

Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Книга 1

Начала

Часть 2

**Киев
Освіта України
2012**

А. Е. Кононюк Обобщенная теория моделирования

УДК 51 (075.8)

ББК В161.я7

К 213

Рецензент: *Н.К.Печурин* - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К65 Обобщенная теория моделирования. Начала. К.1.Ч.2

К.4:"Освіта України", 2012. - 708 с.

ISBN 978-966-7599-50-8

Настоящая работа является систематическим изложением обобщенной теории моделирования. Основное внимание уделяется идейным основам теории моделирования, их сравнительному анализу и примерам использования. Рассмотрен значительный круг задач моделирования — от общих задач моделирования до частных задач моделирования, а именно: моделирование объектов по выполняемым функциям, по составу, по структуре, по форме, по организации, по управлению. Обсуждается методика постановки и решения проблем моделирования. Рассматриваются средства математического описания объектов и процессов моделирования. Описываются системы автоматизированного моделирования.

Работа предназначена для магистров, аспирантов, докторантов, инженеров, экономистов, статистиков, вычислителей и всех тех, кто сталкивается с задачами моделирования, прежде всего, математического.

ББК В161.я7

ISBN 978-966-7599-50-8

©А.Е. Кононюк, 2012

Оглавление

Введение.....	9
1.1. Введение в теорию структурных чисел.....	15
1.1.1. Основные понятия.....	15
1.1.2. Свойства структурных чисел.....	15
1.1.3. Геометрическое изображение структурного числа.....	27
1.1.4. Дополнительное структурное число и геометрическое обратное изображение.....	30
1.1.5. Алгебраическая производная и обратная производная структурного числа.....	32
1.1.6. Детерминантная функция структурного числа.....	35
1.1.7. Функция совпадения структурного числа.....	36
1.1.8. Понятие ряда и последовательности структурных чисел.....	40
1.2. Анализ моделей систем методом структурных чисел.....	43
1.2.1. Введение.....	43
1.2.2. Анализ моделей пассивных цепей.....	44
1.2.2.1. Анализ модели пассивного четырехполюсника.....	44
1.2.2.2. Анализ модели пассивного двухполюсника.....	61
1.2.2.3. Анализ моделей произвольных цепей.....	63
1.2.3. Анализ моделей активных цепей.....	68
1.2.3.1. Введение.....	68
1.2.3.2. Анализ модели цепи, содержащей один зависимый источник напряжения.....	68
1.2.3.3. Анализ модели цепи, содержащей два зависимых источника напряжения.....	73
1.2.3.4. Формулы для расчета модели цепи, содержащей N зависимых источников напряжения.....	78
1.3. Анализ моделей электрических блок-схем методом структурных чисел.....	90
1.3.1. Введение.....	90
1.3.2. Детерминантная функция блок-схемы.....	92
1.3.3. Входной импеданс блок-схемы.....	100
1.3.4. Коэффициент передачи напряжения блок-схемы.....	108
1.3.5. Схемы замещения.....	129
1.3.6. Преобразование активных блок-схем.....	135
1.4. Синтез моделей электрических цепей методом структурных чисел.....	138
1.4.1. Введение.....	138
1.4.2. Синтез модели пассивного двухполюсника.....	140
1.4.3. Синтез модели пассивного RLC-четырёхполюсника.....	146
1.4.3.1. Предварительные сведения.....	146
1.4.3.2. Определение знаков слагаемых функции совпадения.....	153

1.4.3.3. Синтез модели четырехполюсника на ЦВМ.....	158
2. Введение в геометрические методы моделирования.....	212
2.1. Основы графического представления информации.....	215
2.1.1. Введение.....	215
2.1.2. Двумерное пространство (плоскость).....	218
2.1.3. Вычисление периметров и площадей.....	223
2.1.4. Геометрические преобразования на плоскости.....	223
2.1.5. Геометрические преобразования в трехмерном пространстве.....	226
2.1.6. Параллельные и перспективные проекции.....	230
2.1.7. Моделирование объектов.....	236
2.2. Кривые и поверхности.....	237
2.2.1. Основные зависимости.....	238
2.2.2. Схемы получения решений.....	240
2.2.3. Условия, учитываемые при поиске решения.....	242
2.3. Введение в методы моделирования геометрических объектов.....	245
2.3.1. Объемное моделирование.....	245
2.3.2. Кривые.....	250
2.3.2.1. Основные понятия.....	250
2.3.2.2. Определение положения точки.....	253
2.3.2.3. Годографы.....	268
2.3.2.4. Построение характеристического многоугольника.....	273
2.3.2.5. Интерполяция полиномами.....	291
2.3.2.6. Сглаживание.....	304
2.3.2.7. Аппроксимация.....	316
2.3.2.8. Кривые на плоскости и в пространстве.....	320
2.3.3. Поверхности.....	325
2.3.3.1. Характеристические сетки.....	325
2.3.3.2. Определение положения точки.....	326
2.3.3.3. Годографы.....	336
2.3.3.4. Линии видимого контура.....	339
2.3.3.5. Определение характеристической сетки.....	341
2.3.3.6. Тензорное произведение.....	251
2.3.3.7. Методы интерполяции для произвольно расположенных точек.....	355
2.3.3.8. Автоматическое разбиение на треугольники.....	361
2.3.4. Параметрические преобразования.....	364
2.3.4.1. Кривые.....	364
2.3.4.2. Поверхности.....	371
2.3.4.3. Обобщенный подход к деформациям.....	376
2.3.5. Сшивка.....	379
2.3.5.1. Общий случай.....	379

2.3.5.2. Специальные случаи.....	386
3. Введение в моделирование геометрических объектов методами полюсов.....	411
3.1. Основная задача теории полюсов.....	412
3.1.1. Введение.....	412
3.1.2. Основные свойства полюсов.....	414
3.1.3. Особенности применения теории полюсов к моделированию кривых и поверхностей.....	415
3.2. Симметричные полярные формы.....	416
3.2.1. Полярная форма параметрического уравнения.....	416
3.2.2. Алгоритм включения новых полюсов.....	418
3.2.3. Производные полярной формы.....	419
3.3. Символьный анализ.....	420
3.3.1. Разбиение поверхности на прямоугольники.....	420
3.3.2. Разбиение поверхности на треугольники.....	420
3.3.3. Связь со сплайнами.....	421
3.3.4. Предполагаемые обобщения.....	424
3.4. Индексное представление полюсов.....	425
3.4.1. Последовательности индексов.....	425
3.4.2. Подполюсы.....	426
3.4.3. Увеличение степени.....	426
3.4.4. Включение индекса.....	427
3.4.5. Переход к следующей дуге.....	428
3.4.6. Непрерывность.....	429
3.4.7. Простые полюсы.....	429
3.4.8. Треугольная таблица разностей простых полюсах.....	430
3.4.9. Алгебраическое разложение дуги.....	432
3.4.10. Еще раз о непрерывности.....	432
3.4.11. Полюсы и сплайны.....	433
3.4.12. Прогрессивные полюсы.....	434
3.4.13. Обобщенные полюсы.....	434
3.5. Использование полюсов в расчетах.....	435
3.5.1. Операции с простыми полюсами.....	435
3.5.2. Свойства простых полюсов.....	436
3.5.3. Пример вычисления пятых степеней целых чисел.....	436
3.5.4. Бета- и гамма-функции.....	438
3.5.5. Пример вычислений значений полинома.....	438
3.5.6. Графические построения.....	440
3.5.7. Представление поверхностей с помощью полюсов.....	442
3.5.7.1. Треугольные элементы и зависимые переменные.....	442
3.5.7.2. Прямоугольные элементы и независимые переменные.....	443
3.5.8. Пример применения теории полюсов.....	443

3.6. Полярная форма интерполяционных полиномов Лагранжа.....	445
3.6.1. Увеличение степени интерполяционного полинома.....	445
3.6.2. Другие формы представления интерполяционных полиномов Лагранжа.....	446
3.6.3. Степень восстановления.....	448
3.6.4. Связь полюсов с нечетными <i>B</i> -сплайнами.....	449
3.7. Характеристики восстановленных кривых.....	450
3.7.1. Полярная форма интерполяционной формулы Лагранжа.....	450
3.7.2. Вычисление обобщенных полюсов дуги.....	452
3.7.3. Определение простых полюсов дуги.....	454
3.7.4. Вычисления простых полюсов дуги.....	457
3.8. Интерполяция со сглаживанием.....	458
3.8.1. Проверка степени восстановления.....	458
3.8.2. Проверка непрерывности и отклик на единичный импульс.....	460
3.8.3. Число удволенных условий непрерывности.....	463
3.8.4. Сравнение со сплайнами.....	464
3.8.5. Примеры различных функциональных зависимостей.....	465
3.8.6. Пример других характеристик интерполяции.....	473
3.9. Применение теорий полюсов.....	475
3.9.1. Вычисление оптимальной характеристики.....	475
3.9.2. Математическое напряжение.....	477
3.9.3. Кубическая интерполяция с равномерным разбиением.....	477
3.9.4. Кубическая интерполяция с неравномерным разбиением.....	478
3.9.5. Интерполяция полиномами четвертой степени.....	480
3.9.6. Интерполяция полиномами пятой степени.....	482
3.9.7. Замечания о характеристиках восстановленных кривых.....	484
3.9.8. Сглаживание, определенное с помощью метода наименьших квадратов.....	485
3.9.9. Сравнение методов сглаживания.....	484
3.9.10. Интерполяция поверхностей с помощью обобщенных полюсов.....	486
4. Введение в аналоговое моделирование.....	489
Введение.....	489
4.1. Аналоговое моделирование на электронных моделях.....	499
4.1.1. Решающий усилитель модели и выполняемые им операции.....	499
4.1.2. Примеры решения простейших уравнений.....	504
4.1.3. Переход от реальных переменных к машинным переменным.....	507
4.1.4. Набор на модели функциональных зависимостей.....	509
4.1.5. Моделирование удара.....	513
4.2. Метод структурного математического моделирования.....	515
4.2.1. Описание метода.....	515

4.2.2. Схемы элементарных моделей основных типовых звеньев.....	518
4.2.3. Преобразования структурных схем.....	529
4.2.4. Составление блок-схемы электронной модели.....	536
4.2.5. Выбор масштабных коэффициентов.....	540
4.3. Моделирование магнитно-связанных контуров.....	544
4.3.1. Моделирование магнитно-связанных контуров с учетом рассеяния.....	544
4.3.2. Моделирование магнитно-связанных контуров с приближенным учетом рассеяния.....	551
4.3.3. Моделирование процессов возбуждения с учетом вихревых токов.....	556
4.4. Моделирование электрических машин постоянного тока.....	561
4.4.1. Общие сведения.....	561
4.4.2. Структурная схема генератора постоянного тока.....	561
4.4.3. Структурная схема двигателя постоянного тока.....	568
4.5. Моделирование стабилизирующих устройств.....	572
4.5.1. Общие принципы моделирования стабилизирующих устройств.....	572
4.5.2. Структурная схема и схема электронной модели стабилизирующего трансформатора напряжения.....	573
4.5.3. Структурная схема стабилизирующего трансформатора тока.....	583
4.5.4. Структурная схема стабилизирующего моста.....	586
4.5.5. Структурная схема дифференцирующего контура RC , подключенного к обмотке управления усилителя.....	587
4.6. Моделирование синхронных машин.....	589
4.6.1. Общие принципы моделирования электрических машин переменного тока.....	589
4.6.2. Уравнения идеализированной синхронной машины.....	590
4.6.3. Система относительных единиц.....	598
4.6.4. Учет насыщения синхронной машины.....	603
4.6.5. Структурная схема синхронного генератора.....	605
4.6.6. Структурная схема синхронного двигателя.....	608
4.6.7. Структурная схема синхронного реактивного двигателя.....	611
4.6.8. Определение постоянных коэффициентов структурной схемы.....	613
4.6.9. Структурная схема параллельной работы синхронных машин.....	617
4.6.10. Структурная схема шагового синхронного двигателя.....	621
4.7. Моделирование асинхронных двигателей.....	625

4.7.1. Структурная схема двухфазного асинхронного двигателя.....	625
4.7.2. Упрощенная структурная схема асинхронного двигателя, основанная на моделировании семейства.....	631
4.8. Моделирование следящих систем.....	635
4.8.1. Применение математического моделирования для исследования следящих систем.....	635
4.8.2. Моделирование следящей системы с двигателем постоянного тока и непрерывным управлением.....	636
4.8.3. Моделирование следящих систем с учетом люфта в передачах и их упругих деформаций.....	646
4.8.4. Моделирование дискретных следящих систем.....	649
4.9. Моделирование манипуляционных систем на АВМ.....	656
4.9.1. Моделирование приводов манипуляторов на АВМ.....	657
4.9.2. Моделирование приводов и управляемого движения манипуляторов на ЭВМ.....	662
4.10. Гибридные вычислительные системы.....	672
4.10.1. Моделирование систем на гибридных вычислительных системах.....	672
4.10.2. Блок-схема комплексной аналого-цифровой вычислительной установки.....	677
4.10.3. Моделирование процессов управления механизмами клетки блюминга.....	681
Литература.....	697

Введение

Во второй и третьей частях «Начал» речь пойдет о различных направлениях математического моделирования: моделирование методами структурных чисел, геометрическое моделирование, аналоговое моделирование, статистическое моделирование, имитационное моделирование и др.

Можно утверждать, что моделирование всегда имеет целевой характер, даже когда единственной целью является удовлетворение собственного любопытства. Поэтому в такой ситуации **цель моделирования можно обобщенно сформулировать как получение информации, облегчающей процессы принятия адекватных решений в различных сферах научной и практической деятельности.** Этим подчеркивается, что окончательные решения всегда принимают субъекты. Отметим, что на протяжении веков они довольно успешно делали это без каких-либо математических моделей. Хотя модель в виде определенного плана всегда формируется на уровне сознания (или может быть даже подсознания) прежде, чем человек начинает какие-либо конкретные действия.

Как мы уже говорили, математические модели должны строиться не только с точки зрения наиболее адекватного отражения сущности моделируемых процессов и явлений, но и с учетом особенностей мышления человека, его конкретных целей (несколько иные требования предъявляются к моделям, используемым в системах автоматического управления, однако проблемы автоматизации в данной работе не рассматриваются).

Поскольку принятие решения всегда направлено на разрешение некоторых проблем, **процесс моделирования можно укрупненно представить в виде следующей последовательности действий:**

- осознание наличия проблемы;
- выделение главных факторов, определяющих проблему, которые должны служить выходными параметрами модели;
- выделение определяющих входных переменных модели;
- собственно разработка математической модели;
- идентификация модели (параметрическая или структурно-параметрическая);
- проведение численных экспериментов с моделью и при необходимости статистическая обработка полученных данных;
- определение состава параметров качества, характеризующих решаемую проблему (с использованием данных моделирования и априорной информации);

- формализация частных критериев качества на основе параметров качества;
- определение параметров, характеризующих относительную значимость частных критериев для решения общей проблемы;
- формализация обобщенного критерия качества решения проблемы на основе агрегирования частных критериев с учетом их относительной значимости;
- решение задачи выбора наилучшей альтернативы или многокритериальной оптимизации в зависимости от типа решаемой проблемы.

Представленная последовательность решения проблем с помощью математического моделирования не претендует на полноту и всеобщность. В сущности, она является некоторой детализацией **общепринятой схемы: формулировка проблемы; построение модели и идентификация; оптимизация.** В то же время представленная детализация общей схемы достаточно полно отражает последовательность действий, которой рекомендуется придерживаться при решении конкретных проблем в различных отраслях деятельности.

Следует подчеркнуть, что во многих реальных случаях решение проблем не требует построения конструктивной математической модели, адекватно описывающей все стороны исследуемого процесса или явления. Так, решение проблем принятия решений может сводиться к этапам анализа априорной информации и данных, полученных от экспертов, определения состава показателей качества и выбора наилучшей альтернативы из возможных. В этом случае также строятся модели, при этом они формализуют только указанные этапы и их можно условно называть моделями оптимизации или принятия решений. Отметим, что такие модели зачастую оказываются весьма сложными и требуют использования глубоких, современных математических методов для своей реализации.

Для иллюстрации приведем следующий, на первый взгляд, простейший бытовой пример. Рассмотрим проблему оптимизации приготовления цыплят. Основным фактором, почти целиком определяющим успех всего предприятия, является время приготовления τ . От этого параметра качества напрямую зависят три основных частных критерия: вкус цыпленка $\mu_1(\tau)$, затраты электроэнергии на приготовление и время ожидания клиента в очереди $\mu_q(\tau)$. Проблемой является выбор оптимального по совокупности частных критериев времени приготовления.

Для умозрительной формализации частных критериев были применены функции желательности Харрингтона, широко применяемые в планировании экспериментов при поиске оптимальных

условий. Функции желательности изменяются от 0 в областях недопустимых (нежелательных) значений показателя качества до максимального значения, равного 1, в областях наиболее предпочтительных его значений. Других ограничений, кроме непрерывности и выпуклости, на функции желательности не налагается.

Из этих предпосылок экономический критерий затрат на энергию можно охарактеризовать функцией желательности $\mu_e(\tau)$, приведенной на рисунке 1.

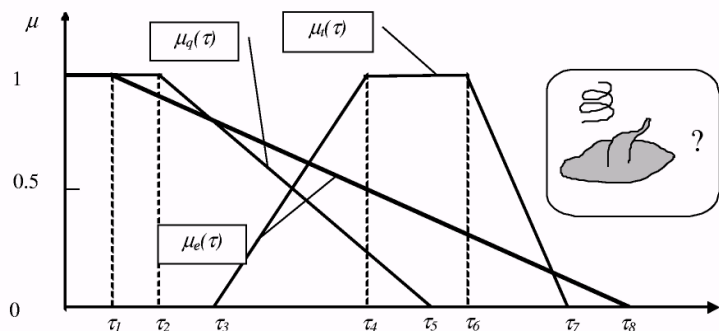


Рис 1. Частные критерии качества процесса приготовления цыплят: $\mu_e(\tau)$, $\mu_q(\tau)$, $\mu_t(\tau)$ - функции желательности, описывающие критерии затрат электроэнергии, времени ожидания клиента в очереди и вкусовых качеств продукции, соответственно

В соответствии с ней при $\tau < \tau_1$ затраты энергии представляются для фирмы несущественным. С дальнейшим ростом τ растут затраты энергии, что отражается в уменьшении значений функции желательности до 0 при $\tau = \tau_8$. При $\tau > \tau_8$ производство становится нерентабельным ввиду слишком больших затрат на энергию.

Поведение функции желательности, формализующей критерий ожидания клиента в очереди $\mu_q(\tau)$, соответствует тому, что при $\tau < \tau_2$ практически все клиенты готовы подождать приготовления пищи. С дальнейшим ростом τ все больше клиентов покидает очередь, поскольку хватает конкурирующих фирм, и при $\tau > \tau_5$ клиенты считают время ожидания недопустимым.

Форма функции желательности критерия вкуса цыпленка μ_t определяется следующими соображениями. При $\tau < \tau_3$ цыпленок будет

сыроват. С ростом τ его вкусовые качества растут, и в интервале $\tau_4 < \tau < \tau_6$ цыплята наиболее вкусны с точки зрения большинства клиентов. При $\tau > \tau_6$ цыплята уже несколько суховаты, хотя находится достаточное число любителей именно поджаристых цыплят. При $\tau > \tau_7$ цыплята становятся подгоревшими, и не находят покупателей.

Полученные на основе вышеприведенных умозрительных соображений функции желательности обладают существенно различными чертами. В принципе, критерий $\mu_e(\tau)$ можно построить на основе объективных данных финансового анализа. Критерий $\mu_q(\tau)$ – можно сконструировать на основе некоторых статистических данных. В отличие от них критерий $\mu_t(\tau)$ основан, в основном, на субъективных оценках вкуса и вида поджаренных цыплят. Причем, в рассматриваемой ситуации именно субъективный критерий «вкус продукта» играет определяющую роль в успехе торгового предприятия. Исключение этого критерия из рассмотрения из-за его «субъективности» в данном случае сделало бы постановку задачи оптимизации работы пищевого предприятия практически бессмысленной.

Другим источником субъективизма при оценке работы предприятия является наличие нескольких частных критериев, являющихся антагонистичными. Улучшение с точки зрения критерия $\mu_t(\tau)$ сопровождается одновременным ухудшением относительно критериев $\mu_e(\tau)$ и $\mu_q(\tau)$ (рис.1). Эта ситуация, как правило, имеет характер общей закономерности. Как известно, наличие в постановке задачи оптимизации хотя бы двух частных критериев неизбежно сопровождается привнесением в нее неопределенностей несогласованной, субъективной природы.

Следующими источниками субъективной неопределенности в рассматриваемом примере являются необходимость количественной оценки коэффициентов относительной важности частных критериев (ранжировка), а также выбор способа их агрегирования в обобщенный критерий качества.

Заканчивая рассмотрение примера, отметим, что вес цыпленка является, вообще говоря, случайной переменной с соответствующим частотным распределением. Ясно, что время приготовления цыпленка должно зависеть от его веса, что делает необходимым одновременный учет в постановке задачи как субъективной, так и объективной (в данном случае статистической) неопределенностей. В итоге рассмотренная простейшая, на первый взгляд, бытовая проблема оказывается весьма сложной для разрешения с помощью формальных математических подходов.

Рассмотренный пример хорошо иллюстрирует основные особенности постановки задач оптимизации при разрешении

реальных проблем: **многокритериальность; антагонистичность и неравнозначность частных критериев; важность учета критериев, основанных на субъективных оценках; необходимость одновременного учета неопределенностей различной природы.** Во многих случаях дополнительной сложностью является иерархичность системы частных критериев.

В этом модельном примере также видны **комплексность и многоаспектность проблем моделирования и оптимизации при постановке и решении реальных задач.** Эта ситуация носит общий характер. **Решение проблем оптимизации** различного рода деятельности непосредственно связано с **моделированием и анализом объектов и процессов,** экономических показателей эффективности, а также с учетом техногенного воздействия промышленных производств на экологию окружающей среды. Экологические факторы напрямую влияют на здоровье населения, а вся совокупность комплексных показателей деятельности на качество жизни в целом. Эту систему взаимосвязанных производственно-технологических, экономических и экологических факторов можно наглядно представить укрупненной структурной схемой, приведенной на рисунке 2.

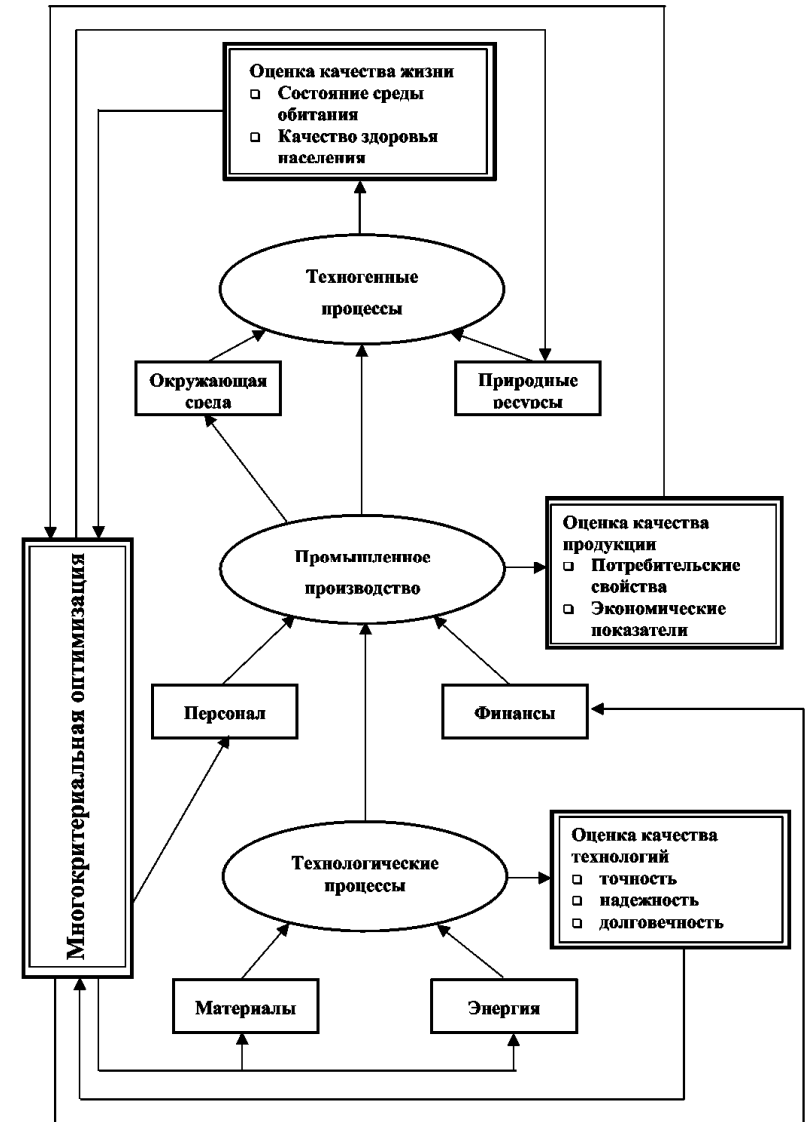


Рис.2. Структурное представление проблем системной оценки качества и многокритериальной оптимизации производственной деятельности

Она отражает взаимосвязь задач и проблем, рассматриваемых при решении задач математического моделирования систем.

1. Моделирование систем методом структурных чисел

1.1. Введение в теорию структурных чисел

1.1.1. Основные понятия

1. Определение структурного числа

Пусть X — подмножество абстрактного пространства \mathcal{P} . Элементы множества X обозначим

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots \in X.$$

Рассмотрим систему элементов в виде таблицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Будем рассматривать эту систему как совокупность столбцов a_k , т. е.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j). \quad (1.2)$$

Столбцы a_k в свою очередь представляют собой неупорядоченные множества элементов α_i .

$$a_k = \{\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{mk}\}, \quad \alpha_{ik} \neq \alpha_{jk} \quad (i \neq j). \quad (1.3)$$

Столбцы будем считать равными, если они содержат одинаковые элементы. Положим по определению, что система (1.1) не содержит одинаковых столбцов. Систему типа (1.1) будем рассматривать как элемент новой алгебры — *алгебры структурных чисел*. Согласно определениям абстрактной алгебры, алгебру структурных чисел можно отнести к категории операторных алгебр, т. е. ее можно характеризовать упорядоченной тройкой

$$\langle E, \Omega, e \rangle,$$

где E — носитель алгебры (в нашем случае семейство множеств); Ω — двухэлементное множество операторов ω_1, ω_2 , определяющих сумму и произведение; e — результат, т. е. функция, которая выражению $A\omega B$ ставит в соответствие элемент $C \in E$, являющийся результатом действия.

Введем вспомогательное понятие, которое используем при определении структурного числа.

Рассмотрим последовательность элементов x_i : необязательно различных:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n \rangle. \quad (1.4)$$

Обозначим через $r(x_i)$ — число одинаковых элементов последовательности (1.4).

Структурным числом называется система элементов α_{i_k} вида (1.1) [с учетом (1.2) и (1.3)], удовлетворяющая следующим определениям.

Определение 1.1. Два структурных числа считаются равными ($A = B$) тогда и только тогда, когда $(a \in A) \Leftrightarrow (a \in B)$ или

$$A = B \Leftrightarrow \bigwedge_a (a \in A \Leftrightarrow a \in B). \quad (1.5)$$

Определение 1.2. Суммой структурных чисел A и B называется структурное число

$$C = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B), x \notin A \cap B\} = A \triangle B; \quad (1.6)$$

в этом случае можно написать $C = A + B$.

Выражение $A \triangle B$ в формуле (1.6) означает симметричную разность множеств A и B .

Определение 1.3. Произведением структурных чисел A и B называется структурное число

$$C = \{a \cup b \mid a \cap b = \phi, r(a \cup b) \in \{1, 3, \dots\}, a \in A, b \in B\}, \quad (1.7)$$

которое записывается в виде $C = AB$.

В соответствии с определением суммы при сложении структурных чисел опускаются столбцы, одновременно присутствующие в обоих числах A и B , а в соответствии с определением произведения при умножении структурных чисел A и B опускаются те столбцы $a \cup b$, в которых какой-либо элемент повторяется, т. е. для которых $a \cap b \neq \phi$, а также опускается четное число идентичных столбцов.

Можно заметить, что равенство структурных чисел представляет собой отношение эквивалентности, т. е. является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Далее будут приведены примеры действий со структурными числами, элементы которых $\alpha_{i_k} \in X$ представляют собой натуральные числа (этот случай имеет большое значение для применения алгебры структурных чисел в моделировании), а также даны словесные фор-

мулировки действий со структурными числами, которые менее точны, чем вышеприведенные, однако более понятны для читателей, не имеющих достаточной математической подготовки.

Пример 1.1. Равенство структурных чисел:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} .$$

Два структурных числа равны, если содержат идентичные столбцы, независимо от порядка элементов в столбцах и порядка столбцов.

Пример 1.2. Сложение структурных чисел:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} .$$

Суммой двух структурных чисел A и B называется структурное число, содержащее все столбцы чисел A и B , за исключением идентичных столбцов, и не содержащее других столбцов.

Пример 1.3. Умножение структурных чисел:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

Произведением двух структурных чисел A и B называется структурное число, столбцы которого представляют собой суммы (согласно понятиям теории множеств) всех возможных комбинаций столбцов A и B , за исключением наибольшего четного числа идентичных столбцов и таких столбцов, в которых какой-либо элемент повторяется (произведение других столбцов не содержит).

Из определения суммы и произведения структурных чисел следует, что эти операции всегда можно выполнить на множестве этих чисел. Из тех же определений можно сделать вывод, что сложение и умножение структурных чисел коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения.

Для трех произвольных структурных чисел имеют место следующие соотношения, подобные тем, которые справедливы для элементарной алгебры:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ AB &= BA, \\ A(BC) &= (AB)C, \\ A(B + C) &= AB + AC. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Следует различать структурное число $[\phi]$, содержащее один столбец, который является пустым множеством \emptyset , и структурное число $[]$, не содержащее ни одного столбца.

Заметим, что число $[]$ служит модулем суммирования и для произвольного структурного числа A выполняется равенство

$$A + [] = A,$$

поэтому число $[]$ будем обозначать символом 0, записывая его в виде

$$[] = 0. \tag{1.9}$$

Число $[\phi]$ в свою очередь есть модуль умножения, так как

$$A [\phi] = A, \tag{1.10}$$

поэтому число $[\phi]$ обозначим символом 1, записав

$$[\phi] = 1. \tag{1.11}$$

Для любого A имеет место соотношение

$$A [] = [].$$

Рассмотрим структурное число вида

$$A = \{\phi, a_1, a_2, \dots, a_\lambda\}, \tag{1.12}$$

т. е. число, содержащее один пустой столбец.

Легко заметить, что для такого числа справедливо равенство

$$AA = 1.$$

Для структурных чисел, не содержащих пустого столбца,

$$AA = 0.$$

Если множество структурных чисел вида (1.12) обозначить как \mathcal{A} , а множество всех остальных структурных чисел — как \mathcal{B} , то можно написать

$$\begin{aligned} (A \in \mathcal{A}) &\Rightarrow AA = 1, \\ (A \in \mathcal{B}) &\Rightarrow AA = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Следовательно, легко заметить, что для произвольного структурного числа

$$\underbrace{A + A + \dots + A}_{n \text{ раз}} = \begin{cases} A & \text{при нечетном числе слагаемых } n, \\ 0 & \text{при четном } n. \end{cases} \tag{1.13a}$$

Таким образом,

$$A + A = 0. \tag{1.13б}$$

Из соотношения (1.13) вытекает, что равенство

$$AB = 0$$

не требует в общем случае равенств $A = 0$ или $B=0$, т. е. множество структурных чисел содержит делители нуля. Пару структурных чисел, для которой выполняется равенство $AB=0$, назовем *особой парой*.

Пример 1.4. Особую пару представляют собой следующие структурные числа A и B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{так как} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 0.$$

Естественно, число $[]=0$ в сочетании с любым структурным числом дает особую пару.

Обобщая изложенные свойства структурных чисел, можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1.1. Множество структурных чисел, на котором определены операции сложения и умножения, образует коммутативное кольцо. Это кольцо обычно содержит делители нуля. Из определения суммы и произведения следуют соотношения, справедливые для любого структурного числа:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{m_k k} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{m_k k} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{m_k} [\alpha_{ik}] = \prod_{i=1}^{m_k} s_{\alpha_{ik}}, \quad (1.14)$$

где $s_{\alpha_{ik}} = [\alpha_{ik}]$ — одноэлементное структурное число.

Теорема 1.2. Структурное число A всегда можно представить в виде

$$A = \sum_k \prod_i s_{\alpha_{ik}}, \quad (1.15)$$

где $s_{\alpha_{ik}} = [\alpha_{ik}]$

Следует отметить, что выражение (1.15) в алгебре структурных чисел играет роль, аналогичную выражению $z = a + ib$ в теории функций комплексного переменного, с помощью которой можно записать любое комплексное число $z = \langle a, b \rangle$.

Структурное число

$$s_{\alpha_{ik}} = [\alpha_{ik}]$$

называется *структурной единицей*, которая служит аналогом действительной или мнимой единицы в области комплексных чисел.

2. Вычитание структурных чисел

Рассмотрим два произвольных структурных числа A и B . Из определения равенства и суммы структурных чисел следует, что существует только одно структурное число, удовлетворяющее равенству

$$B + X = A, \quad (1.16)$$

которое вследствие коммутативности суммирования структурных чисел можно переписать как

$$X + B = A, \quad (1.16a)$$

Структурное число X , удовлетворяющее равенствам (1.16) и (1.16a), называется *разностью* структурных чисел A и B :

$$X = A - B.$$

Действие нахождения разности структурных чисел называется вычитанием. Легко заметить, что разность чисел A и B есть число $X = A - B$. Действительно, подставляя в выражение (1.16) $X = A - B$, получаем уравнение

$$B + (A - B) = A,$$

которое в соответствии с (1.13б) представляет собой тождество. Таким образом, получаем обоснованное соотношение

$$A - B = A + B, \quad (1.17)$$

которое в случае $A = 0$ записывается в виде

$$-B = B. \quad (1.18)$$

Из сказанного следует, что на множестве структурных чисел вычитание всегда можно заменить сложением. Вычитание, следовательно, определено однозначно и всегда, выполнимо, поэтому множество структурных чисел замкнуто по отношению к суммированию и вычитанию.

Подводя итог рассмотренным свойствам структурных чисел, можно заключить, что кольцо структурных чисел 1) не содержит степеней и 2) не содержит коэффициентов (кроме 0 и 1); а 3) сложение идентично вычитанию.

1.1.2. Свойства структурных чисел

1. Делители нуля

Пусть \mathbf{A}^* — множество структурных чисел X , удовлетворяющее уравнению

$$AX = 0,$$

где A — некоторое структурное число, и пусть A^* — элементы этого множества. Тогда

$$AX = 0 \Rightarrow X = A_i^* \in A^*. \quad (1.19)$$

Числа $A^* \in A^*$, удовлетворяющие уравнению $AX = 0$, называются сопряженными по отношению к A или *делителями нуля*.

Следствие. Если два структурных числа X_1 и X_2 удовлетворяют равенству $AX = 0$, то такому же равенству удовлетворяет их линейная комбинация $C_1X_1 + C_2X_2$, а также произведение CX_1X_2 , где C_1, C_2, C — произвольные структурные числа, включая 0 и 1. Тогда

$$X_1, X_2 \in A^* \Rightarrow C_1X_1 + C_2X_2 \in A^*; CX_1X_2 \in A^*. \quad (1.20)$$

Обоснование этого положения элементарно и предлагается выполнить читателю.

Полагая в выражении (1.20) $C_1 = C_2 = C = 1$, приходим к выводу, что к A^* относятся сумма $X_1 + X_2$ и произведение X_1X_2 структурных чисел X_1 и X_2 , удовлетворяющих уравнению $AX = 0$.

Множество A^* решений уравнения $AX = 0$ можно в общем случае определить с помощью выражения, записанного в символах математической логики:

$$(AX = 0) \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{a \in A \\ x \in X}} \{[a \cap x \neq \phi] \vee [r(a \cup x) \in \{0, 2, \dots\}]\}. \quad (1.21)$$

Свойство (1.21) следует непосредственно из определения произведения структурных чисел.

2. Делимость структурных чисел

Если для двух структурных чисел A и B существует такое число X , что

$$A = XB, \quad (1.22)$$

то A делится на B , или B — делитель числа A , т. е.

$$B | A \quad \text{и} \quad A \neq 0. \quad (1.23)$$

Очевидно, каждое структурное число $A \neq 1$ и $A \neq 0$ имеет самое малое два делителя, а именно 1 и A ; число 1, в свою очередь, имеет лишь один кратный делитель.

Структурные числа $A \not\supseteq \phi$, содержащие только один делитель A , называются простыми числами; любое другое структурное число называется сложным. Каждый делитель, представляющий собой однострочное структурное число, называется основным делителем.

Теорема 1.3. Структурное число B представляет собой делитель структурного числа A тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $AB = 0$;
- 2) все столбцы числа A являются подмножествами некоторых столбцов числа B .

Доказательство. Если число B есть делитель числа A , то существует такое X , что

$$BX = A.$$

Но это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда все столбцы числа A представляют собой подмножества некоторых столбцов числа B , а B — элемент, сопряженный с A . Следовательно,

$$B | A \Leftrightarrow (AB = 0) \wedge \left[\bigwedge_{b_k \in B} \bigvee_{\substack{a_k \in A \\ a_k \neq \phi}} (a_k \supseteq b_k) \right]. \quad (1.24)$$

Следует заметить, что деление, определенное на множестве структурных чисел, обладает свойством

$$A | B \quad \text{и} \quad B | C \Rightarrow A | C. \quad (1.25)$$

Деление также представляет собой слабо симметричное отношение, т. е. $(A | B \text{ и } B | A) \Rightarrow A = B$, что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.4. Если структурное число B — делитель структурного числа A , а число A — делитель B , то $A = B$.

Доказательство. Положим, что одновременно имеет место

$$B | A \quad \text{и} \quad A | B.$$

Из теоремы 1.3 следует, что тогда могут быть одновременно выполнены условия

$$\left\{ \bigwedge_{a_k \in A} \bigvee_{b_k \in B} (a_k \supseteq b_k) \right\} \wedge \left\{ \bigwedge_{a_k \in A} \bigvee_{b_k \in B} (b_k \supseteq a_k) \right\},$$

что может иметь место только при $A = B$.

Для структурных чисел имеет место правило сокращения, т. е. если $CA = CB$, то $A = B$. Это положение можно обосновать.

Теорема 1.5. Уравнение $AB = AX$ имеет общее решение на множестве структурных чисел

$$X = B + A^*,$$

где A^* — произвольный сопряженный элемент A . Тогда

$$(AB = AX) \Leftrightarrow (X = B + A^*; A^* \in A^*). \quad (1.26)$$

Доказательство. Из уравнения $AB = AX$ следует, что $A(B + X) = 0$ и $B + X$ — число, сопряженное с A , а соответственно и $X = B + A^*$, где A^* — произвольный элемент множества решений уравнения $AX = 0$.

Подставляя число $X = B + A^*$ в уравнение $AB = AX$, убеждаемся, что это число действительно удовлетворяет данному уравнению.

Теорема 1.6. Каждое сложное структурное число имеет по крайней мере один делитель, представляющий собой простое число, не равное единице.

Доказательство. В соответствии с определением сложное число A имеет делители, отличные от 1 и A . Положим в таком случае, что B — один из этих делителей, т. е.

$$A = X_0 B, \quad X_0 \neq 1, \quad B \neq 1. \quad (1.27)$$

Если B — непустое число, то его можно представить как $B = X_1 B_1$. При этом получим

$$A = B_1 X_0 X_1 X_2 \dots X_l. \quad (1.28)$$

Но для $A \neq 0$ должно выполняться очевидное неравенство

$$l \leq m_A, \quad (1.29)$$

где m_A — число элементов в столбце числа A , содержащем наименьшее количество элементов. Множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots, l\}$ имеет наибольший элемент l_{\max} , поэтому l_{\max} есть простой делитель числа A . Для $A = 0$ неравенство (1.29) не должно выполняться, но, согласно изложенному, из произвольного делителя числа A (сложного, ненулевого) можно извлечь простой делитель, что и доказывает теорему 1.6.

Теорема 1.7. Каждое структурное число представляет собой простое число или произведение простых чисел.

Правильность этого положения следует из теоремы 1.6. Действительно, если структурное число A можно представить в виде (1.28) с простым делителем l , то на простые делители можно разложить каждый дополнительный делитель $X_0, X_1, X_2, \dots, X_l$. Тогда структурное число можно всегда представить в виде произведения простых чисел

$$A = P_1 P_2 \dots P_r. \quad (1.30)$$

В случае, когда A само будет простым числом (не равным единице), произведение сводится к одному сомножителю. Разложение числа A на простые числа запишем тогда в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_r \end{array} \right| A \quad (1.31)$$

Нетрудно заметить, что структурные числа имеют следующие свойства:

1. Любое структурное число, состоящее из разных (неповторяющихся) элементов и содержащее более одного столбца, есть простое число.

2. Каждое структурное число, состоящее из одной строки, простое.

3. Каждое структурное число, состоящее из одного столбца, сложное ($n > 1$).

4. Сумма простых чисел может быть сложным числом, сумма сложных чисел может быть простым числом.

Пример 1.5.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \end{bmatrix} + [\alpha_1] = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = [\alpha] [\beta_1 \ \beta_2],$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{bmatrix}.$$

В данном примере, суммируя вначале два простых структурных числа, получаем сложное число; затем, суммируя сложное число, получаем простое число. Следствием второго свойства структурных чисел является то, что множество простых структурных чисел бесконечно, если бесконечно множество X , из которого взяты элементы структурных чисел. Оказывается, разложение структурных чисел на простые имеет специфические особенности, отличные, например, от особенностей разложения в области натуральных чисел. Одна из этих особенностей рассматривается в следующей теореме.

Теорема 1.8. Каждое сложное число имеет бесконечное множество способов разложения на простые числа.

Доказательство. Положим, что $A = P_1 P_2 \dots P_r$. Легко заметить, что величина этого произведения не изменится, если любое из чисел P_i дополнить столбцами, содержащими некоторые элементы всех столбцов одного из оставшихся сомножителей.

Так как число таких возможных дополнений бесконечно, то каждое сложное структурное число можно разложить на простые бесконечно большим числом способов.

Пример 1.6.

$$\{1\} \{2\} = \{1\} \{2 \ 1\} = \{1\} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} = \{1\} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 3 \end{bmatrix} = \dots$$

Рассмотрим свойства структурных чисел с одинаковым числом элементов в строках и одинаковым числом элементов в столбцах, которые представляют наибольший интерес для применения алгебры структурных чисел в моделировании.

Определение 1.4. Разложение структурного числа с одинаковым числом элементов в строках на простые числа также с одинаковым

числом элементов в строках, содержащих только элементы числа A , называется *каноническим разложением*.

Очевидно, что каждое структурное сложное число с равным числом элементов в строках имеет конечное число канонических разложений. Это имеет большое практическое значение, например, в случае применения алгебры структурных чисел к синтезу систем.

Теорема 1.9. Если структурное число с одинаковым числом элементов в строках $A \neq 0$ (с m строками) имеет каноническое разложение

$$A = \prod_{i=1}^m P_i, \quad (1.32)$$

то все остальные канонические разложения числа A на простые однострочные числа имеют вид

$$A = \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad (1.33)$$

где числа ε_{ij} принимают только значения 0 или 1.

Доказательство. Положим, существует разложение

$$A = \prod_{j=1}^m P'_j,$$

отличное от (1.32). Тогда, перемножая A и любое P'_j , получим

$$AP'_j = P'_j \prod_{i=1}^m P_i = 0.$$

Далее, $P'_j = (P_1 P_2 \dots P_m)^*_j$, т. е. P'_j — сопряженный элемент по отношению к $\prod_{i=1}^m P_i$. Однако можно заметить, что в классе однострочных структурных чисел P_i справедливо соотношение

$$(P_1 P_2 \dots P_m)^*_j = \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad \varepsilon_{ij} = 0, 1. \quad (1.34)$$

Тогда, действительно,

$$A = \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Непосредственно из теоремы 1.9 следует, что двустрочное сложное структурное число имеет лишь три возможных канонических разложения на однострочные числа

$$A = P_1 P_2 = P_1 (P_1 + P_2) = P_2 (P_1 + P_2). \quad (1.35)$$

Несмотря на то что известен общий вид канонического разложения, определение общего числа возможных канонических разложений

m -строчного сложного структурного числа — довольно трудная комбинаторная задача.

Теорема 1.10. Число возможных канонических разложений отличного от нуля сложного структурного числа с m строками на однострочные множители удовлетворяет неравенству

$$R_m < 1 + k + \frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots m}{(m-1)!}, \quad (1.36)$$

где $k = m(m-1)$.

Доказательство. Если структурное m -строчное число не имеет вовсе разложения на однострочные множители, неравенство (1.36) полностью удовлетворяется. В случае когда имеется возможное разложение, оно имеет вид (1.33).

На основе этого разложения можно выделить $(m-1)^2 + 1$ множеств разложений числа A , ставя в соответствие каждому отдельному множеству те разложения, которые имеют одинаковое число нулевых чисел ε_{ij} . В общем в выражении (1.33) имеем m^2 чисел ε_{ij} , причем нулевое значение может одновременно принимать не более чем $k = m^2 - m = m(m-1)$ чисел ε_{ij} . С другой стороны, нулевое значение должно иметь минимум $m-1$ чисел ε_{ij} , так как в противном случае в разложении (1.33) имелись бы идентичные множители и $A = 0$. Обозначая через e число нулевых значений ε_{ij} , имеем неравенство

$$m-1 \leq e \leq m(m-1) = k.$$

Таким образом, Δe выделенных множеств разложений числа A равно

$$\Delta e = (m-1)m - (m-1) + 1 = (m-1)^2 + 1.$$

Если через R_m^e обозначить число разложений с e нулевыми числами ε_{ij} , то с помощью простых комбинаций можно определить следующие зависимости:

$$\begin{aligned} R_m^k &= 1, & R_m^{k-1} &= k, \\ R_m^{k-2} &= \frac{k(k-2)}{2!} < \frac{k(k-1)}{2!}, \\ R_m^{k-3} &< \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}, \\ &\dots \dots \dots \\ R_m^{m-1} &= R_m^{k-(m-1)^2} < \frac{k(k-1)\dots m}{(m-1)!}, \end{aligned}$$

а так как $R_m = R_m^k + R_m^{k-1} + \dots + R_m^{m-1}$, то неравенство (1.36) действительно выполняется. Рассмотрим зависимость

$$1 + k + \frac{k(k-1)}{2!} + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots 1}{k!} = 2^k, \quad (1.37)$$

нетрудно заметить, что можно оценить число возможных разложений m -строчного структурного числа на однострочные множители по простой формуле

$$R_m < 2^{m(m-1)}, \quad m > 1. \quad (1.38)$$

Однако эта оценка дает худшие результаты по сравнению с неравенством (1.36).

1.1.3. Геометрическое изображение структурного числа

До сих пор мы рассматривали структурные числа как элементы переменного кольца и его общие свойства, исходя из определения действий сложения, умножения и т. д. Попробуем дать геометрическую интерпретацию структурного числа. Следует отметить, что геометрическая интерпретация встречается также и в других случаях, например в случае комплексных чисел, которым ставятся в соответствие некоторые точки плоскости Гаусса.

Геометризация структурного числа имеет значение прежде всего для его применения при анализе и синтезе моделей систем.

Определение 2.5. Если столбцы структурного числа A взаимно однозначно соответствуют деревьям графа Γ так, что каждый столбец представляет собой множество значений описывающей функции соответствующего дерева, то граф Γ называется геометрическим изображением числа A и записывается в виде

$$\Gamma = \text{ob}(A). \quad (1.39)$$

Следовательно, геометрическим изображением структурного числа A служит любой **детерминированный граф**, удовлетворяющий условию (1.39), или класс графов подобных структур. Из принятого определения следует, что геометрическое изображение структурного числа — не однозначное понятие, так как структурному числу может соответствовать многоэлементное семейство графов, составляющих класс с подобной структурой. Однако это в известном смысле является достоинством метода, так как становится возможным, например в задачах синтеза структур, нахождение не одного, а множества вариантов структуры, удовлетворяющей заданным условиям.

Не каждое структурное число изображается **связным графом** — **топологической цепью**. Определение условий, при которых существует изображение структурного числа в виде связного графа, имеет принципиальное значение для применения метода структурных чисел. Эти условия будут сформулированы в теореме 1.12.

Теорема 1.11. Структурное число A с одинаковым числом элементов в строках, геометрическим изображением которого служит связный граф с вершинами p_1, p_2, \dots, p_n , равно произведению $n - 1$ простых однострочных сомножителей

$$A = P_1 P_2 \dots P_{n-1}, \quad (1.40)$$

причем сомножители состоят из значений описывающей функции ребер, инцидентных произвольно выбранной вершине p_i ($p_i \neq p_j$, если $i \neq j$) графа Γ .

Доказательство. Равенство (1.40), очевидно, справедливо в случае графов с одной и двумя вершинами. Рассмотрим произвольный связный граф с n вершинами. Соединим в нем две произвольные вершины ребром α_k . Положим, что выражение (1.40) справедливо для образованного таким образом графа Γ^* , т. е. что структурное число равно

$$A^* = (P_1 + P_2) P_3 \dots P_{n-1} = (P'_1 + P'_2) A^{**},$$

где

$$P_1 = P'_1 + [\alpha_k], \quad P_2 = P'_2 + [\alpha_k].$$

Найдем число

$$A' = P_1 P_2 A^{**} = (P'_1 + P'_2) A^{**} [\alpha_k] + P'_1 P'_2 A^{**} = A^* [\alpha_k] + A''. \quad (1)$$

Структурное число A графа Γ с несоединенными вершинами и висячим ребром α_k можно представить в виде

$$A = A^* [\alpha_k] + A^0, \quad (2)$$

поскольку множество деревьев графа Γ^* (с замкнутым ребром α_k), дополненное элементом α_k , представляет собой множество всех деревьев графа Γ с ребром α_k . В выражении (2) символ A^0 обозначает структурное число, составленное из всех столбцов числа A , не содержащих α_k . Просуммировав равенства (1) и (2), получим

$$A + A' = A^0 + A''. \quad (3)$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от выбора ребра α_k , а правая часть не содержит α_k , значит, для каждого из следующих уравнений имеем

$$A + A'_1 = A^0 + A'' \ni \alpha_1,$$

$$A + A'_2 = A^0 + A'' \ni \alpha_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A + A'_n = A^0 + A'' \ni \alpha_n.$$

Отсюда левая часть равенства (3) не содержит обозначений ребра графа Γ и равна нулю. Тогда

$$A = A' = P_1 P_2 \dots P_{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Сформулируем теорему об условиях, при которых структурное число имеет связное изображение.

