i) $\frac{n-1}{n}$은 S의 극한점이 아니다.  $0<d_{n+1}<d_n$

$d_{n+1}=\varepsilon>0$으로 놓으면 $(\frac{n-1}{n}-\varepsilon, \frac{n-1}{n}+\varepsilon)^{*}\cap S=\emptyset$

(ii) 임의의 실수 $x_0\notin S$에 대해서 ε을 x_0에서 가장 가까이에 있는 S의 원소와의 거리라 하자.
그러면 $\varepsilon>0$, $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap S=\emptyset$.

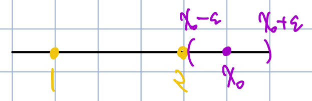
$\therefore$ x_0는 S의 극한점 X

$\{a_n\}$의 치역 $\Rightarrow$ S가 됨

수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ 의 집적점(cluster point)?

$a_1=1$ $a_2=1/2$, $a_3=2/3$, $a_4=3/4$ $\cdots$, $a_n=\frac{n-1}{n}$, $\cdots$ $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$

집합 $S=\{1,2\}$의 극한점?



① $1(2)$이 S의 극한점이 아니다.

$\because$ $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$으로 택하자. 그러면

$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\cap S=\varnothing$.

$(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)\cap S=\varnothing$

② 임의의 실수 $x_0\notin S$에 대하여

$\varepsilon=\min\{|x_0-1|, |x_0-2|\}$라 하자.

$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap S=\varnothing$.

$\therefore$ x_0는 S의 극한점이 아님. ■

수열 $1,2,1,2,1,2,\cdots$ 의 집적점?

↑

$\{a_n\}$. 부분수열 $\{a_{2k-1}\}=\{1,1,\cdots\}$ $\longrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}=1$

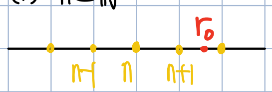
$\{a_{2k}\}=\{2,2,2,\cdots\}$ $\longrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} a_{2k}=2$

$\therefore$ 1, 2

집합 S가 유한집합(finite set)일 때, S의 극한점? : X ex) $S=\{1,2\}$

무한집합은 항상 극한점을 갖는가? : 아니다. [반례: $\mathbb{N}$]

$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ (i) $n\in\mathbb{N}$



$\varepsilon=\frac{1}{2}>0$, $(n-\varepsilon, n+\varepsilon)\cap S=\varnothing$ $\longrightarrow$ n은 $\mathbb{N}$의 집적점(극한점)이 아님

(ii) r_0 : 자연수가 아닌 임의의 실수

$\varepsilon=|n_0-r_0|>0$ 라 하자. n_0는 r_0로부터 가장 가까이 있는 자연수

그러면 $(r_0-\varepsilon, r_0+\varepsilon)\cap S=\varnothing$ 이므로 r_0는 $\mathbb{N}$의 극한점 X

$\therefore$ (i), (ii)에 의해 $\mathbb{N}$은 극한점을 갖지 않는다.

Thm 2.10 집합에 관한 볼짜노-바이어스트라스 정리

유계인 무한집합은 적어도 하나의 극한점을 갖는다.

pf) S를 유계인 무한집합이라 하자.

S의 원소가 무한개이므로, 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 서로 다른 실수가 되도록 $a_n\in S$인 수열을 택할 수 있다.

즉 $a_n\in S$ 이고 $i\neq j$ 이면 $a_i\neq a_j$ 이다.

집합 S가 유계이므로 이 수열 $\{a_n\}$은 유계이다. 수열에 관한 B-W 정리에 의해, $\{a_n\}$의 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$가 존재한다.

$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=x_0$ 라 하자.

Claim: x_0는 S의 극한점

임의의 $\varepsilon>0$에 대해, $\forall k>N$ 이면 $|a_{n_k}-x_0|<\varepsilon$이 되는 자연수 N이 존재한다.

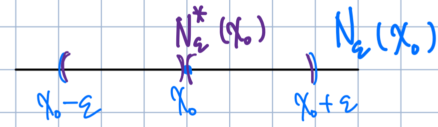
$k>N$ 이면서 $a_{n_k}\neq x_0$인 자연수 k를 택하자. ($\because$ $a_n\in S$, $i\neq j \rightarrow a_i\neq a_j$)

그러면 $|a_{n_k}-x_0|<\varepsilon$ 이고 $a_{n_k}\in S$, 또한 $a_{n_k}\neq x_0$ 이고 $\varepsilon>0$은 임의의 값이므로 x_0는 S의 극한점이다. ■

x_0: 집합 S의 집적점 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$은 x_0가 아닌 집합 S의 원소를 포함한다.

점 x_0의 ε-근방 $= \{x\in\mathbb{R} \mid |x-x_0|<\varepsilon\} = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$: $N_\varepsilon(x_0)$
점 x_0의 빠진 ε-근방 (deleted ε-neighborhood of x_0) $= (x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$: $N^*_\varepsilon(x_0)$

x_0: S의 극한점 $\Leftrightarrow$ " x_0의 모든 빠진 ε-근방이 S의 원소를 포함한다. "



Def 2.5 열린(닫힌) 집합 (open (closed) set)

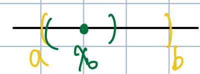
집합 $G\subseteq\mathbb{R}$: 열린집합 (Open Set) $\Leftrightarrow$ $\forall x_0\in G$, $N_\varepsilon(x_0)\subseteq G$가 되는 $\varepsilon>0$이 존재
집합 $F\subseteq\mathbb{R}$: 닫힌집합 (Closed Set) $\Leftrightarrow$ F' (F의 여집합) : 열린집합

	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	(a,b)	$[a,b]$	$(a,b]$
열린집합	O	O	O	X	X
닫힌집합	O	O	X	O	X

① $\varnothing$: open set

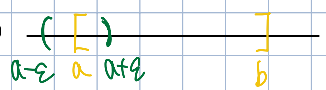
② $\mathbb{R}$: open set

③



$0<\varepsilon_0=\min\{|x_0-a|, |x_0-b|\} \Rightarrow N_{\varepsilon_0}(x_0)\subseteq(a,b)$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \vee \quad\quad\quad \vee$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad\quad\quad 0$

④



어떤 $\varepsilon>0$에 대하여 $N_\varepsilon(a)\nsubseteq[a,b]$이므로
$[a,b]$: not open set.

공집합이 아닌 열린집합 G는 구간을 포함해야하므로 셀 수 있는 집합이 아니다. $G=\bigcup_{x\in G} N_{\varepsilon_x}(x)$

공집합이 아닌 열린집합은 서로소인 가산개의 열린구간의 합집합으로 나타낼 수 있다. $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$, O_n : 열린구간이고 $O_i\cap O_j=\varnothing$, $i\neq j$

Thm 2.11

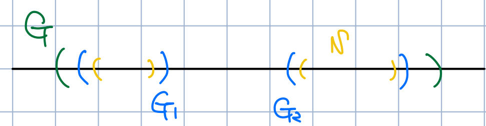
F: 닫힌집합 $\Leftrightarrow$ F는 자신의 모든 극한점을 포함한다.

: 닫힌집합임을 보이려면
자신의 모든 극한점을 포함한다는 것을 보이면 된다.

pf) ($\Rightarrow$) F가 닫힌집합일 때 $x_0\in F'$이라 하자. x_0가 F의 극한점이 아님을 보이면 충분하다.
F'은 열린집합 $\Rightarrow N_\varepsilon(x_0)\subseteq F'$이 되는 $\varepsilon>0$이 존재.
$\Rightarrow (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\cap F=\varnothing$ $\quad\quad$ $\therefore$ x_0는 F의 극한점이 아님.

($\Leftarrow$) F가 자신의 모든 극한점을 포함한다고 하자.
$x_0\in F'$이면 x_0는 F의 극한점이 아니므로, $N^*_\varepsilon(x_0)\cap F=\varnothing$이 되는 $\varepsilon>0$이 존재한다
그런데 $x_0\in F'$이므로 $N_\varepsilon(x_0)\cap F=\varnothing$, 즉 $N_\varepsilon(x_0)\subseteq F'$이다.
따라서 F'은 열린집합이고 F는 닫힌집합이 된다. ■

열린집합 G_i의 모임(collection)이 집합 S의 열린덮개(open covering)이다.
$\Leftrightarrow S \subseteq \bigcup G_i$

ex)


$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i \quad S \subseteq G$

Thm 2.12 하이네-보렐(Heine-Borel) 정리

$\mathcal{g} = \{G_i\}$가 닫힌 유계집합 F의 열린덮개이면, F의 열린 덮개가 되는 $\mathcal{g}$의 유한 부분집합이 존재한다.

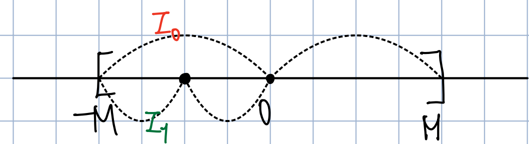
pf) "F를 덮는 $\mathcal{g}$의 유한부분덮개가 존재하지 않는다고 가정"하고 모순이 됨을 증명해보자.

F : 유계 $\Rightarrow F \subseteq [-M, M]$ 이 되는 실수 $M>0$이 존재한다.

$[-M, 0]$과 $[0, M]$ 중 적어도 한 구간은 $\mathcal{g}$에 속하는 유한개의 집합으로 덮을 수 없는 F의 부분을 포함해야한다.

($\because$ 가정에 F를 덮는 $\mathcal{g}$의 유한부분덮개가 존재하지 않는다고 함)

그러한 구간을 I_0라 하자.



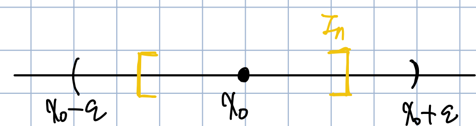
이제 I_0를 같은 길이의 두 구간으로 나누면, 두 구간 중 적어도 한 구간은 $\mathcal{g}$에 속하는 유한개의 집합으로 덮을 수 없는 F의 부분을 포함한다.

그러한 구간을 I_1이라 하자.

이러한 과정을 무한히 계속해나가면 닫힌 구간열 $\{I_n\}$ $n=0,1,\cdots$를 얻게 되는데

$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ 이고 I_k의 길이는 $M/2^k$이고 I_k에 놓여있는 F의 부분은 $\mathcal{g}$에 속하는 유한개의 집합으로는 덮을 수 없다. 축소구간정리에 의해 $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x_0\}$.

이제 x_0가 F의 극한점임을 보이자. ($x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$)



$\varepsilon>0$이 주어지면, $M/2^n < \varepsilon$이 되는 충분히 큰 자연수 n을 택할 수 있다.

$x_0 \in I_n$이고 I_n의 길이는 $M/2^n$이므로 $I_n \subseteq N_\varepsilon(x_0)$.

한편 I_n은 F의 무한히 많은 점을 포함하므로, $x \neq x_0$이고, $|x-x_0|<\varepsilon$이 되는 $x \in F$가 존재한다.

따라서 x_0는 F의 극한점이다.

F는 닫힌집합이므로 $x_0 \in F$(Thm 2.11), $\mathcal{g}$는 F의 열린덮개이므로, $x_0 \in G_{i_0}$인 $G_{i_0} \in \mathcal{g}$가 존재한다.

G_{i_0} : 열린집합 $\Rightarrow N_\eta(x_0) \subseteq G_{i_0}$이 되는 $\eta>0$가 존재한다. (열린집합 정의)

위에서처럼, $I_m \subset N_\eta(x_0)$이 되는 충분히 큰 자연수 m을 택하자. 그러면 $I_m \subset G_{i_0}$이다

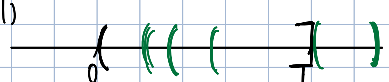
; 즉 I_m은 $\mathcal{g}$에 속하는 하나의(그러므로 유한개의) 집합으로 덮이게 된다. 따라서 I_m에 속하는 F의 부분도 $\mathcal{g}$의 유한개의 집합으로 덮이게 된다. 이는 닫힌 구간열 $\{I_k\}$의 구성에 모순이다. ↯

"닫힌유계집합 F를 유한개의 부분집합으로 덮을 수 없다"는 가정이 모순인 결과를 이끌어 내었으므로 정리가 성립한다. ■

하이네-보렐 정리에서 집합 F가 유계이고 닫힌 집합이라는 두 조건은 반드시 필요하다!

예제 2.10 / $A=(0,1]$, $\mathcal{g}=\{(\frac{1}{n},2) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sol)



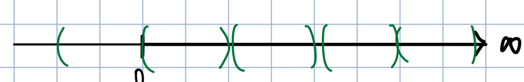
$\mathcal{g}=\{(1,2), (\frac{1}{2},2), (\frac{1}{3},2) \cdots, (\frac{1}{n},2) \cdots\}$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{n},2)$은 A를 포함한다. $\therefore \mathcal{g}$는 A의 열린덮개.

하지만 $\mathcal{g}$의 유한부분집합은 A의 덮개가 아님!

예제 2.11 / $B=[0,\infty)$, $\mathcal{g}=\{(n-2, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sol)



$\mathcal{g}=\{(-1,1), (0,2), (1,3), \cdots, (n-2, n) \cdots\}$

$[0,\infty) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n-2, n)$ $\therefore \mathcal{g}$는 B의 열린덮개

그러나 $\mathcal{g}$의 유한부분집합은 B의 덮개가 아님!

Def. 컴팩트(compact) 집합

$K \subseteq \mathbb{R}$: 컴팩트 집합 $\Leftrightarrow$ K의 모든 열린 덮개가 유한부분덮개를 갖는다.

닫힌 유계집합 $\xLeftrightarrow[\text{하이네-보렐 정리}]{}$ 컴팩트 집합 ($\because$ 하이네-보렐 정리의 역도 참! 이다.)

Chapter 3 Functions And Limits

3.1 Bounded Functions

Recall : 실수의 부분집합 S가 유계 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in S$, $-M \le x \le M$ (즉, $|x| \le M$)가 성립하는 $M>0$가 존재한다.

Def 3.1

함수 $f: A \longrightarrow B$가 유계(bounded)이다. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, $|f(x)| \le M$인 양의 실수 M이 존재한다.

f : 유계함수 $\Leftrightarrow$ 치역 $f(A)$가 유계집합

유계함수의 예

① $f: A \to B$ 유계함수이고 집합 $C \subseteq A$이면 f는 C에서 유계함수.

② 치역이 유한집합인 함수

③ 상수함수

④ $f(x) = x$, 집합 A에서 유계함수 $\Leftrightarrow$ A: $\mathbb{R}$의 유계부분집합

예제 3.1 / 함수 $f(x) = x^2$은 (i) $\mathbb{R}$에서는 유계가 아닌 함수, (ii) 유계구간 I에서는 유계함수임을 보여라.

Sol) (i) f가 $\mathbb{R}$에서 유계라면, $\exists$ 경계값(bound) $M>0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \le M$
$\forall M>0$, $f(M+1) = (M+1)^2 > M+1 > M$이 되므로 $\mathbb{R}$에서 $f(x) = x^2$의 경계가 존재할 수 없다
$\therefore$ f는 $\mathbb{R}$에서 유계가 아니다.

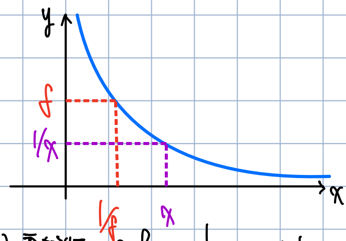
(ii) $I = [a, b]$라 하자. ($\because$ (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ 중 가장 크기가 큼. 따라서 $[a,b]$만 보여도 충분)
$M = \max(a^2, b^2)$으로 놓으면 $|f(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$가 된다.
따라서 $f(x) = x^2$은 $[a,b]$에서 유계함수이다. ■

$f : A \longrightarrow B$가 위로 유계 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, $f(x) \le M_1$ 인 실수 M_1이 존재 $\Rightarrow \exists \sup_{x\in A} f(x)$
$f : A \longrightarrow B$가 아래로 유계 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, $f(x) \ge M_2$ 인 실수 M_2가 존재 $\Rightarrow \exists \inf_{x\in A} f(x)$
$f : A \longrightarrow B$가 유계 $\Leftrightarrow$ 위로 유계이고 아래로 유계 $\Rightarrow \exists \sup_{x\in A} f(x)$ & $\exists \inf_{x\in A} f(x)$

$f : A \longrightarrow B$가 위로 유계가 아님 $\Rightarrow \sup_{x\in A} f(x) = \infty$
$f : A \longrightarrow B$가 아래로 유계가 아님 $\Rightarrow \inf_{x\in A} f(x) = -\infty$

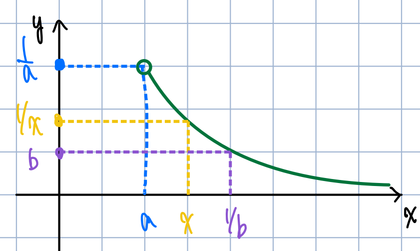
예제 3.2/ $f(x) = 1/x$일 때 f는 $(0, \infty)$에서 (i) 유계가 아니고 (ii) $\inf_{x>0} f(x) = 0$ 이고 (iii) f는 임의의 $a>0$에 대해 (a, ∞)에서 유계 임을 보여라.

Sol) (i) $(0, \infty)$에서 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$이 유계임을 가정하면, 즉 $\forall x \in (0, \infty)$에 대해 $|f(x)| \le M$이 되는 $M>0$이 존재하면 모순에 도달하게 됨을 보이도록 하겠다.
$x \in (0, \infty)$, $x < \frac{1}{M}$이 되는 $x>0$을 택하자. 그러면 $f(x) = \frac{1}{x} > M$이 되어, M은 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$의 경계(bound)가 아니다. 따라서 $\frac{1}{x}$은 $(0, \infty)$에서 유계가 아닌 함수이다.



(ii) Claim : $\inf_{x>0} \frac{1}{x} = 0$, 따라서 $\frac{1}{x}$은 $(0, \infty)$에서 아래로 유계.
$\forall x \in (0, \infty)$, $f(x) > 0$ 이므로, 0은 $(0, \infty)$에서 $\frac{1}{x}$의 하계이다.
임의의 $\delta > 0$에 대해, $0 < \frac{1}{\delta} < x$ 인 x를 택하면,
$f(x) = \frac{1}{x} < \delta$가 되어 δ는 (δ, ∞)에서 $\frac{1}{x}$의 하계가 아니다.
따라서 $0 = \inf_{x>0} \frac{1}{x}$ 이다. ∎ 정의역을 (a, ∞)으로 (이 때 $a>0$은 고정된 실수) 축소해도 $\inf_{x>0} \frac{1}{x} = 0$ 이다.

(iii) Claim : $\frac{1}{x}$은 (a, ∞)에서 위로 유계.
$x > a$이면 $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$ 이므로 $\frac{1}{a}$은 (a, ∞)에서 $\frac{1}{x}$의 상계이다.
$0 < b < \frac{1}{a}$ 이면, $a < x < 1/b$ 인 x에서 $f(x) = \frac{1}{x} > b$가 되어 b는 상계가 아님.
따라서 $\sup_{x>a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$이 되고, $\frac{1}{x}$은 (a, ∞), $a>0$에서 위로 유계이다 ∎



<유계함수들의 어떤 결합들이 다시 유계함수가 되는가에 관한 정리>

Thm 3.1

함수 f와 g가 A에서 유계이고 k는 임의의 실수일 때, $f+g$, kf, $f \cdot g$는 A에서 유계이다.

pf) $\forall x \in A$, $|f(x)| \le M_1$ 이고 $|g(x)| \le M_2$, $M_1, M_2 > 0$라 가정하면,
$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le M_1 + M_2$
$|(kf)(x)| = |kf(x)| = |k||f(x)| \le |k| M_1$
$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) g(x)| = |f(x)||g(x)| \le M_1 \cdot M_2$ ∎

Thm 3.1로부터 모든 다항함수 $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$)는 모든 유계구간 I에서 유계이다.

pf) $f(x) = a_n$: 상수함수이므로 $\mathbb{R}$에서 유계
$f(x) = x$: $\mathbb{R}$에서 유계가 아님. 유계구간 I에서 유계

$\Rightarrow a_{n-1}x + a_n$: 유계구간 I에서 유계
$\Rightarrow x \cdot x = x^2$: 유계구간 I에서 유계
$\Rightarrow a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$: 유계구간 I에서 유계
$\vdots$
$p(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$: 유계구간 I에서 유계 ■

함수 f와 g가 A에서 유계인 함수이도 함수 $\frac{f}{g}$는 A에서 유계함수가 아닐 수 있다.

ex) $f(x)=1$, $g(x)=x$ $A=(0,1)$ 이면
$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ 이 되어 $(0,1)$에서 유계가 아님.

Def) Bounded away from zero

g가 A에서 "0에서 떨어져있다. (bounded away from zero)" $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$, $|g(x)| \geq \alpha$ 인 $\alpha > 0$가 존재

f가 A에서 유계이고 g는 A에서 bounded away from zero 인 함수이면, $\frac{f}{g}$는 A에서 유계이다.

$\ulcorner \left|\frac{f}{g}(x)\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \frac{M}{\alpha} \lrcorner$ $\left(\because |g(x)| \geq \alpha \rightarrow 0 \leq \frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{1}{\alpha}\right)$

Def

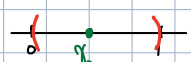
$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ 일 때 f가 점 $x_0 \in A$ 에서 유계이다.
$\Leftrightarrow$ f가 $J \cap A$에서 유계가 되는, x_0를 포함하는 열린구간 J가 존재.

f가 A에서 유계 $\overset{①}{\underset{②}{\rightleftarrows}}$ f가 A의 모든 점에서 유계

pf①
f가 A에서 유계 : $\exists M>0$, s.t. $\forall x \in A$, $|f(x)| \leq M$
집합 A에서 임의의 원소 x_0를 택하자.
$|f(x)| \leq M$, $x \in J \cap A$, 어떠한 열린구간 $J \ni x_0$
$\therefore$ f는 점 x_0 에서 유계 $\Rightarrow$ f는 A의 모든 점에서 유계

pf② 반례로 역이 성립하지 않음을 보이자 (점별유계 O, 정의역 전체에서 유계X)
(i) $f(x) = x^2$ $A = \mathbb{R}$: x^2은 $\mathbb{R}$의 모든 점에서 유계이지만 $\mathbb{R}$에서 유계가 아님.

(ii) $f(x) = 1/x$ $A = (0,1)$
f는 $(0,1)$에서 유계가 아님.
$x_0 \in (0,1)$, $x_0 > 0$ 택하면, $J \cap (0,1) \ni x_0$



f는 $J \cap (0,1)$에서 유계 ■

$\rightarrow$ Compact 집합이 아님! (= 유계닫힌집합 X)

Heine-Borel 정리의 첫번째 적용사례
"어떤 조건에서 함수의 점별유계성이 집합전체의 유계성을 의미할 수 있는지"

Thm 3.2

f가 모든 점 $x_0 \in A$에서 유계이고 A가 컴팩트 집합이면 f는 A에서 유계이다.

pf)
f가 A의 각 점에서 유계이므로, 각 $x \in A$에 대해 f가 $A \cap I_x$에서 유계인 열린구간 $I_x = (x-\delta_x, x+\delta_x)$가 존재한다.
이 열린구간들의 집합 $\{I_x \mid x \in A\}$는 A의 열린덮개가 된다. 즉 $\bigcup_{x\in A} I_x \supset A$.

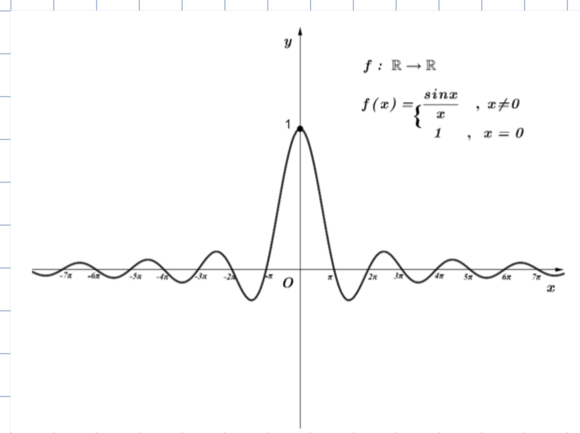
A는 컴팩트 집합이므로, 하이네-보렐 정리에 의해 $\bigcup_{k=1}^{n} I_{x_k} \supset A$가 되는 유한개의 열린덮개 $I_{x_1}, I_{x_2}, \cdots, I_{x_n}$이 존재한다.
각 $k=1,2,\cdots,n$에 대해 f는 $I_{x_k} \cap A$에서 유계이므로, $\forall x \in A \cap I_{x_k}$에 대해 $|f(x)| \le M_k$가 되는 $M_k > 0$가 존재한다.

$M = \max_{1\le k\le n} M_k$라 하면 $\forall x \in A$에 대해 $x \in I_{x_j}$ 되는 $1 \le j \le n$가 존재하고, $x \in A \cap I_{x_j}$이므로 $|f(x)| \le M_j \le M$이 된다.
즉, f는 A에서 유계함수이다 ■

ℝ에서 정의된 함수 f가 짝함수, 또는 우함수 (even function) $\Leftrightarrow f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$
ℝ에서 정의된 함수 f가 홀함수, 또는 기함수 (odd function) $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

1. f, g : 짝함수. $\forall k \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow f+g, kf, fg$: 짝함수
2. f, g : 홀함수 $\forall k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f+g, kf$: 홀, $f \cdot g$: 짝
3. f : 홀함수, g : 짝함수 $\Rightarrow fg$: 홀함수

ex 3.3 / $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ f는 ℝ에서 유계인가?

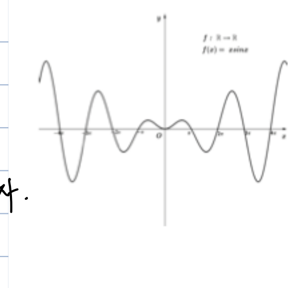


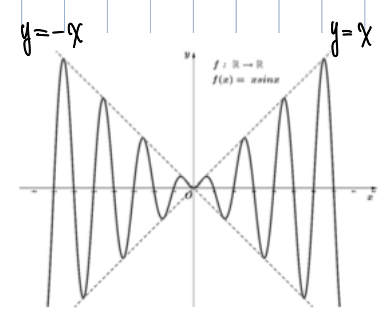
Sol) $|\sin x| \le |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ll} |f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{|x|}{|x|} = 1 & x \neq 0 \\ f(0) = 1 & x = 0 \end{array}\right| \therefore \text{f는 ℝ에서 유계.}$$

$\sin x \times \frac{1}{x}$,$(x \neq 0)$ ⇒ 유계함수!
(유계함수) (유계함수 X)

#ex 3.4 / $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin x$는 ℝ에서 유계가 아님.





Sol) M을 임의의 실수라 하자.
$2\pi k_1 + \frac{\pi}{2} > M$이고 $-(2\pi k_2 - \frac{\pi}{2}) < M$이 되는 정수 k_1과 k_2를 택하자.
$\sin(2\pi k_1 + \frac{\pi}{2}) = 1$이므로 $f(2\pi k_1 + \frac{\pi}{2}) = 2\pi k_1 + \frac{\pi}{2} > M$
$\sin(2\pi k_2 - \frac{\pi}{2}) = -1$이므로 $f(2\pi k_2 - \frac{\pi}{2}) = -(2\pi k_2 - \frac{\pi}{2}) < M$이 된다.