Теорема 1.12. Необходимые и достаточные условия существования геометрического изображения структурного числа в виде связного графа состоят в том, чтобы структурное число A имело разложение на простые однострочные множители

$$A = P_1 P_2 \dots P_m, \quad (1.41)$$

причем произвольный элемент a_{ik} , должен встречаться самое большее в двух простых числах P_i, P_j .

Доказательство. Разложение (1.41) непосредственно следует из теоремы 1.11 и не требует специального обоснования. Условие того, что элемент a_{ik} встречается максимум в двух числах P_i, P_j , тоже очевидно, так как в графе имеют место лишь ребра с двумя концами (одномерные симплексы).

В задачах синтеза при определении алгоритма образования структурных чисел на цифровой машине удобно добавить к приведенным условиям следующие дополнительные условия, подтверждающие отличие структурного числа от нуля:

1) в произведении $A = P_1 P_2 \dots P_m$ не может быть одинаковых сомножителей, т. е.

$$P_i \neq P_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (i \neq j); \quad (1.42)$$

2) любой сомножитель P_k произведения (1.41) не может быть равен сумме произвольного числа остальных сомножителей, т. е.

$$P_i \neq \sum_k P_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (k \neq i). \quad (1.43)$$

Из теоремы 1.12 следует, что структурное число, у которого число элементов в строках различно, не имеет связного геометрического изображения. Условие имеет не только теоретическое значение. Оно однозначно условию физического соответствия матрицы полных проводимостей и пассивной электрической цепи.

По сравнению с другими способами определения условий реализации матрицы полных проводимостей определение, основанное на теории структурных чисел, особенно просто и логично.

1.1.4. Дополнительное структурное число и геометрическое обратное изображение

Определение 1.6. Дополнительным структурным числом для данного структурного числа A называется структурное число A^d , столбцы которого представляют собой дополнения столбцов числа A до множества элементов a_{ik} , из которых состоит структурное число A .

Если обозначить множество элементов a_{ik} , из которых состоит число A , через L , то столбцы C_i^d числа A^d определим как разность (в смысле понятий алгебры множеств)

$$C_1^d = L - C_1, \quad C_2^d = L - C_2, \quad \dots, \quad C_n^d = L - C_n, \quad (1.44)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n — столбцы числа A .

Дополнительное структурное число можно в таком случае записать в виде

$$A^d = \{b_k \mid (b_k = L - a_k) \Delta (a_k \in A)\} \quad (1.44a)$$

или иначе

$$A^d = \{\{\alpha_{ik}\} - a_{ik} \mid \alpha_{ik} \in L, a_{ik} \in A\}. \quad (1.44b)$$

Следует отметить справедливость такого свойства

$$(A + B)^d = A^d + B^d, \quad L = L_A \cup L_B, \quad (1.45)$$

которое означает, что дополнение — операция аддитивная. Дополнительное структурное число можно также определить по отношению к другому множеству L^* , такому, что $L \subset L^*$, и тогда

$$A_{L^*}^d = \{L^* - a_k \mid a_k \in A\}. \quad (1.44b)$$

Способ получения дополнительного структурного числа иллюстрирует следующий пример.

Пример 1.7. Определить структурное число A^d по отношению к структурному числу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Множество элементов числа L таково:

$$L = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}.$$

Дополнительное структурное число равно

$$A^d = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 5 \\ 9 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Оказывается, что для структурного числа удобно иметь дуальное геометрическое изображение, поэтому введем понятие обратного изображения геометрического структурного числа.

Определение 1.7. Граф G называется обратным изображением структурного числа A , если столбцы числа A взаимно однозначно соответствуют дополнениям деревьев графа G так, что столбец числа A представляет собой множество значений описывающей функции соответствующего дополнения дерева. Тогда напишем

$$G = \text{cob}(A). \quad (1.46)$$

Нетрудно заметить, что обратное изображение дополнительного числа A^d одновременно служит изображением числа A и наоборот.

Обратное изображение — это граф дуальной структуры в понимании Кауэра по отношению к геометрическому изображению данного структурного числа. Свянное обратное изображение существует для любого структурного числа, имеющего связное изображение.

Таким образом, структурному числу ставится в соответствие пара графов дуальной структуры. Один из них служит геометрическим изображением, другой — обратным изображением. Примеры изображений простейших структурных чисел приведены в конце настоящего раздела.

Для обратного изображения имеет место следующая теорема.

Теорема 1.13. Структурное число A с одинаковым числом элементов в строках, геометрическое обратное изображение которого суть связный граф G , характеризующийся цикломатическим числом m , равняется произведению m простых однострочных сомножителей

$$A = P_1 P_2 \dots P_m,$$

соответствующих линейно независимым контурам графа G .

Доказательство. Докажем эту теорему методом индукции.

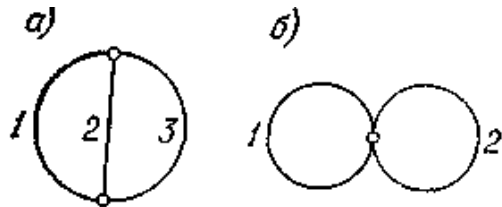


Рис. 1.1. Граф с двумя циклами.

Теорема справедлива для графа с одним и двумя контурами. Действительно, такой граф всегда может быть упрощен и приведен к

виду, показанному на рис. 1.1, а или 1.1, б, где ребра 1, 2, 3 — суммы соответствующих ребер графа с двумя контурами.

Для графа (рис. 1.1, а) имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

т. е. действительно $A = [1 \ 2] [1 \ 3]$.

Для случая, изображенного на рис. 1.1, б, теорема также справедлива, так как

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1] [2].$$

Можно доказать, что теорема справедлива и тогда, когда ребра 1, 2, 3 заменены последовательным соединением произвольного числа ребер.

Положим, что теорема справедлива для графа с цикломатическим числом $m = 1$. Тогда можно доказать, что она справедлива и для графа с числом контуров m .

Таким образом, теорема справедлива для графов с произвольным числом независимых контуров и произвольной структурой.

Теоремы 1.11 и 1.13 особенно важны для применения метода структурных чисел к анализу структур систем. Они служат основой расчета структурных чисел, соответствующих заданным графам, представляющим структуру рассматриваемой системы.

1.1.5. Алгебраическая производная и обратная производная структурного числа

На множестве структурных чисел можно определить различные операции; одна из них — операция алгебраической производной.

Определение 1.8. Алгебраической производной структурного числа называется число $\partial A / \partial \alpha$, определенное как

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = A \left| \begin{array}{l} \text{столбцы, не содержащие} \\ \text{элемент } \alpha \text{ исключены.} \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Если структурное число представить как совокупность множеств, то производная

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \{b_k \mid b_k = a_k - \{\alpha\}, \alpha \in a_k, a_k \in A\}. \quad (1.47a)$$

Легко доказать правильность следующих зависимостей, аналогичных «обычной» производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_1 + A_2) &= \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_1 A_2) &= \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} A_1. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Алгебраическую производную обозначим как A_α , т. е.

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = A_\alpha. \quad (1.49)$$

Следует заметить, что для одноэлементного структурного числа

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha] = 1. \quad (1.50)$$

Пример 1.8. Нахождение алгебраической производной структурного числа:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

По аналогии с математическим анализом нахождение производной будем называть дифференцированием.

Дифференцирование структурного числа имеет весьма простую геометрическую интерпретацию, сформулированную ниже. *Свойство 1.* Геометрическое изображение структурного числа $\delta A / \delta \alpha$ представляет собой геометрическое изображение структурного числа A с замкнутым ребром α .

Свойство 1 обосновано теоремами 1.11 и 1.13. Действительно, если положить, что опорным узлом служит любой узел цепи, неинцидентный с ребром α , то элемент α будет встречаться в двух простых сомножителях P_1 и P_2 , т. е.

$$A = P_1(\alpha) P_2(\alpha) P_3 \dots P_{n-1},$$

где n — число вершин графа. Отсюда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial P_1}{\partial \alpha} P_2 \dots P_{n-1} + \frac{\partial P_2}{\partial \alpha} P_1 P_3 \dots P_{n-1}.$$

Так как для однострочных простых чисел P_1 и P_2 справедливо, что $\partial P_1 / \partial \alpha = \partial P_2 / \partial \alpha = 1$, то

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = (P_1 + P_2) P_3 \dots P_{n-1}. \quad (1.51)$$

Это означает замыкание ребра α в геометрическом изображении или отключение (или однополосное отключение) ребра α в обратном геометрическом изображении (тогда $n - 1 = m$ — цикломатическое число графа). Поскольку величина структурного числа не зависит от выбора опорного узла, полученный результат носит общий характер.

Кроме алгебраической производной, сформулируем для структурных чисел еще одно понятие (в известном смысле дуальное по отношению к производной) — понятие обратной алгебраической производной.

Алгебраической обратной производной структурного числа называется структурное число $\delta A / \delta \alpha$, равное

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = A \left| \begin{array}{l} \text{столбцы, содержащие} \\ \text{элемент } \alpha, \text{ опущены.} \end{array} \right. \quad (1.52)$$

Воспользовавшись способом записи структурного числа в виде семейства множеств, можно записать обратную производную как

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = \{a_k \mid \alpha \notin a_k, a_k \in A\}. \quad (1.52a)$$

Для обратной алгебраической производной имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \alpha} (A_1 + A_2) &= \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} + \frac{\delta A_2}{\delta \alpha}, \\ \frac{\delta}{\delta \alpha} (A_1 A_2) &= \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} A_2 + \frac{\delta A_2}{\delta \alpha} A_1 + A_1 A_2, \end{aligned} \quad (1.53)$$

справедливые для произвольных чисел A_1 и A_2 .

Кроме того,

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} (A_1 A_2) = \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha}. \quad (1.53a)$$

Для одноэлементного структурного числа имеем

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} [\alpha] = 0. \quad (1.54)$$

Соотношение алгебраических производной и обратной производной можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} (A[\alpha]) = \frac{\delta A}{\delta \alpha}. \quad (1.53b)$$

Алгебраическую обратную производную будем обозначать как

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = A^\alpha. \quad (1.55)$$

Пример 1.9. Расчет алгебраической обратной производной:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Алгебраическая обратная производная имеет простую геометрическую интерпретацию.

Свойство 2. Геометрическое изображение структурного числа $\delta A/\delta \alpha$ представляет собой геометрическое изображение числа A , в котором ребро отключено в одной вершине и замкнуто в петлю. Обратное геометрическое изображение структурного числа $\delta A/\delta \alpha$ представляет собой обратное изображение геометрического числа A с замкнутым ребром α . Правильность этого свойства следует из определений изображения, обратного изображения структурного числа и обратной производной.

Вследствие простых соотношений между алгебраическими действиями, выраженными через операции производной и обратной производной, и действиями на графе, который является геометрической интерпретацией структурного числа, эти операции особенно важны в приложениях алгебры структурных чисел, например, к анализу электрических цепей.

Отметим, что для структурного числа A всегда имеет место соотношение

$$A = -\frac{\delta A}{\delta \alpha} + [\alpha] \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \quad (2.56)$$

где α — элемент числа A .

1.1.6. Детерминантная функция структурного числа

Аналогично с матричным исчислением на множестве структурных чисел можно определить различные функции, например детерминантную функцию.

Определение 1.9. *Детерминантной функцией* структурного числа A называется функция

$$\det_Z A = \det_Z \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{m_k} z_{\alpha_{ik}}, \quad (1.57)$$

где Z — заданное множество комплексных чисел $z_{\alpha_{ik}}$, т.е. $z_{\alpha_{ik}} \in Z$.

Определение этой функции весьма просто. Нужно перемножить комплексные числа, поставленные в соответствие индексам столбцов, и просуммировать полученные выражения, соответствующие столбцам.

Эта функция может быть кратко названа определителем или детерминантом структурного числа.

По аналогии с теорией матриц для ее обозначения используем также символ $\det_Z A$

$$|A| \text{ или } \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Пример 1.10. Нахождение определителя.

Вычислить определитель числа $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ по отношению к

комплексным числам $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8 \in Z$.

$$\det_Z A = z_1 z_3 z_7 + z_2 z_4 z_5 + z_1 z_4 z_8 + z_2 z_3 z_4.$$

Очевидно, что раскрытие определителя матрицы немного сложнее, чем раскрытие определителя структурного числа. Определитель структурного числа имеет следующие свойства:

$$(A_1 = A_2) \Rightarrow \left(\det_Z A_2 = \det_Z A_1 \right),$$

$$\det_Z \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} [\det_Z A].$$

1.1.7. Функция совпадения структурного числа

Кроме ранее введенных операций сложения и умножения структурных чисел, определим еще одну операцию — конъюнкцию.

Определение 1.10. Конъюнкцией $A \cap B$ структурных чисел A и B называется структурное число, содержащее общие столбцы чисел A и B и не содержащее других столбцов.

Пример 1.11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \cap B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Определим на множестве структурных чисел еще одну функцию, важную для применения алгебры структурных чисел, — функцию совпадения и обозначим

$$\text{Sim}_Z(A, B)^{\Psi\Psi}, \quad z_{\alpha_{ik}} \in Z.$$

Функция совпадения равна

Столбцы, общие для $dA/d1$ и $\partial A/\partial 7$, взяты в рамки.

При рассмотрении графа на рис. 1.3 легко заметить, что при исключении ребер 5 2 6, 5 3 6, 5 8 3, 5 8 6 граф сводится к графу с одним контуром, в котором ребра $\alpha = 1$ и $\beta = 7$ ориентированы согласно. С другой стороны, при исключении из графа ребер 2 3 4 в полученном контуре ребра 1 и 7 ориентированы встречно.

Поэтому выражения $z_5 z_2 z_6$, $z_5 z_3 z_6$, $z_5 z_8 z_3$, $z_5 z_8 z_6$ имеют знак плюс, $z_2 z_3 z_4$ — знак минус.

Окончательно получим

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 7} \right) = z_5 z_2 z_6 + z_5 z_3 z_6 + z_5 z_8 z_3 + z_5 z_8 z_6 - z_2 z_3 z_4.$$

Можно также обосновать свойство, согласно которому при исключении из обратного изображения структурного числа ребер, определенных столбцами $\partial A/\partial \alpha \cap \partial A/\partial \beta$, граф всегда сводится к такому графу, у которого цикломатическое число $m = 1$. Определение ориентации ребер α и β по отношению друг к другу не встречает трудностей. Не каждый граф отображает электрическую цепь, в которой не могут присутствовать лишние элементы (обесточенные или на которых нет напряжения). Для определения класса графов, с которыми имеют дело при анализе электрических цепей, введем общее определение соответственного или сильно связного графа.

Определение 1.12. Граф называется соответственным, если каждые две его вершины принадлежат хотя бы одному элементарному контуру.

Для соответственного графа справедливо следующее свойство.

Свойство 3. Граф (мультиграф) будет соответственным тогда и только тогда, когда он служит обратным изображением структурного числа A , удовлетворяющего условию

$$\bigvee_{\alpha \in A} \bigwedge_{\beta \in A} \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \neq 0 \right]. \quad (1.62)$$

Справедливость этого свойства следует из определения функции совпадения, согласно которому столбцы

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta}$$

соответствуют ребрам, исключение которых приводит к упрощению графа обратного изображения к одному циклу с ребрами α и β .

На рис. 1.4 показано несколько графов, из которых только один граф соответственный. Если применить условие (1.62), например к графу, показанному на рис. 1.4, б, получим

$$A = [1 \ 2] [3 \ 4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = [3 \ 4], \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = [3 \ 4], \quad \frac{\partial A}{\partial 3} = [1 \ 2], \quad \frac{\partial A}{\partial 4} = [1 \ 2].$$

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 2} = [3 \ 4] \neq 0,$$

а также

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 3} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 4} = 0,$$

т. е. условие (1.62) не выполняется для графа (рис. 1.4, б) и этот граф не соответственный.

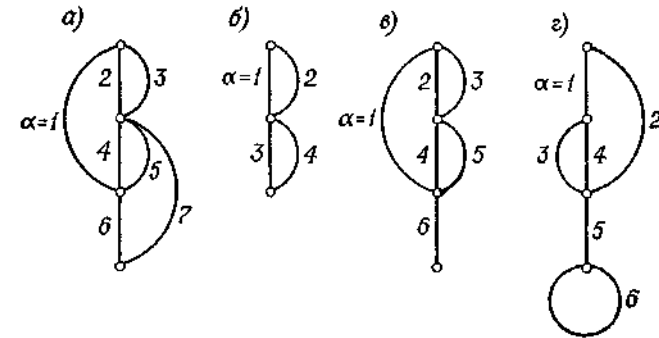


Рис. 1.4. Примеры графов: а) соответственный; б, в, г) несоответственные.

Очевидно, что применение условия (1.62) для определения характера графа излишне, если известна его структура. Из рассмотрения контуров графа можно непосредственно сделать вывод о том, выполняется ли условие (1.62). Однако это условие весьма ценно, если известно только структурное число, не разложенное на первичные сомножители, а также для использования при синтезе электрических цепей с помощью структурных чисел на ЭВМ.

1.1.8. Понятие ряда и последовательности структурных чисел

Если натуральным числам поставить в соответствие структурные числа, то можно сказать, что таким образом определена последовательность структурных чисел, записываемая в виде

$$\langle A_n \rangle = A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

Понятия сходимости и границы последовательности структурных чисел основываются на понятии метрики. Положим, дано структурное число

$$A = \{a_k \mid \alpha_{ij} \in a_k, i, j, k = 1, 2, 3, \dots\},$$

где мощность множеств a и A конечная, а α_{ij} — элементы нормированного пространства.

Введем сначала понятие нормы множества a , которую обозначим как $\|a\|$. Примем определение

$$a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \Rightarrow \|a\| = \sqrt{\|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \dots + \|\alpha_n\|^2}, \|\phi\| = 0,$$

где $\|\alpha_i\|$ — норма элемента α_i .

Норму структурного числа определим как

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{\lambda} \|a_{\lambda}\|^2},$$

где λ проходят все столбцы, имеющиеся в числе A . Метрику на множестве структурных чисел определим как

$$\rho(A, B) = \|A \triangle B\|,$$

где \triangle — означает симметричную разность множеств. Из этого определения следует, что метрика $\rho(A, B)$ удовлетворяет следующим основным условиям:

$$\begin{aligned} \rho(A, B) = 0 &\Leftrightarrow A = B, \\ \rho(A, B) &= \rho(B, A), \\ \rho(A, B) + \rho(B, C) &\geq \rho(A, C). \end{aligned}$$

Для двух произвольных структурных чисел справедливо также неравенство

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

которое следует из неравенства Буняковского — Шварца.

Если для последовательности структурных чисел A_n существует структурное число A , удовлетворяющее равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, A) = 0,$$

то структурное число A называется границей последовательности структурных чисел A_n и записывается в виде

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Последовательность A_n называется сходящейся, если имеет границу, и, наоборот, расходящейся, если таковая отсутствует.

Кроме сходимости по отношению к метрике, введем и другие понятия сходимости последовательности структурных чисел, которые обозначаются

$$\text{Lim ob } A_n \text{ и } \text{Lim cob } A_n$$

и определяются с помощью изображения и обратного изображения структурного числа:

$$(\text{Lim ob } A_n = A) \Leftrightarrow [\text{Lim ob } (A_n) = \sigma] \wedge [\sigma = \text{ob } (A)],$$

$$(\text{Lim cob } A_n = A) \Leftrightarrow [\text{Lim cob } (A_n) = \sigma] \wedge [\sigma = \text{cob } (A)].$$

Примером сходимости последовательности A_n по отношению к обратному изображению может служить цепь, метрический граф которой имеет ступенчатую структуру с равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$ вершинами (рис. 1.5).

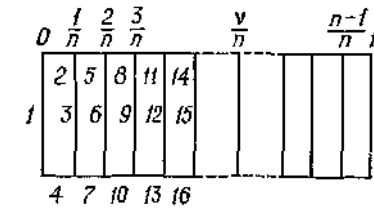


Рис. 1.5. Лестничный граф с равномерно распределенными вершинами.

Если увеличить число делений отрезка $[0, 1]$, то при $n \rightarrow \infty$ граф преобразуется в структуру с густым (однако четным) множеством ребер. Нумеруя грани графа, например, как показано на рис. 1.5, можно определить следующую последовательность структурных чисел:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1 \ 2 \ 3 \ 4\}, \\ A_2 &= \{1 \ 2 \ 3 \ 4\} \{3 \ 5 \ 6 \ 7\}, \\ A_3 &= \{1 \ 2 \ 3 \ 4\} \{3 \ 5 \ 6 \ 7\} \{6 \ 8 \ 9 \ 10\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

обратным изображением которой и служит наш граф.

Эта последовательность сходится к обратному изображению структурного числа

$$A = \text{cob}^{-1} \sigma, \quad \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

где S_n — последовательность цепей (метрических графов) вида изображенных на рис. 1.5.

Рядом структурных чисел называется выражение

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Структурные числа A_1, A_2, A_3, \dots называются составляющими ряда, числа же

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1, \\ S_2 &= A_1 + A_2, \\ S_3 &= A_1 + A_2 + A_3, \\ &\dots \\ S_n &= A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n \end{aligned}$$

есть частные суммы ряда. Бесконечный ряд структурных чисел называется сходящимся, если последовательность частичных сумм сходится. Предел последовательности частичных сумм называется суммой ряда структурных чисел.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

1.2. Анализ моделей систем методом структурных чисел

1.2.1. Введение

Рассмотрим анализ моделей систем методом структурных чисел на примерах электрических цепей.

Известно, что еще в работах Кирхгофа были сформулированы некоторые топологические понятия, относящиеся к структуре электрических цепей. Однако основные положения в этой области

были сформулированы лишь спустя 100 лет в работах Персиваля (1953 г.) и Мэзона (1953 г.). Персиваль доказал, что определитель матрицы полных проводимостей цепи равен сумме величин всех деревьев. Это положение имеет принципиальное значение для методов анализа моделей электрических цепей. Мэзон, в свою очередь, сформулировал принципы так называемых графов сигналов, что является по существу продолжением и развитием теории блок-схем, которая находит широкое применение, например, в автоматике.

Заслуживает также внимания самостоятельная работа Ванга, которая была опубликована на много лет раньше, чем труды Персиваля и Мэзона. Ванг предложил алгоритм, упрощающий расчет токов и напряжений в электрических цепях, однако основные положения этого алгоритма теоретически не были достаточно глубоко обоснованы. Область применения правил Ванга была расширена, в частности, благодаря трудам Вей-Лянг Чоу (1939 г.). Однако метод Ванга был разработан недостаточно и в связи с этим не имел существенного практического значения для теории электрических цепей.

Начиная с работ Персиваля, вопросы топологического анализа и синтеза моделей электрических цепей в теоретической электротехнике стали очень популярными.

В данной разделе будет рассмотрен способ применения алгебры структурных чисел к вопросам анализа моделей как пассивных, так и активных электрических цепей.

1.2.2. Анализ моделей пассивных цепей

1.2.2.1. Анализ модели пассивного четырехполюсника

Рассмотрим *пассивный четырехполюсник* (рис. 2.1).

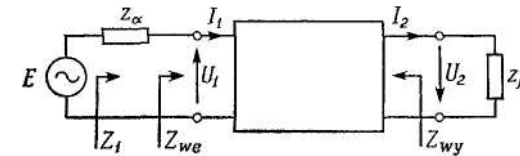


Рис. 2.1. Пассивный четырехполюсник.

Для него можно написать следующие характеристические функции:

$$K_u = \frac{U_2}{E}, \quad K_i = \frac{I_2}{I_1}, \quad \Gamma_s = \ln \left[\frac{E}{2U_2} \sqrt{\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}} \right], \quad (2.1)$$

$$Z_1 = \frac{E}{I_1}, \quad Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1}, \quad Z_{\text{вых}} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{z_\beta = \infty},$$

где K_u и K_i называются *передаточными функциями* (коэффициентами передачи) *напряжения и тока*; Z_1 , $Z_{\text{вх}}$ и $Z_{\text{вых}}$ — *первичным, входным и выходным импедансами*; Γ_s — *рабочим затуханием*.

Алгебра структурных чисел позволяет создать общие алгоритмы моделирования (расчета) этих характеристических функций независимо от степени сложности рассматриваемой цепи. Используя введенные ранее понятия, можно написать следующие формулы:

$$K_u = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial z}} Z_\beta, \quad K_i = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial z}},$$

$$\Gamma_s = \ln \left[\frac{\det A}{z} \frac{1}{2 \text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \sqrt{Z_\alpha Z_\beta}} \right], \quad Z_1 = \frac{\det A}{\det \frac{\partial A}{\partial z}}, \quad (2.2)$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\det \frac{\delta A}{\delta \alpha}}{\det \frac{\partial A}{\partial z}}, \quad Z_{\text{вых}} = \frac{\det \frac{\delta A}{\delta \beta}}{\det \frac{\partial A}{\partial z}},$$

где A — структурное число, для которого граф четырехполюсника служит обратным изображением, Z — множество импедансов четырехполюсника.

Докажем формулы для передаточной функции тока K_i и первичного импеданса Z_1 четырехполюсника. Доказательство справедливости формул для остальных функций четырехполюсника проводится аналогично.

Передаточную функцию тока K_i для четырехполюсника можно представить в виде

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sum_{\nu} I_{2\nu} - \sum_{\mu} I_{2\mu}}{I_1}, \quad (2.3)$$

где $I_{2\nu}$ — токи контуров четырехполюсника, содержащих одинаково ориентированные ребра $\alpha = 1$ и $\beta = 2$; $I_{2\mu}$ — токи контуров четырехполюсника, содержащих противоположно ориентированные ребра $\alpha = 1$ и $\beta = 2$.

Так как столбцы числа A определяют все дополнения деревьев цепи, то столбцы чисел $\partial A / \partial \alpha$ и $\partial A / \partial \beta$ определяют те ветви цепи,

исключение которых преобразует ее в один контур. Поэтому одинаковые столбцы чисел $\partial A / \partial \alpha$ и $\partial A / \partial \beta$ определяют все ветви, исключение которых приводит к образованию контуров, содержащих ребра α и β , т. е. контуров с токами $I_{2\nu}$ и $I_{2\mu}$. Кроме того, на основании уравнений контурных токов имеем

$$\sum_{i=1}^n z_{ij} I_i = \begin{cases} E, & j=1=\alpha, \\ 0, & j>1, \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}, \quad (2.5)$$

где Δ_{11} и Δ_{12} — соответствующие миноры определителя уравнений (2.4).

Минор Δ_{11} представляет собой сумму всех величин дополнений деревьев цепи с исключенной ветвью $\alpha = 1$ [1]. Поэтому

$$\Delta_{11} = \det \frac{\partial A}{\partial z} \quad (2.6)$$

где A — структурное число, обратным изображением которого служит данная цепь (с короткозамкнутым источником).

Минор Δ_{12} есть линейная комбинация с коэффициентами +1 и —1 величин таких дополнений деревьев цепи с исключенной ветвью α или β , при удалении которых $K_i \neq 0$. Поэтому

$$\Delta_{12} = \text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad (2.7)$$

где Z — множество импедансов цепи.

Итак, справедливо выражение

$$K_i = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial z}} \quad (\alpha = 1, \beta = 2).$$

Для доказательства формулы для импеданса Z_1 заметим, что

$$Z_1 = \frac{\Delta}{\Delta_{11}},$$

где Δ — определитель системы (2.4), а Δ_{11} — минор, равный сумме величин дополнений деревьев цепи с исключенным ребром $\alpha=1$.

Таким образом, $\Delta = \det A$ и $\Delta_{11} = \det \partial A / \partial \alpha$, т. е.

$$Z_1 = \frac{\det A}{z \frac{\partial A}{\partial \alpha}}$$

Справедливость формул для K_u , Γ_s , $Z_{вх}$, $Z_{вых}$ доказывается аналогично.

Применение этих формул поясним на следующих примерах.

Пример 2.1. Определить передаточные функции K_u и K_i , а также импедансы Z_1 , $Z_{вх}$, $Z_{вых}$ мостового четырехполюсника, изображенного на рис. 2.2, а.

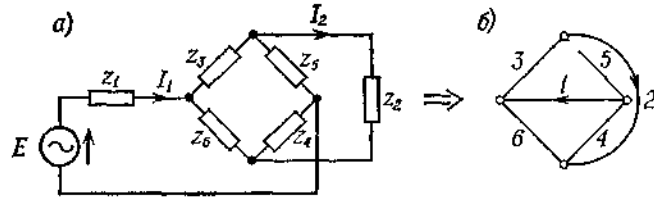


Рис. 2.2

Решение. Структурное число A , для которого известно обратное изображение (рис. 2.2, б), определим на основании теоремы 1.13:

$$A = [1 \ 3 \ 5] [1 \ 4 \ 6] [2 \ 4 \ 5].$$

Умножение первичных структурных чисел производим следующим образом:

$$A = \begin{array}{r} 1 \ 3 \ 5 \\ \times 1 \ 4 \ 6 \\ 2 \ 4 \ 5 \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & \\ \hline 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 1 & 4 & 6 & 6 & \\ \hline 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

При расчете этого произведения вначале опускаем столбцы, в которых повторяется какой-либо элемент, а затем в полученном структурном числе вычеркиваем четное число одинаковых столбцов (в данном случае имеются два одинаковых столбца, содержащих элементы 1, 4, 5).

Далее рассчитываем алгебраические производные $\partial A / \partial 1$ и $\partial A / \partial 2$. Получаем

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & \boxed{6} & 3 & \boxed{3} & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & \boxed{5} & 2 & \boxed{4} & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \boxed{3} & 3 & 5 & 5 & \boxed{5} \\ 4 & 6 & 1 & \boxed{4} & 6 & 1 & 4 & \boxed{6} \end{bmatrix}.$$

Одинаковые столбцы чисел $\partial A / \partial 1$ и $\partial A / \partial 2$ обведены рамкой. Исходя из ориентации ребер $\alpha = 1$ и $\beta = 2$ в графе (рис. 2.2, б), определяем знаки функции совпадения. В результате находим

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 2} \right) = z_5 z_6 - z_3 z_4.$$

Определим также обратные производные $\delta A / \delta 1$ и $\delta A / \delta 2$

$$\frac{\delta A}{\delta 1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 1 & 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

На основании формул (2.2) теперь можно написать все искомые величины

$$K_u = \frac{(z_5 z_6 - z_3 z_4) z_2}{z_1 z_4 z_2 + z_1 z_6 z_2 + z_1 z_8 z_4 + z_1 z_6 z_5 + z_3 z_1 z_2 + z_3 z_1 z_4 + z_3 z_1 z_5 + z_3 z_4 z_2 + \dots + z_5 z_6 z_4};$$

$$K_i = \frac{z_5 z_6 - z_3 z_4}{z_4 z_2 + z_6 z_2 + z_6 z_4 - z_6 z_5 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_5 z_2};$$

$$Z_1 = \frac{z_1 z_4 z_2 + z_1 z_6 z_2 + z_1 z_8 z_4 + z_1 z_6 z_5 + z_3 z_1 z_2 + z_3 z_1 z_4 + z_3 z_1 z_5 + \dots + z_5 z_6 z_4}{z_4 z_2 + z_6 z_2 + z_6 z_4 + z_6 z_5 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_5 z_2};$$

$$Z_{вх} = \frac{z_3 z_4 z_2 + z_3 z_4 z_5 + z_3 z_6 z_2 + z_3 z_6 z_4 + z_3 z_6 z_5 + z_5 z_4 z_2 + z_5 z_6 z_2 + z_5 z_6 z_4}{z_4 z_2 + z_6 z_2 + z_6 z_5 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_5 z_2};$$

$$Z_{вых} = \frac{z_1 z_6 z_4 + z_1 z_6 z_5 + z_3 z_1 z_4 + z_3 z_1 z_5 + z_3 z_4 z_5 + z_3 z_6 z_4 + z_3 z_6 z_5 + z_5 z_6 z_4}{z_1 z_2 + z_1 z_6 + z_3 z_1 + z_3 z_4 + z_2 z_6 + z_5 z_1 + z_5 z_4 - z_5 z_6}.$$

Из проведенных расчетов можно сформулировать некоторые замечания. Прежде всего данный метод позволяет обойтись без записи уравнений Кирхгофа и их решения. Все операции довольно просты и производятся над индексами ребер графа, благодаря чему в ходе расчета получается сжатая форма записи всех промежуточных формул. Дополнительное преимущество метода заключается в принципиальной возможности записи всех интересующих зависимостей по известному рассчитанному структурному числу A и нескольким его алгебраическим и обратным производным.

Единственная принципиальная трудность заключается в расчете произведения первичных структурных чисел, однако и это не слишком сложная операция.

Пример 2.2. Определить передаточную функцию напряжения K_u и тока K_i для четырехполюсника (перекрытый Т-образный мост, рис. 2.3, а).

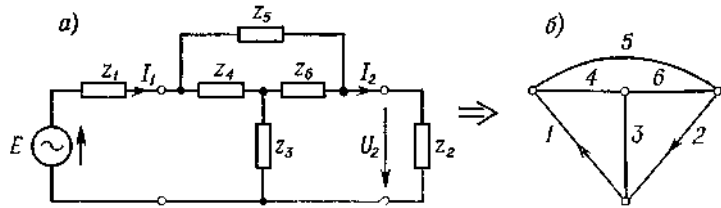


Рис. 2.3.

Решение. Структурное число с заданным обратным изображением (рис. 2.3, б) рассчитаем по теореме 1.13:

$$A = [134] [236] [456].$$

В результате имеем

$$A = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ \times & 2 & 3 & 6 \\ & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 5 \end{matrix},$$

а также

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Функция совпадения равна

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 2} \right) = z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_6 z_4.$$

Отсюда

$$K_{11} = \frac{(z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_6 z_4) z_2}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_5 + z_1 z_3 z_6 + z_1 z_6 z_4 + z_1 z_6 z_5 + z_3 z_2 z_4 + \dots + z_4 z_6 z_5};$$

$$K_t = \frac{z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_6 z_4}{z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_2 z_6 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_6 z_4 + z_6 z_5}.$$

Пример 2.3. Определить передаточную функцию U/E лестничного четырехполюсника (рис. 2.4, а).

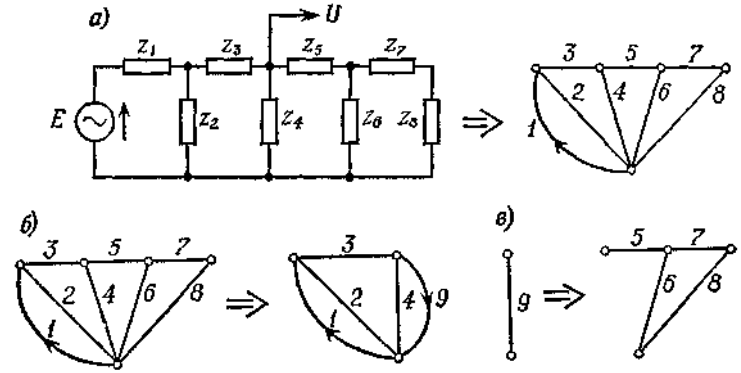


Рис. 2.4.

Решение. Упростим расчеты, заменив часть графа, расположенную справа от ветви с напряжением U , одним новым ребром (рис. 2.4, в). Рассчитаем структурное число упрощенного графа

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ \times & 2 & 3 & 4 \\ & 4 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 4 & 9 & 9 & 4 & 9 & 9 \end{matrix},$$

откуда

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 4 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 9} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

и

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 9} \right) = z_2 z_4.$$

Выражение искомой передаточной функции запишется в виде
$$\frac{U}{E} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_9 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_9 + z_1 z_4 z_9 + z_2 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_9 + z_2 z_4 z_9}.$$

Импеданс z_9 (рис. 2.4, в) рассчитаем по формуле

$$z_9 = \frac{\det A_1}{\det \frac{\partial A_1}{\partial 9}},$$

где $A_1 = [5 \ 6] [6 \ 7 \ 8] = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial A_1}{\partial 5} = [6 \ 7 \ 8]$,

поэтому

$$z_9 = \frac{z_5 z_6 + z_5 z_7 + z_5 z_8 + z_6 z_7 + z_6 z_8}{z_6 + z_7 + z_8}.$$

Пример 2.4. Определим рабочее затухание пассивного четырехполюсника (рис. 2.5, а).

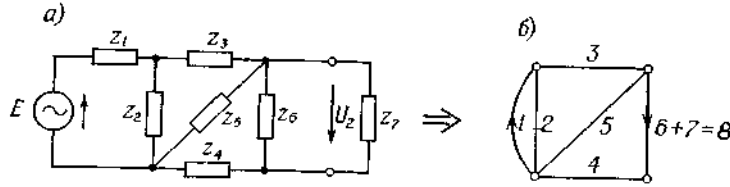


Рис. 2.5.

Решение. Имеем (рис. 2.5, б)

$$A = [1 \ 2] [2 \ 3 \ 5] [4 \ 5 \ 8],$$

т. е.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 4 & 5 & 8 & 4 & 8 & 4 & 5 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

а также

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 8} \right) = z_2 z_5;$$

окончательно

$$\Gamma_s = \ln \frac{z_1 z_2 z_7 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_8 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_5 + z_1 z_3 z_8 + \dots + z_2 z_5 z_8}{2 z_2 z_5 \sqrt{z_1 z_7}},$$

где

$$z_8 = \frac{z_6 z_7}{z_6 + z_7}.$$

Пример 2.5. Определить передаточную функцию K_i пассивного четырехполюсника (рис. 2.6, а) с импедансом нагрузки z_9 .

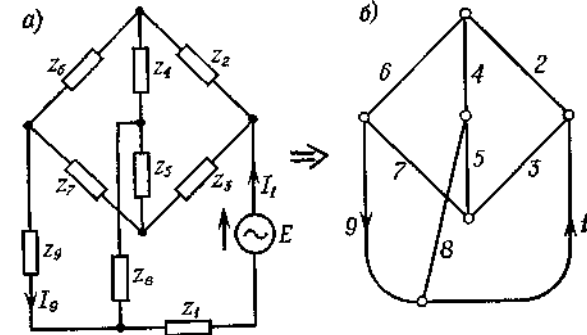


Рис. 2.6.

Решение. Так как передаточная функция тока определяется по формуле

$$K_i = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}},$$

то, приняв $\alpha = 1$, $\beta = 9$, можно упростить расчеты и рассмотреть граф с исключенным ребром $\alpha = 1$. Структурное число A_1 такого графа в соответствии со свойством 1 (п. 1.1.5) равно производной $\partial A / \partial \alpha$, т. е.

$A_1 = \partial A / \partial \alpha$. Это число равно следующему произведению однострочных структурных чисел (рис. 2.6, б):

$$A_1 = [2 \ 3 \ 4 \ 5] [4 \ 5 \ 6 \ 7] [5 \ 7 \ 8 \ 9].$$

После умножения получим

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \times & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & 5 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 5 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

В этом произведении дважды встречаются столбцы, содержащие числа 2 5 7, 3 7 5, 4 5 8, 5 4 9, которые вычеркиваются. Три столбца этого произведения содержат числа 4 5 7. Согласно определению произведения структурных чисел, оставляем из них только один,

например 4 7 5. Отыскание одинаковых столбцов можно упростить, поделив столбцы структурного числа на «блоки», состоящие из столбцов, имеющих два первичных идентичных элемента. В нашем примере такие блоки разделены пунктиром. Идентичные столбцы встречаются в разных блоках. После деления на блоки найти идентичные столбцы относительно легко.

Для вычисления производной

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}$$

заметим, что (рис. 2.6, б)

$$A = A_1 [1 \ 3 \ 5 \ 8],$$

поэтому

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{\partial A_1}{\partial \theta} [1 \ 3 \ 5 \ 8].$$

Так как

$$\frac{\partial A_1}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

то после элементарных расчетов получим

$$C = \frac{\partial A}{\partial I} \cap \frac{\partial A}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 7 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Рассматривая ориентацию ребер 1 и 9 в контурах, оставшихся после исключения из графа ребер, определяемых отдельными столбцами числа C, найдем знаки слагаемых функции совпадения.

Получим

$$\begin{aligned} \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial I}, \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) &= z_3 z_4 z_7 + z_2 z_5 z_4 + z_6 z_2 z_6 + z_5 z_3 z_4 + z_5 z_4 z_6 + z_8 z_2 z_4 + \\ &+ z_8 z_2 z_5 + z_8 z_2 z_6 + z_8 z_2 z_7 + z_5 z_3 z_4 + z_4 z_3 z_5 + z_8 z_3 z_6 + \\ &+ z_8 z_3 z_7 + z_6 z_4 z_6 + z_8 z_4 z_7 + z_6 z_5 z_6 + z_8 z_6 z_7 = N. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Искомую передаточную функцию тока можно выразить в виде отношения многочленов N и M

$$K_i = N/M,$$

где N определяется выражением (2.8), а многочлен M равен

$$\begin{aligned} M &= z_2 z_4 z_5 + z_2 z_4 z_7 + z_2 z_4 z_8 + z_2 z_4 z_9 + z_2 z_5 z_8 + z_2 z_5 z_9 + \\ &+ z_2 z_6 z_5 + z_2 z_6 z_7 + z_2 z_6 z_8 + z_2 z_6 z_9 + z_2 z_7 z_8 + z_2 z_7 z_9 + z_3 z_4 z_5 + \\ &+ z_3 z_4 z_7 + z_3 z_4 z_8 + z_3 z_4 z_9 + z_3 z_5 z_8 + z_3 z_5 z_9 + z_3 z_6 z_5 + z_3 z_6 z_7 + \\ &+ z_3 z_6 z_8 + z_3 z_6 z_9 + z_3 z_7 z_8 + z_3 z_7 z_9 + z_4 z_6 z_5 + z_4 z_6 z_7 + z_4 z_6 z_8 + \\ &+ z_4 z_6 z_9 + z_4 z_7 z_8 + z_4 z_7 z_9 + z_5 z_6 z_7 + z_5 z_6 z_8 + z_5 z_6 z_9 + \\ &+ z_5 z_7 z_8 + z_5 z_7 z_9. \end{aligned}$$

Характеристические функции четырехполюсника можно также выразить через проводимости. Тогда формулы передаточных функций напряжения и тока будут иметь вид

$$K_u = \frac{\text{Sim}_Y \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det_Y A} y_\alpha; \quad K_i = \frac{\text{Sim}_Y \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det_Y \frac{\partial A}{\partial \alpha}} y_\beta. \quad (2.9)$$

В этом случае геометрическое изображение структурного числа A представляет собой граф цепи. Тогда структурное число можно определить согласно теореме 1.11. Ребро α представляет собой ветвь источника, ребро β — измерительную ветвь, Y — множество проводимостей цепи.

Знаки слагаемых функции совпадения определяем так же, как и при записи характеристических функций через импедансы для данного обратного геометрического изображения. При этом замыкаем ребра, определяемые отдельными слагаемыми этой функции, и исследуем ориентацию ребер α и β .

Так как имеются две дуальные формы записи характеристических функций, то первые из них [формулы (2.2)] назовем *импедансными*, а вторые [формулы (2.9)] — *адмитансными*.

Приведем примеры практического применения формул (2.9).

Пример 2.6. Определить с помощью адмитансных формул передаточные функции напряжения K_u и тока K_i мостового четырехполюсника (рис. 2.2).

Решение. Так как в этом случае геометрическое изображение структурного числа представляет собой граф цепи, то на основании теоремы 1.11 получаем

$$A = [1 \ 3 \ 6] [2 \ 3 \ 5] [2 \ 4 \ 6],$$

откуда

$$K_u = \frac{N}{M_1} y_1; \quad K_i = \frac{N}{M_2} y_2,$$

где N определяется з выражения (210), а

$$M_1 = \det A = y_3 y_5 y_6 y_7 + y_3 y_5 y_6 y_4 + y_3 y_5 y_6 y_8 + y_3 y_5 y_1 y_7 +$$

$$+ y_3 y_5 y_1 y_4 + \dots + y_6 y_8 y_4 y_7,$$

$$M_2 = \det \frac{\delta A}{\delta 1} = y_3 y_5 y_6 y_7 + y_3 y_5 y_6 y_4 + y_3 y_5 y_6 y_8 + y_3 y_5 y_2 y_7 +$$

$$+ y_3 y_5 y_2 y_4 + \dots + y_6 y_8 y_4 y_7.$$

Рассмотрим *ненагруженный четырехполюсник* (рис. 2.8),

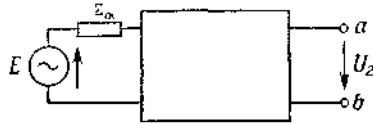


Рис. 2.8.

Режим холостого хода можно считать предельным случаем работы четырехполюсника, нагруженного импедансом z_β при $z_\beta \rightarrow \infty$. Если при этом применить соответствующую расчетную формулу, то решение значительно упрощается. Простые рассуждения приводят к следующей формуле для передаточной функции напряжения ненагруженного четырехполюсника:

$$K_u = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} D_\beta, A \right)}{\frac{z}{\det A}}. \quad (2.11)$$

В этом выражении D_β — однострочное структурное число, состоящее из элементов какого-либо пути, соединяющего выходные зажимы (a, b) четырехполюсника и не содержащего элемента α . Знаки слагаемых функции совпадения определяются, как и в предыдущем случае, но с той лишь разницей, что исследуется совпадение ориентации ребра α с направлением стрелки выходного напряжения U_2 четырехполюсника.

Практическое применение формулы (2.11) иллюстрируют следующие примеры.

Пример 2.8. Определить K_u мостового четырехполюсника (рис. 2.9).

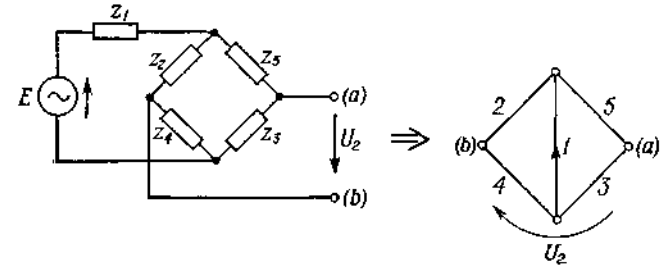


Рис. 2.9.

Решение. Структурное число (фиг. 2.9, б) равно

$$A = [1 \ 2 \ 4] [1 \ 3 \ 5],$$

или

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \\ \hline A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \end{array}$$

а алгебраическая производная имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = [3 \ 5 \ 2 \ 4].$$

Путь, соединяющий вершину (a) с вершиной (b) , можно записать в виде

$$D_{\beta}^1 = [3 \ 4] \quad \text{или} \quad D_{\beta}^2 = [2 \ 5].$$

Легко проверить, что конечный результат будет одинаков независимо от того, используется в дальнейших расчетах путь D_{β}^1 или D_{β}^2 . Например, произведение равно

$$\frac{\partial A}{\partial 1} D_{\beta}^1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

а

$$\frac{\partial A}{\partial 1} D_{\beta}^2 \cap A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Рассматривая ориентацию ребра 1 и напряжения U_2 , получим

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1} D_{\beta}^1, A \right) = z_1 z_3 - z_5 z_4.$$

Окончательно

$$K_u = \frac{z_2 z_3 - z_5 z_4}{z_1 z_3 + z_1 z_5 + z_2 z_1 + z_2 z_3 + z_2 z_5 + z_4 z_1 + z_4 z_3 + z_4 z_5}.$$

Пример 2.9. Определить передаточную функцию напряжения K_u четырехполюсника (рис. 2.10, а).

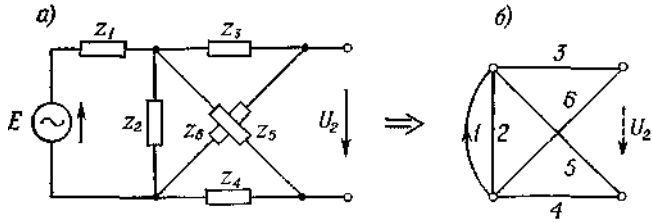


Рис. 2.10.

Решение. Имеем (рис. 2.10, б)

$$A = [1 \ 2] [2 \ 4 \ 5] [2 \ 3 \ 6],$$

или

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 \\ \times & 2 & 4 & 5 \\ & 2 & 3 & 6 \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad D_\beta = [6 \ 4],$$

поэтому

$$\frac{\partial A}{\partial 1} D_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial 1} D_\beta \cap A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1} D_\beta, A \right) = z_5 z_2 z_6 - z_2 z_3 z_4.$$

Передаточная функция напряжения запишется в виде

$$K_u = \frac{z_5 z_2 z_6 - z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_4 z_2 + z_1 z_4 z_3 + z_1 z_4 z_6 + z_1 z_5 z_2 + z_1 z_5 z_3 + \dots + z_2 z_5 z_6}.$$

На практике часто встречается режим работы четырехполюсника с идеальным источником напряжения. При этом передаточная функция напряжения может быть определена по формуле

$$K_u = \frac{\text{Sim}(AD_\alpha, AD_\beta)}{Z} \frac{1}{\det(AD_\alpha)}, \quad (2.12)$$

где D_α — структурное число, соответствующее пути между узлами, к которым подключен идеальный источник напряжения; D_β — структурное число, соответствующее пути между измерительными (выходными) узлами четырехполюсника.

Выражение (2.12) можно использовать как для нагруженного четырехполюсника, так и для четырехполюсника в режиме холостого хода. Приведем пример использования этой формулы.

Пример 2.10. Рассчитать передаточную функцию напряжения четырехполюсника (2Т-образного моста), изображенного на рис. 2.11, а.

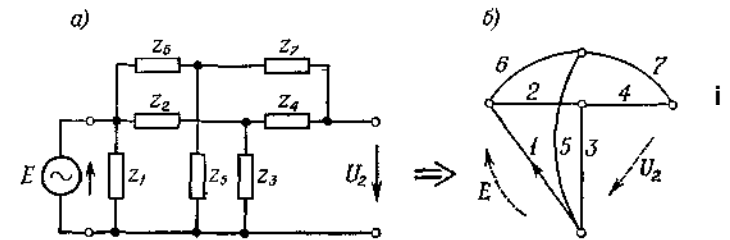


Рис. 2.11.

Структурное число A рассматриваемого графа равно (рис. 2.11, б)

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \times & 1 & 5 & 6 \\ & 3 & 4 & 5 & 7 \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 3 & 4 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 4 & 7 & 4 & 7 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Кроме того,

$$D_\alpha = [1], \quad D_\beta = [3 \ 4],$$

а также

а производная имеет вид

$$\frac{\delta A^d}{\delta 1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 2 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$Z = z_1 \frac{z_3 z_2 z_4 + z_3 z_2 z_5 + z_3 z_6 z_2 + z_3 z_6 z_4 + z_3 z_6 z_5 + z_5 z_2 z_4 + \dots + z_5 z_6 z_4}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_3 z_2 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_5 + \dots + z_5 z_6 z_4}.$$

Пример 2.12. Определить импеданс двухполюсника (рис. 2.13), используя вторую из формул (2.12б).

Решение. В этом случае структурное число равно

$$A = [1 \ 3 \ 6] [2 \ 3 \ 5] [2 \ 4 \ 6].$$

Следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

а также

$$\frac{\delta A}{\delta 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$Z = \frac{y_2 y_4 + y_2 y_6 + y_3 y_2 + y_3 y_4 + y_3 y_6 + y_5 y_2 + y_5 y_4 + y_5 y_6}{y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_6 + y_1 y_3 y_2 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_6 + \dots + y_6 y_5 y_4}.$$

1.2.2.3. Анализ моделей произвольных цепей

Пусть дана цепь, состоящая из взаимных элементов и источников напряжения. Если в цепи имеются источники тока, то по известным формулам их легко заменить на источники напряжения. На структуру цепи ограничения не наложены. Выделим в цепи ветви с интересующими нас токами

$$I_{\beta_1}, I_{\beta_2}, \dots, I_{\beta_m}$$

(рис. 2.14).

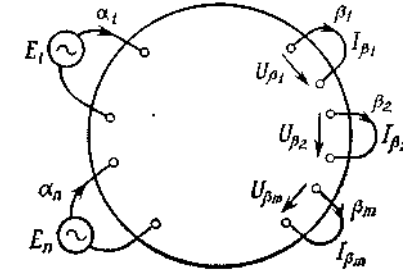


Рис. 2.14. Электрическая сеть произвольной структуры с вынесенными ветвями.

Рассмотрение этой цепи всегда можно свести к случаю воздействия одного источника напряжения, применив для произвольного числа источников принцип суперпозиции.

Если цепь содержит один источник напряжения, то ток I_{β} в любой ветви можно представить в виде

$$I_{\beta} = K_i E_i, \tag{2.13}$$

где K_i — передаточная функция тока.

В общем случае имеем

$$I_{\beta} = \sum_v K_{vi} E_v, \tag{2.14}$$

причем суммирование проводится по всем источникам.

Напряжение произвольной ветви можно выразить аналогичным образом:

$$U_{\beta} = \sum_v K_{vu} E_v, \tag{2.15}$$

где K_{vu} — передаточная функция напряжения для ветви v .

Рассмотренный на примере четырехполюсника метод может быть использован при анализе любых взаимных цепей, не содержащих зависимых источников.

Используя выведенные ранее формулы (2.2) для передаточных функций тока и напряжения, можно найти распределение токов в цепи и напряжения на отдельных ветвях. Тем же методом можно определить напряжение любой пары вершин цепи. В этом случае достаточно определить

$$K_u = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} D_{\beta}, A \right)}{\det A} \cdot z, \tag{2.16}$$

где D_{β} — структурное число, соответствующее пути между интересующими нас вершинами, но не проходящего по ребру α .

Практическое использование этого метода покажем на примерах.

Пример 2.13. Определить токи I_4 и I_5 цепи (рис. 2.15, а) с двумя источниками напряжения.

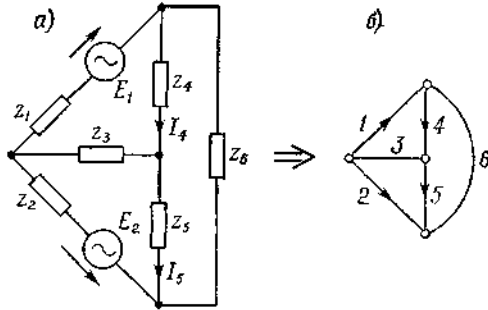


Рис. 2.15

Решение. Имеем (рис. 2.15, б)

$$A = [1 \ 3 \ 4] [2 \ 3 \ 5] [4 \ 5 \ 6],$$

или

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ \times & 2 & 3 & 5 \\ & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{matrix} \end{matrix},$$

а производные равны

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Используя формулу (2.14), напишем

$$I_4 = K_{14}E_1 + K_{24}E_2; \quad I_5 = K_{15}E_1 + K_{25}E_2,$$

причем, согласно уравнениям (2.2), имеем

$$K_{14} = \frac{I_4}{E_1} \Big|_{E_2=0} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 4} \right)}{\det A},$$

$$K_{24} = \frac{I_4}{E_2} \Big|_{E_1=0} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 2}, \frac{\partial A}{\partial 4} \right)}{\det A},$$

$$K_{15} = \frac{I_5}{E_1} \Big|_{E_2=0} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 5} \right)}{\det A},$$

$$K_{25} = \frac{I_5}{E_2} \Big|_{E_1=0} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 2}, \frac{\partial A}{\partial 5} \right)}{\det A}.$$

Из приведенных выражений следует

$$K_{14} = \frac{z_2 z_5 + z_2 z_6 + z_3 z_6 - z_5 z_6}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_4 z_5 z_6},$$

$$K_{24} = \frac{z_1 z_5 + z_3 z_6}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_4 z_5 z_6},$$

$$K_{15} = \frac{z_2 z_4 + z_3 z_6}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_4 z_5 z_6},$$

$$K_{25} = \frac{-z_1 z_4 - z_1 z_6 - z_4 z_6 - z_3 z_6}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_4 z_5 z_6}.$$

Пример 2.14. Определить напряжение U_0 цепи (рис. 2.16, а) с тремя источниками.

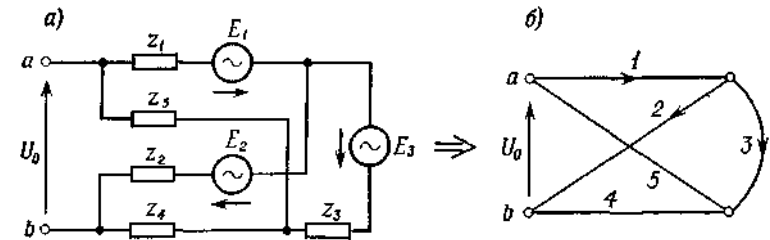


Рис. 2.16.

Решение. Для рассматриваемого случая структурное число равно

$$A = [1 \ 3 \ 5] [2 \ 3 \ 4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = [2 \ 3 \ 4], \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = [1 \ 3 \ 5], \quad \frac{\partial A}{\partial 3} = [1 \ 2 \ 4 \ 5].$$

Пусть, например, путь D , соединяющий узлы a и b , описывается структурным числом $[5 \ 4]$ (рис. 2.16, б), т. е.

$$D = [5 \ 4].$$

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial 1} D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial A}{\partial 2} D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial A}{\partial 3} D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно записать соответствующие функции совпадения

$$\text{Sim} = \left(\frac{\partial A}{\partial 1} D, A \right) = z_2 z_5 + z_3 z_5 + z_4 z_5 + z_3 z_4,$$

$$\text{Sim} = \left(\frac{\partial A}{\partial 2} D, A \right) = z_3 z_5 + z_1 z_4 + z_3 z_4 + z_5 z_4,$$

$$\text{Sim} = \left(\frac{\partial A}{\partial 3} D, A \right) = z_2 z_5 - z_4 z_4.$$

Окончательно получим

$$U_0 = \frac{(z_2 z_5 + z_3 z_5 + z_4 z_5 + z_3 z_4) E_1}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_2 + z_5 z_3 + z_5 z_4} + \frac{(z_3 z_5 + z_1 z_4 + z_3 z_4 + z_5 z_4) E_2 + (z_2 z_5 - z_4 z_4) E_3}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_2 + z_5 z_3 + z_5 z_4}.$$

Так же довольно просто вычислить *импеданс или адмитанс между произвольной парой узлов цепи*. Для этого достаточно воспользоваться формулой

$$Z = \frac{\det(AD)}{z \det A}, \quad (2.17)$$

где A — структурное число, для которого граф цепи служит обратным изображением, D — структурное число произвольного пути, соединяющего узлы, между которыми определяется импеданс Z .

Порядок расчета токов, напряжений или передаточных функций цепи можно упростить, если вначале упростить граф цепи, заменяя параллельные и последовательные ребра одним ребром.

Для последовательного соединения ребер имеем

$$Z_i = z_1 + z_2 + \dots + z_n,$$

для параллельного соединения

$$Z_i = \frac{1}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_m}}.$$

1.2.3. Анализ моделей активных цепей

1.2.3.1. Введение

Анализ моделей активных цепей можно проводить классическим методом с помощью определителей и матриц, с помощью графов сигналов или сетевых графов (метод деревьев) или с использованием унистора. В данном разделе анализ моделей активных цепей будет производиться методом структурных чисел.

Топологические методы анализа, а именно метод графов сигналов и метод деревьев, значительно облегчают анализ моделей электронных цепей. Однако их существенный недостаток заключается в невозможности определения алгоритма расчетов чисто алгебраическим путем. Кроме того, к недостаткам этих методов следует отнести многозначность способов решения данной задачи; особенно при использовании графов сигналов. В зависимости от выбора базисных узлов конечный результат в случае метода графов сигналов может быть представлен в совершенно различных формах. Поэтому возникают большие трудности для программирования на ЭВМ.

Достоинство метода структурных чисел состоит в возможности получения результата вычислений в стандартной форме вне зависимости от степени сложности цепи. Кроме того, этот метод по сравнению с методом графов сигналов обладает тем преимуществом, что нет необходимости изображать граф сигналов и можно для расчетов использовать непосредственно модель электронной схемы. Любую электронную цепь можно теоретически рассматривать как активную цепь, содержащую зависимые источники. Это означает, что, кроме независимых источников, далее будут рассмотрены также такие источники, э. д. с. в которых зависит от тока или напряжения в другой ветви цепи.

1.2.3.2. Анализ модели цепи, содержащей один зависимый источник напряжения

Модель цепи, содержащая один зависимый источник напряжения, изображена на рис. 2.17.

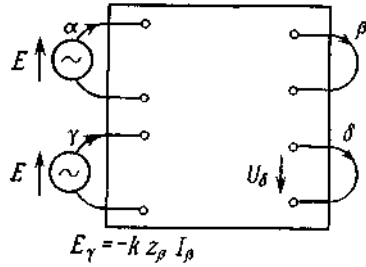


Рис. 2.17.

Выделим ветви цепи, как показано на рис. 2.17. Напряжение U_δ на выходе с помощью структурных чисел можно записать в виде

$$U_\delta = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) z_\delta E}{\det A} - \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) z_\beta I_\beta K z_\delta}{\det A}, \quad (2.18)$$

где ток I_β равен

$$I_\beta = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) E}{\det A} - \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) K z_\beta I_\beta}{\det A}.$$

В этой формуле ток I_β выражен в неявном виде. После соответствующих преобразований получим

$$I_\beta = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det A + K z_\beta \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} E. \quad (2.19)$$

Подставив уравнение (2.19) в уравнение (2.18) и выполнив простые преобразования, получим выражение передаточной функции цепи, содержащей один зависимый источник напряжения:

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)}{\det A} z_\delta - \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) K z_\beta}{\det A \left[\det A + K z_\beta \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right) \right]} z_\delta. \quad (2.20)$$

Эта формула определяет коэффициент усиления напряжения цепи, имеющий две составляющие:

$$U_\delta/E = K_0 - K_1. \quad (2.21)$$

Составляющая K_0 представляет собой усиление цепи при отсутствии активной связи, т. е. когда коэффициент усиления номинала $K = 0$;

составляющая K_1 — дополнительное усиление, обусловленное наличием зависимого источника напряжения.

Выражение (2.20) можно значительно упростить, представив его в следующем виде:

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{z_\delta}{\det A} \left[\frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) \left[\det A + W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right) \right]}{\det A + W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} - \frac{W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)}{\det A + W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} \right],$$

где $W = z_\beta K$.

Параметр W называется передаточным активным импедансом зависимого источника. Если через L_1 обозначить выражение

$$L_1 = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)}{\det A}, \quad (2.22)$$

то выражение (2.20) примет вид

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - W L_1}{\det A + W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} z_\delta. \quad (2.23)$$

Выражение (2.22) можно упростить, учитывая, что функции совпадения определяют соответствующие миноры определителя контурных сопротивлений Δ^0 исследуемой модели цепи (при $K = 0$) Имеем следующее равенство:

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \mu}, \frac{\partial A}{\partial \nu} \right) = \Delta_{\mu\nu}^0, \quad (2.24)$$

где $\Delta_{\mu\nu}^0$ — минор, полученный из определителя Δ^0 путем вычеркивания μ -строки и ν -столбца.

Если учесть это равенство в формуле (2.22), то для L_1 получим следующее выражение:

$$L_1 = \frac{\Delta_{\alpha\beta}^0 \Delta_{\gamma\delta}^0 - \Delta_{\alpha\delta}^0 \Delta_{\beta\gamma}^0}{\Delta^0}.$$

Из теории определителей известно, что

$$\Delta_{\alpha\beta}^0 \Delta_{\gamma\delta}^0 - \Delta_{\alpha\delta}^0 \Delta_{\beta\gamma}^0 = \Delta^0 \Delta_{\alpha\beta, \gamma\delta}^0, \quad (2.25)$$

где $\Delta_{\alpha\beta, \gamma\delta}^0$ — минор, полученный вычеркиванием строк α и γ и столбцов β и δ из определителя Δ^0 , поэтому величину L_1 можно определить непосредственно с помощью одной функции совпадения, а именно

$$L_1 = \Delta_{\alpha\beta, \gamma\delta} = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right). \quad (2.26)$$

Подставив уравнение (2.26) в (2.23), окончательно получим следующее выражение для усиления напряжения рассматриваемой цепи:

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - K z_\beta \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)}{\det A + K z_\beta \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} z_\delta. \quad (2.27)$$

Отметим, что знаменатель этого выражения представляет собой определитель матрицы контурных сопротивлений Δ цепи, содержащей один зависимый источник напряжения. Следовательно,

$$\Delta = \det A + K z_\beta \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right). \quad (2.28)$$

Во всех приведенных формулах A — структурное число, для которого граф исследуемой цепи служит обратным изображением.

Если известно усиление напряжения цепи и определитель Δ , то легко найти все остальные параметры, характеризующие эту цепь.

Например, *возвратная разность* равна

$$F = 1 + \frac{K z_\beta \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)}{\det A}. \quad (2.29)$$

Эта формула следует из зависимости, полученной Боде, согласно которой

$$F = \Delta / \Delta^0.$$

Рассмотрим два частных случая.

Допустим, что импеданс z_β стремится к бесконечности ($z_\beta \rightarrow \infty$). Это предположение допустимо во многих случаях для различных цепей.

Учитывая очевидное соотношение

$$\det A = \det \frac{\delta A}{\delta \beta} + z_\beta \det \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad (2.30)$$

непосредственно вытекающее из зависимости

$$A = \frac{\delta A}{\delta \beta} + [\beta] \frac{\partial A}{\partial \beta},$$

получим формулу для усиления напряжения цепи, содержащей один зависимый источник напряжения при условии, что $z_\beta \rightarrow \infty$:

$$\frac{U_\delta}{E} \Big|_{z_\beta \rightarrow \infty} = \frac{-K \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial \beta} + K \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} z_\delta. \quad (2.31)$$

Рассмотрим случай, соответствующий очень сильной обратной связи, т. е. когда $K z_\beta \rightarrow \infty$.

Тогда усиление напряжения выражается довольно простой формулой

$$\frac{U_\delta}{E} \Big|_{K z_\beta \rightarrow \infty} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)}{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} z_\delta. \quad (2.32)$$

Пример 2.15. Для цепи, изображенной на рис. 2.18, определить: 1) усиление напряжения в общем случае; 2) усиление напряжения при $z_\beta \rightarrow \infty$; 3) усиление напряжения при $K z_\beta \rightarrow \infty$; 4) возвратную разность F .

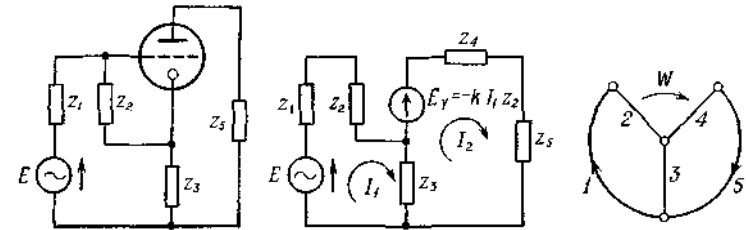


Рис. 2.18.

1) Для расчета усиления напряжения в общем случае воспользуемся формулой (2.27). Имеем

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 5.$$

Структурное число этой цепи равно

$$A = [1 \ 2 \ 3] [3 \ 4 \ 5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

поэтому

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = [3 \ 4 \ 5], \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = [3 \ 4 \ 5],$$

$$\frac{\partial A}{\partial 4} = [1 \ 2 \ 3], \quad \frac{\partial A}{\partial 5} = [1 \ 2 \ 3],$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial 1 \partial 4} = 1, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 5} = 1,$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) = z_3, \quad \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = z_3.$$

Подставив эти величины в выражение (2.27), получим

$$\frac{U_5}{E} = \frac{z_3 z_5 - K z_2 z_5}{z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + K z_2 z_3}.$$

2) Усиление напряжения при $z_\beta \rightarrow \infty$ определяем в соответствии с формулой (2.31)

$$\frac{U_5}{E} = \frac{-K z_5}{z_3 + z_4 + z_5 + K z_3}.$$

3) Усиление напряжения при $K z_\beta \rightarrow \infty$ находим по формуле (2.32)

$$\frac{U_5}{E} = -\frac{z_5}{z_3}.$$

4) Возвратную разность по отношению к элементу K можно определить по формуле (2.29):

$$F = 1 + \frac{K z_2 z_3}{z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5}.$$

1.2.3.3. Анализ модели цепи, содержащей два зависимых источника напряжения

Рассматривая модель цепи, содержащую два зависимых источника напряжения, поступим, как и в случае одного зависимого источника.

Выделим из линейной цепи зависимые источники напряжения и ветви, содержащие управляющие сигналы. В результате получим схему, изображенную на рис. 2.19, где обозначено: E — независимый источник напряжения; $E_{\gamma_1}, E_{\gamma_2}$ — зависимые источники напряжения; I_{β_1} — ток, управляющий источником E_{γ_1} ; I_{β_2} — ток, управляющий источником E_{γ_2} ; U_δ — выходное напряжение. Кроме этого, справедливы равенства

$$E_{\gamma_1} = -K_1 z_{\beta_1} I_{\beta_1}, \quad E_{\gamma_2} = -K_2 z_{\beta_2} I_{\beta_2}, \quad (2.33)$$

где z_{β_1} и z_{β_2} — импедансы ребер β_1 и β_2 соответственно.

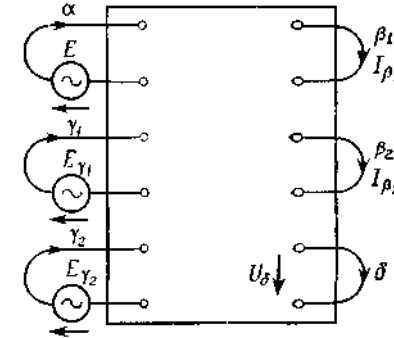


Рис. 2.19. Цепь с двумя зависимыми источниками э.д.с.

Напряжение на выходе цепи U_δ можно рассматривать как результат наложения трех источников напряжения, т. е.

$$U_\delta = \frac{\Delta^0_{\alpha\delta}}{\Delta^0} z_\delta E + \frac{\Delta^0_{\gamma_1\delta}}{\Delta^0} z_\delta E_{\gamma_1} + \frac{\Delta^0_{\gamma_2\delta}}{\Delta^0} z_\delta E_{\gamma_2}, \quad (2.34)$$

где Δ^0 — главный определитель матрицы контурных сопротивлений пассивной цепи без зависимых источников напряжения; $\Delta^0_{\alpha\delta}$ — минор определителя Δ^0 , полученный вычеркиванием строки α и столбца δ ; $\Delta^0_{\gamma_1\delta}$ — минор определителя Δ^0 , полученный вычеркиванием строки γ_1 и столбца δ ; $\Delta^0_{\gamma_2\delta}$ — минор определителя Δ^0 , полученный вычеркиванием строки γ_2 и столбца δ .

Выражение (2.34) получено с помощью метода контурных токов Максвелла.

Токи I_{β_1} и I_{β_2} также можно определить, исходя из системы контурных уравнений и принципа наложения:

$$\begin{aligned} I_{\beta_1} &= \frac{\Delta^0_{\alpha\beta_1}}{\Delta^0} E + \frac{\Delta^0_{\beta_1\gamma_1}}{\Delta^0} E_{\gamma_1} + \frac{\Delta^0_{\beta_1\gamma_2}}{\Delta^0} E_{\gamma_2}, \\ I_{\beta_2} &= \frac{\Delta^0_{\alpha\beta_2}}{\Delta^0} E + \frac{\Delta^0_{\beta_2\gamma_1}}{\Delta^0} E_{\gamma_1} + \frac{\Delta^0_{\beta_2\gamma_2}}{\Delta^0} E_{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Учитывая соотношение (2.33) и вводя обозначения

$$W_1 = K z_{\beta_1}, \quad W_2 = K z_{\beta_2}$$

(здесь W_1 и W_2 называются передаточными активными импедансами цепи), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} I_{\beta_1} \left[1 + \frac{\Delta^0_{\gamma_1\beta_1}}{\Delta^0} W_1 \right] + \frac{\Delta^0_{\gamma_2\beta_1}}{\Delta^0} I_{\beta_2} W_2 &= \frac{\Delta^0_{\alpha\beta_1}}{\Delta^0} E, \\ I_{\beta_2} \left[1 + \frac{\Delta^0_{\gamma_2\beta_2}}{\Delta^0} W_2 \right] + \frac{\Delta^0_{\gamma_1\beta_2}}{\Delta^0} I_{\beta_1} W_1 &= \frac{\Delta^0_{\alpha\beta_2}}{\Delta^0} E \end{aligned} \quad (2.36)$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 & W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0 \\ W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 & \Delta^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 \end{vmatrix},$$

первый минор:

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} \Delta_{\alpha \beta_1}^0 E & W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0 \\ \Delta_{\alpha \beta_2}^0 E & \Delta^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 \end{vmatrix},$$

второй минор:

$$\Delta'_2 = \begin{vmatrix} \Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 & \Delta_{\alpha \beta_1}^0 E \\ W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 & \Delta_{\alpha \beta_2}^0 E \end{vmatrix}.$$

Ток I_{β_1} можно записать в следующем виде:

$$I_{\beta_1} = \frac{\Delta'_1}{\Delta'} = \frac{\Delta_{\alpha \beta_1}^0 (\Delta^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0) - \Delta_{\alpha \beta_2}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0 W_2 E}{(\Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0) (\Delta^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0) - W_1 W_2 \Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0}. \quad (2.37)$$

После преобразований окончательно получим

$$I_{\beta_1} = \frac{(\Delta_{\alpha \beta_1}^0 + W_2 L_1) E}{\Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - W_1 W_2 L_{12}}, \quad (2.38)$$

где

$$L_1 = \frac{\Delta_{\alpha \beta_1}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - \Delta_{\alpha \beta_2}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0, \quad (2.39)$$

$$L_{12} = \frac{\Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - \Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\gamma_1 \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0.$$

Формулы (2.39) можно получить, раскрыв определитель по методу Лапласа.

Используя метод структурных чисел, полученные миноры, можно выразить через функции совпадения:

$$L_1 = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \right), \quad (2.40)$$

$$L_{12} = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \right),$$

где A — структурное число, для которого граф цепи служит обратным изображением, Z — множество импедансов цепи. Учитывая соотношения (2.39), ток I_{β_1} можно записать в виде

$$I_{\beta_1} = \frac{(\Delta_{\alpha \beta_1}^0 + W_2 \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0) E}{\Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - W_1 W_2 \Delta_{\gamma_1 \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0} = \frac{N_1}{\Delta} E. \quad (2.41)$$

Аналогично для тока I_{β_2} имеем

$$I_{\beta_2} = \frac{\Delta'_2}{\Delta'} = \frac{(\Delta_{\alpha \beta_2}^0 - W_1 L_2) E}{\Delta'}, \quad (2.42)$$

где

$$L_2 = \frac{\Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 \Delta_{\alpha \beta_1}^0 - \Delta_{\alpha \beta_2}^0 \Delta_{\beta_1 \gamma_1}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0. \quad (2.43)$$

В этой формуле $\Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0$ — минор, полученный вычеркиванием строк α и γ_1 и столбцов β_1 и β_2 определителя Δ^0 . Этот минор можно также выразить с помощью функции совпадения

$$L_2 = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \right). \quad (2.44)$$

В формуле (2.43), как и выше, A — структурное число, для которого граф цепи служит обратным изображением, а Z — множество импедансов цепи.

Учитывая формулу (2.43), ток I_{β_2} можно представить в виде

$$I_{\beta_2} = \frac{(\Delta_{\alpha \beta_2}^0 - W_1 \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0) E}{\Delta} = \frac{N_2 E}{\Delta}, \quad (2.45)$$

где

$$\Delta = \Delta^0 + W_1 \Delta_{\alpha \beta_1}^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - W_1 W_2 \Delta_{\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2}^0.$$

Подставляя соотношения (2.41) и (2.45) в (2.34), получим выражение, определяющее усиление цепи, содержащей два зависимых источника напряжения:

$$\frac{U_\delta}{E} = \left(\frac{\Delta_{\alpha \delta}^0}{\Delta^0} - \frac{\Delta_{\gamma_1 \delta}^0}{\Delta^0} \frac{N_1}{\Delta} W_1 - \frac{\Delta_{\gamma_2 \delta}^0}{\Delta^0} \frac{N_2}{\Delta} W_2 \right) z_\delta.$$

Эту формулу можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{z_\delta}{\Delta^0} \frac{\Delta_{\alpha \delta}^0 \Delta - \Delta_{\gamma_1 \delta}^0 N_1 W_1 - \Delta_{\gamma_2 \delta}^0 N_2 W_2}{\Delta}. \quad (2.46)$$

Подставив в выражение (2.46) значения коэффициентов N_1 и N_2 , получим

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{\Delta_{\alpha \delta}^0 - W_1 L_1^* - W_2 L_2^* + W_1 W_2 L_{12}^*}{\Delta}, \quad (2.47)$$

где

$$L_1^* = \frac{\Delta_{\gamma_1 \delta}^0 \Delta_{\alpha \beta_1}^0 - \Delta_{\alpha \delta}^0 \Delta_{\beta_1 \gamma_1}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\gamma_1 \delta, \alpha \beta_1}^0,$$

$$L_2^* = \frac{\Delta_{\gamma_2 \delta}^0 \Delta_{\alpha \beta_2}^0 - \Delta_{\alpha \delta}^0 \Delta_{\beta_2 \gamma_2}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\gamma_2 \delta, \alpha \beta_2}^0,$$

$$L_{12}^* = \frac{\Delta_{\alpha \delta}^0 \Delta_{\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2}^0 - \Delta_{\gamma_1 \delta}^0 \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0 + \Delta_{\gamma_2 \delta}^0 \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\alpha \delta, \beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2}^0. \quad (2.48)$$

Здесь, как и выше, величины $\Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0$, $\Delta_{\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2}^0$, $\Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0$ — соответствующие миноры определителя Δ^0 , которые можно выразить через функции совпадения

$$\begin{aligned} L_1^* &= \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \delta} \right), \\ L_2^* &= \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \gamma} \right), \\ L_{12}^* &= \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \partial \gamma_2}, \frac{\partial^3 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \partial \delta} \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

причем граф цепи служит обратным изображением структурного числа A , Z — множество импедансов цепи.

Учитывая полученные результаты, окончательно запишем формулу усиления цепи, содержащей два зависимых источника напряжения:

$$\begin{aligned} & \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - W_1 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \delta} \right) - \\ & - W_2 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \delta} \right) + W_1 W_2 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \partial \gamma_2}, \frac{\partial^3 A}{\partial \delta \partial \beta_1 \partial \beta_2} \right) z_\delta \\ \frac{U_\delta}{E} &= \frac{\det A + W_1 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_1}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_1} \right) + W_2 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_2}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_2} \right) -}{\det A + W_1 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} \right)} z_\delta. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Отдельным величинам и выражениям этой формулы можно дать простую физическую интерпретацию.

Первые члены числителя и знаменателя выражения (2.50) характеризуют непосредственное прохождение сигнала в предположении, что оба коэффициента усиления равны нулю (т. е. оба активных передаточных импеданса W_1 и W_2 равны нулю). Таким образом, непосредственная передача сигнала определяется формулой

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)}{\det A}.$$

Два первых члена числителя и два первых члена знаменателя определяют усиление цепи при нулевом коэффициенте усиления другой номинала ($W_2=0$). Аналогично первый и третий члены числителя и знаменателя определяют усиление цепи при нулевом коэффициенте усиления первого номинала ($W_1=0$).

1.2.3.4. Формулы для расчета модели цепи, содержащей N зависимых источников напряжения

На основании формул для моделей цепей, содержащих один или два зависимых источника, можно вывести формулы для цепи, содержащей N зависимых источников напряжения.

Формула усиления цепи с N зависимыми источниками напряжения имеет вид

$$\begin{aligned} & \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - \sum_{i=1}^N W_i \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_i}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_i \partial \delta} \right) + \\ & + \sum_{i < j} W_i W_j \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_i \partial \gamma_j}, \frac{\partial^3 A}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \delta} \right) - \dots \\ \frac{U_\delta}{E} &= \frac{\det A + \sum_{i=1}^N W_i \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} \right) -}{\det A + \sum_{i=1}^N W_i \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} \right) -} z_\delta \\ & - \sum_{i < j} W_i W_j \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_i \partial \beta_j}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $W_i = K_i z_{\beta_i}$.

Если предположить, что все активные передаточные импедансы стремятся к бесконечности (этот случай соответствует очень сильной обратной связи), то формула для усиления упростится и примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{U_\delta}{E} \Big|_{W_1 W_2 \dots W_n \rightarrow \infty} = \\ & = (-1)^N \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^{N+1} A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_N}, \frac{\partial^{N+1} A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \dots \partial \beta_N \partial \delta} \right)}{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \dots \partial \beta_N}, \frac{\partial^N A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2 \dots \partial \gamma_N} \right)} z_\delta. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Формулу для возвратной разности можно вывести на основании свойства, полученного Боде, согласно которому возвратная разность выражается отношением определителя матрицы импедансов цепи к ее определителю при нулевых зависимых источниках напряжения. В результате получим

$$F = 1 + \frac{\sum_{i=1}^N W_i \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} \right) - \sum_{i < j} W_i W_j \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_i \partial \beta_j}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right) + \dots}{\det_Z A} \quad (2.53)$$

Определим усиление цепи при $z_{\beta_N} \rightarrow \infty$.

Легко показать, что детерминантная функция числа A имеет вид

$$\det_Z A = \det_Z \frac{\delta^N A}{\delta \beta_1 \dots \delta \beta_N} + z_{\beta_1} \dots z_{\beta_N} \det_Z \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N}.$$

В случае, если выполняется условие

$$\lim_{z_{\beta_1} \dots z_{\beta_N} \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)}{z_{\beta_1}^2 z_{\beta_2}^2 z_{\beta_3}^2 \dots z_{\beta_N}^2} = 0, \quad (2.54)$$

формула усиления напряжения цепи запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{U_\delta}{E} \Big|_{z_{\beta_1} \dots z_{\beta_N} \rightarrow \infty} &= \\ &= (-1)^N \frac{K_1 K_2 \dots K_N \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^{N+1} A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_N}, \frac{\partial^{N+1} A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N \partial \delta} \right)}{\det_Z \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N} + K_1 K_2 \dots} z_\delta \\ &\dots K_N \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^N A}{\partial \gamma_1 \dots \partial \delta_N}, \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N} \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Эта формула может быть записана в виде

$$k \Big|_{z_{\beta_1} \dots z_{\beta_N} \rightarrow \infty} = \frac{\mathcal{K}}{1 + \mathcal{K} \mathcal{B}}, \quad (2.56)$$

где

$$\mathcal{K} = \frac{(-1)^N K_1 K_2 \dots K_N \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^{N+1} A}{\partial \alpha_1 \dots \partial \gamma_1 \partial \gamma_N}, \frac{\partial^{N+1} A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N \partial \delta} \right)}{\det_Z \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N}} z_\delta, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{B} = \frac{(-1)^N \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^N A}{\partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_N}, \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N} \right)}{\operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^{N+1} A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_N}, \frac{\partial^{N+1} A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N \partial \delta} \right)} \frac{1}{z_\delta}. \quad (2.58)$$

Теорема 2.1. При выполнении условия (2.54) любую активную цепь с зависимыми источниками напряжения можно представить в виде цепи с одной обратной связью, причем передаточная функция \mathcal{K} главной ветви и передаточная функция ветви обратной связи \mathcal{B} определяются формулами (2.57) и (2.58) (рис. 2.20).

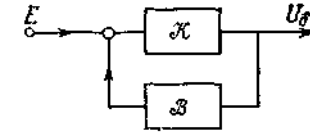


Рис. 2.20. Цепь с обратной связью.

В случае очень сильной обратной связи, т. е. когда $\mathcal{K} \rightarrow \infty$, имеем

$$k \Big|_{\mathcal{K} \rightarrow \infty} = \frac{1}{\mathcal{B}}. \quad (2.59)$$

Из этой формулы, известной из теории обратной связи, следует, что усиление цепи с очень сильной обратной связью не зависит от элементов главной ветви.

Пример 2.16. Определить усиление напряжения и возвратную разность для схемы с обратной связью (рис. 2.21, а).

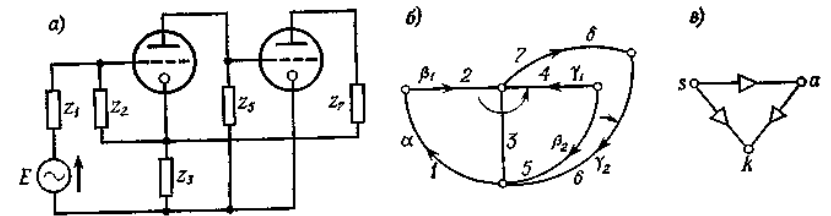


Рис. 2.21.

Решение. В этой цепи две активные связи (рис. 2.21, б): β_1 с γ_1 , а также β_2 с γ_2 . Выбираем ориентацию ветвей β и γ , учитывая то, что каждый триод можно представить унисторным треугольником (рис. 2.21, в).

Рассчитаем структурное число заданной цепи (граф цепи служит его обратным изображением), которое представляет собой произведение трех структурных чисел

$$P_1 = [1 \ 2 \ 3], \quad P_2 = [3 \ 4 \ 5], \quad P_3 = [3 \ 6 \ 7].$$

В результате получим

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Усиление напряжения цепи рассчитаем по формуле

$$K = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - L_1^* W_1 - L_2^* W_2 + L_{12}^* W_1 W_2}{\Delta^0 + L_1 W_1 + L_2 W_2 - L_{12} W_1 W_2} z_6.$$

Имеем

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \delta} = \frac{\partial A}{\partial 7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_1}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_1} \right),$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_1} = \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_2}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_2} \right),$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_2} = \frac{\partial A}{\partial 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial A}{\partial 6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$L_{12} = \text{Sim} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 5} = [3 \ 6 \ 7], \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial 4 \partial 6} = [1 \ 2 \ 3],$$

$$L_1^* = \text{Sim} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \delta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1} = \frac{\partial^2 A}{\partial 1 \partial 4} = [3 \ 6 \ 7], \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \delta} = \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 7} = [3 \ 4 \ 5],$$

$$L_2^* = \text{Sim} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \delta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial 1 \partial 6} = [3 \ 4 \ 5], \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \delta} = \frac{\partial^2 A}{\partial 5 \partial 7} = [1 \ 2 \ 3],$$

$$L_{12}^* = \text{Sim} \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \partial \gamma_2}, \frac{\partial^3 A}{\partial \delta \partial \beta_1 \partial \beta_2} \right),$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \partial \gamma_2} = \frac{\partial^3 A}{\partial 1 \partial 4 \partial 6} = 1, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \delta \partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^3 A}{\partial 7 \partial 2 \partial 5} = 1,$$

$$\text{Sim}(1, 1) = 1,$$

$$W_1 = K_1 z_2, \quad W_2 = K_2 z_5.$$

Подставив эти выражения в формулу усиления напряжения, получим

$$K = \frac{(z_3 z_4 + z_3 z_5 - K_1 z_2 z_3 - K_1 K_2 z_2 z_5) z_7}{z_1 z_3 z_6 + z_1 z_3 z_7 + z_1 z_4 z_3 + z_1 z_4 z_6 + z_1 z_4 z_7 + z_1 z_5 z_3 + z_1 z_5 z_6 + z_1 z_5 z_7 + z_2 z_3 z_6 + z_2 z_3 z_7 + z_2 z_4 z_3 + z_2 z_4 z_6 + z_2 z_4 z_7 + z_2 z_5 z_3 + z_2 z_5 z_6 + z_2 z_5 z_7 + z_3 z_4 z_6 + z_3 z_4 z_7 + z_3 z_5 z_6 + z_3 z_5 z_7 + K_1 z_2 (z_3 z_6 + z_3 z_7) + K_2 z_5 (z_1 z_3 + z_2 z_3) + K_1 K_2 z_2 z_3 z_5} \rightarrow$$

Примечание. Знаки слагаемых функции совпадения можно найти, приняв следующее определение функции ориентации:

$$\text{Ориентация } (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \gamma_1 \dots \gamma_n) = \begin{cases} +1, & \text{если четное число ветвей } \beta_i, \gamma_i \text{ не совпадает} \\ & \text{с положительным направлением контура;} \\ -1, & \text{если нечетное число ветвей } \beta_j, \gamma_j \text{ не совпа-} \\ & \text{дает с положительным направлением контура,} \end{cases}$$

согласно формулам (2.48).

Возвратная разность определяется по формуле $F = \Delta/\Delta^0$, где $\Delta^0 = \det A$, т. е.

$$F = 1 + \frac{K_1 z_2 (z_3 z_6 + z_3 z_7) + K_2 (z_1 z_3 + z_2 z_3) + K_1 K_2 z_2 z_3 z_5}{z_1 z_3 z_6 + z_1 z_3 z_7 + \dots + z_3 z_5 z_7}.$$

Если электронная цепь содержит пентоды, расчеты можно упростить. В предположении, что внутреннее сопротивление пентода бесконечно велико, получим формулу усиления напряжения цепи с одним пентодом

$$K = \frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)^d - S \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^y}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)^d}{\det A^d + S \text{Sim}_z \left(A^y, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^d} \frac{1}{z_\alpha}, \quad (2.60)$$

где A — структурное число, для которого граф цепи служит изображением; S — крутизна характеристики анодного тока триода; A^y — структурное число, изображением которого служит граф цепи, полученный в результате замыкания анода и катода триода.

(Символ $\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^d$ назовем дополнением функции совпадения $\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)$. Это сумма, слагаемыми которой служат произведения дополняющих элементов (в смысле алгебры множеств) слагаемых суммы $\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)$ на множестве элементов этой суммы.)

Пример 2.17. Определить усиление напряжения цепи с одним пентодом (рис. 2.22, а).

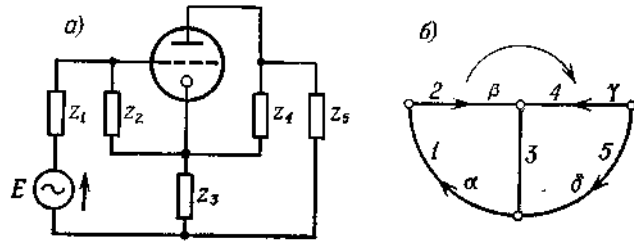


Рис. 2.22.

Решение. Усиление напряжения цепи найдем по формуле

$$K = \frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)^d - S \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^y}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)^d}{\det A^d + S \text{Sim}_z \left(A^y, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^d} \frac{1}{z_\alpha}.$$

Граф цепи (рис. 2.22, б) служит обратным изображением дополнительного структурного числа A^d , равного произведению двух структурных чисел

$$P_1 = [1 \ 2 \ 3] \quad \text{и} \quad P_2 = [3 \ 4 \ 5],$$

т. е.

$$A^d = [1 \ 2 \ 3] [3 \ 4 \ 5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Множество ребер графа равно

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

поэтому структурное число имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \delta} = \frac{\partial A}{\partial 5} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^y = \frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A^y}{\partial 1} = [5 \ 3 \ 2],$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} = \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 5} = [4 \ 3 \ 1],$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) = z_2 z_4, \quad \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)^d = z_1 z_2 z_5,$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^y}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right) = z_3, \quad \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^y}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)^d = z_1 z_2 z_4 z_5$$

$$\text{Sim}_z \left(A^y, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = z_1 z_5, \quad \text{Sim}_z \left(A^y, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^d = z_2 z_3 z_4.$$

Подставив эти выражения в формулу усиления напряжения, получим

$$K = \frac{z_1 z_3 z_5 - S z_1 z_2 z_4 z_5}{(z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5 - S z_2 z_3 z_4) z_1},$$

или после упрощения

$$K = \frac{z_3 z_5 - S z_2 z_4 z_5}{z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5 - S z_2 z_3 z_4}.$$

Пример 2.18. Рассчитать усиление одноламповой цепи с пентодом (рис. 2.23, а).

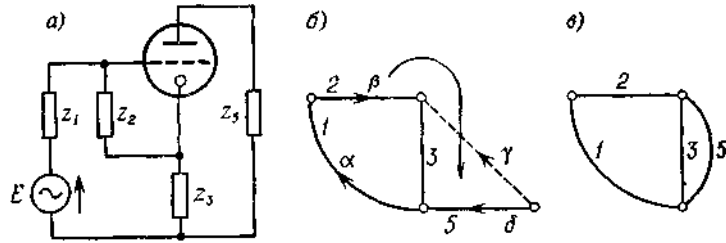


Рис. 2.23.

Решение. Граф цепи (рис. 2.23, б) служит обратным изображением структурного числа A^d . В нашем случае

$$A^d = [1 \ 2 \ 3].$$

Множество ребер графа равно

$$N = \{1, 2, 3, 5\};$$

тогда структурное число имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Усиление напряжения определим по формуле

$$K = \frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)^d - S \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^v}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)^d}{\det A^d + S \text{Sim}_z \left(A^v, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^d} \frac{1}{z_\alpha}.$$

Отдельные составляющие этой формулы равны

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \delta} = \frac{\partial A}{\partial 5} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) = 0.$$

Геометрическим изображением структурного числа A^v служит граф, полученный при замыкании анода и катода триода (рис. 2.23, в), поэтому структурное число A^v равно произведению чисел

$$P_1 = [1 \ 2] \quad \text{и} \quad P_2 = [2 \ 3 \ 5],$$

т. е.

$$A^v = P_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial A^v}{\partial \beta} = \frac{\partial A^v}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(A^v, \frac{\partial A^v}{\partial \beta} \right) = z_1 z_5, \quad \text{Sim}_z \left(A^v, \frac{\partial A^v}{\partial \beta} \right)^d = z_2 z_3.$$

$$\frac{\partial A^v}{\partial \alpha} = \frac{\partial A^v}{\partial 1} = [2 \ 3 \ 5], \quad \frac{\partial^2 A^v}{\partial \beta \partial \delta} = \frac{\partial^2 A^v}{\partial 2 \partial 5} = [3 \ 1],$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^v}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 A^v}{\partial \beta \partial \delta} \right) = z_3, \quad \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^v}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 A^v}{\partial \beta \partial \delta} \right)^d = z_1 z_2 z_5,$$

Подставив эти выражения в формулу усиления напряжения, получим

$$K = \frac{-S z_1 z_2 z_5}{(z_1 + z_2 + z_3 + S z_2 z_3) z_1} = \frac{-S z_2 z_5}{z_1 + z_2 + z_3 + S z_2 z_3}.$$

Пример 2.19. Определить входной импеданс схемы на пентодах (рис. 2.24, а).

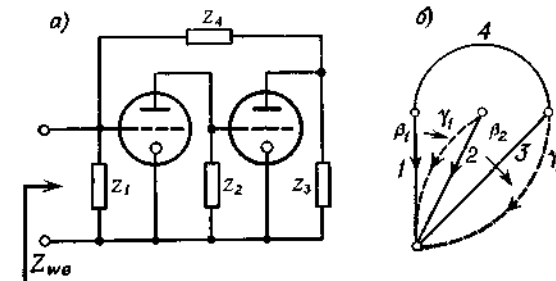


Рис. 2.24.

Решение. Граф цепи (рис. 2.24, б) служит обратным геометрическим изображением его структурного числа. Дополнительное структурное число имеет вид:

$$A^d = [1 \ 3 \ 4],$$

а множество ребер графа равно

$$N = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Поэтому структурное число равно

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для определения входного импеданса необходимо найти определитель матрицы контурных сопротивлений. Тогда входной импеданс можно определить по формуле

$$Z_{вх} = \frac{z_1 \cdot \Delta |_{z_1=0}}{\Delta}.$$

Определитель, стоящий в знаменателе функции усиления, равен

$$\Delta = \det_z A^d + S_1 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_1}, A^{v_1} \right)^d + S_2 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_2}, A^{v_2} \right)^d - S_1 S_2 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, A^{v_1 v_2} \right)^d.$$

Отдельные составляющие этого выражения равны

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_1} = \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \beta_2} = \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = [3 \ 4], \quad A^{v_1} = \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A^{v_2} = \frac{\partial A}{\partial 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{v_1 v_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 3} = [4 \ 1].$$

Тогда

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, A^{v_1 v_2} \right)^d = z_1 z_2 z_3,$$

$$\Delta = z_1 + z_3 + z_4 - S_1 S_2 z_1 z_2 z_3,$$

$$\Delta |_{z_1=0} = z_3 + z_4,$$

т. е.

$$Z_{вх} = \frac{z_1 (z_3 + z_4)}{z_1 + z_3 + z_4 - S_1 S_2 z_1 z_2 z_3}.$$

Пример 2.20. Найти входной импеданс трехтриодной схемы на пентодах (рис. 2.25,а).

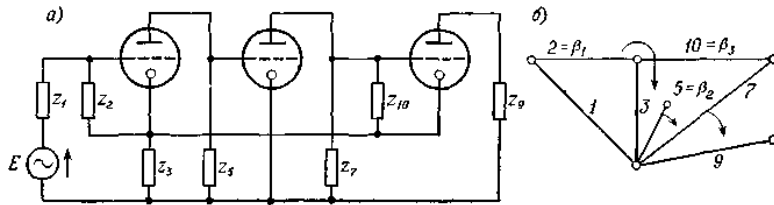


Рис. 2.25.

Решение. Входной импеданс определяется формулой

$$Z_{вх} = \frac{z_1 \cdot \Delta |_{z_1=0}}{\Delta}.$$

Найдем определитель матрицы импедансов

$$\Delta = \det_z A^d + S_1 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_1}, A^{v_1} \right)^d + S_2 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_2}, A^{v_2} \right)^d + S_3 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_3}, A^{v_3} \right)^d - S_1 S_2 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, A^{v_1 v_2} \right)^d + S_1 S_3 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_3}, A^{v_1 v_3} \right)^d - S_2 S_3 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \beta_3}, A^{v_2 v_3} \right)^d + S_1 S_2 S_3 \text{Sim}_z \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \partial \beta_3}, A^{v_1 v_2 v_3} \right)^d.$$

Граф цепи (рис. 2.25, б) служит изображением структурного числа A . Дополнительное структурное число равно произведению двух однострочных структурных чисел

$$A^d = [1 \ 2 \ 3] [3 \ 7 \ 10],$$

т. е.

$$A^d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 7 & 10 & 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

Множество ребер графа представим как

$$N = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\},$$

а структурное число запишем

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 9 & 9 & 7 & 9 & 9 & 7 & 9 & 7 \\ 10 & 10 & 9 & 10 & 10 & 9 & 10 & 9 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, отдельные составляющие определителя матрицы контурных сопротивлений равны

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_1} = \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 9 & 9 & 7 & 9 & 7 \\ 10 & 10 & 9 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A^{v_1} = \frac{\partial A}{\partial \beta_2} = \frac{\partial A}{\partial 5} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 7 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & 7 & 9 & 9 & 7 & 9 & 7 \\ 10 & 10 & 9 & 10 & 10 & 9 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_1}, A^{y_1} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial A}{\partial \beta_2} = \frac{\partial A}{\partial \tau} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 9 & 5 & 5 \\ 10 & 9 & 10 & 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_2}, A^{y_2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_3} = \frac{\partial A}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 5 & 7 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 7 & 10 & 10 & 7 & 10 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_3}, A^{y_3} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^3 A}{\partial 2 \partial 5} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 & \boxed{1} & 1 \\ 9 & 9 & 7 & \boxed{9} & 7 \\ 10 & 10 & 9 & \boxed{10} & 9 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial 5 \partial 7} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 9 & 3 & \boxed{9} & 3 & 2 \\ 10 & 9 & \boxed{10} & 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} \right)^d = z_2 z_3 z_5 z_7,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_3} = \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 7} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 5 \\ 10 & 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_3} = \frac{\partial^2 A}{\partial 5 \partial 9} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 7 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 7 & 10 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_3}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_3} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \beta_3} = \frac{\partial^2 A}{\partial 7 \partial 5} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 9 & 3 & 2 \\ 10 & 9 & 10 & 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_3} = \frac{\partial^2 A}{\partial 7 \partial 9} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 10 & 5 & 10 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \beta_3}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_2 \partial \gamma_3} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \partial \beta_3} = \frac{\partial^3 A}{\partial 2 \partial 5 \partial 10} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2 \partial \gamma_3} = \frac{\partial^3 A}{\partial 5 \partial 7 \partial 9} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \partial \beta_3}, \frac{\partial^3 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2 \partial \gamma_3} \right) = 0.$$

Подставив эти величины в исходную формулу входного импеданса, получим

$$Z_{вх} = \frac{(z_2 z_3 + z_2 z_7 + z_2 z_{10} + z_3 z_7 + z_3 z_{10} - S_1 S_2 z_2 z_3 z_5 z_7) z_1}{z_1 z_3 + z_1 z_7 + z_1 z_{10} + z_2 z_3 + z_2 z_7 + z_2 z_{10} + z_3 z_7 + z_3 z_{10} - S_1 S_2 z_2 z_3 z_5 z_7}.$$

1.3. Анализ моделей электрических блок-схем методом структурных чисел

1.3.1. Введение

Модель электрической блок-схемы — это схема, составленная из многополюсников, где под *многополюсником* понимается цепь с несколькими выводами (например, двух-, трех-, четырехполюсник и т. д.), содержащая элементы с сосредоточенными или распределенными параметрами и не имеющая индуктивной связи с другими многополюсниками схемы. Многополюсник может иметь внутренние индуктивные связи. Мы будем рассматривать линейные электрические блок-схемы.