실수 M의 선택의 임의성에 의해, $f(x) = x\sin x$는 아래로도 위로도 유계가 아님을 알 수 있다.

3.2 Limits of Functions

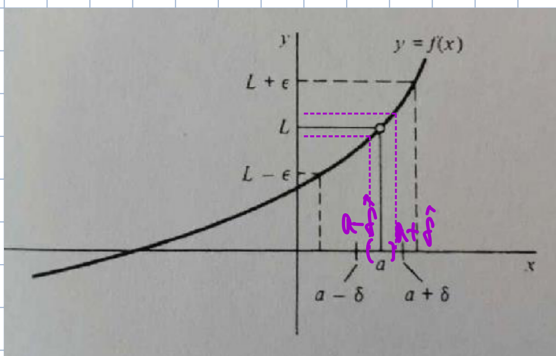
Def 3.2 / $\lim_{x\to a} f(x) = L$

함수 f의 정의역에 있는 x가 "a는 아니면서" a에 한없이 가까워질 때 f의 극한이 L이다.
⇔ 주어진 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여, $0<|x-a|<\delta$이면 $|f(x)-L|<\varepsilon$이 되는 $\delta>0$가 존재한다.

이를 만족하는 $\delta>0$을 찾아줘야한다!

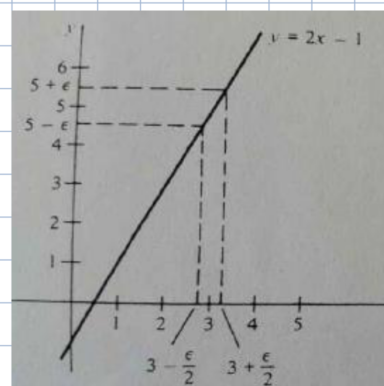
(근방의 개념을 사용하면)
$\lim_{x\to a} f(x)=L$ ⇔ 주어진 L의 임의의 ε-근방, 즉 $N_\varepsilon(L)$에 대하여 $x\in N^*_\delta(a)$이면 $f(x)\in N_\varepsilon(L)$이 되는 a의 빠진 δ-근방 $N^*_\delta(a)$가 존재.

Def 3.2에서 δ값은 단 하나의 값으로만 정해지는 것은 아님.
$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ 이면 $0<\hat{\delta}<\delta$인 임의의 $\hat{\delta}>0$에 대해서도 '$0<|x-a|<\hat{\delta} \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$' 성립한다.



극한을 증명하는데 사용되는 기술 몇 가지를 보여주는 예제들

ex 3.5 / $\lim_{x\to 3}(2x-1)=5$ 임을 증명하시오.



Sol) $\varepsilon>0$ 이 주어졌다 하자.
$f(x):=2x-1$, $0<|x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$ 이 되는 $\delta>0$을 구하기를 원한다.

$|f(x)-5|=|(2x-1)-5|=|2x-6|=2|x-3|$, $2|x-3|<\varepsilon$ 이 되는 $\delta>0$을 구하자.
$2|x-3|<\varepsilon$ 이므로 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$이 된다.

$\delta=\varepsilon/2$로 놓으면, $0<|x-3|<\delta=\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)-5|=2|x-3|<2\delta=\varepsilon$
그러므로 주어진 $\varepsilon>0$에 대해 $\delta=\varepsilon/2$으로 택하면, $x\in N^*_\delta(3) \Rightarrow f(x)\in N_\varepsilon(5)$이 되어 $\lim_{x\to 3}(2x-1)=5$

ex 3.6 / $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ 임을 증명하시오.

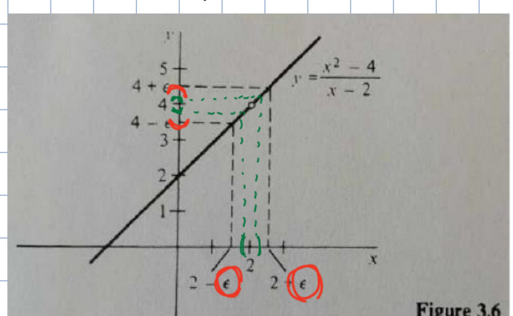


Figure 3.6

Sol) $f(x):=x+2$ $(x\neq 2)$

$\forall\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$ 라 하자.
$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |x+2-4|=|x-2|<\delta=\varepsilon$ ∎ (δ가 ε보다 작은 양의 실수여도 증명가능!)

ex 3.7 / $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ 임을 증명하시오.

Sol) $|x^2-9|$ 이므로, x가 3에 '얼마나(δ)' 가까이 있을 때 $|x+3||x-3|<\varepsilon$ 이 되는가를 찾는것이다.
직관적으로, x가 3에 가까이 있으면, $|x+3|$은 6에 가까울 것이고 $|x-3|$은 0에 가까울 것이다. $\longrightarrow$ $|x+3||x-3|$은 0에 가까울 것

$|x-3|<1 \Rightarrow x\in(2,4) \Rightarrow |x+3|\le |x|+3<7$

$\Rightarrow |x+3||x-3| \le 7|x-3|$ ⋯ ①

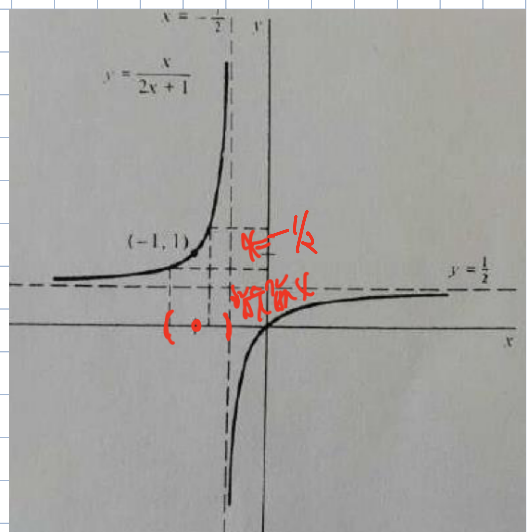
$7|x-3|<\varepsilon$ 이 되도록 하는 δ값을 찾아야한다.

$|x-3| < \varepsilon/7 \Rightarrow |x+3||x-3|\le 7|x-3| < 7\cdot\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$ ⋯ ②

①과 ②를 동시에 만족하는 δ를 구하기위해 $0<\delta=\min(1, \varepsilon/7)$로 택하자.
그러면 $0<|x-3|<\delta \Rightarrow |x^2-9| = |x+3||x-3| < 7\cdot\varepsilon/7 = \varepsilon$ 이 되어 $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ 이다!

★ $|x+3||x-3|$이 변화하는 x가 들어있는 두 항의 곱이므로 동시에 ε보다 작게 만드는 양의 실수 δ를 구해야한다.

ex 3.8 / $\lim_{x\to -1} \frac{x}{2x+1} = 1$ 임을 증명하시오.



Sol) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ 는 $-1/2$이 아닌 모든 실수에서 정의된다.
-1 근방에서는 $0<\eta\le 1/2$에 대한 $N^*_\eta(-1)$에서 정의된다.

$\varepsilon>0$ 이 주어졌다 하자. 그러면 우리는 $0<|x-(-1)|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$ 이 되도록 하는 δ값을 찾아야한다.

$|f(x)-1| = \left|\frac{x}{2x+1} - 1\right| = \left|\frac{x-2x-1}{2x+1}\right| = \left|\frac{-x-1}{2x+1}\right| = \left|\frac{1}{2x+1}\right||x+1|$ 이다.

$\left|\frac{1}{2x+1}\right|$ 이 유계가 되도록 $|x+1|$의 초기제한값을 정해보자.
$|x+1|<1/2$로 제한하면 $|1/(2x+1)|$이 유계가 되도록 하기에 충분하지 않다.
따라서 $1/2$보다 작은 양의 실수 $1/4$로 초기제한값을 정하자.

$|x+1|<1/4 \Rightarrow x\in(-5/4, -3/4) \Rightarrow |2x+1| > |2x|-1 > 2\cdot\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$ 이 되어 $\left|\frac{1}{2x+1}\right||x+1| < 2|x+1|$이 된다.
그러면 $2|x+1|<\varepsilon$이 되는 δ값을 찾자.

$0<\delta=\min(1/4, \varepsilon/2)$로 택하면 $0<|x+1|<\delta \Rightarrow |f(x)-1| = \left|\frac{1}{2x+1}\right||x+1| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$이 된다.
$\therefore \lim_{x\to -1} x/(2x+1) = 1$ ■

* $|x+1|$의 초기 제한값은 $1/2$보다 작은 양의 실수는 모두 택할수 있다.

< 임의의 $x=a$ 에서의 극한 >

ex 3.9 / $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$ 임을 증명하시오.

Sol) 삼각함수에 관한 다음 항등식과 부등식을 이용해 증명하자.

1) $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

2) $|\sin x|\le|x|$, $|\cos x|\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

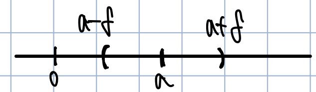
$\varepsilon>0$ 이 주어졌다 하자. $|\sin x-\sin a|=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\le\cancel{2}\cdot\left|\frac{x-a}{\cancel{2}}\right|\cdot 1=|x-a|$

$|x-a|<\varepsilon$ 이 되도록 하는 양의 실수 δ를 찾자. $\delta=\varepsilon$ 라 하면, $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\sin x-\sin a|\le|x-a|<\delta=\varepsilon$ ■

$\delta=\varepsilon$ OR ε보다 작은 양의 실수.

ex 3.10 / $a>0$, $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ 임을 증명하시오.

Sol) $f(x)=\sqrt{x}$ 의 정의역은 $[0,\infty)$ 이다.

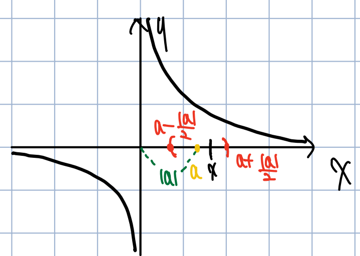


a의 $\delta-$근방이 정의역에 포함되려면 $0<\delta\le a$ 이어야한다.

$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|<\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon$ 이려면 $|x-a|<\varepsilon\sqrt{a}$ 여야한다.

$\therefore$ 임의의 $\varepsilon>0$에 대해 $0<\delta=\min(a,\varepsilon\sqrt{a})$로 택하자. 그러면 $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\frac{\delta}{\sqrt{a}}\le\frac{\varepsilon\cancel{\sqrt{a}}}{\cancel{\sqrt{a}}}=\varepsilon$ ■

ex 3.11 / $\lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$ 임을 증명하시오.



Sol) $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{x-a}{xa}\right|=\frac{1}{|xa|}|x-a|$

삼각부등식에 의해 $|a|-|x|<|x-a|<\frac{|a|}{2}$, $|a|-|x|<\frac{|a|}{2}\Rightarrow 0<\frac{|a|}{2}<|x|\Rightarrow\frac{2}{|a|}>\frac{1}{|x|}$

$\Rightarrow\frac{1}{|xa|}<\frac{2}{|a|^2}\left(\frac{1}{|xa|}=\frac{1}{|x|}\frac{1}{|a|}<\frac{2}{|a|}\frac{1}{|a|}\right)$

$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|\le\frac{2}{|a|^2}|x-a|<\varepsilon\longrightarrow|x-a|<\frac{|a|^2}{2}\varepsilon$

$0<\delta=\min\left(\frac{|a|}{2},\frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right)$ 으로 택하면 $|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{|xa|}|x-a|<\cancel{\frac{2}{|a|^2}\cdot\frac{|a|^2}{2}}\varepsilon=\varepsilon$ ■

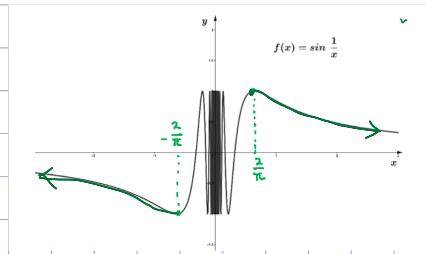
Thm 3.3 / 만일 $\lim_{x\to a}f(x)=L_1$ 이고 $\lim_{x\to a}f(x)=L_2$ 이면 $L_1=L_2$ 이다. (극한의 유일성)

pf) $\forall\varepsilon>0$, $\lim_{x\to a}f(x)=L_1\Rightarrow\exists\delta_1>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-L_1|<\varepsilon/2$,

$\lim_{x\to a}f(x)=L_2\Rightarrow\exists\delta_2>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-L_2|<\varepsilon/2$

$x_0\in N^*_{\delta_1}(a)\cap N^*_{\delta_2}(a)$ 일 때, $0<|x_0-a|<\delta_1$, $0<|x_0-a|<\delta_2$ 이므로 $|L_1-L_2|=|L_1-f(x_0)+f(x_0)-L_2|\le|L_1-f(x_0)|+|f(x_0)-L_2|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$ ■

예) $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$의 극한의 존재성을 조사하시오.



Sol) $f(x) := \sin\frac{1}{x}$

$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin(n\pi) = 0 \ (n=1,2,\cdots)$ | $x=\frac{1}{n\pi}$ $n\to\infty$ $x\to 0$ but $f:0$

$f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right) = \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = 1 \ (n=1,2,\cdots)$ | $x=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ $n\to\infty$ $x\to 0$ but $f:1$

By theorem 3.3, the limit of f cannot be both 0 and 1.
Hence $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ does not exist.