На рис. 3.1, а изображена блок-схема, состоящая из четырех четырехполюсников, т. е. блоков с четырьмя выводами W_1, W_2, W_3, W_4 , и имеющая 10 узлов $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{10}$.

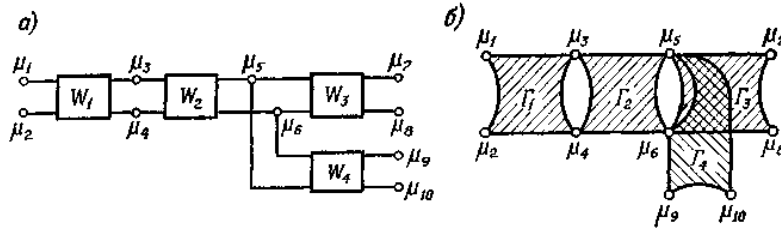


Рис. 3.1. Блок-схема: а) схема цепи; б) блок-граф цепи.

Считаем, что проводники, соединяющие отдельные блоки, не обладают сопротивлением и не имеют взаимных индуктивных и емкостных связей (в противном случае проводники нужно рассматривать как часть соответствующих блоков).

Граф блок-схемы будем изображать в виде блок-графа, отдельные блоки которого соответствуют многополюсникам схемы. На рис. 3.1. б представлен блок-граф для схемы, показанной на рис. 3.1, а, число блоков, и вершин которого равно соответственно числу многополюсников и узлов блок-схемы, а число выводов — числу выводов соответствующего многополюсника схемы. Блок-граф не имеет ребер, соединяющих выводы разных блоков, т. е. проводники, соединяющие выводы многополюсников схемы, представляются соответствующими вершинами блок-графа. Заметим, что число контуров, образованных многополюсниками схемы, равно числу циклов скелета ее блок-графа. В связи с этим напишем

$$M = \sum_{k=1}^g v_k - v - g + 1, \quad (3.1)$$

где M — число независимых контуров, образованных соединениями блок-схемы, равное числу независимых циклов скелета ее блок-графа; v_k — число выводов многополюсника W_k , равное числу вершин блока Γ_k блок-графа; g — число многополюсников блок-схемы, равное числу блоков блок-графа; v — число узлов блок-графа, равное числу вершин блок-графа.

Например, для блок-схемы, представленной на рис. 3.1, а, а также для ее блок-графа (рис. 3.1, б) имеем

$$v_1 = 4, \quad v_2 = 4, \quad v_3 = 4, \quad v_4 = 4, \quad v = 10, \quad g = 4,$$

следовательно,

$$M = 16 - 10 - 4 + 1 = 3.$$

При рассмотрении блок-схемы возможны два случая: а) структура многополюсников (блоков) схемы известна; б) структура многополюсников схемы неизвестна.

В первом случае блоки блок-графа можно заменить подграфами отдельных многополюсников схемы, после чего определить структурные числа A_Γ этих блоков.

Во втором случае можно воспользоваться только внешними параметрами отдельных многополюсников, например передаточными сопротивлениями или проводимостями, коэффициентами передачи напряжения, тока, а также напряжениями и токами зажимов и т. д. Этот случай более интересен по следующим причинам. Во-первых, при анализе моделей цепей с известной структурой многополюсников, особенно когда в них встречаются элементы с распределенными параметрами и индуктивными связями, эти многополюсники можно рассматривать как части цепи, не определяя их схем замещения. Так, например, анализируя электрическую цепь с индуктивными связями, можно выделить в этой цепи элементы связи и рассматривать их как многополюсник (с неизвестной структурой), а затем анализировать цепь как блок-схему. Во-вторых, при синтезе электрических схем можно рассматривать их как блок-схемы, учитывая лишь внешние параметры отдельных многополюсников, т. е. не определяя их внутренней структуры, так как внешние параметры многополюсников определяют не один, а целый класс структур.

При анализе блок-схем с неизвестной структурой блоков воспользуемся методом полных структурных чисел.

Отметим, что блок-схемы (неэлектрические) находят применение во многих областях: экономике, организации и т. д. Если, например, построить «хозяйственную» модель в виде блок-схемы, отдельные блоки которой представляют собой хозяйственные единицы, а связывающие их линии — пути взаимодействия этих единиц, то такую модель можно анализировать (не изучая структуры отдельных блоков), основываясь только на их внешних характеристиках, определяющих способ отклика хозяйственных единиц на внешние возмущения.

1.3.2. Детерминантная функция блок-схемы

Как известно, детерминантная функция структурного числа A равна определителю Δ матрицы узловых проводимостей схемы, граф которой служит геометрическим изображением структурного числа A , а проводимости ветвей образуют множество Y комплексных чисел, т. е.

$$\Delta = \det_Y A = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m y_{\alpha_{ij}}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_g\}. \quad (3.2)$$

Аналогично определим *детерминантную функцию полного структурного числа* \mathcal{A}

$$\det_Y \mathcal{A} = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m y_{\alpha_{ij}}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_g\}. \quad (3.3)$$

Например,

$$\det_Y \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{Bmatrix} = y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 + y_2 y_1 y_3 + y_1 y_1 y_4 = \\ = 2y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 + y_1^2 y_4.$$

Заметим, что в отличие от детерминантной функции структурного числа A в детерминантную функцию полного структурного числа могут входить коэффициенты и показатели степени, большие 1.

На основании определения равенства структурных чисел A и \mathcal{A} можно написать

$$(\mathcal{A} \stackrel{s}{=} A) \Leftrightarrow (\det_Y \mathcal{A} = \det_Y A = \Delta), \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_g\}. \quad (3.4)$$

Аналогичные определения и соотношения имеют место и для детерминантной функции дополнительного числа A^d и полного дополнительного числа \mathcal{A}^d . Эти функции определим на множестве комплексных чисел, равных импедансам ветвей цепи. Поэтому имеем

$$\Delta^d = \det_Z A^d = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m z_{\alpha_{ij}}, \quad Z = \{z_1, z_2, \dots, z_g\}, \quad (3.5)$$

$$(\mathcal{A}^d \stackrel{s}{=} A^d) \Leftrightarrow (\det_Z \mathcal{A}^d = \det_Z A^d = \Delta^d), \quad Z = \{z_1, z_2, \dots, z_g\}, \quad (3.6)$$

где Δ^d — детерминантная функция дополнительного числа A^d , равная определителю матрицы контурных сопротивлений электрической цепи, граф которой служит геометрическим изображением дополнительного числа A^d , а импедансы ветвей образуют множество Z комплексных чисел.

Легко проверить, что

$$\frac{\Delta}{\Delta^d} = \frac{\det_Y A}{\det_Z A^d} = \prod_{i=1}^g y_i, \quad (3.7)$$

$$\frac{\Delta^d}{\Delta} = \frac{\det_Z A^d}{\det_Y A} = \prod_{i=1}^g z_i, \quad (3.8)$$

где $y_i = z_i^{-1}$ — адмитанс ветви α_i , g — число всех ветвей цепи.

Детерминантную функцию структурного числа второй категории 2A можно определить двумя способами:

$$1. \quad \det_Y {}^2A = \det_Y A, \quad A \stackrel{e}{=} {}^2A, \quad (3.9)$$

$$2. \quad \det_Y {}^2A = \det_{\Delta_{ij} \in \mathcal{D}} \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \stackrel{s}{=} {}^2A, \\ \mathcal{D} = \{\Delta_{ij}\}, \quad \Delta_{ij} = \det_Y \mathcal{A}_{ij}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{A}_{ij} \stackrel{s}{=} A_{ij}.$$

Это означает, что в первом случае число 2A приводим к замещающему его числу A первой категории, а затем определяем детерминантную функцию числа A . Второй способ основан на определении полного структурного числа \mathcal{A} , выраженного через полные структурные числа $\mathcal{A}_{ij} \stackrel{s}{=} A_{ij}$, где A_{ij} — элементы числа 2A , подстановке вместо чисел \mathcal{A}_{ij} их детерминантных функций $\Delta_{ij} = \det_Y \mathcal{A}_{ij}$ и проведении соответствующих алгебраических операций.

Вычисление детерминантной функции структурного числа второй категории 2A или дополнительного числа ${}^2A^d$ подобно расчету определителя матриц проводимостей или сопротивлений блок-схемы. Поясним это на примерах.

Пример 3.1. Найти определитель матрицы узловых проводимостей блок-схемы (рис. 3.2, а), блок-граф Γ которой показан на рис. 3.2, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 3.2, в.

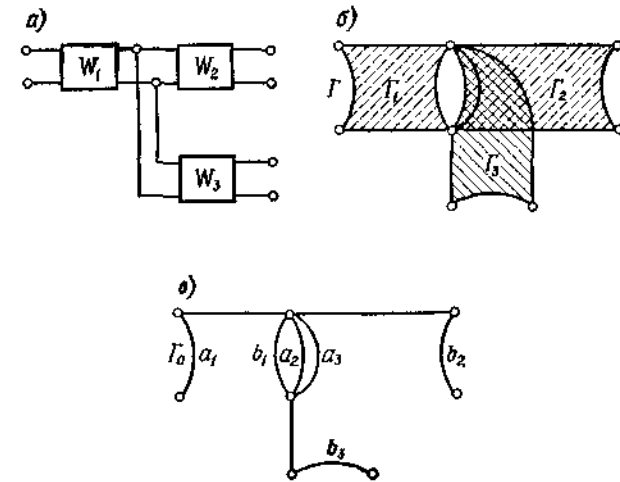


Рис. 3.2.

Дополнительное число A_0^d скелета Γ_0 равно

$$A_0^d = [b_1 \ a_2] [b_1 \ a_3] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_3 \end{bmatrix};$$

следовательно, структурное число 2A графа Γ запишется в виде

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Если известна структура многополюсников (четырёхполюсников) рассматриваемой схемы, то определитель матрицы проводимостей этой схемы можно рассчитать первым методом, приравняв 2A к его замещающему числу $A^e = {}^2A$.

Пусть, например (для упрощения расчетов), все блоки имеют одинаковую структуру (рис. 3.3, а). Графы отдельных блоков графа Γ показаны на рис. 3.3, б (одинаковые обозначения ребер этих графов недопустимы).

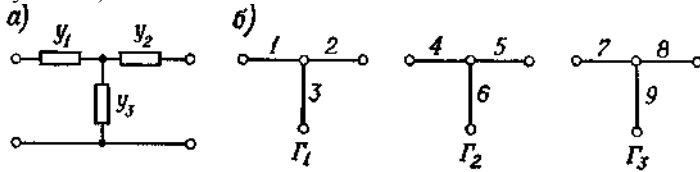


Рис. 3.3.

Структурные числа подграфов запишем в виде

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$A_{1b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{2a} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_{3a} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Подставляя структурные числа подграфов в выражение (а), для структурного числа 2A имеем

$${}^2A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = A^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, определитель матрицы проводимостей блок-схемы равен

$$\Delta = \det A = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 (y_6 y_7 + y_6 y_9 + y_7 y_9 + y_3 y_7 + y_3 y_9) +$$

$$+ y_1 y_3 y_5 y_6 y_8 (y_4 y_7 + y_4 y_9 + y_7 y_9 + y_2 y_7 + y_2 y_9) +$$

$$+ y_1 y_5 y_7 y_8 y_9 (y_2 y_6 + y_3 y_4).$$

Если адмитансы соответствующих ветвей всех многополюсников равны друг другу, т. е.

$$y_1 = y_4 = y_7, \quad y_2 = y_6 = y_8, \quad y_3 = y_6 = y_9,$$

то определитель схемы будет иметь вид

$$\Delta = y_1 y_2^2 y_3 (3 y_1^2 y_2 + 4 y_1 y_2 y_3 + 2 y_1^2 y_3 + 2 y_1 y_3^2 + y_2 y_3^2).$$

Замечания. Можно заметить, что для данной схемы проще найти определитель матрицы контурных сопротивлений схемы, так как дополнительное число равно

$${}^2A^d = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1^d \\ A_2^d \\ A_3^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b}^d & A_{1b}^d & A_1^d \\ A_2^d & A_{2a}^d & A_{2a}^d \\ A_{3a}^d & A_3^d & A_{3a}^d \end{bmatrix}, \quad (б)$$

а дополнительные числа отдельных подграфов

$$A_1^d = 1, \quad A_2^d = 1, \quad A_3^d = 1,$$

$$A_{1b}^d = [2 \ 3], \quad A_{2a}^d = [4 \ 6], \quad A_{3a}^d = [7 \ 9].$$

Таким образом,

$${}^2A^d = \begin{bmatrix} \{2\ 3\} & \{2\ 3\} & 1 \\ 1 & \{4\ 6\} & \{4\ 6\} \\ \{7\ 9\} & 1 & \{7\ 9\} \end{bmatrix} \stackrel{e}{=} A^d = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ 7 & 9 & 7 & 9 & 4 & 6 & 4 & 6 & 7 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\Delta^d = (z_2 + z_3)(z_7 + z_9 + z_4 + z_6) + (z_4 + z_6)(z_7 + z_9).$$

Если

$$z_1 = z_4 = z_7, \quad z_2 = z_5 = z_8, \quad z_3 = z_6 = z_9,$$

то

$$\Delta^d = (z_1 + z_3)(z_1 + 2z_2 + 3z_3).$$

Полученные результаты можно проверить с помощью формулы

$$\frac{\Delta}{\Delta^d} = y_1^3 y_2^3 y_3^3$$

либо

$$\Delta = \Delta^d y_1^3 y_2^3 y_3^3.$$

Если структура блоков интереса не представляет, то необходимо рассчитать полное структурное число блок-графа схемы. С этой целью для ранее найденного числа 2A [см. (а)] построим таблицу порядков

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как таблица не содержит одинаковых столбцов, то полное структурное число равно

$$A = A_{1b}A_{2a}A_{3a} + A_{1b}A_{2c}A_{3c} + A_{1c}A_{2a}A_{3a}.$$

Введем следующие обозначения:

$\Delta_1 = \det_Y A_1$ — определитель матрицы проводимостей многополюсника W_1 ;

$\Delta_2 = \det_Y A_2$ — определитель матрицы проводимостей многополюсника W_2 ;

$\Delta_3 = \det_Y A_3$ — определитель матрицы проводимостей многополюсника W_3 ;

$\Delta_{1b} = \det_Y A_{1b}$ — определитель матрицы проводимостей многополюсника W_1 с закороченным путем b_1 (замкнутого на выходе);

$\Delta_{2a} = \det_Y A_{2a}$ — определитель матрицы проводимостей многополюсника W_2 с закороченным путем a_2 (короткое замыкание входа);

$\Delta_{3a} = \det_Y A_{3a}$ — определитель матрицы проводимостей многополюсника W_3 с закороченным путем a_3 (короткое замыкание входа).

При этом определитель матрицы проводимостей рассматриваемой блок-схемы равен

$$\Delta = \Delta_{1b}\Delta_2\Delta_{3a} + \Delta_{1b}\Delta_{2a}\Delta_3 + \Delta_{1c}\Delta_{2a}\Delta_{3a}. \quad (3.11)$$

Так как дополнительное число ${}^2A^d$ графа Γ [выражение (б) строится аналогично структурному числу 2A [выражение (а)], то определитель матрицы сопротивлений блок-схемы запишем в виде

$$\Delta^d = \Delta_{1b}^d \Delta_2^d \Delta_{3a}^d + \Delta_{1b}^d \Delta_{2a}^d \Delta_3^d + \Delta_{1c}^d \Delta_{2a}^d \Delta_{3a}^d. \quad (3.12)$$

Пример 3.2. Рассчитать определитель Δ матрицы проводимостей блок-схемы (рис. 3.4, а). Блок-граф Γ этой схемы показан на рис. 3.4, б, а его скелет Γ_0 (сплошные линии) — на рис. 3.4, в.

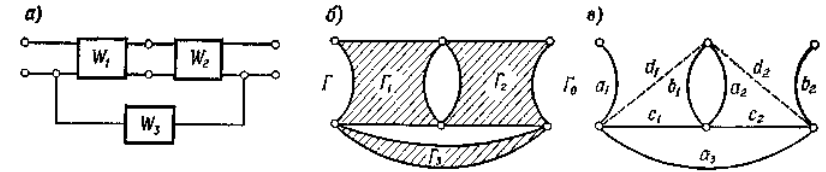


Рис. 3.4.

Расчет выполним без учета структуры отдельных многополюсников схемы.

Дополнительное число A_0^d скелета Γ_0 равно

$$A_0^d = [b_1 \ a_2] [c_1 \ c_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & a_2 & a_2 & a_2 \\ c_1 & c_2 & a_3 & c_1 & c_2 & a_3 \end{bmatrix},$$

а структурное число 2A графа Γ

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1bc} & A_{1b} & A_{1c} & A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_{2c} & A_2 & A_{2a} & A_{2ac} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Таблица порядков P имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

X X

В таблице имеются два одинаковых столбца (обозначенные внизу X), поэтому следует определить дефект суммы столбцов структурного числа

$${}^2A^I = A_3 \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1c} \\ A_{2c} & A_{2a} \end{bmatrix}.$$

Для этого блоки G_1 и G_2 будем считать трехполюсниками (так как они инцидентны остальным блокам только в трех вершинах) и в скелете G_0 (рис. 3.4, в) добавим ребра d_1 и d_2 (пунктир). Ребра b_1, c_1 и d_1 образуют замещающий граф (полный) для блока G_1 , а ребра a_2, c_2 и d_2 — замещающий граф (полный) для блока G_2 . Следовательно,

$$A_{1b} = [c_{1(t)} \quad d_{1(t)}], \quad A_{1c} = [b_{1(t)} \quad d_{1(t)}], \\ A_{2a} = [c_{2(t)} \quad d_{2(t)}], \quad A_{2c} = [a_{2(t)} \quad d_{2(t)}]$$

и далее

$$\begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1c} \\ A_{2c} & A_{2a} \end{bmatrix}^s = A_{1b}A_{2c} + A_{1c}A_{2a} - 2 \begin{bmatrix} d_{1(t)} \\ d_{2(t)} \end{bmatrix},$$

где $A_{1b}^s = A_{1b}, A_{2c}^s = A_{2c}$ и т. д., а дендритные веса имеют вид

$$d_{1(t)} = \frac{1}{2} (A_{1b} + A_{1c} - A_{1d}), \\ d_{2(t)} = \frac{1}{2} (A_{2a} + A_{2c} - A_{2d}).$$

Подставив эти выражения в (а) и выполнив необходимые операции, получим

$$A = A_3 (A_{1bc}A_2 + A_{1c}A_{2c} + A_{1ca}A_{2a} + A_{1c}A_{2ac}) + \\ + A_{3a} (A_{1b}A_2 + A_{1c}A_{2a}) - \frac{1}{2} (A_{1b} + A_{1c} - A_{1d}) (A_{2a} + A_{2c} - A_{2d}).$$

Таким образом, определитель Δ матрицы проводимостей блок-схемы (рис. 3.4, а) имеет вид

$$\Delta = \det A = \Delta_3 (\Delta_{1bc}\Delta_2 + \Delta_{1c}\Delta_{2c} + \Delta_{1ca}\Delta_{2a} + \Delta_{1c}\Delta_{2ac}) + \\ + \Delta_{3a} (\Delta_{1b}\Delta_2 + \Delta_{1c}\Delta_{2a}) - \frac{1}{2} (\Delta_{1b} + \Delta_{1c} - \Delta_{1d}) (\Delta_{2a} + \Delta_{2c} - \Delta_{2d}). \quad (3.13)$$

Смысл отдельных символов в выражении (3.13) показан на рис. 3.5, где представлены многополюсники W_1, W_2 и W_3 рассматриваемой цепи при различных режимах на зажимах, а также даны символы определителей матрицы узловых проводимостей.

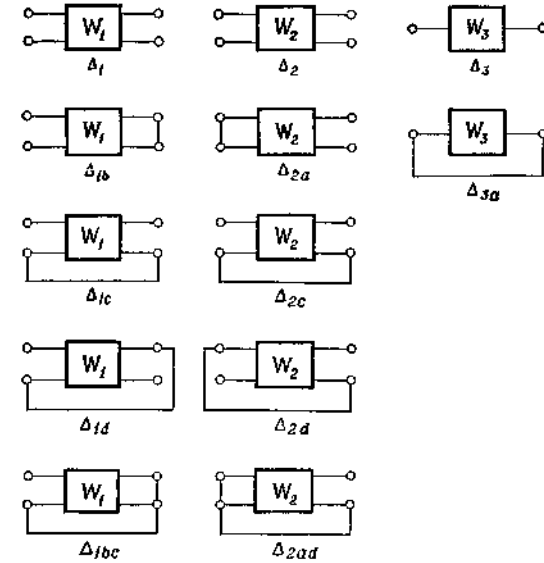


Рис. 3.5.

Для определителя матрицы контурных сопротивлений рассматриваемой блок-схемы имеет место формула, аналогичная (3.13).

Замечания. Чтобы перейти от формулы (1.99) к (3.13), нужно исключить определители Δ_{1bc} и Δ_{2ac} .

1.3.3. Входной импеданс блок-схемы

Для расчета импеданса $Z_{\mu_1\mu_2}$ или адмитанса $Y_{\mu_1\mu_2}$ между узлами μ_1 и μ_2 блок-схемы применяем известную формулу

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \frac{\Delta_{\mu_1\mu_2}}{\Delta} = \frac{\det A_{\mu_1\mu_2}}{\det A} = \frac{1}{Y_{\mu_1\mu_2}}, \quad (3.14)$$

где Δ — определитель матрицы, узловых проводимостей блок-схемы; $\Delta_{\mu_1\mu_2}$ — определитель матрицы узловых проводимостей

блок-схемы с закороченными узлами μ_1 и μ_2 ; $A = {}^e A$ — замещающее структурное число для структурного числа второй категории 2A блок-графа рассматриваемой блок-схемы; $A_{\mu_1\mu_2} = {}^e A_{\mu_1\mu_2}$ — замещающее структурное число для числа второй категории ${}^2A_{\mu_1\mu_2}$ блок-графа с

закороченными вершинами μ_1 и μ_2 . Как известно [разд. 1.3.2, формула (3.10)],

$$\det_Y^2 A = \det_{\mathcal{Z}} A, \quad \mathcal{Z} = \{\Delta_{ij}\}, \quad A = {}^s A,$$

а также

$$\det_Y A_{\mu_1\mu_2} = \det_{\mathcal{Z}} A_{\mu_1\mu_2}, \quad A_{\mu_1\mu_2} = {}^s A_{\mu_1\mu_2}.$$

Поэтому формулу (3.14) можно записать в другом виде:

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \frac{\Delta_{\mu_1\mu_2}}{\Delta} = \frac{\det_{\mathcal{Z}} A_{\mu_1\mu_2}}{\det_{\mathcal{Z}} A} = \frac{1}{Y_{\mu_1\mu_2}}, \quad (3.15)$$

где

$$\mathcal{Z} = \{\Delta_{ij}\}, \quad \Delta_{ij} = \det_Y A_{ij}, \quad A_{ij} = {}^s A_{ij}.$$

Импеданс $Z_{\mu_1\mu_2}$ или адмитанс $Y_{\mu_1\mu_2}$ можно также выразить с помощью определителей матрицы контурных сопротивлений блок-схемы, т. е.

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \frac{\Delta^d}{\Delta_{\mu_1\mu_2}^d} = \frac{1}{Y_{\mu_1\mu_2}}. \quad (3.16)$$

Для определения входного импеданса блок-схемы с помощью входных импедансов отдельных многополюсников перепишем выражение (3.14) в следующем виде:

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \left(\frac{\Delta_{\mu_1\mu_2}}{\prod_{i=1}^g \Delta_i} \right) : \left(\frac{\Delta}{\prod_{i=1}^g \Delta_i} \right), \quad (3.17)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_g$ — определители матриц проводимостей многополюсников W_1, W_2, \dots, W_g блок-схемы.

Равенство (3.17) позволяет выразить импеданс $Z_{\mu_1\mu_2}$ блок-схемы через входные импедансы его отдельных многополюсников, не учитывая при этом их внутренней структуры. Следовательно, в этих многополюсниках могут встречаться элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, а также индуктивные связи.

При использовании формулы (3.17) следует учитывать, что

$$\frac{\Delta_{abcd \dots k}}{\Delta} = \frac{\Delta_{abcd \dots k}}{\Delta_{bcd \dots k}} \frac{\Delta_{bcd \dots k}}{\Delta_{cd \dots k}} \frac{\Delta_{cd \dots k}}{\Delta_{d \dots k}} \dots \frac{\Delta_k}{\Delta} = Z_{abcd \dots k} Z_{bcd \dots k} Z_{cd \dots k} \dots Z_k. \quad (3.18)$$

где Δ — определитель матрицы проводимостей электрической цепи; $\Delta_{abcd \dots k}$ — определитель матрицы проводимостей цепи с замкнутыми путями a, b, c, d, \dots, k (короткое замыкание пути a означает замыкание конечных узлов пути a); $Z_{abcd \dots k}$ — импеданс электрической цепи с замкнутыми путями b, c, d, \dots, k , измеренный между конечными узлами пути a ; $Z_{bcd \dots k}$ — импеданс электрической цепи с замкнутыми путями c, d, \dots, k , измеренный между конечными узлами пути b ; Z_k — импеданс электрической цепи, измеренный между конечными узлами пути k .

(По этой формуле можно рассчитать определитель матрицы полных проводимостей электрической цепи. Если каждую ветвь этой цепи

считать путем, то $\Delta_{abcd \dots k} = 1$, следовательно,

$$\Delta = Y_{abcd \dots k} Y_{bcd \dots k} Y_{cd \dots k} \dots Y_k,$$

где, например, $Y_{abcd \dots k}$ — адмитанс цепи с закороченными путями b, c, d, \dots, k , измеренный между конечными узлами пути a .)

Метод расчета импеданса $Z_{\mu_1\mu_2}$ блок-схемы без учета внутренней структуры ее многополюсников иллюстрируют следующие примеры.

Пример 3.3. Рассчитать входной импеданс $Z_{\mu_1\mu_2} = Z_{a_1}$ блок-схемы (рис. 3.6, а), блок-граф Γ которой показан на фиг. 3.6, б, а скелет Γ_0 этого графа — на рис. 3.6, в.

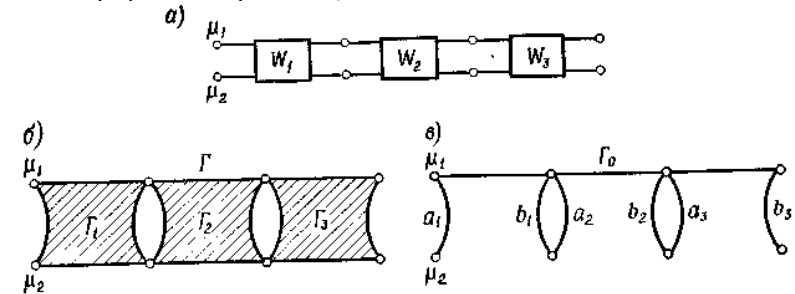


Рис. 3.6.

Дополнительное число A_0^d скелета Γ_0 равно

$$A_0^d = [b_1 \ a_2] [b_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & a_2 & a_2 \\ b_2 & a_3 & b_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Структурное число 2A графа Γ имеет вид

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}, \quad (a)$$

а структурное число ${}^2A_{a_1}$ графа с замкнутым путем a_1 —

$${}^2A_{a_1} = [a_1] \downarrow [{}^2A] = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}. \quad (б)$$

Таблицы порядков чисел 2A и ${}^2A_{a_1}$ запишем в виде

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{a_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как никакая из этих таблиц не имеет повторяющихся столбцов, полные структурные числа A и A_{a_1} выражаются следующим образом:

$$A = A_{1b}(A_{2b}A_3 + A_2A_{3a}) + A_1(A_{2ab}A_3 + A_{2a}A_{3a}), \\ A_{a_1} = A_{1ab}(A_{2b}A_3 + A_2A_{3a}) + A_{1a}(A_{2ab}A_3 + A_{2a}A_{3a}).$$

Определители Δ и Δ_{a_1} матриц проводимостей блок-схемы с незамкнутым и замкнутым путем a_1 соответственно равны

$$\Delta = \Delta_{1b}(\Delta_{2b}\Delta_3 + \Delta_2\Delta_{3a}) + \Delta_1(\Delta_{2ab}\Delta_3 + \Delta_{2a}\Delta_{3a}), \\ \Delta_{a_1} = \Delta_{1ab}(\Delta_{2b}\Delta_3 + \Delta_2\Delta_{3a}) + \Delta_{1a}(\Delta_{2ab}\Delta_3 + \Delta_{2a}\Delta_{3a}).$$

После деления этих определителей на произведение определителей матриц проводимостей всех многополюсников схемы получаем

$$\frac{\Delta}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = \frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_{2b}\Delta_3}{\Delta_2\Delta_3} + \frac{\Delta_2}{\Delta_2} \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} \right) + \frac{\Delta_1}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_{2ab}}{\Delta_{2b}} \frac{\Delta_{2b}}{\Delta_2} \frac{\Delta_3}{\Delta_3} + \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} \right) = \\ = Z_{1b}(Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2ab}Z_{2b} + Z_{2a}Z_{3a}, \\ \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = \frac{\Delta_{1ab}}{\Delta_{1b}} \frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_{2b}}{\Delta_2} \frac{\Delta_3}{\Delta_3} + \frac{\Delta_2}{\Delta_2} \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} \right) + \frac{\Delta_{1a}}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_{2ab}}{\Delta_{2b}} \frac{\Delta_{2b}}{\Delta_2} \frac{\Delta_3}{\Delta_3} + \frac{\Delta_{2a}}{\Delta_2} \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} \right) = \\ = Z_{1ab}Z_{1b}(Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{1a}(Z_{2ab}Z_{2b} + Z_{2a}Z_{3a}).$$

Следовательно, входной импеданс $Z_{\mu_1\mu_2}$ блок-схемы (рис. 3.6, а) равен

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \left(\frac{\Delta_{\mu_1\mu_2}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} \right) : \left(\frac{\Delta}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} \right) = \\ = \frac{Z_{1ab}Z_{1b}(Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{1a}(Z_{2ab}Z_{2b} + Z_{2a}Z_{3a})}{Z_{1b}(Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2ab}Z_{2b} + Z_{2a}Z_{3a}}, \quad (3.19)$$

где Z_{1a} , Z_{2a} , Z_{3a} — входные импедансы четырехполюсников W_1 ,

W_2 , W_3 ; Z_{1b} , Z_{2b} — выходные импедансы четырехполюсников W_1 , W_2 ; Z_{1ab} , Z_{2ab} — входные импедансы четырехполюсников W_1 , W_2 с замкнутыми выходами.

Пример 3.4. Рассчитать входной импеданс $Z_{\mu_1\mu_2}$ схемы (рис. 3.7, а), блок-граф Γ которой показан на рис. 3.7, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 3.7, в.

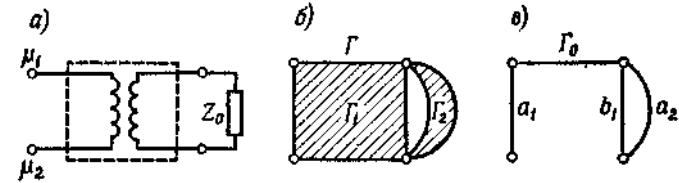


Рис. 3.7.

В этой схеме трансформатор рассматривается как четырехполюсник.

Дополнительное число A_0^g скелета Γ_0 графа равно

$$A_0^g = [b_1a_2];$$

следовательно, структурное число 2A графа Γ можно записать в виде

$${}^2A = [A_0^g] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix},$$

а структурное число ${}^2A_{a_1}$ графа Γ_{a_1} с замкнутым путем a_1 в виде

$${}^2A_{a_1} = [a_1] \downarrow [{}^2A] = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix}.$$

Так как таблицы порядков обоих структурных чисел не содержат повторяющихся столбцов, то

$$\Delta = \Delta_{1b}\Delta_2 + \Delta_1\Delta_{2a},$$

$$\Delta_{a_1} = \Delta_{1ab}\Delta_2 + \Delta_{1a}\Delta_{2a},$$

откуда

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \frac{\frac{\Delta_{1ab}}{\Delta_{1b}} \frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} + \frac{\Delta_{1a}}{\Delta_1} \frac{\Delta_{2a}}{\Delta_2}}{\frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} + \frac{\Delta_{2a}}{\Delta_2}} = \frac{Z_{1ab}Z_{1b} + Z_{1a}Z_0}{Z_{1b} + Z_0}, \quad (3.20)$$

где Z_{1ab} — входной импеданс трансформатора при коротком замыкании выхода; Z_{1a} — входной импеданс трансформатора в режиме холостого хода; Z_{1b} — выходной импеданс трансформатора в режиме холостого хода на входе; Z_0 — импеданс нагрузки на выходе трансформатора.

Такой же результат можно получить, используя формулу (3.19), если принять, что $Z_{3a} \rightarrow \infty$, $Z_{2a} = Z_{2b} = Z_0$, $Z_{2ab} = 0$.

Пример 3.5. Рассчитать импеданс $Z_{\mu_1\mu_3}$ между полюсами μ_1 и μ_3 блок-схемы (рис. 3.8, а), блок-граф Γ которой показан на фиг. 3.8, б, а его скелет Γ_0 — на фиг. 3.8, в (сплошные линии).

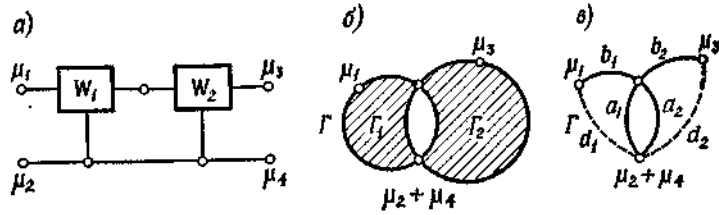


Рис. 3.8.

Структурное число 2A графа Γ равно

$${}^2A = [A_0^*] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = [a_1 a_2] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix}.$$

Структурное число ${}^2A_{\mu_1\mu_3}$ графа $\Gamma_{\mu_1\mu_3}$ образованного в результате замыкания узлов μ_1 и μ_3 графа Γ , имеет вид

$${}^2A_{\mu_1\mu_3} = [b_1 b_2] \downarrow \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1b} & A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} & A_{2b} & A_{2ab} \end{bmatrix}.$$

Таблица порядков числа 2A не содержит повторяющихся столбцов, но таблица порядков числа ${}^2A_{\mu_1\mu_3}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} X & X & & \end{matrix}$$

имеет два одинаковых столбца (обозначенные X); поэтому дополняем скелет Γ_0 ребрами d_1 и d_2 (указаны на рис. 3.8, в пунктиром).

В результате

$$\begin{aligned} A_{1b} &= [a_{1(t)} \ d_{1(t)}], & A_{2b} &= [a_{2(t)} \ d_{2(t)}], \\ A_{1a} &= [b_{1(t)} \ d_{2(t)}], & A_{2a} &= [b_{2(t)} \ d_{2(t)}]. \end{aligned}$$

Структурное число запишем в виде

$${}^2A^\Gamma = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1a} \\ A_{2a} & A_{2b} \end{bmatrix} = A_{1b}A_{2a} + A_{1a}A_{2b} - 2 \begin{Bmatrix} d_{1(t)} \\ d_{2(t)} \end{Bmatrix},$$

где

$$d_{1(t)} = \frac{1}{2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1d}),$$

$$d_{2(t)} = \frac{1}{2} (A_{2a} + A_{2b} - A_{2d}).$$

Следовательно,

$$\Delta = \Delta_{1a}\Delta_2 + \Delta_1\Delta_{2a},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu_1\mu_3} &= \Delta_{1ab}\Delta_2 + \Delta_{1b}\Delta_{2a} + \Delta_{1a}\Delta_{2b} + \Delta_1\Delta_{2ab} - \\ &- \frac{1}{2} (\Delta_{1a} + \Delta_{1b} - \Delta_{1d}) (\Delta_{2a} + \Delta_{2b} - \Delta_{2d}). \end{aligned}$$

Таким образом, импеданс схемы $Z_{\mu_1\mu_3}$

$$\begin{aligned} Z_{\mu_1\mu_3} - \left(\frac{\Delta_{\mu_1\mu_3}}{\Delta_1\Delta_2} \right) : \left(\frac{\Delta}{\Delta_1\Delta_2} \right) = \\ = \frac{Z_{1ab}Z_{1b} + Z_{1b}Z_{2a} + Z_{1a}Z_{2b} + Z_{2ab}Z_{2b} - \frac{1}{2} (Z_{1a} + Z_{1b} - Z_{1d}) (Z_{2a} + Z_{2b} - Z_{2d})}{Z_{1a} - Z_{2a}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Обозначения отдельных импедансов трехполюсников W_1 и W_2 в выражении (3.21) указаны на рис. 3.9.

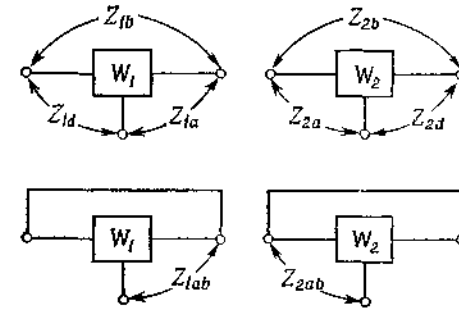


Рис. 3.9.

Замечания. Применяя формулу перехода (1.99), можно в (3.21) исключить импеданс Z_{1ab} и Z_{2ab} замкнутых многополюсников.

Пример 3.6. Рассчитать входной импеданс цепной схемы с бесконечно большим числом одинаковых четырехполюсников.

Рассмотрим цепную схему с n -одинаковыми четырехполюсниками (рис. 3.10, а). Скелет Γ_0 блок-графа Γ показан на рис. 3.10, б.

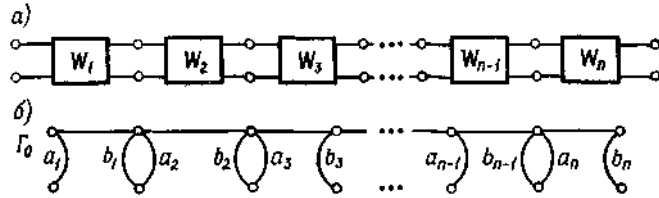


Рис. 3.10.

Обозначим $A^{(1)}$ — структурное число первого блока графа Γ , A_{n-1} — структурное число графа Γ без первого блока.

Структурное число 2A_n полного графа равно

$${}^2A_n = [b_1 a_2] \downarrow \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ A^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} a_2 \\ A^{(1)} & A^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Таблица порядков этого структурного числа второй категории не содержит одинаковых столбцов; следовательно, определитель матрицы полных проводимостей Δ_n рассматриваемой схемы имеет вид

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} \Delta_b + \Delta_{n-1} a \Delta,$$

где Δ_{n-1} — определитель матрицы проводимостей цепной схемы с $n - 1$ одинаковыми четырехполусниками; $\Delta_{n-1} a$ — определитель матрицы проводимостей схемы с $n - 1$ четырехполусниками; Δ — определитель матрицы проводимостей каждого четырехполусника схемы; Δ_b — определитель матрицы проводимостей каждого четырехполусника с замкнутым выходом.

Если первый четырехполусник схемы замкнут на входе, то из приведенного уравнения следует формула для определителя Δ_{na} матрицы проводимостей замкнутой на входе схемы с n блоками

$$\Delta_{na} = \Delta_{n-1} \Delta_{ab} + \Delta_{n-1} a \Delta_a.$$

Напишем входной импеданс Z_{na} схемы

$$Z_{na} = \frac{\Delta_{na}}{\Delta_n} = \frac{\frac{\Delta_{ab} + \Delta_{n-1} a \Delta_a}{\Delta} + \frac{\Delta_{n-1} a \Delta_a}{\Delta}}{\frac{\Delta_b + \Delta_{n-1} a \Delta}{\Delta} + \frac{\Delta_{n-1} a \Delta_a}{\Delta}} = \frac{Z_{ab} Z_b + Z_{n-1} a Z_a}{Z_b + Z_{n-1} a}, \quad (3.22)$$

где Z_a — входной импеданс четырехполусника; Z_b — выходной импеданс четырехполусника; Z_{ab} — входной импеданс замкнутого на выходе четырехполусника; $Z_{n-1} a$ — входной импеданс цепной схемы с $n - 1$ одинаковыми блоками (четыреполусниками).

Для $n \rightarrow \infty$ $Z_{n-1} a = Z_{na}$ и, следовательно,

$$Z_{\infty a} = \frac{Z_{ab} Z_b + Z_{\infty a} Z_a}{Z_b + Z_{\infty a}}.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$Z_{\infty a} = \frac{1}{2} \{ Z_a - Z_b + [(Z_a - Z_b)^2 + 4 Z_{ab} Z_b]^{1/2} \}. \quad (3.23)$$

1.3.4. Коэффициент передачи напряжения блок-схемы

Рассмотрим четырехполусник, питаемый от идеального источника напряжения E (рис. 3.11).

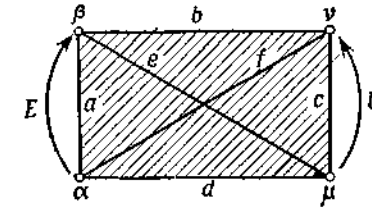


Рис. 3.11. Четырехполусник, питаемый от идеального источника напряжения.

Здесь отрезки a, b, c, d, e, f представляют собой произвольные пути четырехполусника, соединяющие отдельные пары его узлов, а соответствующие пути блок-графа Γ четырехполусника условимся обозначать аналогичным образом. Заметим, что идеальный источник напряжения E содержит узлы α и β четырехполусника. Обозначим: A — структурное число графа рассматриваемой схемы при коротком замыкании зажимов источника напряжения, Δ — детерминантная функция структурного числа A (равная определителю матрицы узловых проводимостей рассматриваемой схемы).

На основании формулы Персиваля коэффициент передачи напряжения K_{ac} четырехполусника равен

$$K_{ac} = \frac{U}{E} = \frac{Z_e + Z_f - Z_b - Z_d}{2Z_a}, \quad (3.24)$$

где Z_a, Z_b, \dots, Z_f — импедансы четырехполусника, измеренные между конечными узлами соответствующих путей. Подставив в выражение (3.24)

$$Z_a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad Z_b = \frac{\Delta_b}{\Delta},$$

где $\Delta_a = \det A_a = \det \partial A / \partial a$, $\Delta_b = \det A_b = \det \partial A / \partial b$ и т. д., получим

$$K_{ac} = \frac{\Delta_e + \Delta_f - \Delta_b - \Delta_d}{2\Delta_a} \quad (3.25)$$

или

$$K_{ac} = \frac{\det(A_e + A_f) - \det(A_b + A_d)}{2 \det A_a}, \quad (3.26)$$

где $A_a \stackrel{s}{=} A_a$, $A_b \stackrel{s}{=} A_b$ и т. д.

Числитель выражения (3.26) содержит четыре структурных числа, которые можно поделить на $2^4 - 1$ частей x_1, x_2, \dots, x_{15} , составив таблицу.

Таблица 3.1

A_e	x_1	x_2	x_3	x_4		x_6	x_7	x_8				x_{12}			
A_f	x_1	x_2	x_3		x_5	x_6			x_9	x_{10}		x_{13}			
A_b	x_1	x_2		x_4	x_5		x_7		x_9					x_{14}	
A_d	x_1		x_3	x_4	x_5			x_8		x_{10}					x_{15}
	x_1	0	0	0	0	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}		0	0	0	0

На основании закона для циклов можем написать (см. рис. 3.11)

$$A_e + A_f + A_b + A_d = 0,$$

тогда

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$$

(это видно из нижней строки табл. 3.1).

В соответствии с табл. 3.1 напишем

$$A_e + A_f - A_b - A_d = 2(x_6 - x_{11}),$$

причем

$$x_6 = (A_e \cap A_f) - (A_e \cap A_f \cap A_b \cap A_d),$$

$$x_{11} = (A_b \cap A_d) - (A_e \cap A_f \cap A_b \cap A_d),$$

следовательно,

$$K_{ac} = \frac{\det(A_e \cap A_f) - \det(A_b \cap A_d)}{\det A_a}. \quad (3.27)$$

Каждое из выражений (3.24) — (3.27) содержит пять разных величин, необходимых для расчета K_{ac} .

Каким образом уменьшить число этих величин?

При выводе формулы (3.27) было применено правило циклов для контура, состоящего из четырех путей: b, d, e, f . Теперь используем это правило для всех независимых контуров, состоящих из трех путей: (c, d, f) , (a, d, e) и (a, b, f) (рис. 3.11). Имеем

$$A_c + A_d + A_f = 0, \quad (a)$$

$$A_a + A_d + A_e = 0, \quad (б)$$

$$A_a + A_b + A_f = 0. \quad (в)$$

Для этих структурных чисел A_a, A_c, A_d, A_f составим таблицу частей, аналогичную табл. 3.1.

Таблица 3.2

A_a	x_1	x_2	x_3	x_4		x_6	x_7	x_8				x_{12}			
A_c	x_1	x_2	x_3		x_5	x_6			x_9	x_{10}		x_{13}			
A_d	x_1	x_2		x_4	x_5		x_7		x_9		x_{11}			x_{14}	
A_f	x_1		x_3	x_4	x_5			x_8		x_{10}	x_{11}				x_{15}
	0	x_2	x_3	x_4	0	0	0	0	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	0	0	0

Используя уравнение (а), находим

$$x_1 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$$

(это показано в нижней строке табл. 3.2).

Из уравнения (б) следует, что

$$A_e = A_a + A_d \stackrel{s}{=} x_1 + x_9 + x_{11} + x_{12},$$

а из (в) —

$$A_b = A_a + A_f \stackrel{s}{=} x_2 + x_{10} + x_{11} + x_{12}.$$

В результате имеем

$$A_e + A_f = 2x_3 + x_4 + x_9 + x_{10} + 2x_{11} + x_{12},$$

$$A_b + A_d = 2x_2 + x_4 + x_9 + x_{10} + 2x_{11} + x_{12},$$

поэтому

$$(A_e + A_f) - (A_b + A_d) = 2(x_3 - x_2).$$

Из табл. 3.2 вытекает

$$x_3 = (A_a \cap A_c \cap A_f),$$

$$x_2 = (A_a \cap A_c \cap A_d).$$

Таким образом,

$$(A_e + A_f) - (A_b + A_d) = 2 \{ (A_a \cap A_c \cap A_f) - (A_a \cap A_c \cap A_d) \}.$$

Теперь можно написать следующую формулу для коэффициента передачи:

$$K_{ac} = \frac{\det(A_a \cap A_c \cap A_f) - \det(A_a \cap A_c \cap A_d)}{\det A_a}, \quad (3.28)$$

причем

$$A_a \cap A_c \cap A_f \cap A_d = 0. \quad (3.29)$$

Выражение (3.28) содержит четыре разные величины, т. е. на одну меньше, чем предыдущие формулы. Кроме того, согласно формуле (3.29), это выражение характерно тем, что обе функции в числителе не имеют общих слагаемых.

Числитель в выражении (3.28) назовем *функцией совпадения* и обозначим

$$\begin{aligned} \text{Sim}_Y \left(\frac{\partial A}{\partial a}, \frac{\partial A}{\partial c} \right) &= \text{Sim}_Y(A_a, A_c) = \\ &= \det(A_a \cap A_c \cap A_f) - \det(A_a \cap A_c \cap A_d). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} (A_a \cap A_c \cap A_f) - (A_a \cap A_c \cap A_d) &= \\ &= (A_a \cap A_c \cap A_e) - (A_a \cap A_c \cap A_b), \end{aligned} \quad (3.31)$$

а также

$$A_a \cap A_c \cap A_e \cap A_b = 0. \quad (3.32)$$

Поэтому можно написать другую формулу для функции совпадения:

$$\text{Sim}_Y(A_a, A_c) = \det(A_a \cap A_c \cap A_e) - \det(A_a \cap A_c \cap A_b). \quad (3.33)$$

Из табл. 3.2 получаем

$$A_a \cap A_c = x_2 + x_3 = (A_a \cap A_c \cap A_f) + (A_a \cap A_c \cap A_d). \quad (3.34)$$

Таким образом, структурное число

$$A_a \cap A_c$$

состоит из всех столбцов, входящих в выражение

$$(A_a \cap A_c \cap A_f) - (A_a \cap A_c \cap A_d),$$

и не содержит других столбцов. Отсюда следует, что функцию совпадения можно также найти, рассчитав конъюнкцию

$$\frac{\partial A}{\partial a} \cap \frac{\partial A}{\partial c}$$

и определив знаки ее отдельных слагаемых.

Заметим, что столбцы структурного числа

$$\frac{\partial A}{\partial a} \cap \frac{\partial A}{\partial c}$$

представляют собой деревья, которые соединяют пары вершин

$$(\{\alpha, \mu\} \text{ и } \{\beta, \nu\}) \text{ или } (\{\alpha, \nu\} \text{ и } \{\beta, \mu\})$$

(упрощенно показано на рис. 3.12).

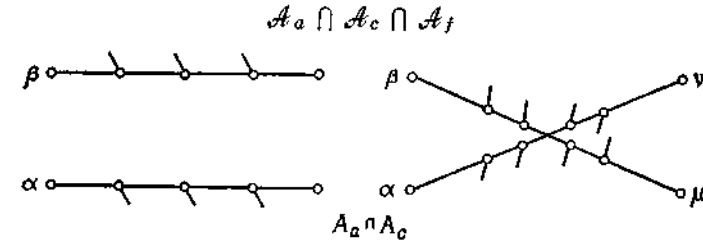


Рис. 3.12. Упрощенный рисунок 2-деревьев — изображений столбцов структурного числа $A_a \cap A_c$.