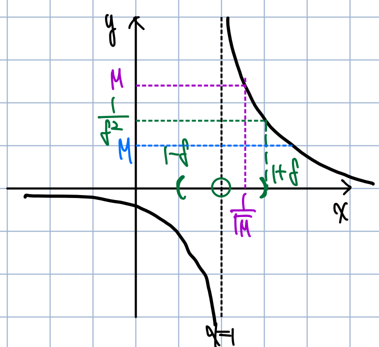
Lemma
$\lim_{x\to a}f(x)=L$ 이면 f는 $x=a$의 적당한 빠진 근방에서 유계이다.
즉, $\exists\delta>0$ s.t. f is bounded on $N_\delta^*(a)$

pf) $\varepsilon=1$ 이라 하자. 그러면 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon=1$ 이 되는 δ가 존재.
$\forall x\in N_\delta^*(a)$, $|f(x)| = |f(x)-L+L| \le |f(x)-L|+|L| < 1+|L|$ ∎

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=L$ 이고 $a\in \mathrm{dom} f$ 이면, f는 $x=a$에서 유계이다.
$\exists f(a)$

Ex 3.12 / $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ 이 존재하지 않음을 증명하시오.

Sol) "Claim: $\forall\delta>0$, $N_\delta^*(1)$에서 $1/(x-1)^2$은 유계가 아니다 $\longrightarrow$ $\forall M>0$, $\exists x\in N_\delta^*(1)$ s.t. $|f(x)|>M$"



(i) $M\le\frac{1}{\delta^2}$
$\forall x\in N_\delta^*(1)$, $f(x)\ge M$

(ii) $\forall\delta>0$, $\forall M>0$, $0<|x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ 이 되는 $x\in N_\delta^*(1)$을 택하자.
그러면 $(x-1)^2<\frac{1}{M} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}>M$ 즉 f는 $N_\delta^*(1)$에서 유계가 아니다.

$\Rightarrow$ 임의로 주어진 $\delta>0$에 대해 함수 f가 $N_\delta^*(1)$에서 유계가 아님을 보였다.
f는 $x=1$의 임의의 빠진 근방에서 유계가 아니다. Lemma에 의해 위의 극한은 존재하지 않는다. ∎

$x=a$에서 유계 $\not\Rightarrow$ $x=a$에서 극한 존재 [반례] $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ $|f(x)|\le 1$ but 극한존재X

Thm 3.4 / Fundamental limit theorem

$\lim_{x\to a}f(x)=L$, $\lim_{x\to a}g(x)=\hat{L}$ 이고 $k\in\mathbb{R}$ 이면

(a) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = L\pm\hat{L}$ (b) $\lim_{x\to a}f(x)g(x) = L\hat{L}$ (c) $\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)}\right]=\frac{1}{\hat{L}}$. $(\hat{L}\ne 0)$ (d) $\lim_{x\to a}kf(x)=kL$ (e) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{L}{\hat{L}}$ $(\hat{L}\ne 0)$

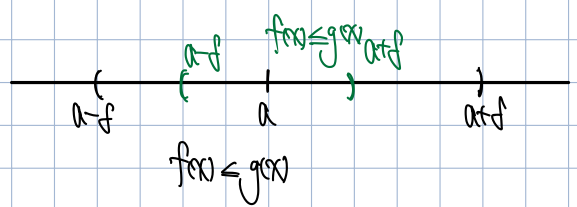
Thm : $x=a$의 근방에서 정의된 함수 f가 $x=a$에서 연속이다. $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Thm 3.5

$\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=\hat{L}$ 이고 $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in N_\delta^*(a)$ 인 $\delta>0$가 존재하면, $L\le\hat{L}$
(함수값) (극한값)

pf) $\hat{L}<L$ 이라 가정하자. 그러면 $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-\hat{L}>0$

$\varepsilon=\frac{1}{2}(L-\hat{L})>0$ 이라하자. 극한의 정의에 의해 $|f(x)-g(x)-(L-\hat{L})|<\varepsilon=\frac{1}{2}(L-\hat{L})$ 이 되는 $N_\delta^*(a)$가 존재한다.
즉, $0<\frac{1}{2}(L-\hat{L})<f(x)-g(x)<\frac{3}{2}(L-\hat{L})$, $\forall x\in N_\delta^*(a)$
$f(x)>g(x)$, $\forall x\in N_\delta^*(a)$ 이 되어, 정리의 가정에 모순이 된다. ■



Thm 3.6

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ (극한값)
$\Leftrightarrow$ $x_n\to a$ 이고 $x_n\ne a\ (n=1,2,\cdots)$ 인 f의 정의역에 있는 모든 수열 $\{x_n\}$에 대해
$f(x_n)\longrightarrow L$

pf)

$\Longrightarrow$ $\varepsilon>0$이 주어졌다 하자.
$\lim_{x\to a} f(x)=L$ 이므로 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$이 되는 $\delta>0$가 존재한다. (극한의 정의)
$x_n\to a$, $x_n\ne a$ 이므로 $\forall n>N$, $0<|x_n-a|<\delta$ 이 되는 자연수 N이 존재한다.
따라서, $\forall n>N$, $|f(x_n)-L|<\varepsilon$, 즉 $f(x_n)\longrightarrow L$ ■

$\Longleftarrow$ $\lim_{x\to a} f(x)\ne L$ 이라 가정하자. ($\because$ 모든수열 $\{x_n\}$에 대해 모두 보일 수 없으므로)
그러면 $\forall\delta>0$, $x\in N_\delta^*(a)$ 이면서 $|f(x)-L|\ge\varepsilon$인 ε이 존재한다.

각 자연수 n에 대해, f의 정의역에 속하는 x_n을 택하는데, $x_n\in N_{\frac{1}{n}}^*(a)$ 이고 $|f(x_n)-L|\ge\varepsilon$이 되도록 택하자.
그러면 각 자연수 n에 대하여, $0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$ 이고 $|f(x_n)-L|\ge\varepsilon$이 되어 $x_n\to a$이지만 $f(x_n)\nrightarrow L$이 된다. ■
그러한 x_n을 찾으면 됨!

ex 3.13 / $f(x) = \begin{cases} 1 ; & x: \text{유리수} \\ 0 ; & x: \text{무리수} \end{cases}$ 이면 어떠한 실수 a에 대해서도 $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$.

Sol) Thm 3.6 : $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (극한값)

$\Leftrightarrow$ $x_n \to a$ 이고 $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 인 f의 정의역에 있는 모든 수열 $\{x_n\}$에 대해

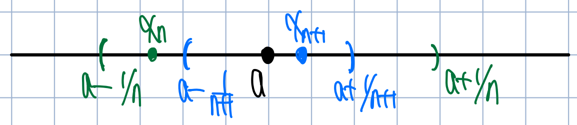
$f(x_n) \to L$

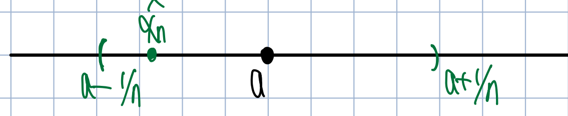
Thm 1.9 & Thm 1.10 $\Rightarrow$ 유리수 집합과 무리수 집합은 $\mathbb{R}$에서 조밀하다.

x_n을 설정할 수 있는 근거 $\Rightarrow$ | Thm 1.9 / 모든 열린구간 (a, b)는 적어도 하나의 유리수를 포함한다.
| Thm 1.10 / 실수집합의 모든 구간 I는 적어도 하나의 무리수를 포함한다.

$x_n \to a$, $x_n \neq 0$ x_n: 유리수 $f(x_n) \to 1$

$\hat{x}_n \to a$, $\hat{x}_n \neq a$, $\hat{x}_n$: 무리수 $f(\hat{x}_n) \to 0$





$n \in \mathbb{N}$, $\underset{\text{유리수}}{x_n} \in N_{\frac{1}{n}}^{*}(a)$, $\underset{\text{유리수}}{x_{n+1}} \in N_{\frac{1}{n+1}}^{*}(a)$

$n \in \mathbb{N}$, $\underset{\text{무리수}}{\hat{x}_n} \in N_{\frac{1}{n}}^{*}(a)$

$\therefore$ Thm 3.6 에 의해 $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ ∎

ex 3.14 / $f(x) = \begin{cases} x & x: \text{유리수} \\ 0 & x: \text{무리수} \end{cases}$ 이면, $\lim_{x \to a} f(x)$은 $a=0$ 일 때만 존재한다.

Sol) $a \neq 0$ 인 경우

$x_n \to a$, x_n: 유리수, $x_n \neq a$
$f(x_n) = x_n \to a \ (\neq 0)$

$\hat{x}_n \to a$, $\hat{x}_n$: 무리수, $\hat{x}_n \neq a$
$f(\hat{x}_n) = 0 \to 0$

$a \neq 0$ 이므로 Thm 3.6 에 의해 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재하지 않는다!

$a = 0$ 인 경우

0으로 수렴하는 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대해, $f(x_n)$의 값은 $\underset{\text{유리수}}{x_n}$이거나 $\underset{\text{무리수}}{0}$이다.

$x_n \to 0$ 이면 $f(x_n) \to 0$ 이므로, Thm 3.6에 의해 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ 이다!

ex 3.15 / $b > 0$ 이고 a는 임의의 실수일 때, $\lim_{x \to a} b^x = b^a$ 임을 증명하시오.

Sol) b의 범위를 먼저 나누자! (① $b=1$, ② $b>1$, ③ $0<b<1$)

① $b=1$ 인 경우
자명하다! $\lim_{x \to a} 1^x = \lim_{x \to a} 1 = 1$, $1^a = 1$

② $b>1$ 인 경우

i) $a=0$

[$x_n \to 0$ 이면 $f(x_n)=b^{x_n} \to b^0=1$ 임을 보이면 충분하다.]

cf) $b^{\frac{1}{n}} \to 1$

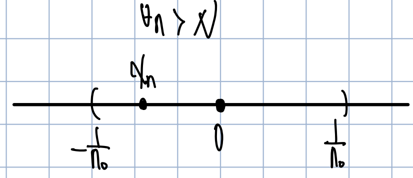
$\varepsilon>0$이 주어졌다 하자. $x_n \to 0$ 인 임의의 수열이다. ("null 수열" : 0으로 수렴하는 수열)

$b^{\frac{1}{n_0}}-1<\varepsilon$ 이 되는 자연수 n_0를 택하자.

$n>N$ 이면 $|x_n-0|<\frac{1}{n_0}$ 이 되는 자연수 N을 택하자.

그러면 $\forall n>N$,

$$|f(x_n)-1| = |b^{x_n}-1| = \begin{cases} b^{x_n}-1 < b^{\frac{1}{n_0}}-1<\varepsilon & (x_n>0) \\ \underline{1-b^{x_n} < b^{-x_n}-1} < b^{\frac{1}{n_0}}-1<\varepsilon & (x_n<0) \\ 0<\varepsilon & (x_n=0) \end{cases}$$



⊛ $1-b^{x_n} < \dfrac{1-b^{x_n}}{b^{x_n}} = b^{-x_n}-1$

따라서 $b^{x_n} \to 1$ 이고 $\lim_{x\to 0} b^x = 1 = b^0$ 이다.

ii) $a \neq 0$

: $x_n \to a$ 이면 $x_n - a \to 0$ 이다. $f(x_n-a)=b^{x_n-a} \to 1 \Rightarrow b^{x_n} \to b^a$

③ $0<b<1$ 인 경우

$\frac{1}{b}>1$ 이므로 $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{b}\right)^x = \left(\frac{1}{b}\right)^a$

Fundamental limit theorem에 의해 $\lim_{x\to a} b^x = \lim_{x\to a} \dfrac{1}{(\frac{1}{b})^x} = \dfrac{1}{(\frac{1}{b})^a} = b^a$

∴ 임의의 실수 a에서 $f(x)=b^x$는 연속이다! ■

3.3. One-Sided Limits, Infinite Limits, and Limits at Infinity

Def 3.8

$\lim_{x\to a^+} f(x)=L \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, s.t. $a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\iff$ 주어진 임의의 $N_\varepsilon(L)$에 대해, $x\in(a, a+\delta)$ 이면 $f(x)\in N_\varepsilon(L)$ 이 성립하는 $\delta>0$가 존재.

"L은 $x=a$에서 f의 우극한 (또는 오른쪽 극한) 이다."

Ex 3.16 / $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x+|x|}=0$ 임을 증명하시오.

Sol) $x\in(0,\infty)$ 이면 $|x|=x$ 이므로 $\dfrac{x^2}{x+|x|} = \dfrac{x^2}{x+x} = \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{2x}} = \dfrac{x}{2}$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, s.t. $0<|x|<\delta$, 즉 $0<x<\delta \Rightarrow \left|\frac{x}{2}-0\right|<\varepsilon$ $(=\frac{x}{2}<\varepsilon)$

$\delta=2\varepsilon$로 택하면 $0<x<\delta \Rightarrow \frac{x}{2}<\frac{\delta}{2}=\frac{2\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ■

Def 3.4

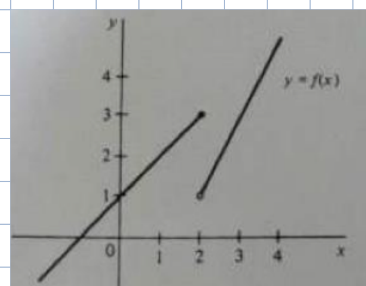
$\lim_{x\to a^-} f(x)=L \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

"L은 x=a에서 f의 좌극한(또는 왼쪽 극한)이다."

ex 3.17 / $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2 \\ 2x-3, & x>2 \end{cases}$ 일 때, i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$, ii) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$ 임을 증명하시오.

Sol) i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$

: 기울기가 2이므로 $\forall\varepsilon>0$, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ or $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$보다 작은 양의 실수를 택하면 된다.