Столбцы структурного числа представляют собой 2-деревья, соединяющие пары вершин

$$\{\alpha, \mu\} \text{ и } \{\beta, \mu\};$$

столбцы структурного числа

$$A_a \cap A_c \cap A_d$$

— 2-деревья, соединяющие пары вершин

$$\{\alpha, \nu\} \text{ и } \{\beta, \mu\}$$

(упрощенно показано на рис. 3.13).

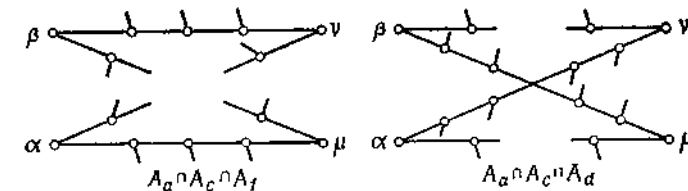


Рис. 3.13. Упрощенный рисунок 2-деревьев — изображений столбцов структурных чисел, записанных под рисунком.

Рассматривая в графе Γ пути, соответствующие определенным столбцам структурного числа

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a} \cap \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial b},$$

можно определить знаки их детерминантных функций. Естественно, что эти знаки зависят от направления напряжений E и U (рис. 3.11).

Выражая коэффициент передачи четырехполюсника K_{ac} с помощью функции совпадения, получим

$$K_{ac} = \frac{\text{Sim}_Y(A_a, A_c)}{\det_Y A_a}. \quad (3.35)$$

Для определения знаков детерминантных функций эта формула требует расчета только двух величин A_a и A_c и их конъюнкции. Сравнивая выражения (3.25) и (3.35), получаем

$$\text{Sim}_Y(A_a, A_c) = \frac{\Delta_e + \Delta_f - \Delta_b - \Delta_d}{2}. \quad (3.36)$$

Легко убедиться, что приведенные выше формулы для коэффициента передачи схемы также справедливы для дополнительных чисел A^d графа схемы, если положить

$$\Delta^d = \det_Z A^d,$$

а также

$$\text{Sim}_Z(A_a^d, A_c^d) = \det_Z(A_a^d \cap A_c^d \cap A_f^d) - \det_Z(A_a^d \cap A_c^d \cap A_d^d), \quad (3.37)$$

причем

$$A_a^d = [a] A^d \text{ и т. д.}$$

Заметим также, что

$$\text{Sim}_Y(A_a, A_c) = \text{Sim}_Y(A_c, A_a). \quad (3.38)$$

Для расчета коэффициента передачи напряжения блок-схемы можно воспользоваться любой из формул, однако самая удобная из них — формула (3.35). Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 3.7. Рассчитать коэффициент передачи напряжения K_{12} (рис. 3.14, а), блок-граф Γ которой показан на рис. 3.14, б, а скелет Γ_0 графа Γ (сплошные линии) — на рис. 3.14, в.

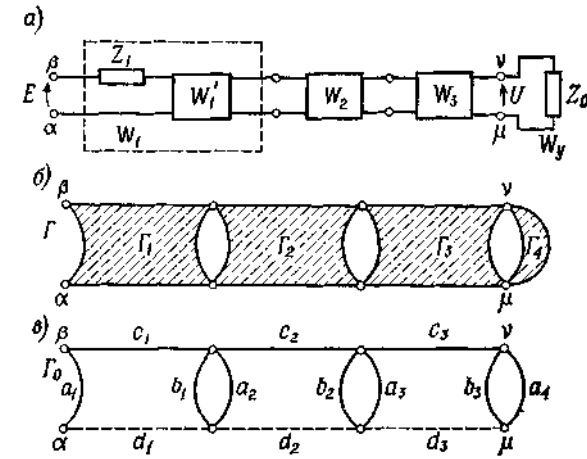


Рис. 3.14.

В этой схеме входной импеданс Z_1 включен в блок (многополюсник) W_1 . Структурное число 2A графа Γ равно

$$\begin{aligned} {}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & a_2 & a_2 & b_1 & b_1 & a_2 & a_2 \\ b_2 & a_3 & b_2 & a_3 & b_2 & a_3 & b_2 & a_3 \\ b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 & A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} & A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_{3b} & A_{3ab} & A_{3b} & A_{3ab} & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \\ A_4 & A_4 & A_4 & A_4 & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Чтобы рассчитать $K_{12} = K_{a_1 a_4}$ по формуле (3.25)

$$K_{a_1 a_4} = \frac{\Delta_{\beta\mu} + \Delta_{\alpha\nu} - \Delta_{\beta\nu} - \Delta_{\alpha\mu}}{2\Delta_{\alpha\beta}},$$

необходимо вычислить структурные числа

$$\begin{aligned} {}^2A_{\beta\mu} &= [c_1 \ c_2 \ c_3 \ a_4] \downarrow [{}^2A], \\ {}^2A_{\alpha\nu} &= [d_1 \ d_2 \ d_3 \ a_4] \downarrow [{}^2A], \\ {}^2A_{\beta\nu} &= [c_1 \ c_2 \ c_3] \downarrow [{}^2A], \\ {}^2A_{\alpha\mu} &= [d_1 \ d_2 \ d_3] \downarrow [{}^2A], \\ A_{\alpha\beta} &= A a_1 = [a_1] \downarrow [{}^2A], \end{aligned}$$

где d_1, d_2, d_3 — пути, показанные на рис. 3.14, σ штриховыми линиями (можно также выбрать другие пути или использовать пути, представляемые ребрами скелета Γ_0), а потом преобразовать эти числа в полные структурные числа.

Как видно, этот способ расчета передачи довольно сложен, поэтому $K_{a_1 a_4}$ рассчитаем с помощью функции совпадения по формуле (3.35)

$$K_{a_1 a_4} = \frac{\text{Sim}(A_{a_1}, A_{a_4})}{\det_Y A_{a_1}}. \quad (a)$$

Рассчитаем конъюнкцию

$$A_{a_1} \cap A_{a_4} \stackrel{e}{=} {}^2A_{a_1} \cap {}^2A_{a_4} = ([a_1] \downarrow [{}^2A]) \cap ([a_4] \downarrow [{}^2A]) =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1ab} & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} & A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_{3b} & A_{3ab} & A_{3b} & A_{3ab} & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \\ A_4 & A_4 & A_4 & A_4 & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} \end{bmatrix} \cap$$

$$\cap \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_{3b} & A_{3ab} & A_{3b} & A_{3ab} \\ A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} \end{bmatrix}.$$

Для этого используем таблицы порядков обоих структурных чисел. Очевидно, что конъюнкция будет ненулевой только для тех столбцов структурных чисел, которые имеют одинаковые столбцы в таблицах порядков. Определим конъюнкцию таблиц порядков

$$P_{a_1} \cap P_{a_4} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

из которой следует

$$A_{a_1} \cap A_{a_4} \stackrel{e}{=} \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_{2a} \\ A_{3a} \\ A_{4a} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} A_{1b} \\ A_{2b} \\ A_{3b} \\ A_{4a} \end{bmatrix} \stackrel{e}{=} (A_{1a} \cap A_{1b}) (A_{2a} \cap A_{2b}) (A_{3a} \cap A_{3b}) A_{4a}.$$

Так как это произведение не имеет дефекта произведения, то, согласно формуле (а) для $K_{a_1 a_4}$ рассматриваемой схемы, получаем

$$K_{a_1 a_4} = \frac{\text{Sim}(A_{1a}, A_{1b}) \text{Sim}(A_{2a}, A_{2b}) \text{Sim}(A_{3a}, A_{3b}) \det_Y A_{4a}}{\det_Y A_{a_1}}. \quad (3.39)$$

Так как блок Γ_d графа Γ имеет две вершины, то детерминантная функция $\det_Y A_{4a}$ одновременно служит функцией совпадения двухполюсника нагрузки Z_0

$$\det_Y A_{4a} = \text{Sim}(A_{4a}, A_{4a}).$$

Коэффициент передачи $K_{a_1 a_4}$ рассматриваемой схемы можно записать в виде

$$K_{a_1 a_4} = \frac{\prod_{i=1}^4 \text{Sim}(A_{ia}, A_{ib})}{\det_Y A_{a_1}}. \quad (3.40)$$

Эту формулу легко обобщить на случай цепной схемы с n -блоками

$$K_{a_1 b_n} = \frac{\prod_{i=1}^n \text{Sim}(A_{ia}, A_{ib})}{\det_Y A_{a_1}} \quad (3.41)$$

или

$$\text{Sim}(A_{a_1}, A_{b_n}) = \prod_{i=1}^n \text{Sim}(A_{ia}, A_{ib}). \quad (3.42)$$

Это означает, что функция совпадения цепной схемы с n -блоками равна произведению функций совпадения всех отдельных четырехполюсников схемы и двухполюсника нагрузки. Выражения (3.41) и (3.42), естественно, справедливы и для дополнительных чисел A^d .

Пример 3.8. Рассчитать функцию совпадения цепной схемы (рис. 3.15, а), состоящей из четырех четырехполюсников, графы которых показаны на рис. 3.15, б.

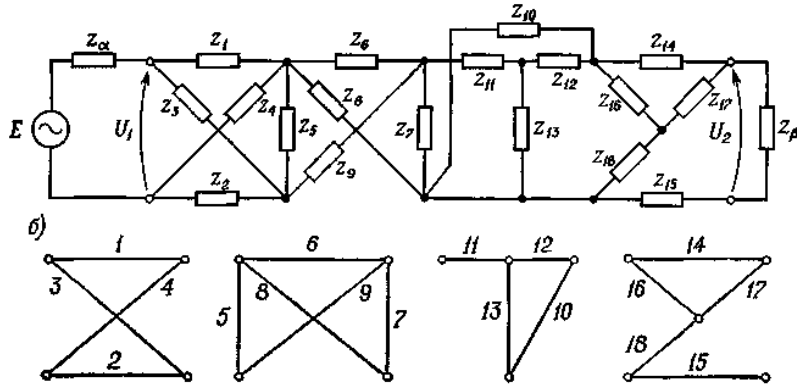


Рис. 3.15.

Рассчитаем функции совпадения отдельных четырехполюсников:

$$\text{Sim}_Z \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = z_3 z_4 - z_1 z_2,$$

$$\text{Sim}_Z \left(\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \right) = -z_5 z_6 z_7,$$

$$\text{Sim}_Z \left(\begin{bmatrix} 11 & 11 & 10 & 12 & 10 \\ 13 & 12 & 11 & 13 & 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} \right) = z_{10} z_{13},$$

$$\text{Sim}_Z \left(\begin{bmatrix} 14 & 16 & 14 & 17 & 16 \\ 16 & 17 & 18 & 18 & 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 & 15 & 16 & 16 & 15 & 17 \\ 15 & 17 & 18 & 16 & 17 & 18 & 17 & 18 \end{bmatrix} \right) = z_{16} z_{17} + z_{14} z_{18} + z_{17} z_{18} + z_{16} z_{18}.$$

Согласно формуле (3.42), функцию совпадения данной схемы запишем в виде

$$\text{Sim}_Z (A_{a_1}^a, A_{b_4}^a) = (z_1 z_2 - z_3 z_4) z_5 z_6 z_7 z_{10} z_{13} (z_{16} z_{17} + z_{14} z_{18} + z_{17} z_{18} + z_{16} z_{18}) z_{\beta}.$$

Пример 3.9. Рассчитать коэффициент передачи напряжения блок-схемы (рис. 3.16, а).

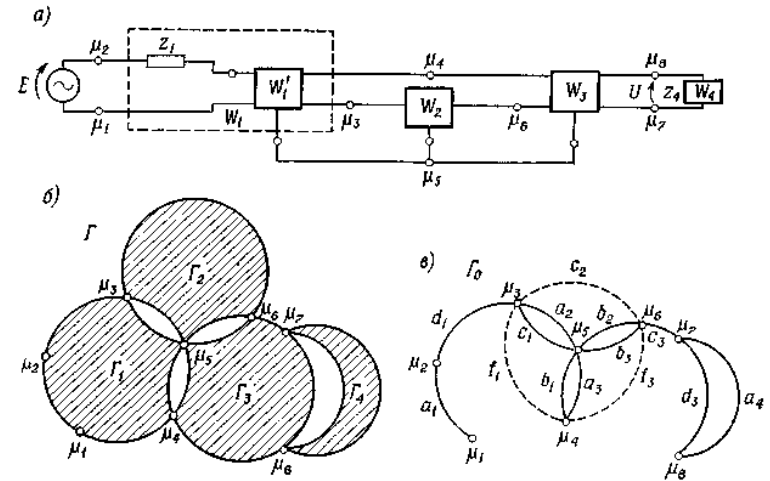


Рис. 3.16.

Для упрощения расчетов включим входной импеданс Z_1 в блок (многополюсник) W_1 . Блок-граф Γ этой схемы изображен на рис. 3.16, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 3.16, в (сплошные линии).

Дополнительное число A_0^d скелета Γ_0 равно

$$A_0^d = [c_1 a_2] [b_1 a_3] [b_2 b_3] [d_3 a_4] = \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & b_1 & a_2 & c_1 & c_1 & b_1 & a_2 & c_1 & c_1 & b_1 & a_2 & c_1 & c_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & a_2 & b_2 & b_1 & a_3 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & a_2 & b_2 & b_1 & a_3 & a_2 & a_3 \\ b_2 & a_3 & b_2 & a_3 & b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & b_2 & a_3 & b_2 & a_3 & b_3 & b_3 & b_3 & b_3 \\ d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Для упрощения записи на основе рассчитанного структурного числа A_0^d построим таблицу порядков структурного числа 2A графа Γ

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а также таблицы порядков структурных чисел ${}^2A_{a_1} = [a_1] \downarrow \downarrow [{}^2A]$ и ${}^2A_{a_4} = [a_4] \downarrow \downarrow [{}^2A]$:

$$P_{a_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$X_5 \quad X_5 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_1 \quad X_4$

$$P_{a_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$X_1 \quad X_4 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4$

В таблицах P_{a_1} и P_{a_4} одинаковые столбцы обозначаем X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 . Эти столбцы заменим соответствующими столбцами структурных чисел ${}^2A_{a_1}$ и ${}^2A_{a_4}$ и напомним конъюнкцию

$${}^2A_{a_1} \cap {}^2A_{a_4} = \left(\begin{pmatrix} A_{1ac} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_{3b} \\ A_{4a} & A_{4a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1bc} \\ A_{2b} \\ A_{3d} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} A_{1a} \\ A_{2ab} \\ A_{3a} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1b} \\ A_{2ab} \\ A_{3d} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ \left(\begin{pmatrix} A_{1ac} \\ A_2 \\ A_{3ab} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1bc} \\ A_2 \\ A_{3bd} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} A_{1a} \\ A_{2a} \\ A_{3ab} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1c} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3ad} & A_{3bd} \\ A_{4a} & A_{4a} \end{pmatrix} \right),$$

причем эта сумма не имеет дефекта.

Вынося A_{4a} за скобки, получаем

$${}^2A_{a_1} \cap {}^2A_{a_4} = A_{4a} \left\{ \left(\begin{pmatrix} A_{1ac} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_{3a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1bc} \\ A_{2b} \\ A_{3d} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} A_{1a} \\ A_{2ab} \\ A_{3a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1b} \\ A_{2ab} \\ A_{3d} \end{pmatrix} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\begin{pmatrix} A_{1ac} \\ A_2 \\ A_{3ab} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1bc} \\ A_2 \\ A_{3bd} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} A_{1a} \\ A_{2a} \\ A_{3ab} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1c} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3ad} & A_{3bd} \end{pmatrix} \right) \right\}. \quad (B)$$

Заменим структурные числа второй категории в этом выражении полными структурными числами. Все числа второй категории, кроме первого и последнего, одностолбцовые, поэтому преобразуем их в полные числа путем замены их структурных чисел первой категории полными структурными числами.

Структурное число с двумя столбцами

$$\begin{bmatrix} A_{1ac} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_{3b} \end{bmatrix},$$

таблица порядков которого имеет одинаковые столбцы, заменим полным структурным числом, используя при этом замещающие графы блоков F_{1a}, F_2, F_3 и соответственно дополняя скелет Γ_0 ребрами f_1, c_2 и f_3 (пунктирные линии на рис. 3.16, e). Тогда

$$A_{1ac} = [b_{1(2)} \ f_{1(2)}],$$

$$A_{1ab} = [c_{1(2)} \ f_{1(2)}],$$

$$A_{2b} = [a_{2(1)} \ c_{2(1)}],$$

$$A_{2a} = [b_{2(1)} \ c_{2(1)}],$$

$$A_{3a} = [b_{3(1)} \ f_{3(1)}],$$

$$A_{3b} = [a_{3(1)} \ f_{3(1)}]$$

и

$$\begin{bmatrix} A_{1ac} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_{3b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_{1(2)}f_{1(2)}] & [c_{1(2)}f_{1(2)}] \\ [a_{2(1)}c_{2(1)}] & [b_{2(1)}c_{2(1)}] \\ [b_{3(1)}f_{3(1)}] & [a_{3(1)}f_{3(1)}] \end{bmatrix} =$$

$$= A_{1ac}A_{2b}A_{3a} + A_{1ab}A_{2a}A_{3b} - 2 \begin{Bmatrix} f_{1(2)} \\ c_{2(1)} \\ f_{3(1)} \end{Bmatrix}. \quad (Г)$$

Отдельные дендритные веса равны

$$\left. \begin{aligned} f_{1(2)} &= \frac{1}{2} (A_{1ab} + A_{1ac} - A_{1af}), \\ c_{2(1)} &= \frac{1}{2} (A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}), \\ f_{3(1)} &= \frac{1}{2} (A_{3a} + A_{3b} - A_{3f}). \end{aligned} \right\} \quad (Д)$$

Аналогично другое структурное число второй категории с двумя столбцами в выражении (в) заменим полным структурным числом. После перехода к функциям совпадения и к детерминантным функциям получим

$$\text{Sim}(A_{a_1}, A_{a_4}) = \det_Y A_{4a} \left\{ \text{Sim}_Y(A_{1ac}, A_{1bc}) \det_Y A_{2b} \text{Sim}_Y(A_{3a}, A_{3d}) + \right.$$

$$\left. + \text{Sim}_Y(A_{1ab}, A_{1bc}) \text{Sim}_Y(A_{2a}, A_{2b}) \text{Sim}_Y(A_{3b}, A_{3d}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} [\text{Sim}_Y(A_{1ab}, A_{1bc}) + \text{Sim}_Y(A_{1ac}, A_{1bc}) - \text{Sim}_Y(A_{1af}, A_{1bc})] \times \\
 & \times [\text{Sim}_Y(A_{2a}, A_{2b}) + \det A_{2b} - \text{Sim}_Y(A_{2c}, A_{2b})] \times \\
 & \times [\text{Sim}_Y(A_{3a}, A_{3d}) + \text{Sim}_Y(A_{3b}, A_{3d}) - \text{Sim}_Y(A_{3f}, A_{3d})] + \\
 & + \text{Sim}_Y(A_{1a}, A_{1b}) \det A_{2ab} \text{Sim}_Y(A_{3a}, A_{3d}) + \\
 & + \text{Sim}_Y(A_{1ac}, A_{1bc}) \det A_2 \text{Sim}_Y(A_{3ab}, A_{3bd}) + \\
 & + \text{Sim}_Y(A_{1a}, A_{1c}) \text{Sim}_Y(A_{2a}, A_{2b}) \text{Sim}_Y(A_{3ab}, A_{3ad}) + \\
 & + \text{Sim}_Y(A_{1a}, A_{1b}) \det A_{2a} \text{Sim}_Y(A_{3ab}, A_{3bd}) - \\
 & -\frac{1}{4} [\text{Sim}_Y(A_{1a}A_{1b}) + \text{Sim}_Y(A_{1a}, A_{1c}) - \text{Sim}_Y(A_{1a}, A_{1f})] \times \\
 & \times [\det A_{2a} + \text{Sim}_Y(A_{2a}, A_{2b}) - \text{Sim}_Y(A_{2a}, A_{2c})] \times \\
 & \times [\text{Sim}_Y(A_{3ab}, A_{3ad}) + \text{Sim}_Y(A_{3ab}, A_{3bd}) - \text{Sim}_Y(A_{3ab}, A_{3fd})] \} \cdot (e)
 \end{aligned}$$

Это выражение представляет собой функцию совпадения блок-схемы (рис. 3.16, а), выраженную через функции совпадения и детерминантные функции отдельных блоков схемы. Для наглядности на рис. 3.17 показаны схемы многополюсников для некоторых функций совпадения формулы (е).

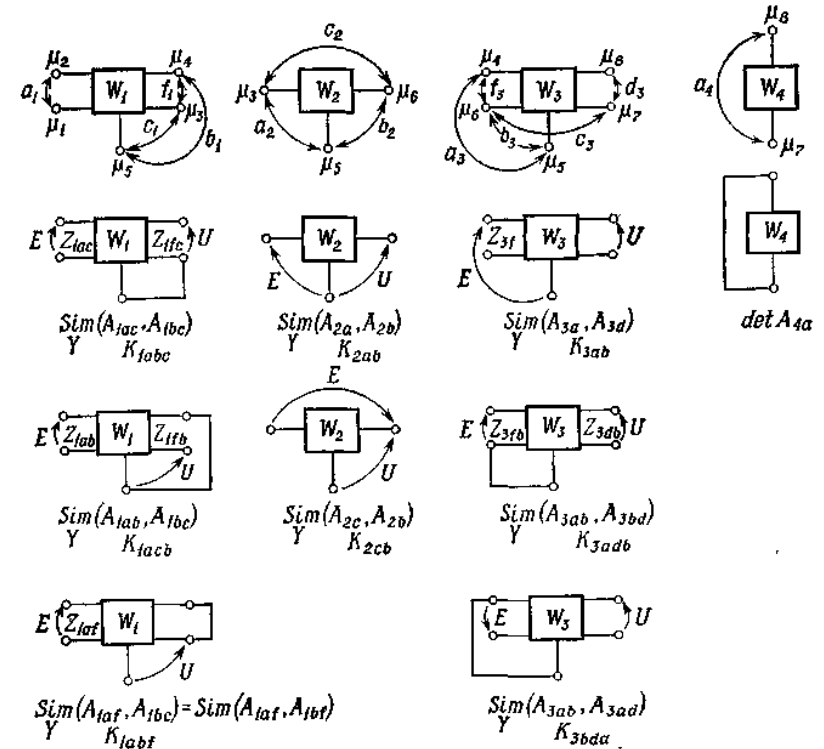


Рис. 3.17. Обозначения путей, функций совпадения, передаточных функций и входных импедансов многополюсников в различных стадиях замыкания.

Определяя их, нужно использовать обозначения путей, соединяющих отдельные вершины скелета Γ_0 (рис. 3.16, в). Заметим, что в этой формуле равны следующие слагаемые:

$$\text{Sim}_Y(A_{1af}, A_{1bc}) = \text{Sim}_Y(A_{1af}, A_{1bf})$$

и

$$\text{Sim}_Y(A_{3ab}, A_{3fd}) = \text{Sim}_Y(A_{3af}, A_{3df}),$$

так как

$$A_{1bc} = A_{1bf} \quad \text{и} \quad A_{3ab} = A_{3af}.$$

Для расчета коэффициента передачи $K_{a_1 a_4}$ рассматриваемой блок-схемы необходимо определить полное структурное число \mathcal{A}_{a_1} блок-

графа Г. Таблица порядков \mathbf{P}_{a_1} [выражение (б)] этого числа содержит два одинаковых столбца (X_1), которые в выражениях (г) и (д) заменены на полные структурные числа. Аналогично поступаем с другой парой одинаковых столбцов (X_5). Обозначив через Δ детерминантную функцию $\det_Y \mathbf{A}$, можно записать следующее выражение для детерминантной функции структурного числа \mathbf{A}_{a_1} :

$$\begin{aligned} \det_Y \mathbf{A}_{a_1} = & (\Delta_{1abc}\Delta_{2b}\Delta_{3d} + \Delta_{1ac}\Delta_{2b}\Delta_{3ad} + \Delta_{1ab}\Delta_{2ab}\Delta_{3d} + \Delta_{1a}\Delta_{2ab}\Delta_{3ad} + \\ & + \Delta_{1abc}\Delta_{2}\Delta_{3bd} + \Delta_{1ac}\Delta_{2}\Delta_{3abd} + \Delta_{1ab}\Delta_{2a}\Delta_{3bd} + \Delta_{1a}\Delta_{2a}\Delta_{3abd}) \Delta_4 + \\ & + (\Delta_{1abc}\Delta_{2b}\Delta_3 + \Delta_{1ac}\Delta_{2b}\Delta_{3a} + \Delta_{1ab}\Delta_{2ab}\Delta_3 + \Delta_{1a}\Delta_{2ab}\Delta_{3a} + \\ & + \Delta_{1abc}\Delta_{2}\Delta_{3b} + \Delta_{1ac}\Delta_{2}\Delta_{3ab} + \Delta_{1ab}\Delta_{2a}\Delta_{3b} + \Delta_{1a}\Delta_{2a}\Delta_{3ab}) \Delta_{4a} - \\ & - \frac{1}{4} \{ (\Delta_{1ab} + \Delta_{1ac} - \Delta_{1af}) (\Delta_{2a} + \Delta_{2b} - \Delta_{2c}) [\Delta_4 (\Delta_{3ad} + \\ & + \Delta_{3bd} - \Delta_{3df}) + \Delta_{4a} (\Delta_{3a} + \Delta_{3b} - \Delta_{3f})] \}. \end{aligned} \quad (\text{ж})$$

Коэффициент передачи $K_{a_1 a_4}$ рассматриваемой блок-схемы получаем, поделив выражение (е) для функции совпадения схемы на выражение (ж) для детерминантной функции схемы

$$K_{a_1 a_4} = \frac{\text{Sim}(A_{a_1}, A_{a_4})}{\det_Y \mathbf{A}_{a_1}}.$$

Поделив в последнем равенстве числитель и знаменатель на произведение

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 = \det_Y \mathbf{A}_1 \det_Y \mathbf{A}_2 \det_Y \mathbf{A}_3 \det_Y \mathbf{A}_4,$$

найдем коэффициент передачи напряжения $K_{a_1 a_4}$ рассматриваемой блок-схемы, выраженный через коэффициенты передачи напряжения и входные импедансы отдельных многополюсников схемы. Числитель коэффициента передачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} Z_{4a} \{ & K_{1abc} Z_{1ac} Z_{1c} Z_{2b} K_{3ad} Z_{3a} + K_{1acb} Z_{1ab} Z_{1b} K_{2ab} Z_{2a} K_{3bd} Z_{3b} - \\ & - \frac{1}{4} (K_{1acb} Z_{1ab} Z_{1b} + K_{1abc} Z_{1ac} Z_{1c} - K_{1abf} Z_{1a} Z_{1f}) \times \\ & \times (K_{2ab} Z_{2a} + Z_{2b} - K_{2cb} Z_{2c}) (K_{3ad} Z_{3a} + K_{3bd} Z_{3b} - K_{3fd} Z_{3f}) + \\ & + K_{1ab} Z_{1a} Z_{2ab} Z_{2b} K_{3ad} Z_{3a} + K_{1abc} Z_{1ac} Z_{1c} K_{3ad} Z_{3a} Z_{3b} + \\ & + K_{1ac} Z_{1a} K_{2ab} Z_{2a} K_{3bd} Z_{3b} Z_{3a} + K_{1ab} Z_{1a} Z_{2a} K_{3ab} Z_{3a} Z_{3b} - \\ & - \frac{1}{4} (K_{1ab} Z_{1a} + K_{1ac} Z_{1a} - K_{1af} Z_{1a}) (Z_{2a} + K_{2ab} Z_{2a} - K_{2ac} Z_{2a}) \times \\ & \times (K_{3bd} Z_{3b} Z_{3a} + K_{3adb} Z_{3ad} Z_{3d} - K_{3adf} Z_{3af} Z_{3f}) \}, \end{aligned}$$

а знаменатель

$$\begin{aligned} & Z_{1abc} Z_{1bc} Z_{1c} Z_{2b} Z_{3d} + Z_{1ac} Z_{1c} Z_{2b} Z_{3ad} Z_{3d} + Z_{1ab} Z_{1b} Z_{2ab} Z_{2c} Z_{3d} + \\ & + Z_{1a} Z_{2ab} Z_{2b} Z_{3ad} Z_{3d} + Z_{1abc} Z_{1bc} Z_{1c} Z_{3bd} Z_{3d} + Z_{1ac} Z_{1c} Z_{3ab} Z_{3bd} Z_{3d} + \\ & + Z_{1cb} Z_{1b} Z_{2a} Z_{3bd} Z_{3d} + Z_{1a} Z_{2a} Z_{3ab} Z_{3bd} Z_{3d} + \\ & + (Z_{1abc} Z_{1bc} Z_{1c} Z_{2b} + Z_{1ac} Z_{1c} Z_{2b} Z_{3a} + Z_{1ab} Z_{1b} Z_{2ab} Z_{2b} + Z_{1a} Z_{2ab} Z_{2b} Z_{3a} + \\ & + Z_{1abc} Z_{1bc} Z_{1c} Z_{3b} + Z_{1ac} Z_{1c} Z_{3ab} Z_{3b} + Z_{1ab} Z_{1b} Z_{2a} Z_{3b} + Z_{1a} Z_{2a} Z_{3ab} Z_{3b}) Z_{4a} - \\ & - \frac{1}{4} (Z_{1ab} Z_{1b} + Z_{1ac} Z_{1c} - Z_{1af} Z_{1f}) (Z_{2a} + Z_{2b} - Z_{2c}) \times \\ & \times [Z_{3ad} Z_{3d} + Z_{3bd} Z_{3d} - Z_{3df} Z_{3f} + Z_{4a} (Z_{3a} + Z_{3b} - Z_{3f})]. \end{aligned}$$

В этих выражениях использованы обозначения:

K_{1abc} — коэффициент передачи напряжения многополюсника W_1 между путями a_1 и b_1 с замкнутым путем c_1 ;

K_{3ad} — коэффициент передачи напряжения многополюсника W_3 между путями a_3 и d_3 ;

K_{1acb} — коэффициент передачи напряжения многополюсника W_1 между путями a_1 и c_1 с замкнутым путем b_1 ;

Z_{1abc} — импеданс многополюсника W_1 с замкнутыми путями b_1 и c_1 , измеренный относительно пути a_1 ;

Z_{1ac} — импеданс многополюсника W_1 с замкнутым путем c_1 , измеренный относительно пути a_1 ;

Z_{3b} — импеданс многополюсника W_3 , измеренный относительно пути b_3 .

Некоторые из этих обозначений поясняет рис. 3.17.

Замечания. Используя формулы перехода (1.98) и (1.99), можно исключить коэффициенты передачи и импедансы замкнутых многополюсников в приведенных выражениях.

Последний пример иллюстрировал способ определения коэффициента передачи напряжения блок-схемы через внешние параметры отдельных многополюсников, не учитывая при этом их внутренней структуры.

Представим теперь второй способ определения коэффициента передачи напряжения блок-схемы, который во многих практических случаях может быть более удобным, чем предыдущий.

В общем случае адмитанс $Y_{\alpha\beta}$ и импеданс $Z_{\alpha\beta}$ линейной блок-схемы можно выразить через адмитанс y_k и импеданс z_k ветви k

$$Y_{\alpha\beta} = \frac{a'y_k + b'}{c'y_k + d'}$$

$$Z_{\alpha\beta} = \frac{a''z_k + b''}{c''z_k + d''}$$

где $a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ — величины, не зависящие от y_k и z_k .

Применяя теорему Эйлера для однородных функций, последние выражения можно записать в виде

$$Y_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^g \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial y_k} y_k, \quad (3.43)$$

$$Z_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^g \frac{\partial Z_{\alpha\beta}}{\partial z_k} z_k, \quad (3.44)$$

где g — число ветвей цепи.

Составляя баланс мощности для пассивной цепи, питаемой от идеального источника напряжения $E_{\alpha\beta}$, и пользуясь формулой (3.43), получим

$$E_{\alpha\beta}^2 \sum_{k=1}^g \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial y_k} y_k = \sum_{k=1}^g U_k^2 y_k,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^g \left(E_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial y_k} - U_k^2 \right) y_k = 0,$$

где U_k — напряжение ветви k , $Y_{\alpha\beta}$ — входной адмитанс цепи.

Чтобы это уравнение было справедливо при произвольных величинах y_k необходимо выполнение равенства

$$\frac{U_k}{E_{\alpha\beta}} = \pm \sqrt{\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial y_k}} \quad (3.45)$$

Эту формулу можно также применять для пары узлов $\{\mu, \nu\}$, не соединенных ветвью k , так как всегда можно предположить, что такая ветвь имеет адмитанс $y_k = 0$.

Обозначим через a и c произвольные пути между парами вершин $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\mu, \nu\}$ графа Γ электрической цепи (рис. 3.18).

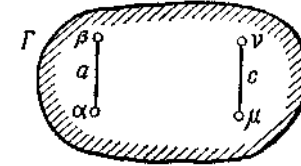


Рис. 3.18. Блок-граф четырехполюсника с обозначенными входными и выходными путями.

Если \mathcal{A} — полное структурное число графа Γ , то на основании формулы (3.45) напишем

$$K_{ac} = \frac{U_c}{E_a} = \pm \left\{ \det_Y \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\mathcal{A}}{\partial \mathcal{A} / \partial a} \right) \right\}^{1/2} = \frac{\left\{ \det_Y \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial c} \right) - \det_Y \left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial a \partial c} \right) \right\}^{1/2}}{\det_Y \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a}}. \quad (3.46)$$

Применив операцию перемещения нижних индексов, эту формулу приведем к виду

$$K_{ac} = \pm \frac{\left\{ \det_Y (\mathcal{A}_a \mathcal{A}_c) - \det_Y (\mathcal{A} \mathcal{A}_{ac}) \right\}^{1/2}}{\det_Y \mathcal{A}_a}. \quad (3.47)$$

Сравнивая ее с формулами (3.27) или (3.28), заметим, что выражение под корнем

$$\sqrt{\mathcal{A}_a \mathcal{A}_c - \mathcal{A} \mathcal{A}_{ac}}$$

равно квадрату разности двух полных структурных чисел.

Необходимым условием существования геометрического изображения структурного числа $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s$ будет условие существования действительного корня. Кроме того, из соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a \mathcal{A}_c - \mathcal{A} \mathcal{A}_{ac} &= \frac{1}{4} (\mathcal{A}_e + \mathcal{A}_f - \mathcal{A}_b - \mathcal{A}_d)^2 = \\ &= \{(\mathcal{A}_e \cap \mathcal{A}_f) - (\mathcal{A}_b \cap \mathcal{A}_d)\}^2 = \\ &= \{(\mathcal{A}_a \cap \mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_f) - (\mathcal{A}_a \cap \mathcal{A}_c \cap \mathcal{A}_d)\}^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

следуют формулы перехода (1.98) и (1.99).

Выражения (3.47) можно также записать в виде

$$K_{ac} = \pm \frac{(\Delta_a \Delta_c - \Delta_{ac})^{1/2}}{\Delta_a}, \quad (3.49)$$

где

$$\Delta = \det_Y A, \quad \Delta_a = \det_Y \frac{\partial A}{\partial a}, \quad \Delta_c = \det_Y \frac{\partial A}{\partial c},$$

$$\Delta_{ac} = \det_Y \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial c}, \quad A = \mathcal{A}^s.$$

После элементарных преобразований формула (3.49) примет вид

$$K_{ac} = \pm \left(\frac{Z_c - Z_{ca}}{Z_a} \right)^{1/2}, \quad (3.50)$$

где Z_a — входной импеданс цепи, Z_c — выходной импеданс цепи, Z_{ca} — выходной импеданс цепи с замкнутым входом. Из формул (3.49) и (3.50) невозможно определить знак коэффициента передачи K_{ac} . На практике знак K_{ac} не всегда представляет интерес, или в противном случае его можно определить, например, путем рассмотрения одного 2-дерева в графе Γ , которое служит изображением столбца одного из двух структурных чисел, полученных в результате вычисления выражения

$$(\mathcal{A}_{ac} \mathcal{A}_c - \mathcal{A}_{ac} \mathcal{A}_a)^{1/2}.$$

Из сравнения формул (3.46), (3.47), (3.49), (3.50) следует, что практически самой удобной является формула (3.50), которая при анализе блок-схем позволяет рассчитать K_{ac} без рассмотрения структуры отдельных блоков.

Покажем это на примере.

Пример 3.10. Рассчитать коэффициент передачи $K_{a_1 b_3}$ блок-схемы (рис. 3.19, а), причем входной импеданс и импеданс нагрузки этой схемы включены в многополюсники W_1 и W_3 . Блок-граф этой схемы изображен на рис. 3.19, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 3.19, в.

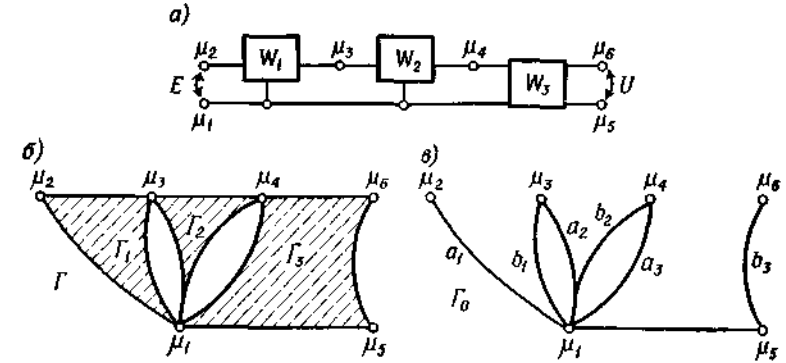


Рис. 3.19.

Структурное число 2A графа Γ равно

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & a_2 & a_2 \\ b_2 & a_3 & b_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix},$$

а таблица порядков числа

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не содержит одинаковых столбцов. Поэтому можно непосредственно записать выражение для детерминантной функции Δ рассматриваемой блок-схемы

$$\Delta = \Delta_{1b} (\Delta_{2b} \Delta_3 + \Delta_2 \Delta_{3a}) + \Delta_1 (\Delta_{2ab} \Delta_3 + \Delta_{2a} \Delta_{3a}),$$

а затем и выражения для детерминантных функций Δ_{a_1} и Δ_{b_3} схемы, замкнутой на входе и выходе:

$$\Delta_{a_1} = \Delta_{1ab} (\Delta_{2b} \Delta_3 + \Delta_2 \Delta_{3a}) + \Delta_{1a} (\Delta_{2ab} \Delta_3 + \Delta_{2a} \Delta_{3a}),$$

$$\Delta_{b_3} = \Delta_{1b} (\Delta_{2b} \Delta_{3b} + \Delta_2 \Delta_{3ab}) + \Delta_1 (\Delta_{2ab} \Delta_{3b} + \Delta_{2a} \Delta_{3ab}).$$

Рассчитаем теперь импедансы Z_{b_3} , $Z_{b_3 a_1}$, Z_{a_1} :

$$Z_{b_3} = \left(\frac{\Delta_{b_3}}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \right) : \left(\frac{\Delta}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \right) = \frac{Z_{1b} Z_{3b} (Z_{2b} + Z_{3ab}) + Z_{2a} Z_{3b} (Z_{2ba} + Z_{3ab})}{Z_{1b} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})},$$

$$Z_{b_3 a_1} = \frac{Z_{1ba} Z_{3b} (Z_{2b} + Z_{3ab}) + Z_{2a} Z_{3b} (Z_{2ba} + Z_{3ab})}{Z_{1ba} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})},$$

$$Z_{a_1} = \left(\frac{\Delta_{a_1}}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \right) : \left(\frac{\Delta}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \right) = \frac{Z_{1ab} Z_{1b} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{1a} Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})}{Z_{1b} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})}.$$

Подставив рассчитанные выражения в формулу для коэффициента передачи схемы

$$K_{a_1 b_3} = \pm \left(\frac{Z_{b_3} - Z_{b_3 a_1}}{Z_{a_1}} \right)^{1/2},$$

получим коэффициент передачи рассматриваемой блок-схемы, выраженный через импедансы многополюсников этой схемы в разных режимах короткого замыкания.

Заметим, что блок-схема в этом примере представляет собой цепную схему, поэтому расчет коэффициента передачи можно упростить, используя при этом формулу (3.41), причем

$$\text{Sim}_Y(A_{ia}, A_{ib}) = \pm (\Delta_{ia} \Delta_{ib} - \Delta_i \Delta_{iab})^{1/2},$$

откуда

$$K_{a_1 b_3} = \frac{\pm \{(\Delta_{1a} \Delta_{1b} - \Delta_1 \Delta_{1ab}) (\Delta_{2a} \Delta_{2b} - \Delta_2 \Delta_{2ab}) (\Delta_{3a} \Delta_{3b} - \Delta_3 \Delta_{3ab})\}^{1/2}}{\Delta_{1ab} (\Delta_{2b} \Delta_{3a} + \Delta_2 \Delta_{3a}) + \Delta_{1a} (\Delta_{2ab} \Delta_3 + \Delta_{2a} \Delta_{3a})}.$$

Поделив числитель и знаменатель на произведение детерминантных функций $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ многополюсников схемы, получаем следующее выражение:

$$K_{a_1 b_3} = \frac{\pm [Z_{1a} (Z_{1b} - Z_{1ba}) Z_{2a} (Z_{2b} - Z_{2ba}) Z_{3a} (Z_{3b} - Z_{3ba})]^{1/2}}{Z_{1ab} Z_{1b} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{1a} Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})}.$$

1.3.5. Схемы замещения

На практике часто используются схемы замещения, которые имеют такие же свойства, что и исходные схемы. Рассматривать схемы замещения весьма полезно при анализе блок-схем, схем с индуктивными связями, с распределенными параметрами, а также с полупроводниковыми приборами.

Рассмотрим способ расчета схем замещения. Если в исходной схеме (рис. 3.20, а) имеется v_z узлов, то схемой замещения будем называть цепь в виде полного многоугольника с v_z узлами и $\frac{v_z(v_z-1)}{2}$ ветвями (рис. 3.20, б).

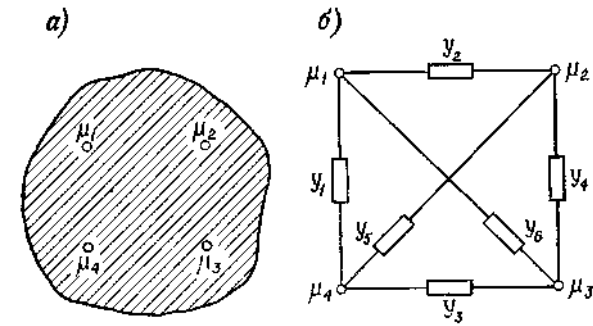


Рис. 6.20.

Пусть обозначения ребер графа схемы замещения одновременно будут соответствовать путям графа исходной схемы. Заметим, что граф схемы замещения представляет собой замещающий (полный) граф Γ_z графа Γ исходной схемы.

Допустим, что детерминантные функции графа A исходной схемы и графа A_z схемы замещения равны, т. е.

$$\det_Y A = \det_Y A_z. \quad (3.51)$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы адмитанс y_k ветви α_k схемы замещения удовлетворял следующему соотношению, непосредственно вытекающему из соотношения (1.55):

$$y_k = \frac{\det_Y A_k}{\det_Y A_{ka}} = \frac{\det_Y a_{k(v_z-2)}}{\det_Y \frac{\partial A}{\partial D}}, \quad (3.52)$$

где A_k — структурное число двухполюсного блока Γ_k в блок-графе Γ_z^* , эквивалентном графу Γ ; α_k — обозначение ребра замещающего графа Γ_z соответствующей ветви α_k схемы замещения;

$A_{ka} = \partial A_k / \partial \alpha_k$; $a_{k(v_z-2)}$ — дендритный вес ребра α_k замещающего графа Γ_z ; D — структурное число произвольного дерева, касающегося всех v_z выделенных вершин графа Γ .

Дендритный вес $a_{k(v_z-2)}$ ребра α_k замещающего графа Γ_z рассчитаем по формулам, приведенным ранее:

$$a_{k(v_z-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial D^{1k}} + \frac{\partial A}{\partial D^{2k}} - \frac{\partial A}{\partial (D^{1k} D^{2k} [\alpha_k])} \right) \quad (3.53)$$

или

$$a_{\bar{k}(v_2-2)}^s = \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{1k}}} \cap \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{2k}}}, \quad (3.54)$$

где $\mathcal{A} \stackrel{s}{=} A$ — структурное число графа Γ исходной схемы; $D^{\mu_{1k}}$ — структурное число произвольного дерева, касающегося всех выделенных вершин графа Γ , кроме вершины μ_{1k} , инцидентной ребру α_k ; $D^{\mu_{2k}}$ — структурное число произвольного дерева, касающегося всех выделенных вершин графа Γ , кроме вершины μ_{2k} , инцидентной ребру α_k ; $D^{\mu_{1k}\mu_{2k}}$ — структурное число произвольного дерева, касающегося всех выделенных вершин графа Γ , кроме вершин μ_{1k} и μ_{2k} , инцидентных ребру α_k . Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu_{1k}} &= \det \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{1k}}}, \\ \Delta^{\mu_{2k}} &= \det \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{2k}}}, \\ \Delta_{\alpha_k}^{\mu_{1k}\mu_{2k}} &= \det \frac{\partial A}{\partial (D^{\mu_{1k}\mu_{2k}}[\alpha_k])}, \\ \Delta' &= \det \frac{\partial A}{\partial I}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

где $\Delta^{\mu_{1k}}$ ($\Delta^{\mu_{2k}}$) — детерминантная функция, равная определителю матрицы проводимостей (узловых) исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме узла μ_{1k} (μ_{2k}),

принадлежащего ветви α_k ; $\Delta_{\alpha_k}^{\mu_{1k}\mu_{2k}}$ — детерминантная функция, равная определителю матрицы проводимостей (узловых) исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме узлов μ_{1k} и μ_{2k} , которые в свою очередь замкнуты друг с другом;

Δ' — детерминантная функция, равная определителю матрицы проводимостей исходной схемы при коротком замыкании всех v_2 выделенных узлов.

Теперь можно записать равенство

$$y_k = \frac{\Delta^{\mu_{1k}} + \Delta^{\mu_{2k}} - \Delta_{\alpha_k}^{\mu_{1k}\mu_{2k}}}{2\Delta'}, \quad (3.56)$$

откуда после элементарных преобразований получаем

$$y_k = \frac{1}{2} (Y_{\alpha_k}^{\mu_1} + Y_{\alpha_k}^{\mu_2} - Y_{\alpha_k \pm 1 \alpha_k}^{\mu_1 \mu_2}), \quad (3.57)$$

где $Y_{\alpha_k}^{\mu_1}$ — адмитанс исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме узла μ_{1k} , измеренный относительно пути

α_k (т. е. между узлом μ_{1k} и общим узлом); $Y_{\alpha_k}^{\mu_2}$ — адмитанс исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме узла μ_{2k} , измеренный относительно пути α_k ;

$Y_{\alpha_k \pm 1 \alpha_k}^{\mu_1 \mu_2}$ — адмитанс исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме замкнутых друг с другом узлов μ_{1k} и μ_{2k} , измеренный относительно пути α_{k+1} или α_{k-1} (т. е. между узлом $\mu_{1k} + \mu_{2k}$ и общим узлом).

Адмитанс y_k ветви α_k графа замещения Γ_2 , выраженный в виде конъюнкции (3.54), рассчитаем по формуле

$$y_k = \frac{\det \left(\frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{1k}}} \cap \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{2k}}} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial D}}. \quad (3.58)$$

Описанный способ расчета адмитанса ветви схемы замещения иллюстрируют следующие примеры.

Пример 3.11. Для схемы рис. 3.21, а построить схему замещения с тремя узлами, показанную на рис. 3.21, б, и рассчитать адмитансы ветвей схемы замещения. Графы обеих схем изображены на рис. 3.21, в и г.

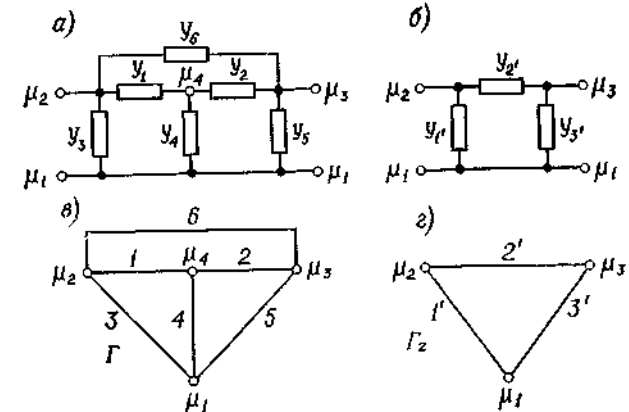


Рис. 3.21.

Для расчетов используем формулу (3.58).

Структурное число графа Γ исходной схемы равно

$$A = [1 \ 3 \ 6] [2 \ 5 \ 6] [3 \ 4 \ 5].$$

Для определения адмитанса y_1' рассчитаем конъюнкцию

$$\begin{aligned} (A_{2'} \cap A_{3'}) &= (A_6 \cap A_5) = \left(\frac{\partial}{\partial 6} \frac{\delta A}{\delta 5} \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial 5} \frac{\delta A}{\delta 6} \right) = \\ &= ([1 \ 2 \ 3] [3 \ 4]) \cap ([1 \ 3] [2 \ 3 \ 4]) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \\ A_{2'3'} &= A_{e5} = \frac{\partial^2 A}{\partial 6 \partial 5} = [1 \ 2 \ 4], \end{aligned}$$

следовательно,

$$y_1' = \frac{\det(A_{2'} \cap A_{3'})}{Y} = \frac{y_1(y_3 + y_4) + y_3(y_2 + y_4)}{y_1 + y_2 + y_4}.$$

Для расчета адмитанса $y_{2'}$ рассчитаем конъюнкцию

$$\begin{aligned} (A_{1'} \cap A_{3'}) &= (A_3 \cap A_5) = \left(\frac{\partial}{\partial 3} \frac{\delta A}{\delta 5} \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial 5} \frac{\delta A}{\delta 3} \right) = \\ &= ([1 \ 4 \ 6] [2 \ 6]) \cap ([2 \ 4 \ 6] [1 \ 6]) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_{2'} = \frac{y_1(y_2 + y_6) + y_6(y_2 + y_4)}{y_1 + y_2 + y_4}.$$

Аналогично рассчитаем $y_{3'}$

$$y_{3'} = \frac{y_4(y_2 + y_5) + y_5(y_1 + y_3)}{y_1 + y_2 + y_4}.$$

Пример 3.12. Для блок-схемы (рис. 3.22, а) построить схему замещения с тремя узлами, показанную на рис. 3.22, б, рассчитать адмитансы ветвей этой схемы замещения, построить схемы замещения отдельных блоков исходной схемы. Схема замещения изображена на рис. 3.22, в; граф F'_z ее представлен на рис. 3.22, г.

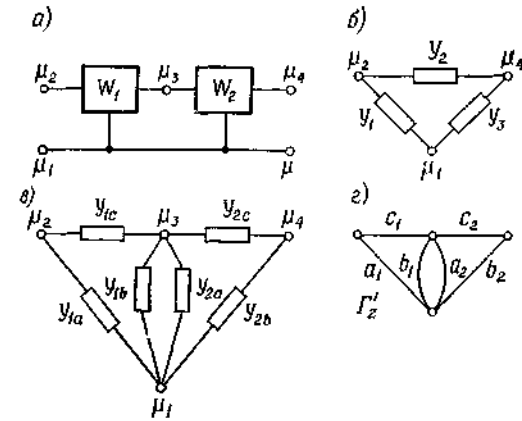


Рис. 3.22.

В соответствии с формулой (3.57) рассчитаем адмитансы отдельных ветвей схемы замещения (фиг. 3.22, в)

$$\begin{aligned} y_{1a} &= \frac{1}{2} (Y_{1ab} + Y_{1ac} - Y_{1ca}), \\ y_{1b} &= \frac{1}{2} (Y_{1ba} + Y_{1bc} - Y_{1cb}), \\ y_{1c} &= \frac{1}{2} (Y_{1ca} + Y_{1cb} - Y_{1ac}), \\ y_{2a} &= \frac{1}{2} (Y_{2ab} + Y_{2ac} - Y_{2ca}), \\ y_{2b} &= \frac{1}{2} (Y_{2ba} + Y_{2bc} - Y_{2cb}), \\ y_{2c} &= \frac{1}{2} (Y_{2ca} + Y_{2cb} - Y_{2ac}), \end{aligned} \quad (a)$$

Y_{1ab} — адмитанс многополюсника W_1 с замкнутым путем b_1 , измеренный относительно пути a_1 ,

Y_{2ac} — адмитанс многополюсника W_2 с замкнутым путем c_2 , измеренный относительно пути a_2 .

Теперь рассчитаем адмитансы ветвей схемы замещения (рис. 3.22, б).

Для этого вычислим структурное число графа F'_z (рис. 3.22, г)

$$A'_z = [a_1 \ c_1] [b_1 \ c_1 \ a_2 \ c_2] [b_2 \ c_2].$$

Найдем конъюнкцию

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'_z}{\partial b_2} \cap \left\{ \frac{\partial A'_z}{\partial b_2} + \frac{\partial A'_z}{\partial a_1} \right\} &= \frac{\partial A'_z}{\partial b_2} + \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial b_2} \frac{\delta A'_z}{\delta a_1} \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\delta A'_z}{\delta b_2} \right) \right\} = \\ &= [a_1 \ c_1] [b_1 \ c_1 \ a_2 \ c_2] + \{ ([c_1] [b_1 \ a_2 \ c_2]) \cap \\ &\cap ([c_2] [b_1 \ c_1 \ a_2]) \} = \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & c_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 & a_2 & c_2 & b_1 & a_2 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial^2 A'_z}{\partial a_1 \partial b_2} &= [b_1 \ c_1 \ a_2 \ c_2]. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$y_1 = y_{1a} + \frac{y_{1c}(y_{1b} + y_{2a})}{y_{1b} + y_{1c} + y_{2a} + y_{2c}}$$

Подставив выражение (а) в последнюю формулу, получим

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} (Y_{1ab} + Y_{1ac} - Y_{1ca}) + \\ &+ \frac{(Y_{1ca} + Y_{1cb} - Y_{1bc})(Y_{1ba} + Y_{1bc} - Y_{1ab} + Y_{2ab} + Y_{2ac} - Y_{2ca})}{4(Y_{1ca} + Y_{2ca})}. \end{aligned}$$

Аналогично рассчитываются адмитансы y_2 и y_3 .

1.3.6. Преобразование активных блок-схем

Рассмотрим активную блок-схему с выделенными v_z узлами, содержащую независимые источники питания. Эта схема может быть самостоятельной цепью, отдельным многополюсником или частью большой схемы. Не учитывая внутренней структуры схемы, допустим, что известны ее внешние параметры, т. е. межзвонные напряжения на ветвях любого дерева, построенного на выделенных узлах этой схемы, токи выделенных узлов схемы, а также входные импедансы или адмитансы схемы при различных вариантах замыкания выделенных узлов.

Заметим, что если известны межзвонные напряжения на ветвях произвольного дерева, построенного на выделенных узлах схемы, то можно легко определить все остальные межзвонные напряжения этой схемы.

Схемой замещения рассматриваемой блок-схемы будет схема с v_z узлами, построенная из $v_z(v_z - 1)/2$ ветвей, образующих полный многоугольник.

Адмитансы этих ветвей рассчитываем методами, описанными в предыдущем разделе. Токи узлов схемы замещения должны быть равны токам в узлах рассматриваемой блок-схемы, также как и

межзвонные напряжения схемы замещения должны быть равны соответствующим межзвонным напряжениям блок-схемы. Из второго закона Кирхгофа следует, что достаточно, чтобы равенство соответствующих напряжений выполнялось только для $v_z - 1$ межзвонных напряжений. Таким образом, для расчета напряжений источников напряжения схемы замещения достаточно составить $v_z - 1$ независимых уравнений. Отсюда вытекает, что схема замещения должна содержать не более $v_z - 1$ источников напряжения. Эти источники не могут быть размещены в ветвях, образующих контур, т. е. они должны находиться в ветвях, образующих произвольное дерево схемы замещения.

Для расчета напряжений этих источников составляем $v_z - 1$ уравнений для токов в $v_z - 1$ узлах схемы замещения. Для любого узла μ схемы замещения (рис. 3.23) уравнение для токов имеет вид

$$\sum_{i=1}^{v_z-1} (E_i - U_i) y_i + I_\mu = 0 \tag{3.59}$$

или

$$\sum_{i=1}^{v_z-1} E_i y_i = \sum_{i=1}^{v_z-1} U_i y_i - I_\mu. \tag{3.60}$$

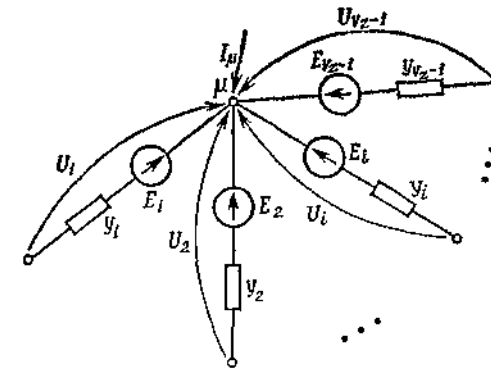


Рис. 3.23. Схема части замещающей цепи с узлом μ .

Знаки в приведенных формулах справедливы для направлений напряжений и тока I_μ в узел μ (рис. 3.23). При противоположном направлении напряжений или тока в вышеприведенных формулах нужно изменить знак.

После решения системы этих линейных уравнений получаем искомые напряжения E_i источников схемы замещения.

Замечание. Для упрощения расчета источники следует разместить в ветвях, инцидентных одному узлу схемы замещения. Тогда можно непосредственно составить выражение для каждого искомого напряжения источника. Способ расчета напряжений источников в схеме замещения иллюстрирует следующий пример.

Пример. 3.13. Рассчитать напряжения источников схемы замещения (рис. 3.24, б) по известным напряжениям между узлами блок-схемы рис. 3.24, а.

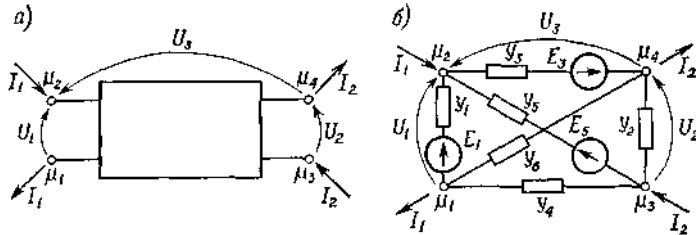


Рис. 3.24.

Составим уравнение для тока узла μ_1 схемы замещения:

$$-E_1 y_1 = -U_1 y_1 + (U_3 - U_1) y_6 + (U_2 + U_3 - U_1) y_4 + I_1.$$

Из этого уравнения следует

$$E_1 = U_1 - (U_3 - U_1) \frac{y_6}{y_1} - (U_2 + U_3 - U_1) \frac{y_4}{y_1} - \frac{I_1}{y_1}.$$

Аналогично, составляя уравнения для тока узлов μ_3 и μ_4 , получим

$$E_5 = U_2 + U_3 + U_2 \frac{y_2}{y_5} + (U_2 + U_3 - U_1) \frac{y_4}{y_5} + \frac{I_2}{y_5},$$

$$E_3 = -U_3 + U_2 \frac{y_2}{y_3} - (U_3 - U_1) \frac{y_6}{y_3} - \frac{I_2}{y_3}.$$

Значения адмитансов ветвей схемы замещения y_1, y_2, \dots, y_6 рассчитаем любым из методов, описанных в предыдущем разделе. Например, в соответствии с уравнением (3.57) имеем

$$y_1 = \frac{1}{2} (Y_{123} + Y_{124} - Y_{312}),$$

где Y_{123} — адмитанс блок-схемы (рис. 3.24, а) при коротком замыкании узлов μ_2, μ_3 и μ_4 , измеренный между узлами μ_1 и $(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)$; Y_{124} — адмитанс блок-схемы при коротком замыкании узлов μ_1, μ_3 и μ_4 , измеренный между узлами μ_2 и $(\mu_1 + \mu_3 + \mu_4)$; Y_{312} — адмитанс блок-схемы при коротком

замыкании узловых пар μ_1, μ_2 и μ_3, μ_4 , измеренный между узлами $(\mu_1 + \mu_2)$ и $(\mu_3 + \mu_4)$.

Аналогично рассчитываются адмитансы других ветвей схемы замещения.

1.4. Синтез моделей электрических цепей методом структурных чисел

1.4.1. Введение

Существует множество методов синтеза моделей линейных пассивных электрических цепей. Большинство их названий связывают с фамилиями их создателей. Иногда эти методы отличаются оригинальностью и показывают творческую мысль авторов. Однако у них есть **один основной недостаток**. Как правило, это **рецептурные методы**, требующие различного подхода к каждой конкретной проблеме синтеза. Эти методы накладывают резкие ограничения на структуру синтезируемой схемы, а также на величины и род используемых элементов. Например, они ограничивают проблему синтеза схемами лестничной или мостовой структуры, четырех-полносником в виде перекрытого или двойного Т-образного моста и т. д. Такие большие ограничения не позволяют выделить среди этих схем лучшую. Пользователь принимает решение, но может оказаться, что такое решение не существует вообще.

Отсутствие метода, решающего проблему синтеза моделей электрических цепей каким-то общим методом, можно объяснить следующими причинами:

1. Большой сложностью расчета, связанной с определением множества моделей схем, удовлетворяющих всем условиям синтеза.
2. Отсутствием простого и одновременно достаточно общего расчетного алгоритма.
3. Отсутствием достаточно просто сформулированных условий, реализации модели схемы.

По мере развития вычислительной техники трудности расчета можно полностью преодолеть, нужен только соответствующий расчетный алгоритм, хорошо приспособленный к технике машинного расчета и учитывающий условия физической реализации схем.

По мнению ряда авторов, таким алгоритмом могла бы быть алгебра структурных чисел, которая непосредственно связывает геометрические свойства графа цепи с расчетным методом.

Преимущество алгебры структурных чисел заключается в том, что она позволяет алгебраическим методом записывать структуру схемы, а также дает простые связи всех изменений топологии схемы с операциями над структурными числами. По-видимому, это свойство представляет собой одно из основных преимуществ использования алгебры структурных чисел для синтеза схем.

В настоящем разделе описано использование алгебры структурных чисел для синтеза моделей пассивных двух- и четырехполюсников. Напомним, что под термином **«синтез»** нужно понимать **совокупность операций, необходимых для определения параметров электрической (и не только) цепи или множества цепей, выполняющих поставленные требования.** Поэтому синтез представляет собой понятие, противоположное понятию анализа, при котором имеется заданный объект, подлежащий анализу, т. е. изучению его свойств. Синтез в принципе должен быть инженерным методом, в котором проектировщик стремится к получению возможно лучшего решения.

Первой работой, посвященной проблеме синтеза электрических цепей, была работа Вильгельма Кауэра «Способ реализации двухполюсника с заданным импедансом», опубликованная им в 1926 г. В данной книге описана методика синтеза двухполюсника, основанная на разложении функции импеданса в цепную дробь. Следует обратить внимание на тот факт, что она была опубликована ровно через 100 лет после работы Ома, считающейся первой работой в области теоретической электротехники. В качестве одной из первых работ в области синтеза нужно также отметить и работу Отто Бруне (1931 г.). В этой работе автор представил метод синтеза RLC-двухполюсника, позволяющий реализовать произвольную конечную положительную действительную функцию импеданса. Кроме Кауэра и Бруне значительные результаты в области методов синтеза были получены Баттервортом (1930г.), Воде (1934 г.), Дарлингтоном (1939 г.), Даффином (1949 г.), Гиллемином (1949 г.), Мията (1952 г.), Озаки (1953 г.), Реза (1954 г.) и другими. Работы этих авторов служат своеобразными вехами на пути развития методов синтеза линейных электрических цепей.

Изложенный в данном разделе метод синтеза моделей электрических цепей опирается на алгебру структурных чисел, служит общим методом, не накладывающим никаких принципиальных ограничений на структуру схемы, и требует применения ЦВМ. Метод в представленном здесь виде не завершен до конца и требует дальнейших исследований для различных конкретных приложений.

1.4.2. Синтез модели пассивного двухполюсника

Метод структурных чисел позволяет решать проблему синтеза модели электрической цепи в общем виде без каких-либо ограничений, накладываемых на структуру проектируемой цепи. Однако в связи с большой сложностью вычислений проблемы синтеза следует решать с использованием ЦВМ.

Задачу синтеза модели электрической цепи можно разбить на два этапа: 1) топологический синтез графа цепи, 2) расчет величин отдельных элементов схемы.

Под термином **«топологический синтез графа»** понимаем **совокупность операций, связанных с определением класса структур графов, реализующих поставленную проблему синтеза.** Так как определение этих структур связано с определением соответствующих изображений структурных чисел, то при решении этой проблемы важны условия существования геометрического изображения. Напомним эти условия:

1) структурное число A должно иметь разложение на простые множители

$$A = P_1 P_2 \dots P_m; \quad (4.1)$$

2) любой элемент α_{ik} может присутствовать не более чем в двух числах P_i, P_j произведения (4.1).

Кроме того, должны выполняться следующие дополнительные условия:

$$3) \quad P_i \neq P_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (i \neq j);$$

$$4) \quad P_i \neq \sum P_k; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (k \neq i), \quad (4.2)$$

обеспечивающие $A \neq 0$.

Рассмотрим пассивный RLC-двухполюсник (рис. 4.1), в котором выделен импеданс z_α источника.

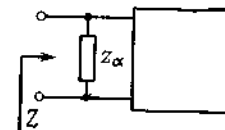


Рис. 4.1. Пассивный RLC-двухполюсник с вынесенным импедансом z_α .

С помощью теории структурных чисел входной импеданс рассматриваемого двухполюсника можно выразить следующим образом

$$Z = \frac{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}}{\det A} \quad \text{или} \quad Z = z_\alpha \frac{\det \frac{\delta A^d}{\delta \alpha}}{\det A^d}, \quad (4.3)$$

где A — структурное число, изображением которого служит граф двухполюсника.

В дальнейшем будем пользоваться второй из приведенных выше формул, которая выражает входной импеданс двухполюсника через импедансы его элементов.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда в каждой ветви двухполюсника присутствуют последовательно соединенные резистор, индуктивность и конденсатор. В этом случае импеданс каждой ветви выражается формулой

$$z_i = sL_i + R_i + s^{-1}C_i^{-1}. \quad (4.4)$$

Входной импеданс синтезируемого двухполюсника представляет собой положительную вещественную функцию

$$Z(s) = \frac{d_{n+1}s^{\bar{n}+1} + d_n s^{\bar{n}} + \dots + d_1 s + d_0}{c_n s^{\bar{n}} + c_{n-1} s^{\bar{n}-1} + \dots + c_1 s + c_0}.$$

Умножая числитель знаменатель этой функции на множитель s^{-l} , где

$$l = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)$$

($E(x)$ обозначает целую часть x), приводим нашу функцию к следующему виду:

$$Z(s) = \frac{a_{n+1}s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_0 + \dots + a_{-(n+1)}s^{-(n+1)}}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0 + \dots + b_{-n} s^{-n}} = \frac{P(s)}{Q(s)}. \quad (4.5)$$

Некоторые коэффициенты a_i , b_j полученной функции могут быть равны нулю.

Обозначим: b — число ветвей цепи, w — число узлов цепи, m — число независимых контуров цепи (цикломатическое число цепи).

Величины b , w и m связаны зависимостью

$$b - w + 1 = m.$$

С другой стороны, из теории структурных чисел известно, что степень $\det \frac{\delta A^d}{\delta \alpha}$ равна цикломатическому числу m графа, служащего изображением структурного числа A . Отсюда следует, что степень полинома $Q(s)$ должна быть равна цикломатическому числу, т. е. $m = n$, и, кроме того,

$$b - w + 1 = n. \quad (4.6)$$

Так как для определения $3b$ неизвестных можем располагать $4n + 4$ уравнениями, то должно выполняться следующее неравенство:

$$3b \geq 4n + 4. \quad (4.7)$$

Если неизвестных больше, чем уравнений, то можно задаться значениями параметров некоторых элементов цепи. Формулы (4.6) и (4.7) дают оценку числа узлов цепи, т. е.

$$w \geq \frac{n+4}{3} + 1. \quad (4.8)$$

Так как количество множителей в произведении (4.1) равно $w - 1$, то

$$m = E\left(\frac{n+4}{3}\right) + k. \quad (4.9)$$

В связи с этим схема будет содержать следующее число ветвей:

$$b = E\left(\frac{n+4}{3}\right) + k + n; \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Приведем операции, необходимые для синтеза модели двухполюсника.

1. Положим $m = E(n+4)/3 + 1$ и рассмотрим множество ветвей

$$B = \{1, 2, \dots, b\}; \quad b = E\left(\frac{n+4}{3}\right) + n + 1,$$

на основе которого строим произведения однострочных структурных чисел

$$A = P_1 P_2 \dots P_m$$

с учетом условий реализуемости (4.1) и (4.2) и выбирая по крайней мере двухэлементные числа P_i .

Например,

$$A = [1 \ 2] [2 \ 3] [3 \ 4 \ 5] \text{ и т. д.}$$

Выполнив умножение, получаем всевозможные структурные числа, а значит, и всевозможные графы, соответствующие случаю $k = 1$.

2. Найдем все дополнительные структурные числа

$$A_1^d, A_2^d, \dots, A_i^d, \dots, A_r^d.$$

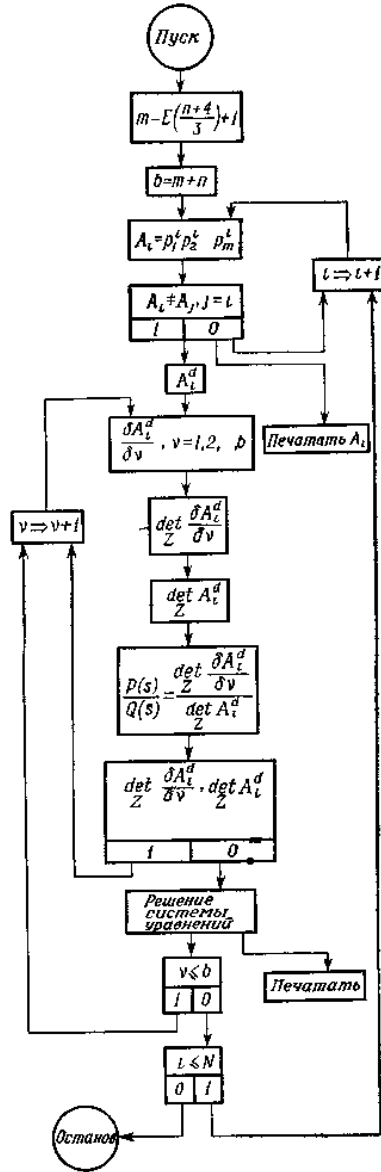
3. Подсчитаем обратные алгебраические производные

$$\frac{\delta A_i^d}{\delta 1}, \frac{\delta A_i^d}{\delta 2}, \dots, \frac{\delta A_i^d}{\delta \alpha}, \dots, \frac{\delta A_i^d}{\delta b}; \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

4. Вычислим детерминантные функции

$$\det \frac{\delta A_i^d}{\delta \alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, b_i; \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

5. Приравняем коэффициенты рациональных функций



1.4.3. Синтез модели пассивного RLC-четырёхполюсника

1.4.3.1. Предварительные сведения

Пусть дан пассивный RLG-четырёхполюсник (рис. 4.2).

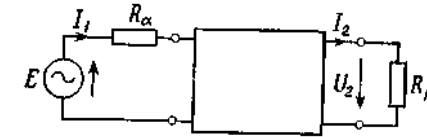


Рис. 4.2. Схема пассивного RLC-четырёхполюсника.

Характеристики четырёхполюсника обычно определяются с помощью передаточных функций или затухания

$$K_u = \frac{U_2}{E}, \quad K_i = \frac{I_2}{I_1}, \quad K_s = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_\beta}{R_\alpha}}, \quad \Gamma_s = \ln \frac{1}{K_s}. \quad (3.17)$$

В методе структурных чисел передача напряжения K_u , тока K_i , передача K_s , а также рабочее затухание Γ_s выражаются в следующем виде (раз. 1.2):

$$K_u = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\det A^d} z_\beta, \quad K_i = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}}, \quad (4.18)$$

$$K_s = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\frac{1}{2} \det A^d} \sqrt{R_\alpha R_\beta}, \quad \Gamma_s = \ln \frac{1}{K_s},$$

где A — структурное число, геометрическим изображением которого служит граф цепи.

Рассмотрим функцию пассивного четырехполюсника

$$K_s = \frac{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}, \quad \bar{m} \leq \bar{n}. \quad (4.19)$$

(Из условий физической реализации четырёхполюсника следует, что знаменатель функции K_s представляет собой полином Гурвица, а числитель — произвольный полином комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$ с вещественными коэффициентами.)

Умножая числитель и знаменатель этой функции на s^{-l} , получим

$$K_s = \frac{d_m s^{\bar{m}-l} + \dots + d_0 s^{-l}}{c_n s^{\bar{n}-l} + \dots + c_0 s^l} = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_{-(n-1)} s^{-(n-1)}}{a_n s^n + \dots + a_{-n} s^{-n}}. \quad (4.20)$$

Выражение (4.20) будем называть стандартной передачей. Всегда справедливы следующие условия:

$$c_n \neq 0 \quad \text{и} \quad d_m \neq 0.$$

Кроме того, допустим, что

$$d_0 = d_1 = \dots = d_{\vartheta-1} = 0; \quad d_\vartheta \neq 0. \quad (4.21)$$

Докажем следующую вспомогательную теорему.

Теорема 4.1. Граф, реализующий заданную передачу, степень числителя которой равна \bar{m} , а знаменателя \bar{n} , имеет цикломатическое число M не меньшее, чем

$$M_{\min} = \begin{cases} E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1 & \text{для } \bar{m} < \bar{n}, \\ E\left(\frac{\bar{n}+1}{2}\right) + 1 & \text{для } \bar{m} = \bar{n}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Доказательство. Так как в выражение стандартной передачи всегда можно ввести дополнительные слагаемые с коэффициентами, равными нулю, то должны выполняться следующие неравенства:

$$n - l \geq \bar{m} - l, \quad n - l \geq l - \vartheta \quad (\text{из выражения для числителя}), \\ n \geq \bar{n} - l, \quad n \geq l \quad (\text{из выражения для знаменателя}).$$

Таким образом, должно выполняться неравенство

$$n \geq \text{Max}\{\bar{m} - l + 1; l - \vartheta + 1; \bar{n} - l; l\}. \quad (4.23)$$

Могут иметь место два частных случая:

а) $\bar{m} = \bar{n}$. Тогда

$$n_{\min} = \min_l \text{Max}\{\bar{n} - l + 1, l - \vartheta + 1, l\}.$$

В этом случае выражение (4.23) будет минимальным для $\vartheta = 0$ при $\bar{n} - l + 1 = l + 1$, а для $\vartheta > 0$ — при $\bar{n} - l + 1 = l$.

Обозначив l_0 значение l , при котором $n = \min$, получим

$$l_0 = \frac{\bar{n}}{2} \quad \text{для } \vartheta = 0,$$

$$l_0 = \frac{\bar{n}+1}{2} \quad \text{для } \vartheta > 0.$$

Очевидно, l_0 должно быть целым числом. Можно заметить, что

$$l_0 = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) \quad \text{и} \quad l_0 = E\left(\frac{\bar{n}+1}{2}\right)$$

приводят к одинаковой величине

$$n_{\min} = E\left(\frac{\bar{n}+1}{2}\right) + 1.$$

б) $\bar{m} < \bar{n}$. Тогда

$$n_{\min} = \min_l \text{Max}\{l - \vartheta + 1, \bar{n} - l, l\}.$$

В этом случае выражение (4.23) для $\vartheta = 0$ будет минимальным при $l + 1 = \bar{n} - 1$, а для $\vartheta > 0$ — при $l = \bar{n} - 1$.

Следовательно, имеем

$$l_0 = \frac{\bar{n}-1}{2} \quad \text{для } \vartheta = 0,$$

$$l_0 = \frac{\bar{n}}{2} \quad \text{для } \vartheta > 0.$$

Легко заметить, что как для четных, так и нечетных \bar{n} минимальное значение n равно

$$n_{\min} = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1.$$

Так как степень знаменателя приведенной к стандартному виду передачи должна быть равна числу множителей в каждом из слагаемых $\det_z A^d$, а с другой стороны, это число равно числу m простых множителей, на которые разлагается A^d

$$A^d = P_1 P_2 \dots P_m,$$

то на основе известной теоремы заключаем, что n равно цикломатическому числу графа, реализующего заданную передачу, т. е.

$n = M$ и

$$M_{\min} = \begin{cases} E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1 & \text{для } \bar{m} < \bar{n}, \\ E\left(\frac{\bar{n}+1}{2}\right) + 1 & \text{для } \bar{m} = \bar{n}. \end{cases}$$

Заметим, что M имеет минимум при $l = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)$.

Доказанная теорема может быть использована при синтезе четырехполюсников методом структурных чисел, так как она позволяет определить класс графов, реализующих заданную передачу четырехполюсника.

Теорема 4.2. В произвольном пассивном RLC-четыреполюснике число X_L индуктивностей и число X_R резисторов удовлетворяют следующим неравенствам:

$$2X_L + X_R \geq \bar{n} + 1$$

или

$$2X_L + X_R \geq \bar{n}, \quad (4.24)$$

где \bar{n} — степень знаменателя передаточной функции четырехполюсника.

Первое неравенство относится к случаю, когда полином в числителе функции содержит свободный член ($\vartheta = 0$), второе — когда в числителе отсутствует свободный член ($\vartheta > 0$).

Доказательство. Допустим, что передаточная функция записана в виде (4.19) и пусть справедливо равенство (4.21). Умножая числитель и знаменатель выражения (4.19) на множитель s^{-1} , приведем его к стандартному виду

$$K_s = \frac{0 \cdot s^{n-1} + 0 \cdot s^{n-2} + \dots + b_v s + \dots + b_0 + \dots + b_{-(n-1)} s^{-(n-1)}}{0 \cdot s^n + 0 \cdot s^{n-1} + \dots + a_\mu s + \dots + a_0 + \dots + a_{-n} s^{-n}}, \quad (4.25)$$

где b_v и a_μ — ненулевые коэффициенты при наибольших степенях числителя и знаменателя K_s , имеющие следующий вид:

$$a_\mu = \sum_k \prod_{i=1}^{M_k} R_{\alpha_{ik}} \prod_{i=1}^{\mu} L_{\alpha_{ik}} \prod_{j=1}^{v_k} L_{\alpha_{jk}} C_{\alpha_{jk}}^{-1}, \quad (4.26)$$

$$b_v = \sum_k \prod_{i=1}^{M_k^*} R_{\beta_{ik}} \prod_{i=1}^v L_{\beta_{ik}} \prod_{j=1}^{N_k^*} L_{\beta_{jk}} C_{\beta_{jk}}^{-1},$$

где

$$M_k + \mu + 2N_k = n, \quad (4.27)$$

$$M_k^* + v + 2N_k^* = n - 1.$$

В выражении (4.26) принято, что $\mu, v > 0$. Можно показать, что случай, когда $\mu, v < 0$, не изменяет условия теоремы.

Из доказательства теоремы 4.1 следует, что

$$n \geq \text{Max}\{\bar{m} - l - 1, l - \vartheta + 1, \bar{n} - l, l\}, \quad \bar{m} \leq \bar{n}. \quad (4.28)$$

Рассмотрим случай $\bar{m} < \bar{n}$. Тогда для n можно написать

а) при $\vartheta = 0$

$$n \geq \begin{cases} l + 1 & \text{для } l + 1 \geq \bar{n} - l, \\ \bar{n} - 1 & \text{для } l + 1 < \bar{n} - l, \end{cases} \quad (4.29a)$$

откуда

$$n - l = 1, 2, 3, \dots;$$

б) при $\vartheta > 0$

$$n \geq \begin{cases} l & \text{для } l \geq \bar{n} - l, \\ \bar{n} - l & \text{для } l < \bar{n} - l, \end{cases} \quad (4.29b)$$

откуда

$$n - l = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим

$$\mu + N_k = X_{Lk}, \quad v + N_k^* = X_{Lk}^*. \quad (4.30)$$

Подставляя (4.30) в (4.27), получим

$$2X_{Lk} + M_k = n + \mu, \quad 2X_{Lk}^* + M_k^* = n - 1 + v. \quad (4.31)$$

Так как

$$\mu = \bar{n} - l, \quad v = \bar{m} - l,$$

то можно написать

$$2X_{Lk} + M_k = \bar{n} + (n - l), \quad (4.32)$$

$$2X_{Lk}^* + M_k^* = \bar{m} + (n - l) - 1.$$

Принимая во внимание выражения (4.29a) и (4.29b), запишем

а) для $\vartheta = 0, \bar{m} < \bar{n}$

$$2X_{Lk} + M_k \geq \bar{n} + 1, \quad 2X_{Lk}^* + M_k^* \geq \bar{m}; \quad (4.33)$$

б) для $\vartheta > 0, \bar{m} < \bar{n}$

$$2X_{Lk} + M_k \geq \bar{n}, \quad 2X_{Lk}^* + M_k^* \geq \bar{m} - 1. \quad (4.34)$$

Если теперь X_L — число индуктивностей, а X_R — число резисторов четырехполюсника, то легко заметить, что

$$X_{Lk}, X_{Lk}^* \leq X_L, \quad M_k, M_k^* \leq X_R. \quad (4.35)$$

Учитывая это в выражениях (4.10) и (4.11), получим

а) для $\vartheta = 0, \bar{m} < \bar{n}$

$$2X_L + X_R \geq \bar{n} + 1, \quad 2X_L + X_R \geq \bar{m}; \quad (4.33a)$$

б) для $\vartheta > 0, \bar{m} < \bar{n}$

$$2X_L + X_R \geq \bar{n}, \quad 2X_L + X_R \geq \bar{m} - 1. \quad (4.34a)$$

Из неравенств (4.33a) и (4.34a) окончательно следует, что для $\bar{m} < \bar{n}$

$$\begin{cases} 2X_L + X_R \geq \bar{n} + 1 & \text{для } \vartheta = 0, \\ 2X_L + X_R \geq \bar{n} & \text{для } \vartheta > 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Рассмотрим случай $\bar{m} = \bar{n}$. При этом

$$n \geq \text{Max}\{\bar{n} - l + 1, l - \vartheta + 1, \bar{n} - l, l\},$$

и можно написать

а) при $\vartheta = 0$

$$n \geq \begin{cases} l + 1 & \text{для } l + 1 \geq \bar{n} - l + 1, \\ \bar{n} - l + 1 & \text{для } l + 1 < \bar{n} - l + 1, \end{cases}$$

откуда

$$n - l = 1, 2, 3, \dots;$$

б) при $\vartheta > 0$

$$n \geq \begin{cases} l & \text{для } l \geq \bar{n} - l + 1, \\ \bar{n} - l + 1 & \text{для } l < \bar{n} - l + 1, \end{cases}$$

откуда

$$n - l = 0, 1, 2, \dots$$

Для определения разности $n - l$ имеем условия, аналогичные случаю $\bar{m} < \bar{n}$. Учитывая их в соотношении (4.32), получим

$$\left. \begin{cases} 2X_L + X_R \geq \bar{n} + 1, \\ 2X_L + X_R \geq \bar{m} \end{cases} \right\} \text{ для } \vartheta = 0,$$

а также

$$\left. \begin{cases} 2X_L + X_R \geq \bar{n}, \\ 2X_L + X_R \geq \bar{m} - 1 \end{cases} \right\} \text{ для } \vartheta > 0.$$

Последние неравенства также приводят к формулам (4.36),

доказанным ранее для $\bar{m} < \bar{n}$.

Из теоремы 4.2 вытекают следствия.

Следствие 1. Если в пассивном RLC-четырёхполюснике число резисторов равно числу индуктивностей, т. е. $X_R = X_L$, то

$$X_L \geq \begin{cases} \frac{\bar{n} + 1}{3}, & \vartheta = 0, \\ \frac{\bar{n}}{3}, & \vartheta > 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

Следствие 2. Если в пассивном RLC-четырёхполюснике, нагруженном активными сопротивлениями R_α, R_β , последовательно с каждой индуктивностью включен резистор, т. е. если

$$X_R = X_L + 2,$$

то

$$X_L \geq \begin{cases} \frac{\bar{n} - 1}{3}, & \vartheta = 0, \\ \frac{\bar{n} - 2}{3}, & \vartheta > 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Следствие 3. Если принять, что каждый резистор, за исключением R_α, R_β , включен последовательно с индуктивностью, т. е. $X_R = X_L + 2$, то число индуктивностей минимально, если все индуктивности содержатся в одном дополнении дерева с резисторами R_α и R_β .

Выражение (4.35) имеет знак равенства, если в выражениях (4.26) существует такое слагаемое, в котором сгруппированы все индуктивности и резисторы, что имеет место тогда, когда все индуктивности и резисторы содержатся в одном дополнении дерева с резисторами R_α и R_β . Следует подчеркнуть, что только в этом случае выполняется равенство и в выражениях (4.33a) и (4.34a), а значит, и достигаются минимальные значения X_L и X_R , например при $X_R = X_L + 2$.

Пример 4.1. Передачу

$$K_S = \frac{P(S)}{Q(S)},$$

степень числителя которой равна ϑ ($\bar{n} = \vartheta$), можно реализовать при помощи схемы (рис. 4.3, а).

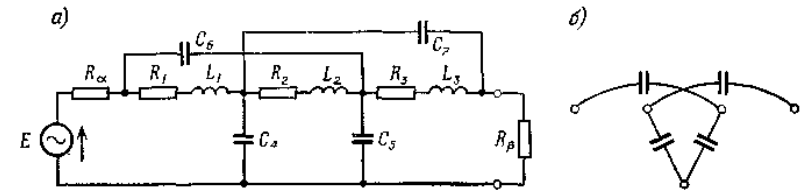


Рис. 4.3. а) пример четырехполюсника с минимальным числом индуктивностей; б) противодерево, не содержащее катушек индуктивности.

Эта цепь содержит минимальное число индуктивностей, так как все они содержатся в дополнении дерева с резисторами R_α и R_β .

Действительно, при исключении ветвей, содержащих индуктивности и резисторы R_α , R_β схема будет иметь структуру (рис. 4.3, б), т. е. представляет собой дерево. Исключенные ветви служат хордами дерева (рис. 4.3, б) и, следовательно, образуют дополнение дерева с элементами R_α и R_β .

Рассмотренное свойство, сформулированное в следствии 3, может быть использовано при синтезе RLC-четырёхполюсника с помощью ЦВМ. Согласно этому свойству, элементы R , L можно размещать в одном из выбранных дополнений деревьев, а все остальные ветви четырёхполюсника оставить для емкостных элементов. Такой способ размещения элементов в графе легко запрограммировать для ЦВМ.

1.4.3.2. Определение знаков слагаемых функции совпадения

Знаки функции совпадения

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)$$

при анализе моделей схем методом структурных чисел без вычислительной машины определяются простым рассмотрением ориентации ветвей α и β в графе. Вычислительная машина, как правило, непосредственно не может определить ориентации ветвей в графе. Поэтому при разработке алгоритма синтеза моделей четырёхполюсников с применением ЦВМ важно найти чисто алгебраический метод нахождения знаков слагаемых функции совпадения. Такой метод можно получить следующим образом. Слагаемые функции совпадения, имеющие знак плюс, соответствуют контурам, показанным на рис. 4.4, а, а слагаемые со знаком минус — контурам, показанным на рис. 4.4, б. Короткое замыкание узлов μ и ν в этих контурах приводит к графам (фиг. 4.4, в и г).

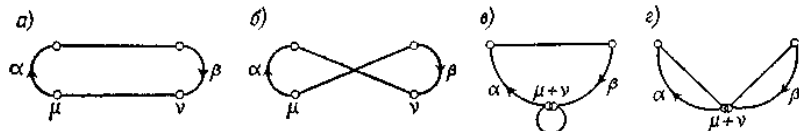


Рис. 4.4. Иллюстрация алгебраического метода определения знаков функции совпадения.

Из рис. 4.4 видно, что в случае в, соответствующем знаку плюс, существует контур, содержащий ветви α и β , в то время как в случае г такого контура нет. Это служит основой алгебраического метода определения знаков функции совпадения.

Допустим, что структурное число A равно произведению однострочных простых чисел

$$A = P_1 P_2 \dots P_m.$$

Введем некоторые определения.

Определение 4.1. Простые структурные числа P_i , P_j будем называть сгруппированными структурными числами, если они содержат по крайней мере один одинаковый элемент, т. е.

$$P_i, P_j \text{ сгруппированное} \iff \bigvee_{\alpha} (\alpha \in P_i) \wedge (\alpha \in P_j). \quad (4.39)$$

Например, однострочные числа

$$P_i = \{1 \ 2 \ 4 \ 7\}, \quad \text{а также } P_j = \{3 \ 4 \ 6 \ 8\}$$

будут сгруппированными структурными числами, так как оба эти числа содержат элемент 4.

Если структурные числа P_i , P_j сгруппированы, то пишем $P_i \leftrightarrow P_j$. Если существует последовательность однострочных структурных чисел

$$P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_{n-1} \leftrightarrow P_n, \quad (4.40)$$

соответствующая набору вершин $1, 2, \dots, n$ в графе, то тогда существует путь, соединяющий вершину 1 с вершиной n .

Если данный граф (мультиграф) служит геометрическим изображением структурного числа, то структурное число, соответствующее графу, в котором все ветви пути, соединяющего вершину μ с вершиной ν , замкнуты, обозначим через $A_{\mu\nu}^*$. Получим

$$A = P_1 P_2 \dots P_{w-1}; \quad A_{\mu\nu}^* = (P_\nu + P_{\mu_1} + P_{\mu_2} + \dots + P_\nu) \prod_{i=1}^{w-1} P_i, \quad (i \neq \mu, \mu_1, \dots, \nu), \quad (4.41)$$

где w — число вершин (узлов) графа, а $P_\mu, P_{\mu_1}, P_{\mu_2}, \dots, P_\nu$ — однострочные сгруппированные структурные числа, соответствующие вершинам $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \nu$, которые принадлежат пути, соединяющему вершину μ с вершиной ν , т. е.

$$P_\mu \leftrightarrow P_{\mu_1} \leftrightarrow P_{\mu_2} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_\nu.$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.3. Если A — структурное число, геометрическим изображением которого служит граф четырёхполюсника со структурой, показанной на рис. 4.5, а вершины μ и ν инцидентны

соответственно элементам α и β (например, $\alpha \in P_\mu, \beta \in P_\nu$), то столбцы структурного числа

$$C = \frac{A^{*\alpha}_{\mu\nu}}{\partial\alpha} \cap \frac{A^{*\alpha}_{\mu\nu}}{\partial\beta} \quad (4.42)$$

определяют все слагаемые функции совпадения $\text{Sim}_Z(\partial A^d/\partial\alpha, \partial A^d/\partial\beta)$, которые имеют знак плюс.

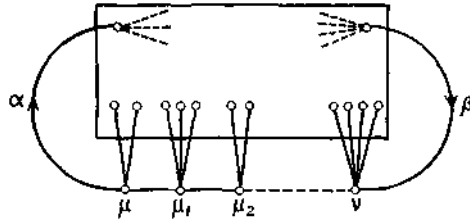


Рис. 4.5.

Справедливость теоремы 4.3 непосредственно вытекает из предыдущего рассуждения. Исключение всех ветвей графа, определенных одним из столбцов конъюнкции

$$\frac{A^{*\alpha}_{\mu\nu}}{\partial\alpha} \cap \frac{A^{*\alpha}_{\mu\nu}}{\partial\beta},$$

приводит к графу с одним циклом (контуром) (рис. 4.4, а). Такой контур соответствует положительному члену функции совпадения.

Метод определения знаков функции совпадения основан на теореме 4.3 и применим для четырехполюсника со структурой, показанной на рис. 4.5. Такая структура довольно часто встречается в практике. Однако можно сформулировать более общий алгоритм, позволяющий определять знаки функции совпадения любой схемы. Такой алгоритм приведен ниже.

Структурное число, соответствующее графу (мультиграфу), в котором закорочены два узла μ и ν , обозначим $A_{\mu\nu}$. Тогда

$$A = P_1 P_2 \dots P_{w-1}, \quad A_{\mu\nu} = (P_\mu + P_\nu) \prod_{i=1}^{w-1} P_i \quad (i \neq \mu, \nu), \quad (4.43)$$

где w — число вершин графа (узлов). Обозначим $A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}$ структурное число, полученное из числа A путем исключения в нем всех столбцов, содержащих любой из элементов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$. Очевидно, что

$$A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i} = \frac{\delta^i A}{\delta \gamma_1 \delta \gamma_2 \dots \delta \gamma_i}. \quad (4.44)$$

Теорема 4.4. Каждый член $z_{\gamma_1}, z_{\gamma_2}, \dots, z_{\gamma_i}$ функции совпадения $\text{Sim}_Z(\partial A^d/\partial\alpha, \partial A^d/\partial\beta)$ будет иметь знак плюс, если

$$\frac{\partial A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}}{\partial\alpha} \cap \frac{\partial A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}}{\partial\beta} \neq 0, \quad (4.45a)$$

или знак минус, если

$$\frac{\partial A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}}{\partial\alpha} \cap \frac{\partial A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}}{\partial\beta} = 0. \quad (4.45b)$$

Доказательство этой теоремы основано на следующих положениях:

1. После исключения ветвей $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ в графе, изображающем число A , этот граф переходит в граф, содержащий только один цикл, проходящий через ветви α и β . В зависимости от знака члена $z_{\gamma_1}, z_{\gamma_2}, \dots, z_{\gamma_i}$ в графе структурного числа $A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}$ этот цикл сохраняется или исчезает (рис. 4.4, в и г).

2. Для любого структурного числа B имеет место следующая формула

$$\left(\frac{\partial B^d}{\partial\alpha} \cap \frac{\partial B^d}{\partial\beta} = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial B}{\partial\alpha} \cap \frac{\partial B}{\partial\beta} = 0 \right).$$

Практическое применение теоремы 4.4 проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 4.2. Определить знаки функции совпадения $\text{Sim}_Z(\partial A^d/\partial 1, \partial A^d/\partial 2)$ для схемы, приведенной на рис. 4.6.

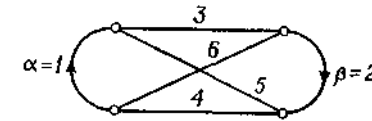


Рис. 4.6.

Имеем

$$A = [1 \ 4 \ 6] [2 \ 4 \ 5] [1 \ 3 \ 5],$$

$$A_{\mu\nu} = ([1 \ 4 \ 6] + [2 \ 4 \ 5]) [1 \ 3 \ 5] = [1 \ 2 \ 5 \ 6] [1 \ 3 \ 5],$$

откуда

$$\begin{array}{r}
 1 \ 4 \ 6 \\
 \times 2 \ 4 \ 5 \\
 \hline
 1 \ 3 \ 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 A = \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\
 3 & 5 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 5 & 1 & 3
 \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{r}
 1 \ 2 \ 5 \ 6 \\
 \times 1 \ 3 \ 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix}
 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 6 & 6 & 6 \\
 3 & 1 & 3 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5
 \end{bmatrix}.$$

После определения дополнительного числа A^d находим

$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} \cap \frac{\partial A^d}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Далее определяем производные

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 1}, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 2}, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 1}, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 2}.$$

Получаем

$$A_{\mu\nu}^{56} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{\mu\nu}^{34} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 1} = [2 \ 3],$$

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 2} = [1 \ 3], \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 1} = [2 \ 6], \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 2} = [1 \ 5],$$

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 1} \cap \frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 2} = [3] \neq 0, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 1} \cap \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 2} = 0,$$

а также

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial 1}, \frac{\partial A^d}{\partial 2} \right) = z_5 z_6 - z_3 z_4.$$

Теперь, пользуясь формулами (4.18), можно определить характеристические функции рассматриваемого четырехполюсника, например, рабочее затухание:

$$\Gamma_S = -\ln \left[\frac{z_4 z_5 z_6 + z_3 z_4 z_6 + z_2 z_5 z_6 + z_2 z_3 z_6 + z_3 z_5 z_6 + \dots + z_1 z_3 z_4}{2(z_5 z_6 - z_3 z_4) \sqrt{z_1 z_2}} \right].$$

Очевидно, что при анализе схемы знаки функции совпадения можно легко определить путем рассмотрения ориентации ребер α и β в цепи.

1.4.3.3. Синтез модели четырехполюсника на ЦВМ

Метод синтеза модели RLC-четырёхполюсника на ЦВМ поясним следующим простым примером.

Пример 4.3. Пусть дан четырехполюсник (рис. 4.7).

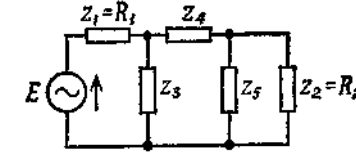


Рис. 4.7.

Его элементы определим таким образом, чтобы передаточная функция комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$ определялась выражением

$$K_s = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (4.46)$$

На основе приведенных формул имеем

$$K_s = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\frac{1}{2} \frac{\det A^d}{z}} \sqrt{R_1 R_2}.$$

После простых расчетов получаем

$$\det A^d = \frac{z_1 z_2 z_3 + z_1 z_3 z_5 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_4 z_5 + z_1 z_2 z_5 + z_2 z_3 z_4 + z_3 z_4 z_5 + z_2 z_3 z_5}{z},$$

а также

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right) = z_3 z_5.$$

Умножая числитель и знаменатель формулы (4.46) на s^{-3} и дополняя их нулевыми членами таким образом, чтобы передаточная функция стала симметричной относительно степеней комплексной частоты s , получим

$$K_s = \frac{0 \cdot s^3 + 0 \cdot s + 0 \cdot s^{-1} + 0 \cdot s^{-3}}{0 \cdot s^3 + 0 \cdot s^2 + s + 2 + 2 \cdot s^{-1} + s^{-2} + 0 \cdot s^{-3}}.$$

Если принять

$$z_1 = R_1, \quad z_2 = R_2, \quad z_3 = \frac{1}{sC_3}, \quad z_4 = sL_4, \quad z_5 = \frac{1}{sC_5},$$

то

$$\det_z A^d = R_1 R_2 C_3^{-1} s^{-1} + R_1 C_3^{-1} s^{-2} + R_1 R_2 L_4 s + R_1 L_4 C_3^{-1} + R_1 R_2 C_5^{-1} s^{-1} + R_2 C_3^{-1} L_4 + C_3^{-1} L_4 C_5^{-1} s^{-1} + R_2 C_3^{-1} C_5^{-1} s^{-2}.$$

Функция совпадения равна

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right) \Big|_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=2}} = z_3 z_5 = C_3^{-1} C_5^{-1} s^{-2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2} \det_z A^d = 0 \cdot s^3 + 0 \cdot s^2 + s + 2 + 2s^{-1} + s^{-2} + 0 \cdot s^{-3},$$

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \beta}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right) = 0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 1 + 0 \cdot s^{-1} + s^{-2},$$

откуда для определения значений неизвестных величин элементов четырехполюсника получаем уравнения

$$\begin{aligned} R_1 R_2 R_4 &= 2, \\ R_1 L_4 C_5^{-1} + R_2 L_4 C_3^{-1} &= 4, \\ R_1 R_2 C_3^{-1} + R_1 R_2 C_5^{-1} + L_4 C_3^{-1} C_5^{-1} &= 4, \\ R_1 C_3^{-1} C_5^{-1} + R_2 C_3^{-1} C_5^{-1} &= 2, \\ C_3^{-1} C_5^{-1} &= 1. \end{aligned}$$

Решение последних уравнений дает

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ ом}, \quad C_3 = C_5 = 1 \text{ ф}, \quad L_4 = 2 \text{ гн}.$$

Таким образом, мы определили схему с передаточной функцией (4.46) и структурой, показанной на рис. 4.7.