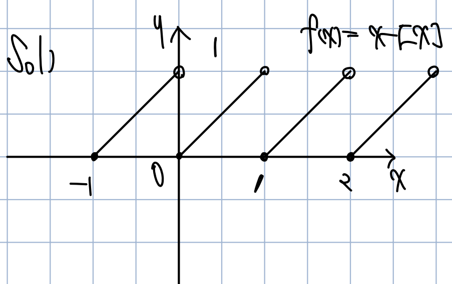


ii) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$

: 기울기가 1이므로 $\forall\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$ or $\delta=\varepsilon$보다 작은 양의 실수를 택하면 된다.

ex 3.18 / $f(x)=x-[x]$, $[x]$는 최대정수함수(the greatest-integral function) 일 때
i) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$, ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$

Sol)



$0\le x<1$, $[x]=0 \Rightarrow f(x)=x$
$1\le x<2$, $[x]=1 \Rightarrow f(x)=x-1$

$\forall\varepsilon>0$, $0<\delta=\min(1,\varepsilon)$로 택하자.

i) $1<x<1+\delta \Rightarrow |f(x)-0|=|x-1|<\delta\le\varepsilon$

ii) $1-\delta<x<1 \Rightarrow |f(x)-1|=|x-1|<\delta\le\varepsilon$ ∎

함수의 극한이 존재하면 유일한 것과 같이 좌극한과 우극한도 존재하면 유일하다.

Thm 3.7

$\lim_{x\to a} f(x)=L \iff \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$

pf) !!

x=a에서 함수 f의 한 방향 극한이 존재하면,

f가 $\left|\begin{array}{l} (a, a+\delta) \text{에서 [우극한이 존재하는 경우]} \\ (a-\delta, a) \text{에서 [좌극한이 존재하는 경우]} \end{array}\right|$ 유계가 되는 $\delta>0$가 존재한다.

ex 3.20 / i) $\nexists \lim_{x\to1+} 2^{\frac{1}{x-1}}$ 임을 보이시오. ii) $\lim_{x\to1-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$ 임을 보이시오.

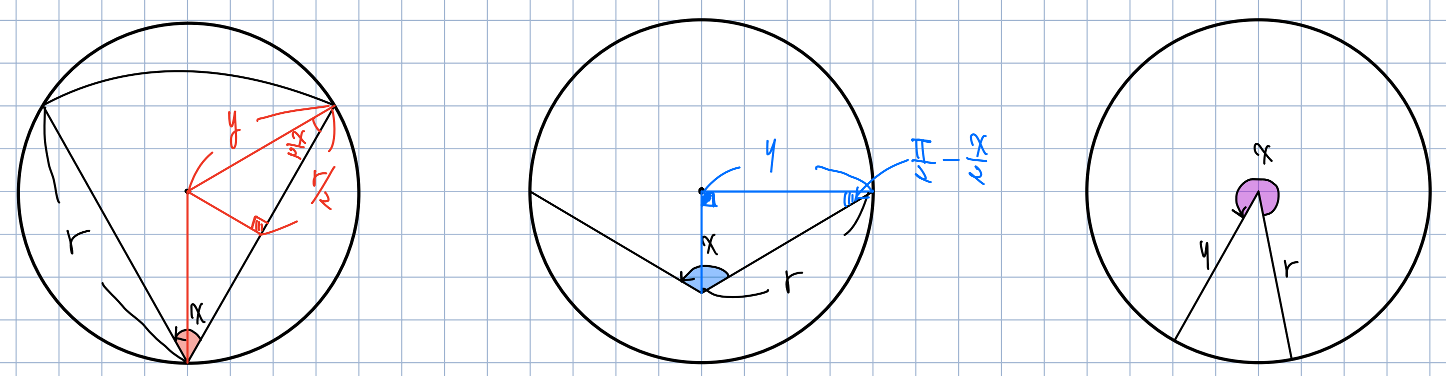
Sol) i) 한 방향 극한이 존재하지 않으므로 $2^{\frac{1}{x-1}}$ 이 $(1, 1+\delta)$에서 유계가 되지 않음을 보이면 충분하다.

임의의 $\delta>0$ 에 대해 $\frac{1}{N}<\delta$ 인 자연수 N을 택하자. 그러면 $n>N$이면 $1+\frac{1}{n}\in(1, 1+\delta)$ 이고,
$2^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}-1}} = 2^n$ $\{2^n \mid n>N\}$ 은 유계가 아닌 집합이므로, $\nexists \lim_{x\to1+} 2^{\frac{1}{x-1}}$ 이다 ■

ii) 주어진 임의의 $\varepsilon>0$에 대해, $\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$이 되도록 충분히 큰 자연수 n_0를 택하고 $\delta=\frac{1}{n_0}$로 택하자.
$1-\delta<x<1 \Rightarrow -\delta<x-1<0 \Rightarrow \frac{1}{x-1}<-\frac{1}{\delta}<0$
$\left|2^{\frac{1}{x-1}}-0\right| = 2^{\frac{1}{x-1}} < 2^{-\frac{1}{\delta}} = 2^{-n_0} < \varepsilon$ 이 되어 $\lim_{x\to1-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$ 이다.

<x=a의 왼편과 오른편에서 함수 f(x)가 다른 식으로 정의된 예>

ex 3.21 / 반지름이 $r>0$ 인 원판모양의 파이가 있다.
x: 파이를 부채꼴모양으로 잘랐을 때, 자른 조각의 중심각
y: 조각파이를 크기가 딱 맞는 (파이가 접시 가장자리로 넘치지 않는) 접시에 담을 때, 접시의 반지름
그러면 $0\le y\le r$, $0\le x\le 2\pi$, 의 함수가 된다.



$0<x\le\frac{\pi}{2}$: $y\cos\frac{x}{2}=\frac{r}{2}$ $\therefore y=\frac{r}{2}\sec\frac{x}{2}$

$\frac{\pi}{2}<x\le\pi$: $r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=y$ $\therefore y=r\sin\frac{x}{2}$

$\pi<x\le2\pi$: $y=r$

$$\therefore y=f(x)=\begin{cases} 0 & , x=0 \\ \frac{r}{2}\sec\frac{x}{2} & , 0<x\le\frac{\pi}{2} \\ r\sin\frac{x}{2} & , \frac{\pi}{2}<x\le\pi \\ r & , \pi<x\le2\pi \end{cases}$$

이 함수를 "pie 함수"라 부른다.

Def 3.5

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0$, $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M$ 이 되는 $\delta>0$가 존재
$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0$, $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<-M$ 이 되는 $\delta>0$가 존재

ex 3.22 / $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

Sol) $\forall M>0$, $\delta = \frac{1}{M}$ 로 택하자.
그러면 $0<|x-0|=|x|<\delta=\frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|x|}>M$
$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$ □

ex 3.23 / $\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$

Sol) $\forall M>0$, $\delta = e^{-M}$ 으로 택하자.
그러면 $0<|x|<\delta = e^{-M}$ 이므로
$\ln|x| < -M$ 이다. $\therefore \lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$ □

Def 3.6

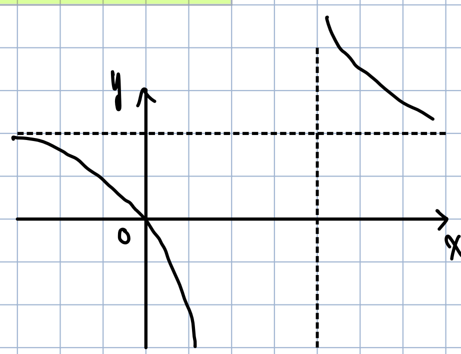
(a) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0$, $a<x<a+\delta \Rightarrow f(x)>M$ 이 되는 $\delta>0$ 존재

(b) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0$, $a-\delta<x<a \Rightarrow f(x)>M$ 이 되는 $\delta>0$ 존재.

(c) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0$. $a<x<a+\delta \Rightarrow f(x)<-M$ 이 되는 $\delta>0$ 존재.

(d) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0$, $a-\delta<x<a \Rightarrow f(x)<-M$ 이 되는 $\delta>0$ 존재.

ex 3.25 / $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \infty$



Sol) $f(x) := \frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = 1+\frac{2}{x-2}$

$\forall M>0$, $\delta = \frac{2}{M}$ 로 택하자.
그러면 $2<x<2+\delta = 2+\frac{2}{M} \Rightarrow \frac{1}{x-2} > \frac{M}{2}$

그러므로 $2<x<2+\delta$ 이면 $f(x) = \frac{x}{x-2} = 1+\frac{2}{x-2} > \frac{2}{x-2} > M$
$\therefore \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \infty$ 이다.

Def 3.7

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ 이 되는 $M>0$ 존재

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$. $x<-M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ 이 되는 $M>0$ 존재

M을 찾기!

ex 3.26 / i) $\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$, ii) $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$ 임을 보이시오.

Sol) i) $\forall \varepsilon>0$, $x>\frac{1}{\varepsilon}=M$ 이면 $\left|-\frac{1}{x+1}-0\right| = \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < \varepsilon$
$\therefore \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$

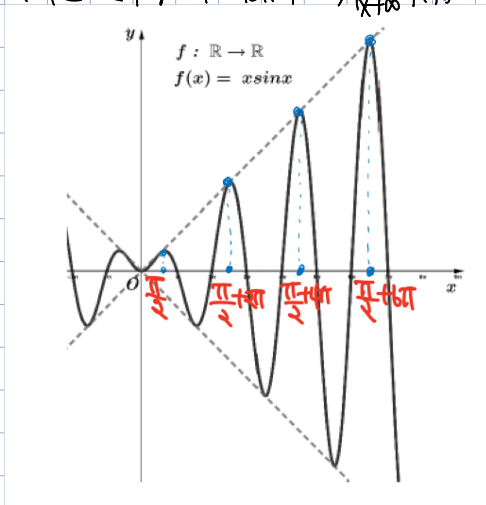
ii) $\forall \varepsilon>0$. $x<-(1+\frac{1}{\varepsilon})=M$ 이면 $x+1<-\frac{1}{\varepsilon}$ $\frac{1}{x+1} > -\varepsilon$ $-\frac{1}{x+1} < \varepsilon$ □

ex 3.27 / $f(x) = x\sin x$ 함수 f는 $[a, \infty)$에서 유계가 아님을 보이시오. 이 때 a는 임의의 양의 실수
따라서 $\lim_{x\to\infty} f(x)$는 존재하지 않음을 보이시오.

Sol) 수열 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$
우선 이 수열의 항들 중 정의역 $[a, \infty)$에 속하는 점들을 구하자. 즉 $a \le 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

A.P에 의해 $a \le 2N\pi + \frac{\pi}{2}$인 자연수 N이 존재한다.
그러면 $\forall n > N$에 대해, $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \in [a, \infty)$이고 $f(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \ge N$은 유계가 아니다.

어떠한 실수 L에 대해서도, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$이 아니다. 즉 $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$ ∎



Def 3.8

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, $x > K \Rightarrow f(x) > M$이 되는 $K > 0$ 존재

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, $x < -K \Rightarrow f(x) > M$이 되는 $K > 0$ 존재

(c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, $x > K \Rightarrow f(x) < -M$이 되는 $K > 0$ 존재

(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$, $x < -K \Rightarrow f(x) < -M$이 되는 $K > 0$ 존재

ex 3.28 / $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$ 임을 보이시오.

Sol) $\forall M > 0$, $K = M^2$으로 택하자.
$x > K = M^2 \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{K} = M$이 되어 $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$이다. ∎

3.4 Monotone Functions

Def 3.9 / 단조함수 (monotone functions)

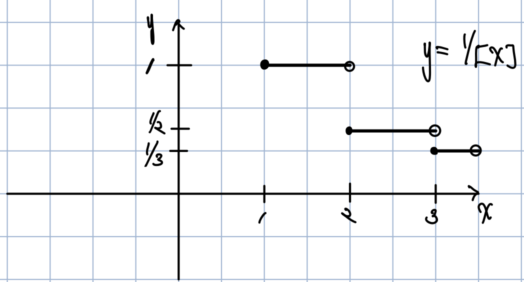
함수 $f: A \to B$ 가
A에서 단조증가 $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ 인 모든 $x_1, x_2 \in A$ 에서 $f(x_1) \le f(x_2)$
단조감소 $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ 인 모든 $x_1, x_2 \in A$ 에서 $f(x_1) \ge f(x_2)$
단조 $\Leftrightarrow$ A에서 단조증가이거나 단조감소

cf) 증가함수 (strictly increasing)
감소함수 (strictly decreasing)

$f: A \to B$ 가 A에서 strictly monotone 함수이면, f는 1-1 함수
즉 '$x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$' $\Longrightarrow$ 역함수 $f^{-1}: f(A) \to A$ 존재

ex 3.31 / $[1, \infty)$ 에서 $f(x) = 1/[x]$ 로 정의하자. f는 $[1, \infty)$ 에서 (i) 단조감소이지만 (ii) 감소함수는 아님을 보이시오.

Sol)



(i) $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ $x_1 < x_2$ 라 하자.
그러면 $x_1 \in [n_1, n_1+1)$ 이고 $x_2 \in [n_2, n_2+1)$ 이 되는 자연수 n_1, n_2 가 각각 유일하게 존재하고, $x_1 < x_2$ 이므로 $n_1 \le n_2$ 이다.

$f(x_1) = 1/[x_1] = 1/n_1 \ge 1/n_2 = 1/[x_2] = f(x_2)$ 이므로
f는 단조감소 함수이다. ■

(ii) 감소함수 X
ex) $f(\frac{9}{4}) = \frac{1}{2} = f(\frac{5}{2})$ 이므로 $\frac{9}{4} < \frac{5}{2}$ 이지만 $f(\frac{9}{4}) = f(\frac{5}{2})$ 이다.
→ 정의역의 원소를 찾아 보여줌.

Thm 3.8

f가 단조함수이면, 각 $x_0 \in (a, b)$ 에 대해 i) $\exists \lim_{x \to x_0-} f(x)$ 이고 ii) $\exists \lim_{x \to x_0+} f(x)$ 이다.

Thm 2.5 단조수렴정리 (단조증가수열 / 단조감소수열에 대한..)

수열의 단조성 ⟶ 수렴성 O

$\{a_n\}$ 이 단조증가(감소) 이고 위(아래)로 유계인 수열이면 $\{a_n\}$ 은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n \ (\inf a_n)$ 이다.

pf) 집합 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 이 위로 유계이므로, 완비성공리에 의해 $\exists \sup a_n = L$
주어진 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해, $L - \varepsilon < a_N \le L$ 인 자연수 N 이 존재한다
$n > N$ 이면, $L - \varepsilon < a_N \le a_n < L$ 이므로 $|a_n - L| < \varepsilon$ 이 된다.
따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \sup a_n$ ■

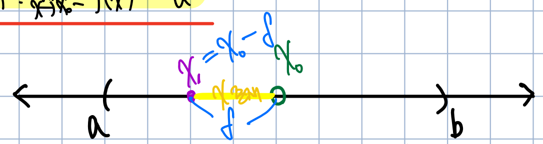
☆ $M = \sup S$
$\Leftrightarrow$ (i) $M \ge x, \ \forall x \in S$
(ii) For every $\varepsilon > 0$,
$\exists y \in S$ s.t. $M - \varepsilon < y \le M$

Thm 3.8 의 증명

f가 (a.b)에서 단조증가인 경우

i) $x_0 \in (a,b)$ 라 하자. $x \in (a, x_0)$ 이면 $f(x) \le f(x_0)$ 이므로
$\{f(x) \mid x \in (a, x_0)\}$ 는 위로 유계인 집합이다. $\Rightarrow \sup_{a<x<x_0} f(x) \overset{Let}{=\!=} \alpha \in \mathbb{R}$

Claim : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha$



$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in (a, x_0)$ s.t. $\alpha - \varepsilon < f(x_1) \le \alpha$
$0 < \delta = x_0 - x_1$ 으로 택하자. $(x_1 =) x_0 - \delta < x < x_0$ 이면 $f(x_1) \le f(x)$ 이므로 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 에 대해
$|f(x) - \alpha| = \alpha - f(x) \le \alpha - f(x_1) < \varepsilon$
그러므로 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha$ ∎

ii) $x \in (x_0, b)$ 이면 $f(x_0) \le f(x)$ 이므로 $\{f(x) \mid x \in (x_0, b)\}$ 는 아래로 유계인 집합이다.
$\Rightarrow \inf_{x_0<x<b} f(x) \overset{Let}{=\!=} \beta \in \mathbb{R}$

Claim : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_2 \in (x_0, b)$ s.t. $f(x_2) < \beta + \varepsilon$ $\quad (\because \forall \varepsilon > 0,\ \beta + \varepsilon > \beta = \inf_{x_0<x<b} f(x))$
$0 < \delta = x_2 - x_0$ 라 택하자. $x_0 < x < x_0 + \delta \ (= x_2)$ 이면 $f(x) \le f(x_2)$ 이므로 $|f(x) - \beta| = f(x) - \beta \le f(x_2) - \beta < \varepsilon$
그러므로 $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$ ∎

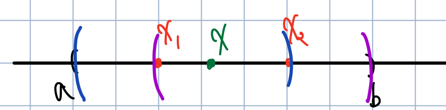
Corollary / f가 (a.b)에서 단조증가함수이면, 각 $x_0 \in (a,b)$ 에서 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x) \le f(x_0) \le \inf_{x \in (x_0, b)} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

f가 (a.b)에서 단조함수이면, 각 점 $x_0 \in (a,b)$ 에서 좌극한과 우극한이 존재하므로 f는 각 점 $x_0 \in (a,b)$ 에서 유계이다.

Def

$f : A \to \mathbb{R}$ 일 때 f가 점 $x_0 \in A$ 에서 유계이다.
$\Longleftrightarrow$ f가 $J \cap A$ 에서 유계가 되는, x_0를 포함하는 열린구간 J가 존재.

Lemma / f가 (a.b)에서 단조증가함수이고 $a < x_1 < x_2 < b$ 이면 $\lim_{x \to x_1^+} f(x) \le \lim_{x \to x_2^-} f(x)$



pf) $\hat{x} \in (x_1, x_2)$ 를 택하자. $\hat{x} \in (x_1, b)$ 이므로 $f(\hat{x}) \ge \inf_{x \in (x_1, b)} f(x) \overset{따름정리}{=\!=} \lim_{x \to x_1^+} f(x)$
$\hat{x} \in (a, x_2)$ 이므로 $f(\hat{x}) \le \sup_{x \in (a, x_2)} f(x) \overset{따름정리}{=\!=} \lim_{x \to x_2^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x \to x_1^+} f(x) \le f(\hat{x}) \le \lim_{x \to x_2^-} f(x)$ ∎

< 단조함수는 "너무 불연속"일 수는 없다. >

Thm 3.9

f가 (a,b)에서 단조함수이면, 가산개의 점 $x_0 \in (a,b)$를 제외하고는 $\lim_{x\to x_0} f(x)$가 존재하고 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 이다

: 단조함수이면 불연속점 : 가산개

pf) f가 (a,b)에서 단조증가인 경우 [f : 단조증가 $\longrightarrow$ $-f$: 단조감소]

Thm 3.8과 Corollary에 의해 $\lim_{x\to x_0-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\forall x_0 \in (a,b)$

집합 $D = \{ x_0 \in (a,b) \mid \lim_{x\to x_0-} f(x) < \lim_{x\to x_0+} f(x) \}$ 를 정의하자.

$x_0 \notin D$ 이면 $\lim_{x\to x_0-} = f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$ 이므로 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

즉, $x_0 \notin D$ 이면 f는 x_0에서 연속이다.

Claim : D는 셀 수 있는 집합

함수 $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{Q}$ 를 다음과 같이 정의하자. ($F : A \longrightarrow$ 가산집합, F : 1-1 함수이면 A : 가산집합)

$\mathbb{Q}$가 가산집합이므로 φ가 1-1 함수인 것을 보이면 D는 가산집합이다.

$x_0 \in D$에 대해 $\lim_{x\to x_0-} f(x) < r_{x_0} < \lim_{x\to x_0+} f(x)$ 되는 유리수 $r_{x_0} \in \mathbb{Q}$를 택하여 $\varphi(x_0) = r_{x_0}$

$x_1, x_2 \in D$ 이고 $x_1 < x_2$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_1-} f(x) < \lim_{x\to x_1+} f(x)$ 이고 $\lim_{x\to x_2-} f(x) < \lim_{x\to x_2+} f(x)$

위의 보조정리에 의해 $\lim_{x\to x_1+} f(x) \le \lim_{x\to x_2-} f(x)$. 따라서 $\varphi(x_1) = r_{x_1} < \lim_{x\to x_1+} f(x) \le \lim_{x\to x_2-} f(x) < r_{x_2} = \varphi(x_2)$

즉, $\varphi(x_1) \ne \varphi(x_2)$ $\therefore$ φ는 1-1 함수이고, 집합 D는 셀 수 있는 집합이다 ■

Chapter 4. Continuous Functions

4.1 Continuity

Def 4.1 / 연속(continuity)

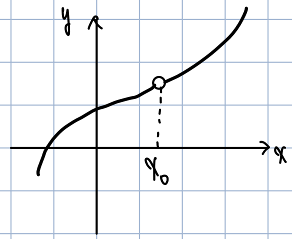
f가 x_0에서 연속 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (극한값 = 함숫값)

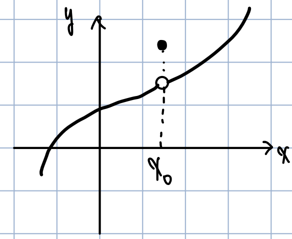
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

즉, ① $x_0 \in \operatorname{dom} f$, 즉 $\exists f(x_0)$ ② $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$, ③ $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ 를 "모두" 만족해야한다. (단 하나라도 만족X $\longrightarrow$ 불연속)

f가 x_0에서 연속X : "f는 x_0에서 불연속(discontinuous)이다. 또는 f는 x_0에서 불연속성(discontinuity)을 갖는다".

f가 x_0에서 제거가능한 불연속성을 갖는다. ⟺ "조건2"가 불만족 → removable discontinuity



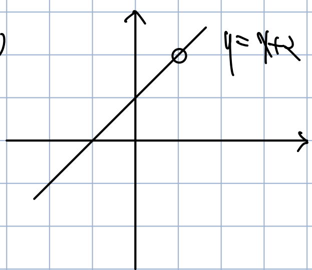


[조건2 만족 (극한○), 조건1 만족X (함숫값X)]

[조건1 만족 (함숫값○), 조건2 만족 (극한○), 조건3 만족X (극한값 ≠ 함숫값)]

ex4.1 / $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ① f는 $x=2$에서 불연속이다. 그 이유? ② $x=2$에서의 불연속성은 제거가능? 그 이유?

Sol)

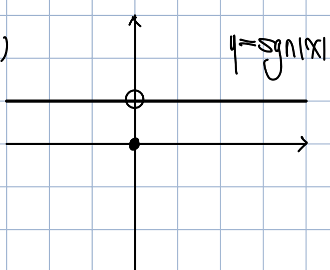


① $2 \notin \mathrm{dom} f$

② Yes, $4 = f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$ 로 정의하면 연속이 된다.

ex4.2 / $f(x) = \mathrm{sgn}|x|$ ① f는 불연속? ② $x=0$에서의 불연속성은 제거가능? 그 이유?

Sol)



① Yes, $x=0$에서 극한값 ≠ 함숫값

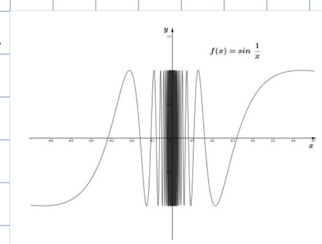
② $x=0$: 제거불가능한 불연속점 $f(0)=1$로 정의하면 f는 $\mathbb{R}$에서 연속이다.

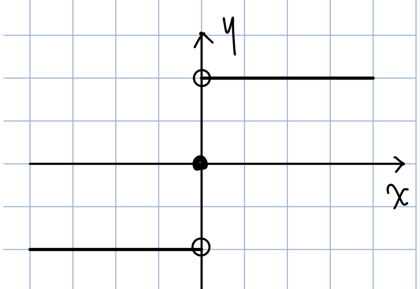
$\lim_{x\to x_0} f(x)$가 존재하지 않는 경우 f의 x_0에서의 불연속성은 좀 더 본질적이다.

① f가 x_0에서 유계가 아님 (ex. $f(x) = 1/x$, $x_0 = 0$)

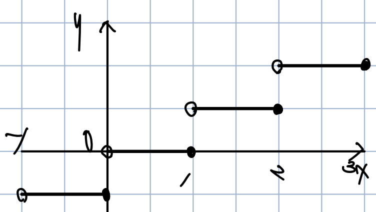
② f가 x_0 근방에서 진동 (ex. $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $x_0 = 0$)

③ x_0에서 f의 값이 'jump' (ex. $h(x) = \mathrm{sgn}(x)$, $x_0 = 0$)





ex 4.3 / $f(x) = [x]$



① $\lim_{x\to 1-} f(x) = 0$이고 $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$이므로 $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$: f는 $x=1$에서 jump 불연속성을 가짐.

② $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to k-} f(x) = k-1$, $\lim_{x\to k+} f(x) = k$ 이므로 $\nexists \lim_{x\to k}$ 이고 f는 $x=k$에서 jump 불연속.

③ f는 정수가 아닌 모든 실수에서 연속이다.

Def 4.2

f가 x_0에서 단순 불연속성(simple discontinuity), (제 1종 불연속성)을 갖는다. ⇔ 제거가능 불연속 또는 점프 불연속
제 2종 불연속성을 갖는다. ⇔ 그 외의 모든 불연속

Thm 3.8

f가 단조함수이면, 각 $x_0 \in (a,b)$에 대해 i) $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 이고 ii) $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 이다.

⟶ f는 x_0에서 제 2종 불연속성을 갖지 않음

Thm 3.9

f가 (a,b)에서 단조함수이면, 가산개의 점 $x_0 \in (a,b)$를 제외하고는 $\lim_{x\to x_0} f(x)$가 존재하고 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 이다

⟶ 모두 점프 불연속 (∵ 단조)

ex 4.4/ $f(x) = \begin{cases} 1 & x: \text{유리수} \\ 0 & x: \text{무리수} \end{cases}$ f는 모든 실수에서 제 2종 불연속임을 보이시오.

Sol) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 이고 $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 이므로 ...

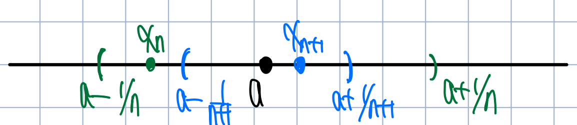
Sol) Thm 3.6: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (극한값)
⇔ $x_n \to a$ 이고 $x_n \neq a$ $(n=1,2,\cdots)$ 인 f의 정의역에 있는 모든 수열 $\{x_n\}$에 대해
$f(x_n) \longrightarrow L$

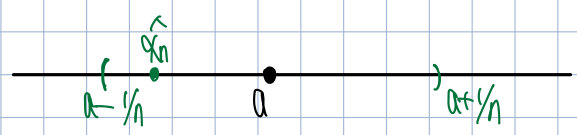
Thm 1.9 & Thm 1.10 ⇒ 유리수 집합과 무리수 집합은 $\mathbb{R}$에서 조밀하다.

x_n을 설정할 수 있는 근거 ⇒ Thm 1.9/ 모든 열린구간 (a,b)는 적어도 하나의 유리수를 포함한다.
Thm 1.10/ 실수집합의 모든 구간 I는 적어도 하나의 무리수를 포함한다.