Этот простой пример поясняет способ синтеза модели четырехполюсника методом структурных чисел. Далее проведем обобщение этого метода. С этой целью рассмотрим передачу стандартного вида (4.20)

$$K_s = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_{-(n-1)} s^{-(n-1)}}{a_n s^n + \dots + a_{-n} s^{-n}} = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Очевидно, некоторые коэффициенты a_i , а также b_i функции K_s могут быть равными нулю, как это было показано в последнем примере. Число нулевых коэффициентов можно определить с помощью следующей формулы:

$$\Theta = \begin{cases} 2 + 2E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) - \bar{m} & \text{для четного } \bar{n}, \\ 1 + 2E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) - \bar{m} & \text{для нечетного } \bar{n}, \end{cases} \quad (4.47)$$

где \bar{m} и \bar{n} — числа, определяющие порядок числителя и знаменателя функции (4.19). В этом рассуждении мы приняли допущение, что все коэффициенты c_i и d_i функции (4.19) отличны от нуля.

Допустим, что каждая (внутренняя) ветвь четырехполюсника представляет собой последовательное соединение резистора, индуктивности и конденсатора. Тогда импеданс z_i произвольной внутренней ветви четырехполюсника запишется в виде

$$z_i = sL_i + R_i + s^{-1}C_i^{-1} \quad (i \neq \alpha, i \neq \beta). \quad (4.48)$$

Для ветвей α и β имеем

$$z_\alpha = R_1, \quad z_\beta = R_2,$$

где величины резисторов R_1 и R_2 заранее известны. Введем следующие обозначения: b — число ветвей графа, w — число вершин графа, M — цикломатическое число графа, равное количеству линейно независимых контуров.

В соответствии с формулой Эйлера для произвольного графа или мультиграфа

$$b - w + 1 = M. \quad (4.49)$$

При этом заметим, что порядок функции $\det_z A^d$ равен n . В результате получаем

$$M = n \text{ и } b - w + 1 = n. \quad (4.50)$$

Так как число уравнений, которые можно составить для определения элементов схемы, равно количеству коэффициентов рациональной функции (4.20), т. е.

$$(2n + 1) + (2n - 1) = 4n,$$

а число неизвестных элементов равно 3 ($b - 2$), то должно выполняться следующее неравенство:

$$3(b - 2) \geq 4n. \quad (4.51)$$

Учитывая это неравенство в равенствах (4.50), получим формулу для оценки числа вершин графа:

$$w \geq \frac{n}{3} + 3. \quad (4.52)$$

Так как количество простых множителей структурного числа A равно $m = w - 1$, имеем

$$m = E\left(\frac{n}{3}\right) + 3 + k; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.53)$$

где $E(x)$ обозначает целую часть от x .

Число ветвей b графа может быть определено с помощью выражения

$$b = E\left(\frac{n}{3}\right) + 3 + n + k; \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.54)$$

Если в последней формуле принять $k = 0$, то получим минимальное количество ветвей графа, которое зависит от числа n . Вводя такое допущение, оптимизируем схему по числу ветвей.

Самые общие приемы, используемые при синтезе моделей четырехполосника на ЦВМ с помощью описанного метода, можно сформулировать в следующем виде:

1. Принимаем, что число простых множителей структурного числа A равно $n = E\left(\frac{n}{3}\right) + 3$, и рассматриваем множество ветвей

$$B = \{1, 2, \dots, b\}; \quad b = m + n,$$

на основании которого (в соответствии с определенной программой ЦВМ) находим все возможные структурные числа

$$A_i = P_1^i P_2^i \dots P_m^i; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.55)$$

удовлетворяющие условиям реализации (4.2) и соответствующие сильносвязным графам. К тому же надо принять, что каждое однострочное число P_j^i содержит по крайней мере два элемента, например

$$A_i = [1 \ 2] [1 \ 3] [2 \ 3 \ 4] \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получаем структурные числа $A_1, A_2, \dots, A_b \dots$, определяющие алгебраическим путем различные структуры графа.

2. Рассчитываем дополнительные структурные числа

$$A_1^a, A_2^a, \dots, A_i^a, \dots$$

3. Находим детерминантные функции

$$\det_z A_1^a, \det_z A_2^a, \dots, \det_z A_i^a, \dots$$

4. Ищем алгебраические производные

$$\frac{\partial A_i^a}{\partial 1}, \frac{\partial A_i^a}{\partial 2}, \dots, \frac{\partial A_i^a}{\partial b}; \quad i = 1, 2, \dots$$

5. Исследуем все заземленные четырехполосники, которые соответствуют структурным числам $A_1, A_2, \dots, A_b \dots$ (рис. 4.8).

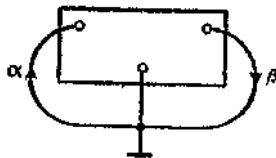


Рис. 4.8. Четырехполосник с тремя узлами.

Структуру получаем путем поочередного выбора входной ветви α и выходной ветви β таким образом, чтобы α и β принадлежали одному

и тому же простому числу P_j^i произведения (4.55). В результате такой операции получаем функцию совпадения

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta_k} \right),$$

для которой α_k и β_k принадлежат одному сомножителю P_j^i

$$\alpha_k, \beta_k \in P_j^i; \quad i, j, k = 1, 2, \dots$$

Расчет такой функции совпадения особенно прост в случае синтеза модели трехполосника, так как все члены этой функции положительны.

6. Рассчитываем значения элементов четырехполосника аналогично расчету элементов двухполосника. Из сравнения коэффициентов рациональных функций

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta_k} \right)}{\det_z A^d} z_B \quad (4.56)$$

получаем следующую систему нелинейных уравнений, которые можно решить на ЦВМ

$$f_{n-1}(R_1, \dots, L_1, \dots, C_1, \dots) = b_{n-1},$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$f_{-(n-1)}(R_1, \dots, L_1, \dots, C_1, \dots) = b_{-(n-1)},$$

$$\varphi_n(R_1, \dots, L_1, \dots, C_1, \dots) = a_n, \quad (4.57)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\varphi_{-n}(R_1, \dots, L_1, \dots, C_1, \dots) = a_{-n}.$$

Функции f_k и φ_k будут суммами произведений

$$R_{\alpha_1} \dots R_{\alpha_m} L_{\alpha_1} \dots L_{\alpha_n} C_{\alpha_1} \dots C_{\alpha_l}. \quad (4.58)$$

Метод итерации решения этих уравнений с помощью ЦВМ дан в приложении 1. Он основан на том, что входными величинами служат неизвестные $R_{\alpha_i}^0, L_{\alpha_i}^0, C_{\alpha_i}^0$, для которых, например, можно принять значения

$$R_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ ом}, \quad L_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ гн}, \quad C_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ ф}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.59)$$

С помощью ЦВМ исследуем разности

$$f_v^0 - b_v = \varepsilon_v^0, \quad v = -(n-1), \dots, (n-1),$$

$$\varphi_v^0 - a_v = \delta_v^0, \quad v = -n, \dots, n. \quad (4.60)$$

Итерационный расчет проводим таким образом, чтобы уменьшить значения $\text{Max} \{ \varepsilon_v^0 \}$, а также $\text{Max} \{ \delta_v^0 \}$. Тогда получаем сходящийся

ряд итераций, приближенно определяющий величины неизвестных $R_{\alpha_i}, L_{\alpha_i}, C_{\alpha_i}$:

$$R_{\alpha_i}^n \simeq R_{\alpha_i}, \quad L_{\alpha_i}^n \simeq L_{\alpha_i}, \quad C_{\alpha_i}^n \simeq C_{\alpha_i}, \quad n \gg 1. \quad (4.61)$$

Если при аппроксимации было введено нормирование частоты к полосе $\omega \in [0, 1]$ и нормирование сопротивлений $R_l = 1 \text{ ом}$, то тогда полностью оправданы принятые ранее значения входных величин (4.59).

7. В случае необходимости исследуем также структуры с большим числом узлов, соответствующие структурным числам A_1, A_2, \dots, A_q .

Эти структуры можно получить путем поочередного выбора в множестве

$$B = \{1, 2, 3, \dots, b\}$$

двух таких элементов α_k и β_k , что α_k и β_k принадлежат двум различным числам P_j^i произведения (4.55), т. е.

$$\alpha_k \in P_j^i, \quad \beta_k \in P_l^i; \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots \quad (j \neq l).$$

В этом случае функция

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta_k} \right)$$

может содержать отрицательные слагаемые. Положительные и отрицательные слагаемые можно различить с помощью метода, показанного ранее.

8. Рассчитываем значения элементов в случае четырехполюсника произвольной структуры аналогично п. 6.

Представленный способ синтеза модели четырехполюсника на ЦВМ позволяет учесть различные критерии оптимизации схемы, что служит одним из достоинств описываемого метода. Если, например, принять $k > 0$, а значит, $k = 1, 2, 3, 4$ и т. д., то получим другие значения элементов схемы, благодаря чему можно ввести новые связи, определяющие, например, равенство всех индуктивностей или конденсаторов, заданный разброс параметров составных элементов четырехполюсника, собственные потери индуктивностей и конденсаторов, минимальную суммарную индуктивность схемы и т. д.

Часто удобно принять

$$l > E \left(\frac{n}{2} \right).$$

Тогда получим граф (мультиграф) с минимальным цикломатическим числом. Благодаря этому допущению можно создать новые, часто более удобные структуры графов. Естественно, что можно также

рассмотреть и те схемы, которые в результате проведенного синтеза имеют некоторые отрицательные элементы. Такая схема может быть выполнена только при использовании активных элементов.

Достоинства представленного метода синтеза моделей четырехполюсника на ЦВМ можно кратко сформулировать следующим образом:

1. Общность метода, заключающаяся прежде всего в том, что он не накладывает никаких ограничений на структуру схемы.
2. Возможность определения множества схем, реализующих поставленную задачу синтеза моделей.
3. Возможность учета разных критериев оптимизации схемы (например, минимального цикломатического числа, минимального числа ветвей, равенства всех индуктивностей, собственной добротности элементов, учет разброса параметров элементов и т. д.).

Очевидно, что данный метод дает также возможность для дальнейших обобщений. Например, с помощью этого метода можно упростить процесс синтеза сложной цепи путем ее разбиения на отдельные подсхемы. С этой целью можно использовать результаты, изложенные ранее. Эта проблема, однако, требует дальнейших исследований и здесь не рассматривается.

Остановимся на проблеме исключения цепей, графы которых не имеют сильносвязной структуры. Сильносвязные (или собственные) графы были рассмотрены ранее. С помощью метода структурных чисел граф такого типа можно легко определить, пользуясь известным свойством. Согласно этому свойству, граф имеет сильносвязную структуру тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\bigvee_{\alpha \in A} \bigwedge_{\beta \in A} \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \neq 0, \quad (4.62)$$

где A — структурное число, для которого рассматриваемый граф служит геометрическим изображением.

На рис. 7.9 дан пример четырехполюсников, структуры которых не сильносвязны и которые должны быть исключены в процессе синтеза.

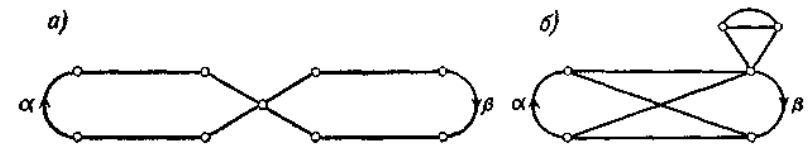


Рис. 4.9. Четырехполюсники не сильносвязной структуры.

Нетрудно проверить, что графы (рис. 4.9) не удовлетворяют условию (4.62). Очевидно, что это условие может быть легко запрограммировано на ЦВМ. Поэтому уже в процессе поиска структурных чисел можно исключить ненужные графы.

Процесс синтеза модели четырехполюсника можно значительно упростить, если некоторые операции, предусмотренные представленным алгоритмом, будут выполнены не машиной, а человеком. Так, например, если определить схему четырехполюсника, сразу ориентируясь на определенную структуру, например лестничную или мостовую, то процесс машинного синтеза значительно упрощается, так как не нужно находить структурные числа и исключать ненужные графы.

Такой упрощенный полуавтоматический метод синтеза может иметь большое применение, например, для проектирования электрических фильтров. Ниже приведены результаты расчетов трех простых RLC-фильтров, спроектированных при помощи ЦВМ на основе программы, приведенной в приложении 1. Синтез этих фильтров был проведен упрощенным методом, в котором разработчик сразу определил структуру проектируемой схемы.

При разработке программы для ЦВМ было принято допущение, что в каждой ветви схемы находится только один элемент, благодаря чему получено некоторое упрощение по сравнению с общим методом синтеза RLC-четырёхполюсников. Для получения минимального числа индуктивностей фильтров использовано приведенное ранее свойство. Произведение простых структурных чисел также было рассчитано непосредственно без помощи машины. Естественно, что при более сложной схеме можно запрограммировать операцию умножения структурных чисел цифровой машиной, и тогда расчет фильтра сводится к очень простой операции, так как почти весь процесс проектирования будет выполнен машиной.

Пример 4.4. Фильтр с равноволновой характеристикой, передаточная функция которого имеет седьмую степень:

$$K_s = \frac{s^2 + 4}{7,9163s^5 + 14,159s^4 + 22,782s^3 + 20,365s^2 + 12,754s + 4} \cdot (4.63)$$

Расчет фильтра был проведен на ЦВМ. В результате расчетов получена схема фильтра (рис. 4.10).

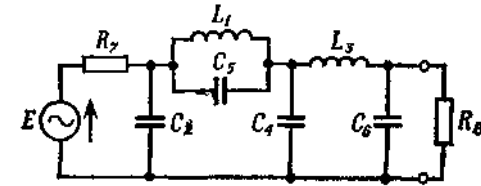


Рис. 4.10. Реактивный фильтр, передаточная функция которого определяется по формуле (4.63).

С помощью ЦВМ в результате 10 итераций определены следующие значения элементов:

$$L_1 = 1,154722 \text{ гн},$$

$$L_3 = 1,675625 \text{ гн},$$

$$C_2 = 1,112944 \text{ ф},$$

$$C_4 = 0,615818 \text{ ф},$$

$$C_5 = 4,6188886 \text{ ф},$$

$$C_6 = 1,11286 \text{ ф},$$

$$R_7 = 1 \text{ ом},$$

$$R_8 = 1,13542 \text{ ом}.$$

Пример 4.5. Фильтр с оптимально монотонной характеристикой (Папулиса) с передаточной функцией пятого порядка

$$K_s = \frac{0,224}{s^5 + 1,551s^4 + 2,203s^3 + 1,693s^2 + 0,898s + 0,224} \cdot (4.64)$$

Расчет этого фильтра также был проведен на ЦВМ. Значения элементов получены в результате 5 итераций. Схема фильтра показана на рис. 4.11.

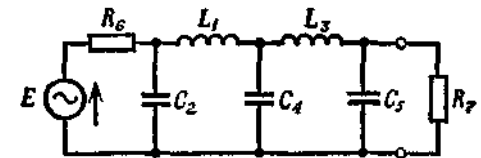


Рис. 4.11. Реактивный фильтр, передаточная функция которого определяется по формуле (4.64).

Значения элементов фильтра равны

$$L_1 = L_3 = 1,466371 \text{ гн},$$

$$C_2 = C_5 = 0,7479164 \text{ ф},$$

$$C_4 = 0,4263531 \text{ ф},$$

$$R_6 = R_7 = 0,9644312 \text{ ом}.$$

Пример 4.6. Фильтр на индуктивностях с потерями, с максимально плоской характеристикой (Баттерворта), передаточная функция пятого порядка которого имеет вид

$$K_s = \frac{0,914166}{s^5 + 3,2360s^4 + 5,236068s^3 + 5,236068s^2 + 3,236068s + 1}.$$

Расчет этого фильтра был проведен в два этапа. Вначале был рассчитан фильтр без потерь с передаточной

$$K_s = \frac{1}{s^5 + 3,2360s^4 + 5,236068s^3 + 5,236068s^2 + 3,236068s + 1}.$$

Расчет этого фильтра был проведен за 6 итераций.

На втором этапе были учтены потери в индуктивностях, причем в качестве начальных значений параметров элементов принимались величины, полученные в конце первого этапа. В результате 3 итераций были получены следующие значения элементов фильтра:

$$L_1 = L_2 = 1,2595972 \text{ гн},$$

$$r_1 = r_2 = 7,4542268 \cdot 10^{-2} \text{ ом},$$

$$C_1 = C_3 = 1,2375818 \text{ ф},$$

$$C_2 = 0,37590573 \text{ ф},$$

$$R_1 = R_2 = 0,7939046 \text{ ом}.$$

Схема рассчитанного фильтра изображена на рис. 4.12.

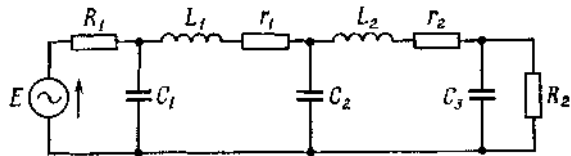


Рис. 4.12. Реактивный фильтр, передаточная функция которого определяется по формуле (4.65).

В заключение следует обратить внимание еще на одно достоинство представленного здесь метода синтеза фильтров. Этот метод не требует, особой точности расчета, что необходимо при других методах синтеза реактансных фильтров, как, например, в методах Бруне

или Кауэра. Это положение следует из вида линейных уравнений (4.57), на основании которых рассчитываются значения элементов фильтра, так как в этих уравнениях производится только умножение и сложение неизвестных и не требуется выполнения операций вычитания и деления. Это серьезное достоинство, обеспечивающее достаточную точность расчета величин элементов без необходимости применения особых методов увеличения точности расчета.

В приведенных выше примерах расчеты проводились для передач с нормированием по частоте и сопротивлению. Для расчета элементов фильтров, удовлетворяющих определенным техническим условиям, необходимо еще провести денормирование значения элементов. Так как это элементарная операция, она не программируется. Преобразование полученных прототипов фильтров низких частот в фильтры других типов, например полосовых фильтров, фильтров высоких частот или режекторных фильтров, можно легко провести при помощи преобразования частоты.

Приведенные расчеты касались фильтров с очень простой структурой. Однако алгоритм расчета фильтров, представленный в приложении 1, позволяет проводить расчет фильтра произвольной сложности. Ограничения могут определяться только объемом памяти и быстродействием машины.

Приложение 1

Алгоритм расчета элементов четырехполюсника

Задаются следующие величины: структурное число графа заземленного четырехполюсника, функция совпадения этого структурного числа, а также коэффициент передачи напряжения четырехполюсника. Алгоритм определяет систему нелинейных уравнений (алгебраических), из которых находят элементы четырехполюсника: величины сопротивлений, емкостей, индуктивностей. Расчет состоит в определении решений линеаризованных систем уравнений методом Ньютона (путем последовательных приближений).

1. Данные

Ниже приводятся данные, которые необходимо ввести в компьютер в соответствующей последовательности. Их можно снабдить произвольными надписями, облегчающими проверку. Сокращенные названия одновременно являются идентификаторами.

1. **Номер** Двоичное число, служащее для идентификации задания.
2. **w** Когда $w = 1$, счет заканчивается после нахождения первого решения; когда $w = 2$, то ищутся решения, для которых начальными приближениями являются всевозможные комбинации переменных x_1, x_2, \dots, x_n , где $x_i = 0,1$ или $x_i = 10,0$.
3. **N [1]** Число ветвей в графе, описывающем четырех-полосник.
4. **N [2]** Число дополнительных уравнений (приравнивание величин ряда элементов).
5. **N [3]** Число нулевых коэффициентов знаменателя передаточной функции.
6. **N [4]** Число нулевых коэффициентов числителя передаточной функции.
7. **N [5]** Число строк в дополнительном структурном числе A^d .
8. **N [6]** Число столбцов в дополнительном структурном числе A^d .
9. **N [7]** Число строк функции совпадения числа A^d

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right).$$
10. **N [8]** Число столбцов функции совпадения числа A^d

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right).$$
11. **alfa** Номер входной ветви.
12. **beta** Номер выходной ветви.
13. **R** $N [1]$ чисел, определяющих номера переменных при решении системы двух уравнений и приписанных соответственно ветвям с номерами $1, \dots, N [1]$. Эти номера должны принадлежать множеству чисел $1, \dots, N [1] - N [2] - n$, что позволяет уменьшить число переменных на $N [2]$ заменой нескольких переменных системы одной.
14. **S** $N [1]$ чисел, определяющих тип элементов в ветвях графа с текущими номерами. Для емкости — 1, для сопротивления 0, для индуктивности 1.
15. **pfAd** $N [3]$ целых чисел, определяющих степени переменной s в знаменателе передаточной функции. Они должны быть расположены в той же последовательности, что и соответствующие им коэффициенты знаменателя (fAd).

16. **fAd** Коэффициенты знаменателя передаточной функции в последовательности, определенной в п. 15.
17. **pf sim Ad N [4]** целых чисел, определяющих степени переменной s в числителе передаточной функции; расположены в той же последовательности, что и соответствующие им коэффициенты числителя.
18. **sim Ad N [4]** действительных чисел, являющихся коэффициентами числителя, расположенных в порядке, определенном в п. 17.
19. **Ad** Структурное число A^d . Номера ветвей, определяющих дерево, должны располагаться по порядку. Для наглядности лучше каждый столбец A^d писать в одну строку.
20. **sim Ad** Функция совпадения $\text{Sim}_z (\partial A^d / \partial \alpha, \partial A^d / \partial \beta)$. Столбцы можно писать в строку.
21. **epsilon** Число, определяющее точность решения системы уравнений, при которой можно закончить приближение.
22. **delta** Число, определяющее минимальные изменения переменных, при которых можно прервать решение.
23. **X** Приближение $n = N [1] - N [2]$ действительных чисел, составляющих начальное приближение. После числа нужно ставить запятую; вместо запятой ставится десятичная точка.

2. Результаты

При решении результаты отображаются на экране компьютера. Приведем надписи, которые появляются по результатам решения.

Если числа R в окне данных будут не из множества $1, \dots, n = N [1] - N [2]$, то пишется «MISTAKE2».

Если R отождествляет два элемента разного типа, то пишется «MISTAKE3».

Если в R не содержатся все последовательные $1, \dots, n$, то пишется «MISTAKE4».

Если в A^d есть такой столбец (дерево), что сумма степеней переменной s для элементов этого дерева не равна ни одному из чисел **pfAd**, то пишется «MISTAKE5».

Если в

$$\text{Sim}_z (\partial A^d / \partial \alpha, \partial A^d / \partial \beta)$$

есть такой столбец, что сумма степеней переменной s элементов столбца не равна ни одному из чисел **pf sim Ad**, пишется «MISTAKE6».

После ввода каждой из вышеуказанных надписей можно вводить массив с данными другого задания

Если в A^d или

$$\underset{z}{\text{Sim}} (\partial A^d / \partial \alpha, \partial A^d / \partial \beta)$$

есть номер ветви [не из множества 1, 2, ..., N [1], компьютер прерывает работу.

В том случае, если ни одно из приведенных замечаний не отображается на экране, то данные введены правильно. Тогда появляется надпись «STRUKTURA NR...» Вместо точек будет числовое значение номера.

За этой надписью следует: «Начальное приближение, корни из сумм квадратов функции и приращений для приближений». Затем следует строка с начальными приближениями отдельных переменных ($X [1], \dots, X [n]$). Эти приближения пишутся со знаком, с двумя цифрами перед запятой и двумя после запятой (десятичной точкой). Дальше строки составляются из чисел, определенных следующими формулами:

$$\left\langle \sqrt{\sum_{k/1}^{nr} F_i(x_1, \dots, x_n)} \right\rangle.$$

Если

$$\sum_{k/1}^n (\int [i, k])^2 < \text{delta},$$

то

$$\int [i, n + 1] = \dots \left\langle \sqrt{\sum_{k/1}^n (\Delta X [i])^2} \right\rangle.$$

Для каждого приближения отводится одна такая строка. Первое из приведенных выше чисел уменьшается с каждой итерацией. Если его квадрат достигнет значения меньше epsilon, то задание считается решенным.

Когда это условие не выполняется и сумма квадратов приращений переменных меньше, чем delta, то выбирается новое начальное приближение, состоящее из некоторой комбинации чисел 0,1 и 10,0, после чего заново идет надпись «Начальное приближение...»

В случае решения пишется:

«Номера и остатки уравнений»

и строки

«K», « $F_k(x_1, \dots, x_n)$ », где $k = 1, \dots, nr = N [3] + N [4]$, далее

«Решения»

и строки

«k», « X_k », где $k = 1, 2, \dots, n = N [1] - N [2]$,

после чего

«Род элемента, номер ветви, величина нормализованного элемента» и строки

«C» или «R» (или «L»), «k», «величина элемента в k-й ветви»,

$k = 1, 2, \dots, N [1]$.

В последних строках находятся величины переменных, обратных эластансам (из уравнений рассчитывается эластанс, а не емкость). Кроме того, эти величины умножены на такой коэффициент, чтобы сопротивление входной ветви было равно 1.

Если w равно 1, то после печати решения расчеты заканчиваются; если $w = 2$, то ищут другие решения, принимая в качестве начального приближения числа

$$x_i = 0,1 \text{ или } x_i = 10,0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которые являются координатами некоторой геометрической фигуры в n -мерном евклидовом пространстве. Алгоритм расчета в этом случае кончается после того, как исчерпаны все возможности вершин.

3. Метод решения

3.1. Система уравнений, определяющих коэффициент передачи напряжения четырехполюсника

Система уравнений для определения параметров четырехполюсника при заданном коэффициенте передачи напряжения составляется с помощью формулы

$$\frac{\sqrt{R_\alpha R_\beta} \underset{z}{\text{Sim}} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\underset{z}{\det} A^d} = K_u(s), \quad (\text{III.1})$$

где A^d — структурное дополнительное число, связанное с графом четырехполюсника; α — номер входной ветви; β — номер выходной ветви; R_α — сопротивление входной ветви; R_β — сопротивление выходной ветви; $K_u(s)$ — коэффициент передачи напряжения четырехполюсника, являющийся рациональной функцией переменной s . В дальнейшем приняты следующие ограничения.

а) структурное число A^d описывает заземленную структуру четырехполюсника;

б) в каждой ветви четырехполюсника находится один элемент определенного типа (емкость, сопротивление или индуктивность). Ограничение б) не сужает класс решаемых задач и значительно увеличивает быстроту расчетов.

Система уравнений получается из формулы (П1.1) путем приравнивания коэффициентов при переменной s в правой и левой сторонах числителя и знаменателя. Получается зависимость между величинами C^{-1} , R или L ветви четырехполюсника и коэффициентами числителя и знаменателя коэффициента передачи.

Из однородности полученной системы уравнений следует, что параметры элементов четырехполюсника можно определить с точностью до коэффициента пропорциональности.

Знаменатель левой дроби формулы (П1.1) — однородный многочлен относительно элементов, имеющий степень, равную числу ветвей в деревьях A^d (N [5]); числитель — однородный многочлен степени N [5] — 1 = N [7], умноженный на $2\sqrt{R_\alpha R_\beta}$.

Структурное число A^d и его функция совпадения выражаются через номера ветвей. Коэффициент передачи напряжения задан коэффициентами знаменателя и числителя, представляющими действительные числа, и степенями переменной s (целые числа).

3.2. Расчет величин, определяющих систему уравнений

Столбец структурного числа A^d (дерево) определяет произведение элементов, находящихся в этом дереве (ограничение б)), и представляет собой одночлен относительно элементов. Все одночлены с одинаковыми показателями степеней s суммируются и приравниваются коэффициентам многочлена передаточной функции с той же степенью s .

Уравнение для числителя получается аналогично, но с той разницей, что полученный многочлен вначале умножается на $2\sqrt{R_\alpha R_\beta}$. Система уравнений имеет вид

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, nr = N [3] + N [4], \quad n = N [1] - N [2]. \quad (\text{П1.2})$$

$N [2]$ переменных исключается, поскольку приравниваются величины некоторых элементов.

3.3. Расчет якобиана уравнений (П1.2)

Метод решения, применяемый к системе уравнений (П1.2), предполагает расчет якобиана в любой точке $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$. Обозначим

$$I_{i,k}(\mathcal{X}_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial F_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k},$$

$$i = 1, \dots, nr; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{П1.3})$$

Расчет аналогичен расчету F_i , изложенному в разд. 3.2 приложения. Для величин F_i , определяемых многочленом знаменателя (П1.1), составляются одночлены из переменных, номера которых находятся в столбцах A^d , при этом по очереди опускается по одной переменной.

Сумма одночленов, образующих F_i , в которых пропущена переменная x_k , создает $I_{i,k}(\mathcal{X})$. Аналогично поступают и для F_i , определяемых числителем, только одночлены умножаются на $2\sqrt{R_\alpha R_\beta}$.

Дифференцирование относительно R_α и R_β (присутствующих в формуле только в множителе $2\sqrt{R_\alpha R_\beta}$) более сложно.

3.4. Метод Ньютона

Система (П1.2) заменяется линейным приближением

$$F(\mathcal{X}) + I(\mathcal{X}) \Delta \mathcal{X} = 0, \quad (\text{П1.4})$$

где

$$\mathcal{X} \text{ — матрица-столбец } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

$$F(\mathcal{X}) \text{ — матрица-столбец } \begin{pmatrix} F_1(\mathcal{X}) \\ \vdots \\ F_{nr}(\mathcal{X}) \end{pmatrix};$$

$$I(\mathcal{X}) \text{ — матричный якобиан } I_{i,k}(\mathcal{X}) = \frac{\partial F_i(\mathcal{X})}{\partial x_k};$$

$$\Delta(\mathcal{X}) \text{ — матрица-столбец приращений } \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{pmatrix}.$$

Систему (П1.4) можно решить относительно $\Delta \mathcal{X}$, если она непротиворечива. Достаточным условием этого является равенство рядов матриц

$$I(\mathcal{X}), \text{ а также } \left\| \begin{matrix} I_1 & I_{1n} & F_1 \\ I_{nr,1} & I_{nr,n} & F_{nr} \end{matrix} \right\|.$$

Когда это условие выполняется, то для каждого $\Delta\mathcal{X}$, удовлетворяющего (П1.4), найдется такое $0 \leq \lambda \leq 1$, что

$$\sum_{i/1}^{nr} [F_i(\mathcal{X} + \mu\Delta\mathcal{X})]^2 < \sum_{i/1}^{nr} [F_i(\mathcal{X})]^2 \text{ для } \mu \leq \lambda. \quad (\text{П1.5})$$

Алгоритм выполняется следующим образом. Для начального приближения \mathcal{X} подсчитываются значения функции F и матрица I . Методом ортогонализации находится одно из $\Delta\mathcal{X}$, удовлетворяющих уравнению (П1.4). Проверяется условие (П1.5) при $\mu = 1$. Если оно выполняется, то $\Delta\mathcal{X}$ уменьшается в два раза и проверка производится снова. Так поступают до тех пор, пока условие (П1.5) не будет удовлетворяться. Этим способом достигается уменьшение $\sum_{i/1}^{nr} [F_i(\mathcal{X})]^2$. Новое приближение \mathcal{X} получается путем сложения предыдущего $\Delta\mathcal{X}$, при этом могут быть два случая:

$$1) \sum_{i/1}^{nr} [F_i(\mathcal{X})]^2 < \text{epsilon}$$

— тогда система уравнений (П1.2) считается решенной;

$$2) \sum_{i/1}^n (\Delta\mathcal{X}_i)^2 < \text{delta} \text{ и не выполняется } 1) \text{ — тогда система}$$

уравнений считается нерешенной и ищется решение из нового начального приближения.

В результате применения метода ортогонализации через несколько итераций противоречивость системы (П1.4) приведет к выполнению условия 2.

3.5. Решение системы линейных уравнений методом ортогонализации

Метод ортогонализации делает возможным нахождение решения только непротиворечивой системы линейных уравнений. Этот метод основывается на преобразовании матрицы коэффициентов систем уравнений в матрицу, у которой строки являются ортогональными. Это означает, что скалярные произведения различных строк равны нулю, а скалярные квадраты строк — нулю или единице.

Вместе с матрицей коэффициентов преобразуются свободные члены. Если какая-либо строка имеет скалярный квадрат, равный нулю, а

свободный член этой строки не равен нулю, то система противоречива. Умножение транспонированной ортогонализованной матрицы на столбец свободных членов дает решение. В случае противоречивой системы этот метод определяет множество независимых уравнений, для которых решение ищется таким же способом.

Геометрически этот метод можно интерпретировать как прямоугольную проекцию начала координат на $(n - r)$ -мерную гиперплоскость решений, расположенную в n -мерном евклидовом пространстве (r — порядок системы уравнений).

3.6. Случаи симметрии в уравнениях (П1.2)

Функции $F_i(\mathcal{X})$ иногда симметричны, это значит существуют нетождественные преобразования переменных x_1, \dots, x_n , приводящие систему уравнений (П1.2) в себя.

Эту симметрию можно обнаружить на этапе проектирования четырехполюсника, так как она появляется в графе и через действия над структурными числами переходит в систему уравнений (П1.1), (П1.2), (П1.4).

Если имеется одно решение системы (П1.2), то, применяя к нему упомянутые преобразования, можно получить множество других решений.

С другой стороны, существование множества преобразований для системы (П1.2) и начального приближения не должно изменять решения при этих преобразованиях, поскольку этот метод не выделяет ни одну из переменных. Число переменных можно уменьшить, если отождествить те элементы, которые переходят в самих себя. Это значительно ускоряет расчеты.

Приложение 2

Анализ электрических цепей с помощью переключающих схем и методом циклов

1. Введение

Изложенные в данном приложении методы анализа электрических схем основаны на соотношениях (3.14) и (3.28). Они дают возможность относительно просто определять параметры схем без решения систем уравнений, а также автоматизировать анализ электрических цепей с

помощью простого устройства, которое может применяться самостоятельно или в соединении с ЭЦВМ. В связи с простотой методов они могут быть полезны в практике инженеров-электриков.

2. Анализ электрических цепей с помощью переключающих схем

2.1. Переключающая схема

Описываемый ниже метод опирается на понятие переключающей схемы, называемой также нуль-импедансной схемой и кратко обозначаемой ZI.

Определение П2.1. *Переключающей схемой* будем называть схему, построенную из электрических ключей (контактных и безконтактных), соединенных между собой проводниками, с такой же самой топологической структурой, как рассматриваемая электрическая схема, причем каждой ветви рассматриваемой схемы соответствует один ключ в схеме ZI.

На рис. П2.1 представлены для примера схема электрической цепи и соответствующая переключающая схема ZI.

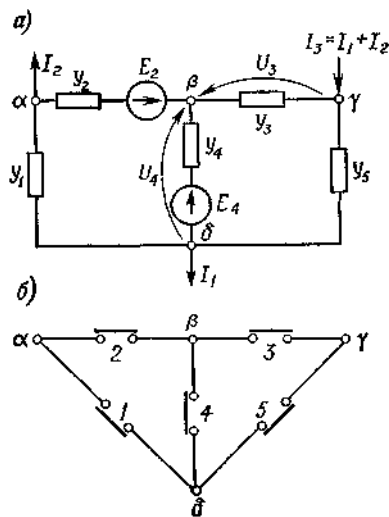


Рис. П2.1. Электрическая цепь с источниками тока и напряжения: а) схема цепи; б) схема переключающей цепи ZI.

На схеме рассматриваемой цепи (рис. П2.1, а) y_1, y_2, \dots, y_5 обозначают проводимости отдельных ветвей этой цепи; α, β, γ и δ — узлы; E_2 и E_4 — э. д. с. источников напряжений;

I_1, I_2 и $I_3 = I_1 + I_2$ — токи источников тока, а U_3 и U_4 — искомые напряжения ветвей y_3 и y_4 .

На схеме цепи ZI (рис. П2.1, б) символы 1, 2, . . . , 5 обозначают ключи. Ключ 1 соответствует ветви y_1 рассматриваемой электрической цепи, ключ 2 — ветви y_2 и т. д. Символы α, β, γ и δ обозначают узлы цепи ZI, соответствующие также обозначенным узлам рассматриваемой цепи.

С помощью ключей можно создать дерево в цепи ZI, т. е. гальванически соединить все узлы цепи ZI так, чтобы не было ни одного контура.

Например, если в цепи ZI, показанной на рис. П2.1, замкнуть ключи 2, 3 и 4 и разомкнуть ключи 1 и 5, то образуется дерево, показанное на рис. П2.2, а.

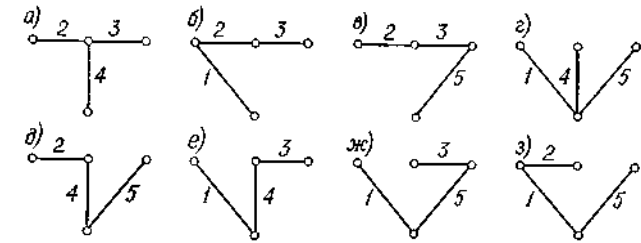


Рис. П2.2. Схемы деревьев цепи ZI (исходная цепь — рис. П2.1, б).

Это дерево имеет $v - 1$ замкнутых ключей, причем v обозначает число узлов цепи ZI.

В цепи ZI можно создать T различных деревьев, причем

$$T = \det A_{v-1}^{v-1}, \quad (\text{П2.1})$$

где A_{v-1}^{v-1} — симметричная узловая матрица цепи ZI порядка $v - 1$; у которой диагональные элементы $a_{\alpha\gamma}$ равны числу проводов, соединяющихся в отдельных узлах, а остальные элементы $a_{\delta\epsilon} = a_{\epsilon\delta}$ равны числу ключей, соединяющих узлы δ и ϵ , имеют отрицательные знаки. Например, в цепи ZI, показанной на рис. П2.1, б, можно образовать

$$T = \det \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

разных деревьев, схемы которых изображены на рис. П2.2.

В этих схемах замкнутые ключи представлены в виде отрезков, разомкнутые ключи не показаны.

Определение П2.2. Величиной D_d дерева схемы ZI будем называть произведение проводимостей ветвей исходной схемы, представленных замкнутыми ключами дерева d схемы ZI:

$$D_d = \prod_{i=1}^{v-1} y_{di}, \quad (\text{П2.2})$$

где y_{di} — проводимость ветви рассматриваемой схемы, представленной замкнутым ключом в дереве d схемы ZI; v — число узлов схемы ZI.

Например, величину D_a дерева, показанного на рис. П2.2, а, представим

$$D_a = y_2 y_3 y_4.$$

Если в схеме ZI замкнем два узла, то получим новую схему, которую назовем производной схемой ZI. В производной схеме ZI деревья создаются так же, как в первичной схеме ZI. На рис. П2.3 представлена производная схема ZI, полученная в результате замыкания узлов α и γ в первичной схеме ZI (рис. П2.1, б).

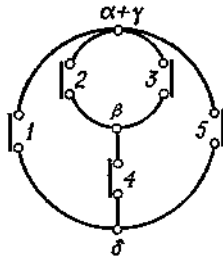


Рис. П2.3. Схема производной цепи ZI, образованной в результате замыкания узлов α и β исходной цепи рис. П2.1, б.

На рис. П2.4 представлены изображения всех деревьев производной схемы.

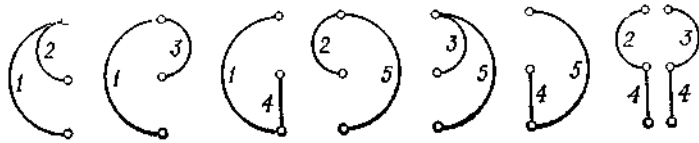


Рис. П2.4. Схемы деревьев производной цепи ZI (исходная цепь — рис. П2.3).

2.2. Анализ моделей пассивных схем

Проводимость $Y_{\mu\nu}$, измеренную между узлами μ и ν рассматриваемой электрической цепи, можно рассчитать по формуле

$$Y_{\mu\nu} = \frac{\sum_{d=1}^T D_d}{T' \sum_{d'=1}^T D_{d'}}, \quad (\text{П2.3})$$

где D_d — величина дерева d схемы ZI; T — число деревьев схемы ZI; $D_{d'}$ — величина дерева d' производной схемы ZI, полученной в результате замыкания в первичной схеме ZI узлов μ и ν ; T' — число деревьев производной схемы ZI.

Например, проводимость $Y_{\alpha\gamma}$, измеренная между узлами α и γ электрической схемы (рис. П2.1, а), рассчитывается следующим образом на основании деревьев, изображенных на рис. П2.2 и П2.4:

$$Y_{\alpha\gamma} = (y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_1 y_4 y_3 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_2 y_5) : (y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_1 y_4 + y_2 y_5 + y_3 y_5 + y_4 y_5 + y_2 y_4 + y_3 y_4).$$

Для определения величин напряжений ветвей рассматриваемой электрической схемы следует в деревья схемы ZI включать заменяющие источники, соответствующие источникам напряжений и токов электрической схемы.

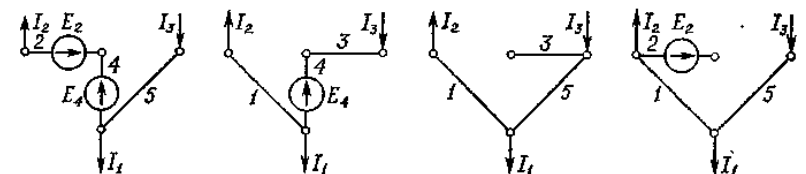
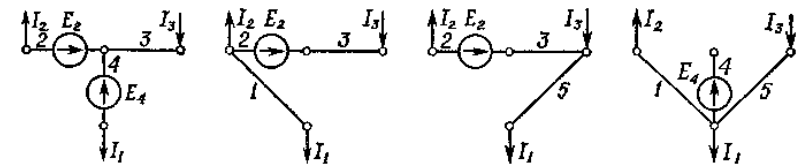


Рис. П2.5. Схемы деревьев цепи ZI (исходная цепь — рис. П2.1, б) с источниками напряжений и тока.

Например, на рис. П2.5 приведены все деревья схемы ZI, показанной на рис. П2.1, б, с включенными источниками.

На дереве с источниками определяем или измеряем межузловые напряжения и токи в ключах. Заметим, что эти напряжения и токи являются алгебраической суммой соответствующих напряжений и токов источников.

Напряжение U_k ветви k , соединяющей узлы μ и ν , рассматриваемой схемы (рис. П2.6), рассчитываем по формуле

$$U_k = \frac{\sum_{d=1}^T \left[D_d \left(u_{d\mu\nu} + \frac{i_{dk}}{y_{dk}} \right) \right]}{\sum_{d=1}^T D_d} = \frac{\sum_{d=1}^T D_d u_{d\mu\nu} + \sum_{d=1}^T \frac{\partial D_d}{\partial y_{dk}} i_{dk}}{\sum_{d=1}^T D_d}, \quad (\text{П2.4})$$

где

$$D_d = \prod_{i=1}^{v-1} y_{di}$$

— величина дерева d схемы ZI; y_{di} — проводимость ветви, представленной замкнутым i ключом в дереве d ; v — число узлов схемы ZI; T — число деревьев схемы ZI; $u_{d\mu\nu}$ — напряжение между узлами (μ и ν дерева d с включенными источниками, i_{dk} — ток в ключе k дерева d с включенными источниками (если в дереве d нет замкнутого ключа k , то $i_{dk} = 0$); y_{dk} — проводимость ветви k .

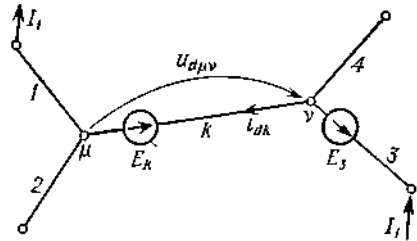


Рис. П2.6. Схема части дерева D_d с независимыми источниками и обозначением напряжения и тока k -й ветви (выключатель); в этом случае $u_{d\mu\nu} = E_k$; $i_{dk} = I_1$.

Например, напряжение U_3 ветви электрической схемы (рис. П2.1, а) рассчитываем по формуле, полученной из рассмотрения деревьев с источниками, представленных на рис. П2.5:

$$U_3 = (y_1 y_4 y_5 E_4 + y_2 y_4 y_5 E_4 + y_1 y_2 y_5 E_2 - y_2 y_4 I_3 - y_1 y_2 I_3 - y_2 y_5 I_2 - y_1 y_4 I_3) : (y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_2 y_5).$$

Аналогично формула для напряжения U_4 ветви u_4 (рис. П2.1, а), полученная из рассмотрения деревьев, изображенных на рис. П2.5, имеет вид

$$U_4 = (y_2 y_3 y_4 E_4 + y_1 y_2 y_3 E_2 + y_1 y_4 y_5 E_4 + y_2 y_4 y_5 E_4 + y_1 y_3 y_4 E_4 + y_1 y_2 y_5 E_2 + y_2 y_3 I_1 - y_2 y_5 I_2 + y_1 y_3 I_3) : (y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_2 y_5).$$

Если в схеме присутствуют только источники э. д. с, то формула для напряжения между произвольными узлами μ и ν схемы имеет вид

$$U_{\mu\nu} = \frac{\sum_{d=1}^T D_d u_{d\mu\nu}}{\sum_{d=1}^T D_d}. \quad (\text{П2.5})$$

Эта формула справедлива для узлов μ и ν , не соединенных непосредственно ветвью. Например, если принять, что в схеме (рис. П2.1, а) токи $I_1 = I_2 = I_3 = 0$, то напряжение между узлами α и γ будет равно (рис. П2.5)

$$U_{\alpha\gamma} = [(y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_5) E_2 + y_2 y_4 y_5 (E_2 - E_4) + y_1 y_3 y_4 E_4] : (y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_2 y_5).$$

2.3. Анализ активных цепей

Пользуясь переключающей схемой ZI, можно анализировать также активные схемы с управляемыми источниками.

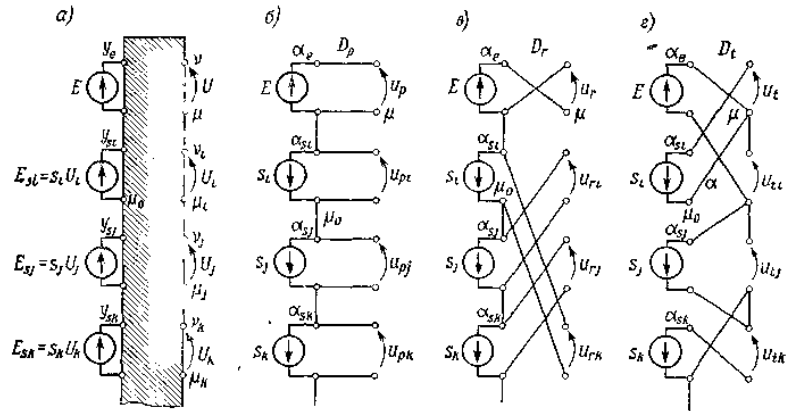


Рис. П2.7. Активная цепь с управляемыми напряжением зависимыми источниками напряжения: а) блок-схема цепи; б) схема деревьев D_p, D_r, D_t цепи ЗИ с источниками (зависимые источники с обратной полярностью).

Для схемы с управляемыми напряжением источниками напряжения (рис. П2.7, а) формула для расчета напряжения имеет вид

$$U = \frac{L}{M}, \tag{П2.6}$$

где

$$L = \sum_{p=1}^T D_p \{ u_p + (-1)^{n_{pi}} u_{pi} u_{pi} + (-1)^{n_{pj}} u_{pj} u_{pj} + (-1)^{n_{pk}} u_{pk} u_{pk} + \dots + (-1)^{n_{pij}} u_{pi} u_{pj} + (-1)^{n_{pik}} u_{pi} u_{pk} + (-1)^{n_{pjk}} u_{pj} u_{pk} + \dots + (-1)^{n_{pijk}} u_{pi} u_{pj} u_{pk} + \dots \}; \tag{П 2.7}$$

$$M = \sum_{p=1}^T D_p \{ 1 + u_{pi} + u_{pj} + u_{pk} + \dots + (-1)^{n'_{pij}} u_{pi} u_{pj} + (-1)^{n'_{pik}} u_{pi} u_{pk} + (-1)^{n'_{pjk}} u_{pj} u_{pk} + \dots + (-1)^{n'_{pijk}} u_{pi} u_{pj} u_{pk} + \dots \}; \tag{П 2.8}$$

T — число деревьев схемы ЗИ; D_p — величина p -го дерева; u_p ,

u_{pi}, u_{pj}, u_{pk} — напряжения между соответствующими узлами дерева p с поочередным включением источников (рис. П2.7. б) (следует обратить внимание на противоположное направление источников, имитирующих управляемые источники); n_{pi} — число четных перестановок элементов множества $\{ | E |, | s_i | \}$, полученного подстановкой в множество $\{ | u_p |, | u_{pi} | \}$ соответствующих абсолютных величин напряжений, измеренных на дереве p ; n_{pij} — число четных перестановок элементов множества $\{ | E |, | s_i |, | s_j | \}$, полученного подстановкой в множество $\{ | u_p |, | u_{pi} |, | u_{pj} | \}$ соответствующих абсолютных величин напряжений, измеренных на дереве p ; n_{pij} — число четных перестановок элементов множества $\{ | s_i |, | s_j | \}$, полученного подстановкой в множество $\{ | u_{pi} |, | u_{pj} | \}$ соответствующих абсолютных величин напряжений на дереве p , и т. д.

Отдельные слагаемые сумм в выражениях (П2.7) и (П2.8) записываются по приведенным ниже правилам. Введем следующие обозначения (рис. П2.7):

A — множество деревьев схемы ЗИ;

$A_{\mu\nu}$ — множество деревьев схемы ЗИ с замкнутыми узлами μ и ν ;

$A_{\mu\nu, \mu_i \nu_i}$ — множество деревьев схемы ЗИ с замкнутыми парами узлов μ и ν , а также μ_i и ν_i ;

A^{α_e} — множество деревьев схемы ЗИ, в которой отключен от узла один зажим ключа α_e ;

$A^{\alpha_e \alpha_{si}}$ — множество деревьев схемы ЗИ, в которой отключены от узлов отдельные зажимы ключей α_e и α_{si} ;

$A_{\mu\nu}^{\alpha_e}$ — множество деревьев схемы ЗИ с замкнутыми вершинами μ и ν , а также с отключенным зажимом ключа α_e и т. д.