$x_n \to a$, $x_n \neq 0$ x_n: 유리수 $f(x_n) \longrightarrow 1$

$\hat{x}_n \to a$, $\hat{x}_n \neq a$, $\hat{x}_n$: 무리수 $f(\hat{x}_n) \longrightarrow 0$





$n\in\mathbb{N}$, $x_n \in N^*_{\frac{1}{n}}(a)$ (유리수), $x_{n+1} \in N^*_{\frac{1}{n+1}}(a)$ (유리수)

$n\in\mathbb{N}$, $\hat{x}_n \in N^*_{\frac{1}{n}}(a)$ (무리수)

∴ Thm 3.6에 의해 $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ ■

Thm 4.1

f가 x_0의 적당한 근방에서 정의되었다.
f가 x_0에서 연속 $\Leftrightarrow$ $x_n \to x_0$인 f의 정의역에 있는 모든 수열 $\{x_n\}$에 대해 $f(x_n) \to f(x_0)$

Thm 3.6의 확장 (연속성 → 수열)

Thm 3.6

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ (극한값)
$\Leftrightarrow$ $x_n \to a$이고 $x_n \neq a\ (n=1,2,\cdots)$ 인 f의 정의역에 있는 모든 수열 $\{x_n\}$에 대해 $f(x_n) \to L$

<the fundamental limit theorem의 결과>
Thm 4.2

f, g가 $x=x_0$에서 연속이면 $f+g$, $f\cdot g$도 x_0에서 연속, $\frac{f}{g}$는 $g(x_0)\neq 0$이면 x_0에서 연속

모든 다항함수 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$은 모든 실수 x_0에서 연속
그렇다면 $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$의 연속성은? : $r(x)$는 $\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)\neq 0\}$에서 연속이다.

Thm 4.3 / 합성함수의 연속성

f가 x_0에서 연속이고, g가 $f(x_0)$에서 연속이면, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$는 x_0에서 연속이다.

pf) $\forall \varepsilon>0$ 이 주어졌다하자.

g가 $f(x_0)$에서 연속 ⇒ $|y-f(x_0)|<\eta \Rightarrow |g(y)-g(f(x_0))|<\varepsilon$이 되는 $\eta>0$ 존재.
f가 x_0에서 연속 ⇒ $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\eta$인 $\delta>0$ 존재.
따라서 $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon$ 이 된다 ■

ex 4.5 / $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 의 연속성을 조사하시오.

Sol) 함수 $1/x$는 $x\neq0$인 모든 실수에서 연속, 함수 $\sin x$는 모든 실수에서 연속
Thm 4.3(합성함수의 연속성)에 의해 $f(x)$는 $x\neq0$인 모든 실수에서 연속.
그렇다면 $x=0$에서 $f(x)$의 연속성은? ($\exists \lim_{x\to0} f(x)=f(0)=0$)
수열 $x_n=\frac{2}{n\pi}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\to\infty$. $x_n\to0$ ($x_n>0$) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(\sin\frac{n\pi}{2})$ → $\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n: \text{짝수} \\ 1 & n=4m+1,\ m\in\mathbb{N} \\ -1 & n=4m+3\ \ m\in\mathbb{N}\end{cases}$

∴ $\nexists \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ → x_0에서 불연속 ■

ex 4.6 / $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ 의 $x=0$ 에서의 연속성을 조사하시오.

Sol) Thm 4.2와 Thm 4.3에 의해 $f(x)$는 $x=0$ 에서 불연속이다.
$\sin(1/x)$ 은 $x\neq 0$ 인 모든 실수에서 연속, x는 모든 실수에서 연속. $\longrightarrow$ $x\sin 1/x$ 은 $x\neq 0$ 인 모든 실수에서 연속
if we extend f by defining $f(0)=0$, then f is conti. at $x=0$

Def 4.3 / 우연속, 좌연속

f가 x_0에서 우연속(right-continuous at x_0) $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$
f가 x_0에서 좌연속(left-continuous at x_0) $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$

f가 x_0에서 우연속이기 위해서는 $[x_0, x_0+\eta)$에서 정의되어야한다. $(\eta>0)$
f가 x_0에서 좌연속이기 위해서는 $(x_0-\eta, x_0]$에서 정의되어야한다. $(\eta>0)$

Thm 3.7의 연장선으로 f가 x_0에서 연속 $\Leftrightarrow$ f는 x_0에서 좌, 우연속

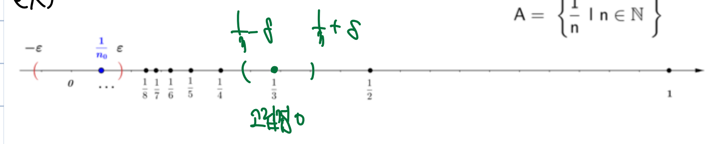
f가 x_0에서 연속 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\underbrace{\lim_{x\to x_0} x}_{= x_0})$ ※ 극한과 함숫값의 순서를 바꿔도 괜찮. $f(\lim) = \lim f$

고립점에서의 연속성

Def / 고립점(isolated point)

점 $x_0 \in E$가 E의 고립점 $\Leftrightarrow \exists\delta>0$. s.t. $|x-x_0|<\delta$, $x\in E$가 $x=x_0$뿐이다.

ex)



$\delta = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2} > 0$ 라 하자.
$\{\frac{1}{n}\} \in N_\delta(\frac{1}{n}) \cap A$

Def / 고립점에서의 연속성

f가 x_0에서 연속 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$. s.t. $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
여기에서 x_0가 고립점이면 즉, $x_0 \in \mathrm{dom} f$, 고립점 $\Rightarrow |f(x_0)-f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

예) $E=\{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots\}$ 이고 $f: E\to\mathbb{R}$ 가 $f(x)=x$로 정의되었을 때 ① $x_0=0\in E$에서 f의 연속성을 조사하시오.
② $\frac{1}{n}\in E$에서 f의 연속성을 조사하시오.

Sol) ② : $\frac{1}{n}$은 E의 고립점이므로 f는 $\frac{1}{n}$에서 연속이다.

② 임의의 양의 실수 ε에 대하여 $\frac{1}{N} < \varepsilon$ 이 되는 충분히 큰 자연수 N을 택하여 $\delta = \frac{1}{N} > 0$로 놓으면
$|x-0| < \delta$ 가 성립하면서 $x \in E$인 점들의 집합 $= \{0, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \cdots\}$ $(\because \frac{1}{N} > \frac{1}{N+1} > \frac{1}{N+2} \cdots)$
$\therefore |x-0| < \delta,\ x \in E$ 이면 $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x| \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$

4.2 Properties of Continuous Functions

Lemma 1 / f가 x_0에서 연속이면, f는 x_0에서 유계. 즉, f가 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$에서 유계인 $\delta > 0$가 존재한다.

pf) f가 x_0에서 연속이면 $\varepsilon = 1$에 대하여, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 이면 $|f(x) - f(x_0)| < 1$이 되는 $\delta > 0$가 존재한다.
따라서 삼각부등식에 의해 $|f(x)| - |f(x_0)| < 1$, $|f(x)| < 1 + |f(x_0)|$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ∎

Lemma 2 / f가 x_0에서 오른쪽 연속이면 f가 $[x_0, x_0+\delta)$에서 유계인 $\delta > 0$가 존재
f가 x_0에서 왼쪽 연속이면 f가 $(x_0-\delta, x_0]$에서 유계인 $\delta > 0$가 존재

Thm 4.4

f가 유계닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면, f는 $[a, b]$에서 유계.

pf) Lemma 1, 2에 의해 f는 각 $x \in [a, b]$에서 유계. $[a, b]$는 컴팩트집합이므로,
Thm 3.2 (f가 모든 점 $x_0 \in A$에서 유계이고 A가 컴팩트집합이면 f는 A에서 유계이다.)에 의해 f는 $[a, b]$에서 유계 ∎

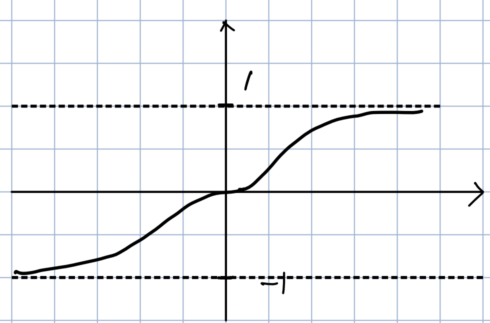
Corollary / f가 $\mathbb{R}$에서 연속이면, f는 모든 유계집합 $B \subset \mathbb{R}$에서 유계이다. 연속함수 f는 모든 유계구간 I에서 유계이다.

〈연속함수의 최대값, 최소값〉 : 함수가 최대, 최솟값을 갖는 정의역의 원소를 찾는 것이 중요!

ex 4.8 / $f(x) = x^2$ on $(0, 2)$에서 연속이다.

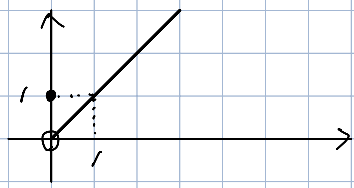
$M = \sup_{x \in (0,2)} x^2 = 4$, $m = \inf_{x \in (0,2)} x^2 = 0$ $\Rightarrow$ f는 $(0, 2)$에서 유계.
하지만 f의 정의역인 $(0, 2)$에 $f(x_1) = 4$, $f(x_2) = 0$ 인 x_1과 x_2가 존재하지 않는다.

ex 4.9 / $f(x) = \frac{x|x|}{1+x^2}$ on $\mathbb{R}$



f는 $\mathbb{R}$에서 연속이고 유계이다.
$M = \sup f(x) = 1$, $m = \inf f(x) = -1$ 하지만
f의 정의역인 $\mathbb{R}$에 $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$을 만족하는
x_1과 x_2가 존재하지 않는다

ex 4.10 / $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1] \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



cf) ex 4.8, ex 4.9, ex 4.10

	정의역	연속성	함수의 유계성
4.8	유계 열린구간	○	○
4.9	무한구간	○	○
4.10	유계 닫힌구간	×	○

① f의 [0,1]에서의 연속성?
⟶ $x=0$ 에서 불연속

② [0,1]에서 f는 유계함수인가?
⟶ $M = \sup_{x\in[0,1]} f(x) = 1$ $\quad m = \inf_{x\in[0,1]} f(x) = 0$

③ $f(x) = \inf_{x\in[0,1]} f(x)$인 x가 [0,1]에 존재한가?
⟶ No

~~Thm 4.5~~ / 최대·최소값 정리 (Extreme-value theorem)

f가 [a,b]에서 연속이면 모든 $x\in[a,b]$에 대해 $\underset{m}{f(x_2)} \le f(x) \le \underset{M}{f(x_1)}$이 성립하는 x_1과 x_2가 정의역 [a,b]에 존재한다. ; 즉 $M = f(x_1)$ 이고 $m = f(x_2)$ 이다.

pf) f가 [a,b]에서 연속 $\xRightarrow{\text{Thm 4.4}}$ f는 [a,b]에서 유계 $\Longrightarrow$ $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ 존재.
M을 함숫값으로 갖는 정의역의 원소가 없다고 가정하자. (Suppose M is not assumed)
그러면 $\forall x \in [a,b]$, $f(x) < M$이 되어 다음과 같은 함수 g를 정의할 수 있다. $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1/(M - f(x))$
$g(x) > 0$, $\forall x\in[a,b]$ 이다. Thm 4.4에 의해 $\forall x\in[a,b]$, $g(x) \le k$가 되는 실수 $k>0$가 존재한다
$\forall x\in[a,b]$, $k \ge g(x) = 1/(M-f(x))$ $\Rightarrow M - f(x) \ge 1/k > 0$ $\Rightarrow f(x) \le M - 1/k$ 이는 모순이다! $(\because M = \sup_{x\in[a,b]} f(x))$
상한이 되어버림 ↯
그러므로, $f(x_1) = M$인 $x_1\in[a,b]$가 존재한다.

마찬가지로, Suppose m is not assumed 하고 보조함수 $h(x) = 1/(f(x) - m)$ 으로 설정하여 증명하면 된다 ∎

Lemma 3 / 한 점에서 양수 ⟶ a 적당한 구간에서 양수

f가 x_0에서 연속이고 $f(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) > 0$ 인 $\delta > 0$ 가 존재
f가 x_0에서 연속이고 $f(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f(x) < \frac{1}{2}f(x_0) < 0$ 인 $\delta > 0$ 가 존재

pf) "x_0에서 f가 연속이다."의 정의를 사용할 때 $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$ 로 하면,
$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0)$ 이 되는 $\delta > 0$가 존재
$-\frac{1}{2}f(x_0) < f(x) - f(x_0) < \frac{1}{2}f(x_0) \Rightarrow \frac{1}{2}f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2}f(x_0)$ $\quad \therefore 0 < \frac{1}{2}f(x_0) < f(x)$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ∎

Lemma 4

f가 x_0에서 우-연속이고 $f(x_0) > 0$ 이면 $\forall x\in[x_0, x_0+\delta)$, $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) > 0$ 인 $\delta > 0$가 존재
f가 x_0에서 우-연속이고 $f(x_0) < 0$ 이면 $\forall x\in[x_0, x_0+\delta)$, $f(x) < \frac{1}{2}f(x_0) < 0$ 인 $\delta > 0$가 존재
f가 x_0에서 좌-연속이고 $f(x_0) > 0$ 이면 $\forall x\in(x_0-\delta, x_0]$, $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) > 0$ 인 $\delta > 0$가 존재
f가 x_0에서 좌-연속이고 $f(x_0) < 0$ 이면 $\forall x\in(x_0-\delta, x_0]$, $f(x) < \frac{1}{2}f(x_0) < 0$ 인 $\delta > 0$가 존재

Thm 4.6 / 중간값 정리 (Intermediate-value theorem)

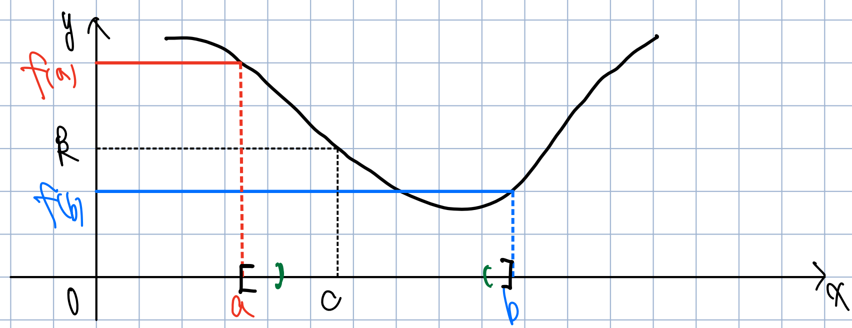
f가 $[a,b]$에서 연속이고 k가 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 값이면, $f(c)=k$인 $c\in(a,b)$가 존재한다.

pf) $f(b)<k<f(a)$인 경우

$\forall x\in[a,b]$, $g(x)=f(x)-k$로 정의하자. 그러면 $g(a)=f(a)-k>0$, $g(b)=f(b)-k<0$ 이다.
$c=\sup\{x\in[a,b]\mid g(x)>0\}$로 정하자. (유계닫힌구간 $\rightarrow$ b로 위로 유계 $\rightarrow$ sup 존재)

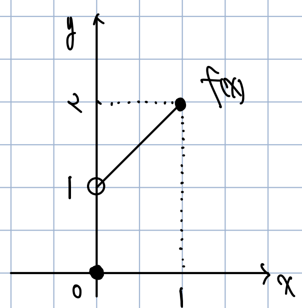
g가 $[a,b]$에서 연속이므로 Lemma 4에 의해 $g(x)>0,\ \forall x\in[a,a+\delta_1),\ \delta_1>0$
$g(x)<0,\ \forall x\in(b-\delta_2,b],\ \delta_2>0$ $\longrightarrow$ $a<c<b$

또한 $c<x\le b$ 이면 $g(x)\le 0$ 이다. ($\because c=\sup\{x\in[a,b]\mid g(x)>0\}$)
그러므로 $\lim_{x\to c+}g(x)\le 0$ 이고 g의 연속성에 의해 $g(c)=\lim_{x\to c+}g(x)\le 0$ 이다.
$x_n<c$ 이면서 $x_n\to c$ 이고 $g(x_n)>0$ 인 수열 $\{x_n\}$을 $[a,b]$에서 택하자. ($c=\sup\{x\in[a,b]\mid g(x)>0\}$ 때문에 저런 $\{x_n\}$은 선택할수있다.)
g는 c에서 연속이므로 $g(x_n)\to g(c)$. 따라서 $g(c)\ge 0$ 이고 $g(c)\le 0$ 이므로 $g(c)=0$ 이다.
즉, $f(c)=k$ 이다. ■



ex 4.1 / 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 는 중간값 정리의 결론을 만족하지 않음을 보이시오.

Sol)



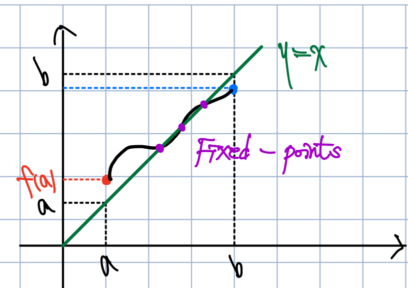
f는 $[0,1]$에서 유계이지만 연속은 아니다. ($x=0$에서 불연속 $\because \lim_{x\to 0+}f(x)\neq f(0)$)
$M=2$ 이고 $m=0$; $f(0)=0$ 이고 $f(1)=2$ 이지만 예를들어 $f(c)=1$ 이 되는 $c\in(0,1)$가 존재X

<중간값 정리의 첫 번째 응용 : 고정점 정리(Fixed-Point theorem)>

Thm 4.7 / 고정점 정리 (Fixed-Point Theorem)

f가 $[a,b]$에서 연속이고, $\forall x\in[a,b]$에 대해 $f(x)\in[a,b]$이면, f는 고정점을 갖는다.
즉, $f(x_0)=x_0$ 가 되는 $x_0\in[a,b]$가 존재한다.

pf) f(a)=a OR f(b)=b 인 경우 !! (고정점 정리의 가정 $a \le x \le b \longrightarrow a \le f(x) \le b$)



f(a)>a 이고 f(b)<b 인 경우

$x \in [a,b]$에 대해 $g(x)=f(x)-x$로 정의하자.
그러면 $g(a)=f(a)-a>0$ 이고 $g(b)=f(b)-b<0$ 이고 g는 $[a,b]$에서 연속이다.
0은 $[a,b]$에서 함수 g의 중간값이므로 중간값 정리에 의해 $g(x_0)=0$ 이 되는 $x_0 \in (a,b)$가 존재한다. 그러면 $f(x_0)=x_0$ 이다 ■

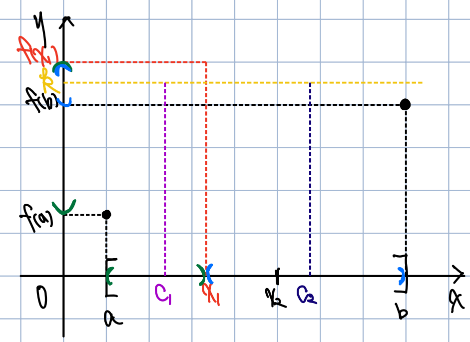
Thm 4.8

f가 $[a,b]$에서 ① 1-1 이고 ② 연속이면, f는 $[a,b]$에서 증가함수이거나 감소함수이다.

pf) f는 1-1 이므로 $f(a) \ne f(b)$이다.

f(a)<f(b) 인 경우 : 만일 f가 $[a,b]$에서 증가함수가 아니라면... $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1) \ge f(x_2)$인 $x_1, x_2 \in [a,b]$가 존재. f는 1-1 이므로 $f(x_1)>f(x_2)$ 이어야 한다.

(a) $f(x_1)>f(b)$인 경우
$k \in (f(b), f(x_1))$을 택하자. 그러면 $k \in (f(a), f(x_1))$ 이므로 중간값 정리에 의해,
$f(c_1)=k$가 되는 $c_1 \in (a, x_1)$이 존재하고 $f(c_2)=k$가 되는 $c_2 \in (x_1, b)$가 존재한다.
그런데 $c_1 \ne c_2$ 이므로 f가 1-1 이라는 가정에 모순이 된다. ↯



(b) $f(x_1)<f(b)$인 경우
$k \in (f(x_2), f(x_1))$을 택하자. 그러면 $k \in (f(x_2), f(b))$ 이므로 중간값 정리에 의해,
$f(c_1)=k$가 되는 $c_1 \in (x_1, x_2)$가 존재하고 $f(c_2)=k$가 되는 $c_2 \in (x_2, b)$가 존재한다.
$c_1 \ne c_2$ 이므로 f가 1-1 이라는 가정에 모순이 된다. ↯

따라서 f는 $[a,b]$에서 증가함수이다 ■

f(a)<f(b) 인 경우 : 감소함수를 보이게 됨.

Corollary of thm 4.6 / f가 $[a,b]$에서 상수함수가 아닌 연속함수이면, f의 치역은 $[m,M]$이다.
이 때 $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$

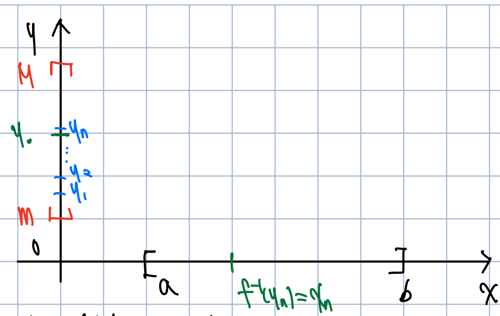
pf) Thm 4.4 ⇒ ∃ m, M (연속 → 유계 → 완비성 공리)
Thm 4.5 ⇒ $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ with $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$, and $m<M$
Thm 4.6 ⇒ $\forall y \in (m,M)$, $\exists x \in (x_1, x_2)$ s.t. $f(x)=y$

∴ $[m,M]$은 f의 치역이다 ■

f가 A에서 1-1 함수이면, f(A)에서 정의된 함수 f^{-1}가 존재하고, f^{-1}는 f(A)에서 1-1 함수이며 f^{-1}의 치역은 A이다.

Thm 4.9

f가 [a.b]에서 1-1이고 연속이면, f^{-1}는 [m.M]에서 연속이다.



pf) $f^{-1}:[m.M]\longrightarrow[a.b]$는 잘 정의된 (well-defined) 1-1 함수이다.

임의의 $y_0\in[m.M]$를 택하자. 수열 $\{y_n\}$을 $y_n\longrightarrow y_0$인 [m.M]에 있는 수열이라 하자.

→ 연속성: 점별성질이므로 정의역 전체에서 연속성을 보이기 위해 정의역의 임의의 원소를 택하여 연속임을 보이자.

Claim: $f^{-1}(y_n)\longrightarrow f^{-1}(y_0)$ (f^{-1}이 y_0에서 연속임을 보이기 위함)

$f^{-1}(y_n)=x_n$, $n=1,2,3,\cdots$ $f^{-1}(y_0)=x_0$로 놓고 $x_n\not\to x_0$라 가정하자.

그러면 적당한 $\varepsilon>0$에 대해, 무한개의 자연수 n에 대해 $|x_n-x_0|\ge\varepsilon$이 된다.

$|x_n^*-x_0|\ge\varepsilon$이 되는 $\{x_n\}$의 부분수열 $\{x_n^*\}$을 택하자.

$\{x_n^*\}$는 유계수열이므로, 수열에 관한 B-W 정리에 의해 (유계인 수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.) $\{x_n^*\}$는 수렴하는 부분수열을 갖는다.

그 수열을 $\{\hat{x}_n\}$이라 하자. $|\hat{x}_n-x_0|\ge\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$ 이고 $\hat{x}_n\longrightarrow c\in[a.b]$, $c\ne x_0$ 이다. ($\because |\hat{x}_n-x_0|\ge\varepsilon$)

c에서 f는 연속이므로 $f(\hat{x}_n)\longrightarrow f(c)$

그런데 $\{f(\hat{x}_n)\}$은 $\{f(x_n)\}=\{y_n\}$의 부분수열이고 $y_n\longrightarrow y_0=f(x_0)$이다. $\therefore f(c)=f(x_0)$

이는 f가 1-1 함수라는 정리의 가정에 모순이 되므로 ($c\ne x_0$ 인데 $f(c)=f(x_0)$) $x_n\longrightarrow x_0$ 여야 한다.

즉 $f^{-1}(y_n)\longrightarrow f^{-1}(y_0)$ 그러므로 f^{-1}는 [m.M]에서 연속이다. ■

f: [a.b]에서 1-1 연속

$\xRightarrow{\text{Thm 4.8}}$ f: [a.b]에서 증가함수 ⇒ $m=f(a)$, $M=f(b)$

⇒ f^{-1}는 $[f(a).f(b)]$에서 1-1 연속

f: [a.b]에서 감소함수 ⇒ $m=f(b)$, $M=f(a)$

⇒ f^{-1}는 $[f(b).f(a)]$에서 1-1 연속

Def

[a.b]에서 정의된 함수 f가 [a.b]에서 중간값 성질을 만족한다.

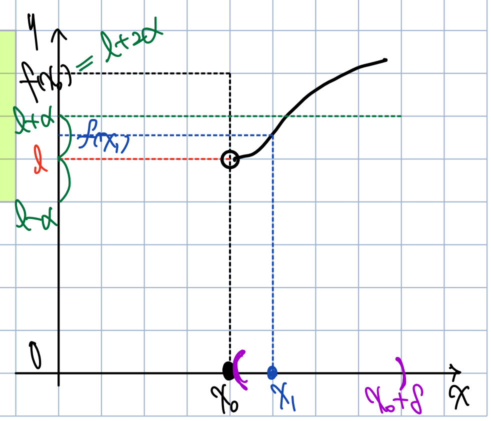
⇔ $x_1<x_2$인 모든 $x_1,x_2\in[a.b]$와 $f(x_1)$과 $f(x_2)$ 사이의 모든 k에 대하여 $f(c)=k$가 되는 $c\in(x_1,x_2)$가 존재한다.

Thm 4.6은 함수 f가 유계닫힌구간에서 연속 ⟶ IVP 만족. 역은 성립하지 않는다.

[반례] $f(x)=\begin{cases}1/x & x\ne0,\ x\in[-1.1]\\ 0 & x=0\end{cases}$ 중간값 성질은 만족하지만 $x=0$에서 제2종 불연속점을 가진다.

Thm 4.10

f가 [a.b]에서 중간값 성질을 만족하면, f는 [a.b]에서 단순불연속점을 갖지 않는다.



pf) f가 $x_0\in[a.b]$에서 단순불연속점을 갖는다 하자.

그러면 $\lim_{x\to x_0+}f(x)\ne f(x_0)$ 또는 $\lim_{x\to x_0-}f(x)\ne f(x_0)$ (또는 둘 다)

$\lim_{x\to x_0+}f(x)=l<f(x_0)$인 경우: x_0는 f의 단순 불연속점이므로 l는 실수이다.

$\alpha = \frac{1}{2}(f(x_0) - l) > 0$ 라 하자.

그러면 $x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \alpha$ 가 되는 $\delta > 0$ 가 존재. $\Rightarrow f(x) < l + \alpha$

한편 $f(x_0) = l + 2\alpha > l + \alpha$ 이다. $x_1 \in (x_0, x_0+\delta)$ 이면 $f(x_1) < l+\alpha$ $y \in (l+\alpha, f(x_0)) \subset (f(x_1), f(x_0))$ 를 택하자.

그러면 $f(x) = y$ 가 되는 $x \in (x_0, x_1)$ 이 존재하지 않는다. ($\because x \in (x_0, x_1) \Rightarrow f(x) < l+\alpha$)

따라서 f 는 $[a, b]$ 에서 중간값 성질을 만족하지 못하게 된다. ∎ 대우명제

Thm 4.11

f 가 $[a, b]$ 에서 1-1 이고, 중간값 성질을 만족하면, f 는 $[a, b]$ 에서 연속이다.

pf)