Используя эти обозначения, можно доказать, что в выражениях (П2.7) и (П2.8) слагаемое u_p появляется только для величины деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A_{\mu\nu}^{\alpha_e};$$

слагаемое $u_{pi} u_{pj}$ появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A_{\mu\nu, \mu_i \nu_i}^{\alpha_e \alpha_{si}};$$

слагаемое $u_{pi} u_{pj} u_{pk}$ появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A_{\mu\nu, \mu_i \nu_i, \mu_j \nu_j}^{\alpha_e \alpha_{si} \alpha_{sj}};$$

слагаемое $u_{pi} u_{pj} u_{pk}$ появляется только для величин деревьев,

содержащихся в множестве

$$A \cap A_{\mu\nu}^{\alpha} A_{\mu_i\nu_i}^{\alpha} A_{\mu_j\nu_j}^{\alpha} A_{\mu_k\nu_k}^{\alpha};$$

слагаемое u_{pi} появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A_{\mu_i\nu_i}^{\alpha};$$

слагаемое u_{pj} появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A_{\mu_i\nu_i, \mu_j\nu_j}^{\alpha};$$

Это означает, что для каждого дерева D_i отдельные слагаемые сумм появляются только в случаях, когда соответствующие преобразования дерева D_i , приведенные выше, дают также деревья схемы ЗИ.

На основании формулы (П2.6) проводимость $Y_{\mu\nu}$ схемы, измеренная между любыми узлами μ и ν , рассчитывается по формуле

$$Y_{\mu\nu} = \frac{M}{\partial M / \partial y_{\mu\nu}} \quad (\text{П2.9})$$

где $y_{\mu\nu}$ — проводимость ветви, соединяющей узлы μ и ν .

Замечание. Формула (П2.9) аналогична формуле (П2.3), применяемой для схем, не содержащих управляемых источников, так как

$$\sum_{d'=1}^T D_{d'} = \frac{\partial}{\partial y_{\mu\nu}} \sum_{d=1}^T D_d.$$

Проводимость $Y_{\mu\nu}^0$ схемы с отключенной ветвью $y_{\mu\nu}$, таким образом, равна

$$Y_{\mu\nu}^0 = \frac{M|_{y_{\mu\nu}=0}}{\partial M / \partial y_{\mu\nu}}. \quad (\text{П2.9а})$$

Чтобы проиллюстрировать формулы (П2.6) — (П2.8), обратим внимание на деревья p , r и t схемы ЗИ (рис. П2.7, б — г). Для этих деревьев (при условии что в схеме имеются только источники E , E_{si} , E_{sj} и E_{sk}) получим

$$\begin{aligned} L = & \dots + D_p \{E - E_{si} - E_{sj} - E_{sk} + E_{si}s_j + E_{si}s_k + \\ & + E_{sj}s_k - E_{si}s_js_k\} + D_r \{-E + E_{si}s_js_k\} + \\ & + D_t \{E_{si} - E_{si}s_j + E_{si}s_k - E_{si}s_js_k\} + \dots, \\ M = & \dots + D_p \{1 - s_i - s_j - s_k + s_i s_j + s_i s_k + s_j s_k - \\ & - s_i s_j s_k\} + D_r \{1 - s_i s_j s_k\} + D_t \{1 - s_j + s_k - s_j s_k\} + \dots \end{aligned}$$

Проводимость схемы между узлами μ_0 и μ (рис. П2.7, а) или относительно ветви y_α (рис. П2.7, г), согласно формуле (П2.9), равна

$$Y_{\mu_0\mu} = \frac{M}{\dots + \frac{\partial D_t}{\partial y_\alpha} \{1 - s_j + s_k - s_j s_k\} + \dots},$$

где, как следует из рис. П2.7, б и в:

$$\frac{\partial D_p}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial D_r}{\partial y_\alpha} = 0.$$

При анализе схем с управляемыми током источниками напряжений в соответствующие ветви деревьев схемы ЗИ вместо источников с напряжениями s_i, s_j, s_k, \dots следует включить источники с напряжениями

$$s'_i y_i, s'_j y_j, s'_k y_k, \dots,$$

где s'_i, s'_j, s'_k, \dots — коэффициенты управления по току ($s'_i = E_{si}/I_i, \dots$); y_i, y_j, y_k, \dots — проводимости ветвей управляющих токов I_i, I_j, I_k, \dots .

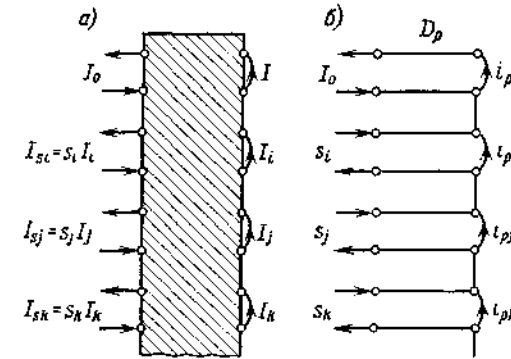


Рис. П2.8. Активная цепь с управляемыми током зависимыми источниками тока: а) блок-схема; б) схема дерева D_p цепи ЗИ с источниками (зависимые источники с обратной полярностью).

При анализе схем с управляемыми током источниками токов (рис. П2.8, а) ток I рассчитываем по формуле

$$I = \frac{L'}{M'}, \quad (\text{П2.10})$$

где

$$\begin{aligned} L' = & \sum_{p=1}^T D_p \{i_p + (-1)^{n_{pi}} i_{pi} i_{pi} + (-1)^{n_{pj}} i_{pj} i_{pj} + (-1)^{n_{pk}} i_{pk} i_{pk} + \dots \\ & \dots + (-1)^{n_{pij}} i_{pi} i_{pi} i_{pj} + (-1)^{n_{pik}} i_{pi} i_{pi} i_{pk} + (-1)^{n_{pjk}} i_{pj} i_{pj} i_{pk} + \dots \\ & \dots + (-1)^{n_{pijk}} i_{pi} i_{pi} i_{pj} i_{pk} + \dots\}; \end{aligned}$$

$$M' = \sum_{p=1}^T D_p \{ 1 + i_{pi} + i_{pj} + i_{pk} + \dots + (-1)^{n_{pij}} i_{pi} i_{pj} + (-1)^{n_{pik}} i_{pi} i_{pk} + (-1)^{n_{pijk}} i_{pi} i_{pj} i_{pk} + \dots + (-1)^{n_{pijk}} i_{pi} i_{pj} i_{pk} + \dots \}; \quad (\text{П2.12})$$

$i_p, i_{pi}, i_{pj}, i_{pk}, \dots$ — токи, измеренные в ветвях дерева p (рис. П2.8, б) (следует обратить внимание на обратное направление источников тока s_i, s_j, s_k, \dots , имитирующих управляемые источники $I_{si}, I_{sj}, I_{sk}, \dots$); n_{pi} — число четных перестановок элементов множества $\{|I_0|, |s_i|\}$, полученного в результате подстановки в множество $\{|i_p|, |i_{pi}|\}$ абсолютных значений токов, измеренных в соответствующих ветвях дерева p и т. д. (аналогично формулам (П2.7) и (П2.8)).

Отдельные слагаемые сумм в выражениях (П2.11) и (П2.12) определяются так же, как в выражениях (П2.7) и (П2.8), но с той разницей, что в пересечениях множеств деревьев верхние указатели заменяем на нижние, а нижние на верхние.

Проводимость $Y_{\mu\nu}$ схемы между ее любыми узлами μ и ν рассчитываем по формуле

$$Y_{\mu\nu} = \frac{M'}{\partial M' / \partial y_{\mu\nu}}, \quad (\text{П2.13})$$

где $y_{\mu\nu}$ — проводимость ветви, соединяющей узлы μ и ν .

Проводимость $Y_{\mu\nu}^0$ схемы с отключенной ветвью $y_{\mu\nu}$ равна

$$Y_{\mu\nu}^0 = \frac{M' |_{y_{\mu\nu}=0}}{\partial M' / \partial y_{\mu\nu}}. \quad (\text{П2.13a})$$

Анализируя схему с управляемыми напряжением источниками тока, следует в соответствующие узлы деревьев схемы ZI вместо источников тока с токами s_i, s_j, s_k, \dots включать источники с токами

$$\frac{s'_i}{y_i}, \frac{s'_j}{y_j}, \frac{s'_k}{y_k}, \dots,$$

где s'_i, s'_j, s'_k, \dots — коэффициенты источников

$$(I_{si}/U_i, I_{sj}/U_j, I_{sk}/U_k, \dots);$$

y_i, y_j, y_k, \dots — проводимости управляющих ветвей.

Если рассматриваемая схема с управляемыми источниками тока подключена к источникам напряжения, то при применении данного метода такие источники следует заменить источниками тока так, как показано на рис. П2.9.

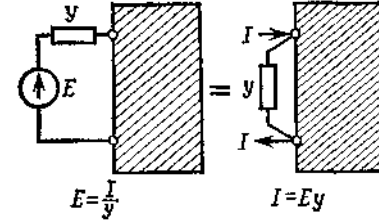


Рис. П2.9. Замена источника напряжения источником тока и наоборот.

В случае схем с управляемыми источниками напряжений это правило может также служить для замены источника тока источником напряжения.

Величины деревьев D_p в формулах (П2.7), (П2.8) и (П2.11), (П2.12) можно заменить значениями их дополнений, выраженными в виде произведений импедансов ветвей цепи, не принадлежащих отдельным деревьям. Если обозначить полученные таким образом знаменатели выражений соответственно через M^* (вместо M) и через M'^* (вместо M'), то импеданс $Z_{\mu\nu}$, измеренный между любыми двумя узлами μ и ν , равен

$$Z_{\mu\nu} = \frac{M^* |_{z_{\mu\nu}=0}}{M^*} \quad \text{или} \quad Z_{\mu\nu} = \frac{M'^* |_{z_{\mu\nu}=0}}{M'^*}, \quad (\text{П2.14})$$

где $z_{\mu\nu}$ — импеданс ветви, соединяющий узлы μ и ν .

Таким образом, импеданс $Z_{\mu\nu}^0$ цепи с отключенной ветвью $z_{\mu\nu}$ равен

$$Z_{\mu\nu}^0 = \frac{M^* |_{z_{\mu\nu}=0}}{\partial M^* / \partial z_{\mu\nu}} \quad \text{или} \quad Z_{\mu\nu}^0 = \frac{M'^* |_{z_{\mu\nu}=0}}{\partial M'^* / \partial z_{\mu\nu}}. \quad (\text{П2.15})$$

Замечание. Такой способ замены адмитанса на импеданс применим и для пассивных цепей (П2.3 — П2.5).

Проиллюстрируем на примерах метод анализа активных цепей.

Пример П2.1. Рассчитать параметры транзистора, включенного по схеме с общей базой (рис. П2.10, а). Схема цепи ZI показана на рис. П2.10, б, а ее деревья — на рис. П2.10, в.

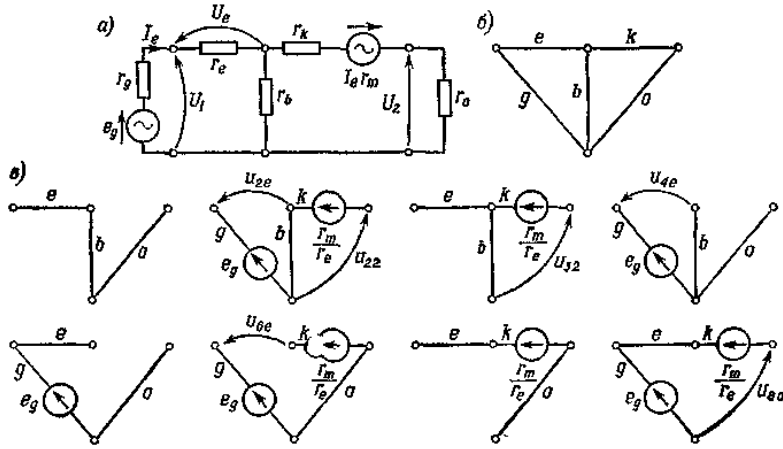


Рис. П2.10. Схема транзистора с общей базой:

а) схема замещения; б) схема деревьев цепи ЗИ с включенными источниками.

Коэффициент управления напряжением равен

$$\frac{I_e r_m}{I_e r_e} = \frac{r_m}{r_e}.$$

Так как используем импедансы (резистансы) ветвей схемы, то вместо величин деревьев будем писать величины их дополнений.

На основании изображений деревьев (П2.6) — (П2.8) напомним

$$M^* = r_k r_g + r_e r_0 + r_g r_0 + r_e r_k + r_k r_b + r_e r_b \left(1 - \frac{r_m}{r_e}\right) + r_g r_b + r_b r_0 =$$

$$= r_k r_g + r_e r_0 + r_g r_0 + r_e r_k + r_k r_b + r_b (r_e - r_m) + r_g r_b + r_b r_0,$$

$$R_{\text{вх}}^0 = \frac{M^* |_{r_g=0}}{\partial M^* / \partial r_g} = \frac{r_e r_0 + r_e r_k + r_k r_b + r_b (r_e - r_m) + r_b r_0}{r_k + r_0 + r_b} =$$

$$= r_e + r_b \frac{r_k - r_m + r_0}{r_b + r_k + r_0},$$

$$R_{\text{вых}}^0 = \frac{M^* |_{r_0=0}}{\partial M^* / \partial r_0} = \frac{r_k r_g + r_e r_k + r_k r_b + r_b (r_e - r_m) + r_g r_b}{r_e + r_g + r_b} =$$

$$= r_k - r_b \frac{r_m - r_g - r_e}{r_e + r_g + r_b}.$$

$$U_1 = \frac{r_e r_0 + r_e r_k + r_k r_b + r_b (r_e - r_m) + r_b r_0}{M^*} e_g,$$

$$U_2 = \frac{r_b r_0 + r_e r_0 (r_m / r_e)}{M^*} e_g = \frac{r_0 (r_b + r_m)}{M^*} e_g,$$

Из полученных величин можно рассчитать усиление напряжения и тока, мощности, сопротивления согласования и т. д.

Пример П2.2. Рассчитать напряжение U_3 , а также входную $Y_{\text{вх}}$ и выходную $Y_{\text{вых}}$ проводимости схемы с индуктивной связью (рис. П2.11, а).

Составим схему замещения с двумя источниками напряжения E_2 и E_4 , управляемыми напряжениями U_4 и U_2 (рис. П2.11, б).

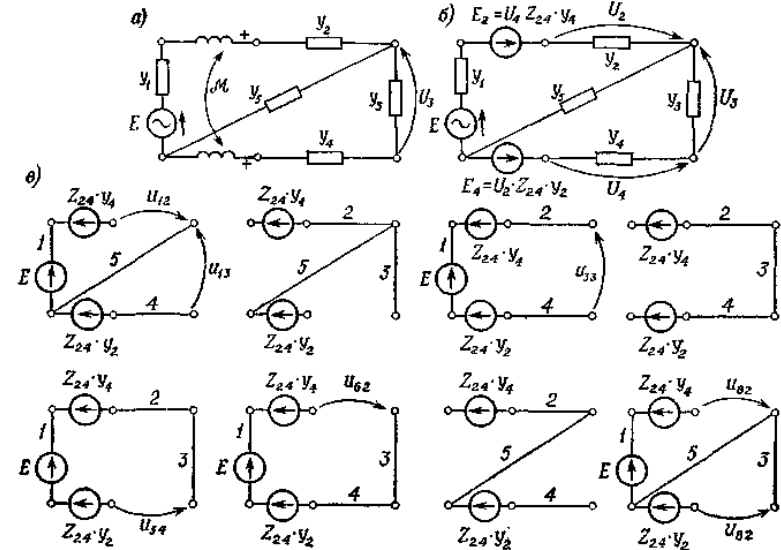


Рис. П2.11. Цепь с индуктивной связью:

а) схема цепи; б) схема замещения; в) схема деревьев цепи ЗИ с включенными источниками.

Коэффициенты источников равны

$$\frac{E_2}{U_4} = Z_{24} y_4, \quad \frac{E_4}{U_2} = Z_{24} y_2,$$

где $Z_{24} = j\omega \mathcal{M}$ (\mathcal{M} — коэффициент взаимной индукции).

Из рассмотрения деревьев схемы ЗИ (рис. П2.11, в) (источники без сопротивления подключаем к соответствующим узлам схемы) можно написать

$$\begin{aligned}
 M &= y_1 y_4 y_5 + y_2 y_3 y_5 + y_1 y_2 y_4 + y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + \\
 &+ y_1 y_3 y_4 + y_2 y_4 y_5 + y_1 y_3 y_5 - Z_{24} y_4 y_1 y_2 y_3 - \\
 &- Z_{24} y_2 y_1 y_3 y_4 - Z_{24}^2 y_2 y_4 y_1 y_3 y_5 = (y_1 + y_2) (y_2 y_4 + \\
 &+ y_3 y_5 + y_4 y_5) + y_1 y_2 (y_3 + y_4) - y_1 y_2 y_3 y_4 (2 + Z_{24} y_5) Z_{24}, \\
 L &= y_1 y_2 y_4 E + Z_{24} y_2 E y_1 y_4 y_5 = y_1 y_2 y_4 (1 + Z_{24} y_5) E, \\
 U_3 &= \frac{L}{M}.
 \end{aligned}$$

Входная проводимость схемы без ветви y_1 источника E равна

$$\begin{aligned}
 Y_{вх} &= \frac{M}{\partial M / \partial y_1} - y_1 = \frac{M |_{y_1=0}}{\partial M / \partial y_1} = \\
 &= \frac{y_2 (y_3 y_4 + y_3 y_5 + y_4 y_5)}{y_3 y_4 + y_3 y_5 + y_4 y_5 + y_2 (y_3 + y_4) - y_2 y_3 y_4 (2 + Z_{24} y_5) Z_{24}},
 \end{aligned}$$

а выходная проводимость схемы без ветви y_3

$$\begin{aligned}
 Y_{вых} &= \frac{M}{\partial M / \partial y_3} - y_3 = \frac{M |_{y_3=0}}{\partial M / \partial y_3} = \\
 &= \frac{(y_1 + y_2) y_4 y_5 + y_1 y_2 y_4}{(y_1 + y_2) (y_4 + y_5) + y_1 y_2 - y_1 y_2 y_4 (2 + Z_{24} y_5) Z_{24}}.
 \end{aligned}$$

2.4. Образование деревьев схемы ZI

Описанный метод анализа пассивных и активных схем основан на образовании деревьев переключательной схемы ZI. При анализе простых схем деревья можно найти алгебраическим методом и после их изображения непосредственно установить зависимости для параметров этих схем. Образование деревьев можно автоматизировать при помощи генератора деревьев, действие которого опирается на следующие свойства дерева:

- 1) все узлы схемы ZI гальванически соединены замкнутыми ключами дерева;
- 2) дерево не содержит ни одного контура;
- 3) число замкнутых ключей в дереве равняется числу узлов схемы ZI, уменьшенному на единицу.

Принципиальная схема генератора деревьев представлена на рис. П2.12.

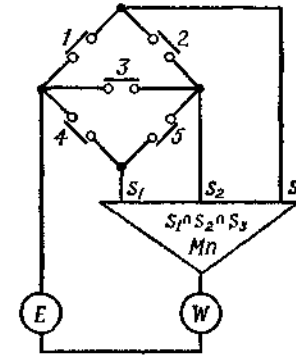


Рис. П2.12. Принципиальная схема генератора деревьев цепи ZI: E — источник питания; Mn — блок логического умножения; W — индикатор напряжения или тока; 1, 2, 3, 4, 5 — ключи.

Источник питания E включается в произвольный узел схемы ZI. Оставшиеся узлы присоединяются через блок конъюнкции Mn сигналов S_i к индикатору напряжения или тока W . Условием образования дерева служит отклонение индикатора W при разомкнутых M ключах в схеме ZI, где M — цикломатическое число схемы ZI.

Включая в каждое образованное дерево схемы ZI источники, имитирующие источники питания и управляемые источники (в последнем случае с противоположной полярностью), а также осуществляя измерения соответствующих напряжений между узлами и токов в ключах дерева, можно описанным выше способом найти параметры схемы.

3. Анализ электрических схем методом циклов

Этот метод служит для расчета распределения тока в анализируемой электрической схеме, содержащей источники напряжения. Он основывается на определении всех элементарных циклов в графе рассматриваемой схемы, содержащих ребро, представляющее ветвь питания схемы, и ребро α_k , представляющее ветвь, в которой определяется значение тока I_k .

Число ребер w_i каждого из этих циклов не должно быть больше числа v вершин графа.

Выражение для тока I_k имеет вид

$$I_k = \frac{E}{\det A} \sum_{i=1}^p \det \left(\prod_{t=1}^{w_i} [\alpha_{ti}] \prod_{r=1}^{v-w_i} [P_{tr}] \right), \quad (\text{П2.16})$$

где I_k — ток в ветви схемы, представленной ребром α_k в графе схемы; E — э. д. с. источника напряжения; A — структурное число графа схемы; $p \leq (2^M - 1)$ — количество элементарных циклов, содержащих $w_i \leq v$ ребер, среди них — ребро, представляющее ветвь с источником E , а также ребро α_k ; M — цикломатическое число графа; α_{ti} — ребро элементарного цикла t ; P_{tr} — структурное число вершины графа μ_r , не принадлежащей циклу t (структурное число вершины μ_r графа является однострочным структурным числом, элементы которого — обозначения всех инцидентных ребер с вершиной μ_r и не замкнутых в этой вершине); v — количество вершин графа анализируемой схемы; Y — множество проводимостей всех ветвей схемы.

Знаки отдельных слагаемых суммы (П2.16) определяем следующим образом: если в цикле t направления E и I_k одинаковы, то слагаемое t суммы имеет знак плюс, в противном случае — знак минус.

Если в схеме много источников напряжения, то применяем принцип суперпозиции токов.

Элементарные циклы в планарном графе создаем путем суммирования структурных чисел независимых циклов во всевозможных комбинациях (структурное число цикла — однострочное структурное число, элементами которого являются обозначения всех ребер этого цикла.) При этом опускаем суммы структурных чисел, логическое произведение которых равно нулю.

В результате этого суммирования получаем не больше чем $(2^M - 1)$ структурных чисел вместе с M структурными числами независимых циклов (M — цикломатическое число графа). Из найденного множества структурных чисел элементарных циклов выбираем в формулу (П2.16) все структурные числа A_t удовлетворяющие условию

$$\alpha_k, \alpha_E \in A_t, \quad (\text{П2.17})$$

где α_E — обозначение ребра графа, представляющего ветвь источника E .

Для иллюстрации изложенного метода расчета токов ветвей в электрических схемах рассмотрим два примера.

Пример П2.3. Рассчитать ток I_5 в ветви 5 электрической схемы, граф которой с источником э. д. с. E_1 и током I_5 приведен на рис. П2.13.

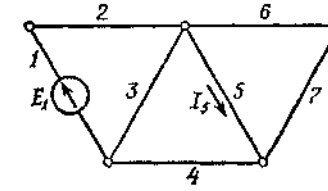


Рис. П2.13.

Определим структурные числа элементарных независимых циклов графа

$$\begin{aligned} A_1 &= [1 \ 2 \ 3], \\ A_2 &= [3 \ 4 \ 5], \\ A_3 &= [5 \ 6 \ 7], \end{aligned}$$

а затем суммы этих структурных чисел, опуская суммы, не содержащие ребра 1 и 5. В данном примере получим только одно структурное число

$$A_1 + A_2 = [1 \ 2 \ 4 \ 5],$$

так как

$$\begin{aligned} 5 \notin A_1, \quad 1 \notin A_2, \quad 1 \notin A_3, \quad A_1 \cap A_3 = 0, \\ 1, 5 \notin (A_2 + A_3), \quad 5 \notin (A_1 + A_2 + A_3). \end{aligned}$$

Число $A_1 + A_2$ представляет элементарный цикл.

Согласно формуле (П2.16), имеем

$$I_5 = \frac{E_1}{\det A} y_1 y_2 y_4 y_5 (y_6 + y_7),$$

так как цикл, составленный из ребер 1, 2, 4, 5, не содержит вершины графа, которой инцидентны ребра 6 и 7. В приведенном выражении A обозначает структурное число графа.

Пример П2.4. Рассчитать I_7 в ветви 7 электрической схемы, граф которой с источниками напряжения E_1, E_2, \dots, E_6 и током I_7 представлены на рис. П2.14.

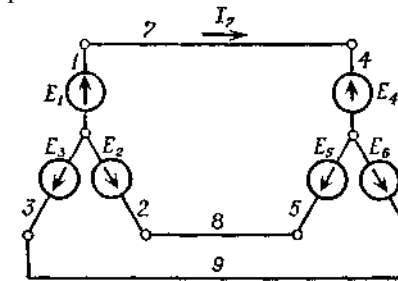


Рис. П2.14.

Определим структурное число независимых элементарных циклов графа

$$\begin{aligned} A_1 &= [1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 7 \ 8], \\ A_2 &= [2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 9]. \end{aligned}$$

Образует сумму

$$A_1 + A_2 = [1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 7 \ 9], \quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset.$$

На основании формулы (П2.16) и принципа суперпозиции получим

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{1}{\det A} [(E_1 + E_6 - E_2 - E_4) y_1 y_2 y_4 y_5 y_7 y_8 (y_3 y_6 + y_3 y_9 + y_6 y_9) + \\ &+ (E_1 + E_6 - E_3 - E_4) y_1 y_3 y_4 y_6 y_7 y_9 (y_2 y_5 + y_2 y_8 + y_5 y_8)], \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} [3 \ 9] [6 \ 9] &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \\ [2 \ 8] [5 \ 8] &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а структурное число A_2 не содержит элементарного 7.

Приложение 3

Минимизация булевых функций и синтез переключающих цепей методом структурных чисел

Распространенные методы минимизации булевых функций (Квайн — Мак-Класки, Блок, Карно, Вейч) основаны на минимизации одной нормальной (канонической) формы функции: дизъюнктивной или конъюнктивной, без использования логической взаимосвязи обеих форм. То же можно сказать о методах синтеза переключающих цепей. В данном приложении излагается универсальный алгоритм определения всех минимальных видов произвольной булевой функции, использующий логические связи между обеими нормальными формами функции, а также представлен метод синтеза переключающих цепей с помощью структурных чисел, основанный на теории графов.

Этот метод позволяет проектировать переключающие последовательно-параллельные и мостовые цепи с минимальным числом функторов и узлов.

1. Минимизация булевых функций

Рассмотрим переключающую цепь, состоящую из функторов (в литературе используется также термин «функциональный узел» и запись (П3.1) не является общепринятой) F и \bar{F} , реализующих следующие функции входной переменной x :

$$[F(x=1) \rightarrow f(\varphi) = \varphi] \wedge [F(x=0) \rightarrow f(\varphi) = 0],$$

$$[\bar{F}(x=1) \rightarrow f^*(\varphi) = 0] \wedge [\bar{F}(x=0) \rightarrow f^*(\varphi) = \varphi], \quad (\text{П3.1})$$

где $f(\varphi)$ и $f^*(\varphi)$ — булевы функции переменной φ .

Функтор F условно назовем позитором, а функтор \bar{F} — негатором. Геометрическое изображение переключающей цепи из позиторов и негаторов представим в виде неориентированного графа (мультиграфа), состоящего из ребер, которые представляют единичные функторы с топологической структурой, изоморфной структуре цепи. Отдельные ребра графа обозначим символами соответствующих функторов и для упрощения записи эти функторы обозначим символами входных переменных:

позитор, реализующий функцию $F(x)$, обозначим через x ,

негатор, реализующий функцию $\bar{F}(x)$, — через \bar{x} .

В графе переключающей цепи, состоящей из позиторов и негаторов, выделим две вершины: входную для переменной φ и выходную для функций $f(\varphi)$ и $f^*(\varphi)$.

Можно доказать, что все другие логические функторы, такие, как функтор симметричной разности, NAND, NOR и т. д., можно реализовать цепями, состоящими из позиторов и негаторов (система из позиторов и негаторов не является полной; для полной системы необходим генератор единиц). Поэтому, синтезировав цепь из позиторов и негаторов, можно выделить в ней подцепи, реализующие другие функции (симметричной разности, Пирса, Шеффера и т. д.), и заменить эти подцепи соответствующими функторами. Таким образом, позиторно-негаторную цепь можно заменить цепью, составленной из произвольных функторов.

Каждая булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть представлена в двух нормальных (канонических) формах: дизъюнктивной, являющейся дизъюнкцией (суммой) конституент единицы (D_i):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 + D_2 + \dots + D_i, \quad (\text{П3.2})$$

и конъюнктивной, являющейся конъюнкцией (произведением) конституент нуля (K_j):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = K_1 K_2 \dots K_k, \quad (ПЗ.3)$$

где $d + k = 2^n$ (полная нормальная форма), или $d + k < 2^n$ (неполная, нормальная форма).

Конституенты единицы (D_i) представляют пути в графе, соединяющие выделенные вершины, в то время как конституенты нуля (K_j) — сечения графа, который служит геометрическим изображением переключающей цепи, реализующей функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Эти сечения разделяют выделенные вершины графа (входную и выходную).

Структурное число A графа равно

$$A = \prod_{k=1}^{v-1} [P_k], \quad (ПЗ.4)$$

где $[P_k]$ — однострочное структурное число сечения графа, v — число вершин графа.

Дополнительное структурное число A^d графа имеет вид

$$A^d = \prod_{i=1}^{b-(v-1)} [C_i], \quad (ПЗ.5)$$

где $[C_i]$ — однострочное структурное число цикла графа, b — число ребер графа.

Необходимое число π независимых сечений, определяющих структурное число данного графа, равно $v - 1$, в то время как необходимое число независимых циклов, определяющих дополнительное структурное число, равно $\delta - 1$ (где δ — число независимых путей графа между выделенными двумя вершинами, причем эти пути не должны содержать циклов). Поэтому

$$v = \pi + 1, \quad b = \delta + \pi - 1 \quad \text{и} \quad v + b = \delta + 2\pi. \quad (ПЗ.6)$$

Таким образом, минимальный граф, т. е. граф, имеющий минимальное число ребер b и вершин v , должен иметь минимальное число независимых сечений π и независимых путей δ , не содержащих циклов.

Независимость путей и сечений графа определяется независимостью их структурных чисел, которая в свою очередь может быть сформулирована следующим образом: **структурное число называется независимым в множестве структурных чисел, если оно не равно сумме произвольного числа других структурных чисел этого множества.**

Число разрезов графа равно

$$\pi \leq \prod_{i=1}^{\delta} n_i, \quad (ПЗ.7)$$

где n_i — число ребер i -го пути.

Отсюда следует, что в минимальном графе пути должны иметь минимальное число ребер. Минимизация числа путей графа ведет к минимизации числа ребер любого сечения при условии, что любое сечение пересекает каждый путь только один раз или в крайнем случае минимальное нечетное число раз.

Поэтому **можно осуществить минимизацию графа через минимизацию его сечений и путей**, учитывая в графе только ребра сечений и в сечениях минимальное число ребер путей, выделяя при этом зависимые пути и сечения. Очевидно, что **полученный таким образом минимальный граф описывает минимальные формы булевой функции.**

Независимые минимальные пути в минимальном графе представляют простые импликанты в минимальных дизъюнктивных формах булевой функции, в то время как независимые минимальные сечения этого графа представляют простые имплициенты минимальных конъюнктивных форм этой функции.

Из сказанного следует алгоритм минимизации булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, представленной в двух нормальных формах (ПЗ.2) и (ПЗ.3):

$$\{f_{\text{мин}}^D\} = \left(\prod_{i=1}^d \left(\prod_{j=1}^k [(D_i) \cap \{K_j\}] \right)^* \right)^{+},$$

$$\{f_{\text{мин}}^K\} = \left(\prod_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^d [(D_i) \cap \{K_j\}] \right)^* \right)^{+}. \quad (ПЗ.8) - (ПЗ.9)$$

где $\{f_{\text{мин}}^D\}$ — множество всех минимальных дизъюнктивных форм f ;
 $\{f_{\text{мин}}^K\}$ — множество всех минимальных конъюнктивных форм функции f ; $\{D_i\}$ — i -я конституента единицы, рассматриваемая как множество элементов, являющихся обозначениями отдельных конституент (переменные с отрицанием рассматриваются как элементы, отличные от тех элементов, которые представляют собой переменные без отрицания); $\{K_j\}$ — j -я конституента нуля, рассматриваемая как множество элементов-обозначений отдельных конституент; $[]$ — рассмотрение множества элементов как дизъюнкции переменных; Π — конъюнкция переменных; $()^*$ — рассмотрение составляющих дизъюнкции (конъюнкции) элементов X_i как переменных, обозначенных далее через Z_i или Z_j ; $()^{+}$ —

замена всех конъюнкций переменных Z_i на дизъюнкции, являющиеся минимальными дизъюнктивными формами функции f ; $()^{(+)}$ — замена всех переменных Z_i на дизъюнкцию переменных X_i ; таким образом, из каждой конъюнкции переменных Z_i получается минимальная конъюнктивная форма функции f .

Вышеприведенные алгоритмы дают в результате все минимальные формы функции. Это имеет большое практическое значение при минимизации цепей со многими выходами, поскольку позволяет подбирать такие минимальные формы функции для различных выходов, которые имеют больше всего прямых импликант или имплицит. Эти алгоритмы минимизации булевых функций могут быть применены как для полных, так и для неполных форм функций.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий использование приведенных алгоритмов минимизации булевых функций.

Пример 1. Определить все минимальные формы булевой функции четырех переменных заданной в двух нормальных формах: дизъюнктивной

$$f(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$$

и конъюнктивной

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d)(\bar{a} + \bar{b} + c + \bar{d})(\bar{a} + \bar{b} + c + d)(\bar{a} + b + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + b + \bar{c} + d) \times \\ \times (a + \bar{b} + c + \bar{d})(a + \bar{b} + c + d)(a + b + \bar{c} + \bar{d}) \times \\ \times (a + b + c + \bar{d}).$$

Для упрощения записи примем следующее обозначение переменных:

$$\bar{a} = v, \quad \bar{b} = x, \quad \bar{c} = y, \quad \bar{d} = z.$$

Согласно алгоритму (ПЗ.8) и (ПЗ.9), рассмотрим конstituенты единицы и нуля как множества элементов и сведем их в табл. ПЗ.1.

Таблица ПЗ.1

$\{K_j\}$	$\{D_1\}$	$\{v, x, y, z\}$	$\{v, x, c, d\}$	$\{v, b, c, d\}$	$\{a, x, y, z\}$	$\{a, x, y, d\}$	$\{a, x, c, d\}$	$\prod_{j=1}^k \{D_j\} \cap \{K_j\}$
$\{v, x, y, z\}$	$v+x+y+z$	$v+x$	v	$v+y+z$	$x+y$	x	x	vx
$\{v, x, y, d\}$	$v+x+y$	$v+x+d$	$v+d$	$x+y$	$x+y+d$	$x+d$	$x+d$	$(v+x)(x+y)(x+d) = vx+dx+dy$
$\{v, x, c, z\}$	$v+x+z$	$v+x+c$	$v+c$	$x+z$	x	$x+c$	$x+c$	$x(v+c) = vx+cx$
$\{v, x, c, d\}$	$v+x$	$v+x+c+d$	$v+c+d$	x	$x+d$	$x+d$	$x+d$	$x(v+c+d) = vx+cx+dx$
$\{v, b, y, d\}$	$v+y$	$v+d$	$v+b+d$	y	$y+d$	d	d	dy
$\{a, x, y, d\}$	$x+y$	$x+d$	d	$a+x+y$	$a+x+y+d$	$a+x+d$	$a+x+d$	$d(x+y) = dx+dy$
$\{a, x, c, z\}$	$x+z$	$x+c$	c	$a+x+z$	$a+x$	$a+x+c$	$a+x+c$	$c(x+z)(a+x) = cx+cz$
$\{a, x, c, d\}$	x	$x+c+d$	$c+d$	$a+x$	$a+x+d$	$a+x+d$	$a+x+d$	$x(c+d) = cx+dx$
$\{a, b, y, d\}$	y	d	$b+y$	$a+y$	$a+y+d$	$a+d$	$a+d$	dy
$\{a, b, c, z\}$	z	c	$b+c$	$a+z$	a	$a+c$	$a+c$	acz
$\prod_{j=1}^k \{D_j\} \cap \{K_j\}$	xyz	$cd(v+x)$ $=cdv+cdx$	cdv	$xy(a+z)$ $=axy+xyz$	$ax(y+d)$ $=axy+adx$	$dx(a+c)$ $=adx+cdx$		

В верхней строке таблицы запишем конstituенты единицы как множество $\{D_i\}$, в левом столбце — конstituенты нуля как множество элементов $\{K_j\}$. В клетках таблицы (на пересечении соответствующих столбцов и строк) записываем пересечения множеств $\{D_i\} \cap \{K_j\}$ (или общие элементы множеств) в виде дизъюнкции переменных. Например, на пересечении четвертого столбца слева и третьей строки сверху записана дизъюнкция $v+d$, так как

$$\{v, x, y, d\} \cap \{v, b, c, d\} = \{v, d\}.$$

Заполнив таким образом все клетки таблицы в количестве $d \cdot k$ (где d — число конstituент единицы, а k — число конstituент нуля), определим все минимальные конъюнктивные формы функции. Для этого образуем конъюнкцию всех выражений, записанных в отдельных строках таблицы, используя правило поглощения.

По этому правилу вычеркнем выражения, в которых содержатся другие выражения той же строки. Например, вычеркнем $v+x$, так как в той же строке есть выражение x , или вычеркнем выражение $v+x+d$, так как в той же строке есть выражение $v+d$ и т. д.

Вычеркивание выражений в строках отмечено в табл. ПЗ.1 в виде черты из левого верхнего в правый нижний угол прямоугольника.

Результаты осуществления конъюнкции в отдельных строках приведены в последнем столбце, в заголовке которого записан алгоритм этих действий

$$\prod_{i=1}^a \{ \{D_i\} \cap \{K_i\} \}.$$

Далее осуществим конъюнкцию результатов, записанных в последнем столбце, еще раз используя правило поглощения, т. е. вычеркивая выражения, в которых содержатся другие выражения этого столбца (вычеркивания показаны в таблице). В результате получим выражение

$$(vx) (dy) [(cx) + (dx)] (acz).$$

В этом выражении отдельные конъюнкции, заключенные в скобки, например (vx) , рассматриваем как одну переменную z_1 :

$$z_1 = (vx), \quad z_2 = (dy), \quad z_3 = (cx), \quad z_4 = (dx), \quad z_5 = (acz)$$

и производим действия

$$z_1 z_2 (z_3 + z_4) z_5 = z_1 z_2 z_3 z_5 + z_1 z_2 z_4 z_5.$$

Каждая конъюнкция этих переменных представляет собой минимальную конъюнктивную форму функции. В данном примере получены две минимальные конъюнктивные формы, которые образуются заменой конъюнкции, заключенной в скобки на дизъюнкции, например $(vx) \rightarrow (v + x)$, в результате получаем

$$\begin{aligned} f_{\text{мин}}^K &= (v + x) (d + y) (c + x) (a + c + z), \\ f_{\text{мин}}^K &= (v + x) (d + y) (d + x) (a + c + z). \end{aligned}$$

Используя отрицания переменных, эти выражения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f_{\text{мин}}^K &= (\bar{a} + \bar{b}) (d + \bar{c}) (c + \bar{b}) (a + c + \bar{d}), \\ f_{\text{мин}}^K &= (\bar{a} + \bar{b}) (d + \bar{c}) (d + \bar{b}) (a + c + \bar{d}). \end{aligned}$$

Для определения минимальных дизъюнктивных форм рассматриваемой функции произведем аналогичные действия, но не в строках, а в столбцах таблицы.

Вычеркивание выражений в клетках по правилам поглощения обозначено в табл. ПЗ.1 в виде черты из левого нижнего в правый верхний угол прямоугольника (предыдущие зачеркивания считаются несуществующими). Результаты действий в отдельных столбцах сведены в нижнюю строку; в крайнем левом прямоугольнике приведен алгоритм этих действий

$$\prod_{j=1}^n \{ \{D_j\} \cap \{K_j\} \}.$$

Далее образуем конъюнкцию выражений нижней строки, используя еще раз правило поглощения (вычеркивание приведено в строке). В результате получим выражение

$$(xyz) (cdv) [(axy) + (adx)] [(adx) + (cdx)].$$

В этом выражении отдельные конъюнкции переменных, заключенные в скобки, например (xyz) , рассматриваем как отдельные переменные z_1 :

$$z_1 = (xyz), \quad z_2 = (cdv), \quad z_3 = (axy), \quad z_4 = (adx), \quad z_5 = (cdx)$$

и производим действия

$$z_1 z_2 (z_3 + z_4) (z_4 + z_5) = z_1 z_2 z_3 z_5 + z_1 z_2 z_4 z_5.$$

Этот результат дает две дизъюнктивные формы рассматриваемой функции, которые получим заменой конъюнкции переменных на их дизъюнкции:

$$f_{\text{мин}}^D = z_1 + z_2 + z_3 + z_5 = xyz + cdv + axy + cdx$$

и

$$f_{\text{мин}}^D = z_1 + z_2 + z_4 = xyz + cdv + adx.$$

Применив обозначения отрицания переменных, получим

$$f_{\text{мин}}^D = \bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{c}\bar{d}\bar{a} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{d}\bar{b}$$

и

$$f_{\text{мин}}^D = \bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{c}\bar{d}\bar{a} + \bar{a}\bar{d}\bar{b}.$$

Приведенный пример показывает легкость и простоту решения проблемы минимизации булевых функций с помощью алгоритмов (ПЗ.8) и (ПЗ.9). Алгоритмы позволяют программировать задачи минимизации на электронной цифровой машины.

Осуществляя на машине последовательные действия над строками или столбцами таблицы, можно значительно уменьшить необходимую рабочую память машины.

Ценным преимуществом алгоритмов (ПЗ.8) и (ПЗ.9) является получение всех минимальных форм функции, в которых можно выбрать наиболее выгодные для физической реализации. В нашем примере наиболее выгодна вторая дизъюнктивная форма, состоящая из: четырех элементов отрицания, трех функторов конъюнкции с тремя входами, одного функтора дизъюнкции с тремя входами.

Схема цепи, реализующей эту функцию, изображена на рис. ПЗ.1.

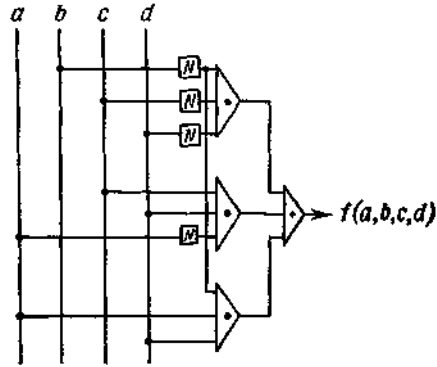


Рис. ПЗ.1.

2. Синтез переключающих цепей методом структурных чисел

Синтез переключающей цепи из позиторов и негаторов, реализующих функцию (ПЗ.1), основываем на минимизированных дизъюнктивных и конъюнктивных формах булевой функции, которые должны реализовать синтезируемую цепь.

С этой целью имплициенты $K_{j \text{ мин}}$ и импликанты $D_{i \text{ мин}}$ минимизированных форм функции рассмотрим как множество элементов $\{K_{j \text{ мин}}\}$ и $\{D_{i \text{ мин}}\}$.

Подберем такую пару минимизированных форм функции — дизъюнктивной и конъюнктивной, — для которой число пар множеств $\{K_{j \text{ мин}}\}$ и $\{D_{i \text{ мин}}\}$, не удовлетворяющих соотношению

$$\bigwedge_i \bigwedge_j \text{card} \{ \{K_{j \text{ мин}}\} \cap \{D_{i \text{ мин}}\} \} = 2n - 1,$$

$$i = 1, 2, \dots, \delta; \quad j = 1, 2, \dots, \pi; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{ПЗ.10})$$

будет наименьшим, а также число переменных в этих видах функции будет наименьшим. В примере 1 пара двух минимизированных форм функции

$$f_{\text{мин}}^K = (v + x)(d + y)(c + x)(a + c + z)$$

и

$$f_{\text{мин}}^D = xyz + cdv + adx$$

не имеет пар множеств $K_{j \text{ мин}}$ и $D_{i \text{ мин}}$, не удовлетворяющих соотношению (ПЗ.10), тогда как другая пара минимизированных форм функций

$$f_{\text{мин}}^K = (v + x)(d + y)(d + x)(a + c + z)$$

и

$$f_{\text{мин}}^D = xyz + cdv + adx$$

имеет одну пару множеств, не удовлетворяющих соотношению (ПЗ.10):

$$\{K_{3 \text{ мин}}\} = \{d, x\} \quad \text{и} \quad \{D_{3 \text{ мин}}\} = \{a, d, x\},$$

поскольку

$$\text{card} \{ \{d, x\} \cap \{a, d, x\} \} = \text{card} \{d, x\} = 2.$$

По определению пары минимизированных форм функции и согласно изложенному различают два случая.

Случай 1. Выбранная пара минимизированных форм функции не имеет ни одной пары множеств $\{K_{j \text{ мин}}\}$ и $\{D_{i \text{ мин}}\}$, не удовлетворяющих соотношению (ПЗ.10).

В этом случае граф переключающей цепи имеет число ребер b , равное числу различных переменных в обеих минимизированных формах функции.

Для минимизации числа вершин v исследуем неравенство

$$\pi + 1 \leq b - \delta + 2$$

или

$$\pi + \delta \leq b + 1 \quad (\text{ПЗ.11})$$

(π — число простых имплициент, δ — число простых импликант в минимизированных видах функции). От выполнения или невыполнения этого неравенства в каждом конкретном случае зависит дальнейший ход решения.

а) Неравенство (ПЗ.11) выполняется

В этом случае образуем из множеств $\{K_{j \text{ мин}}\}$ однострочные структурные числа $[K_{j \text{ мин}}]$, а из множеств $\{D_{i \text{ мин}}\}$ одностолбцовые структурные числа $[D_{i \text{ мин}}]$.

Произведение структурных чисел $[K_{j \text{ мин}}]$ и есть структурное число A искомого графа

$$A = \prod_{j=1}^{\pi} [K_{j \text{ мин}}]. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Как известно, структурное число A соответствует классу подобных графов. Инвариантами для этих графов являются в числе других величин число вершин $\pi + 1$ и число ребер b .

В этом классе графов, которым соответствует структурное число A , можно выделить подкласс графов, удовлетворяющих заданным условиям синтеза переключающей цепи.

С этой целью определим производные структурного числа A по отношению к структурным числам $[D_i \text{ мин}]$ с числом элементов, меньшим π

$$\frac{\partial A}{\partial [D_i \text{ мин}]} \quad (\text{ПЗ.13})$$

Эти производные или составляющие их произведения (первичные числа) представляют собой структурные числа вершин произвольного графа рассматриваемого подкласса.

Вершины являются инвариантами подкласса, и их число меньше чем $\pi + 1$.

Структурное число следующей вершины в графах рассматриваемого подкласса получим суммированием всех структурных чисел $[K_j \text{ мин}]$:

$$\sum_{j=1}^{\pi} [K_j \text{ мин}]. \quad (\text{ПЗ.14})$$

Другой чертой графов рассматриваемого подкласса является условие, что максимум два структурных числа $[K_j \text{ мин}]$ могут быть структурными числами вершин графов этого подкласса.

Используем данное условие и подберем два таких структурных числа $[K_j \text{ мин}]$, чтобы удовлетворялось очевидное условие: наличие точно по два раза всех переменных в множестве структурных чисел всех вершин графа.

Еще одним структурным числом вершин графа служит сумма структурных чисел остальных вершин графа. Имея структурные числа всех $(\pi + 1)$ вершин графа, можно легко начертить этот граф.

Пример 2. Рассмотрим ранее приведенную пару минимизированных форм булевых функций

$$f_{\text{мин}}^K = (v + x)(d + y)(c + x)(a + c + z),$$

$$f_{\text{мин}}^D = xyz + cdv + adx.$$

Эти формы не содержат ни одной пары множеств $\{K_j \text{ мин}\}$ и $\{D_i \text{ мин}\}$, не удовлетворяющих соотношению (ПЗ.10).

Граф переключающей цепи, реализующей эту функцию, имеет семь ребер (a, c, d, v, x, y, z) . Число простых имплициент $\pi=4$, прямых импликант $\delta=3$. Это удовлетворяет неравенству (ПЗ.11): $5 < 6$.

Образуем структурные числа

$[K_1 \text{ мин}] = [vx]$, $[K_2 \text{ мин}] = [dy]$, $[K_3 \text{ мин}] = [cx]$, $[K_4 \text{ мин}] = [acz]$, а также

$$[D_1 \text{ мин}] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad [D_2 \text{ мин}] = \begin{bmatrix} c \\ d \\ v \end{bmatrix}, \quad [D_3 \text{ мин}] = \begin{bmatrix} a \\ d \\ x \end{bmatrix}.$$

Структурное число графа равно

$$A = [xv] [dy] [cx] [acz].$$

Определяем производные

$$\frac{\partial A}{\partial [D_1 \text{ мин}]} = [cv], \quad \frac{\partial A}{\partial [D_2 \text{ мин}]} = [axz], \quad \frac{\partial A}{\partial [D_3 \text{ мин}]} = [cv].$$

Таким образом, имеем структурные числа двух вершин графа $[cv]$ и $[axz]$. Суммируя структурные числа $[K_j \text{ мин}]$, получаем

$$\sum_{j=1}^{\pi} [K_j \text{ мин}] = [xv] + [dy] + [cx] + [acz] = [advyz].$$

Поскольку граф должен иметь $\pi + 1 = 5$ вершин, подбираем два структурных числа из множества чисел $[K_j \text{ мин}]$:

$[dy]$ и $[cx]$.

Тогда граф переключающей цепи будет иметь вид, показанный на рис. ПЗ.2, где выделенные вершины обозначены большими кружочками.

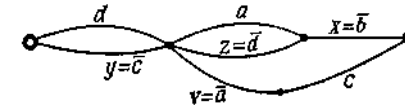


Рис. ПЗ.2.

б) *Неравенство (ПЗ.11) не выполняется*

В этом случае образуем из множеств $\{D_i \text{ мин}\}$ однострочные структурные числа $[D_i \text{ мин}]$, а далее попарно суммируем их таким образом, чтобы получить $\delta - 1$ независимых структурных чисел для циклов графа. Обозначим их $[D'_i \text{ мин}]$. Произведение этих чисел образует дополнительное структурное число графа

$$A^d = \prod_{i=1}^{\delta-1} [D'_i \text{ мин}].$$

Вычерчивание графа можно осуществить различными способами, например путем образования циклов, которым соответствуют упрощенные структурные числа $[D'_i \text{ мин}]$, учитывая одновременно структурные числа $[K_j \text{ мин}]$, путем образования разрезов графа или другими способами, которые здесь не рассматриваются.

Пример 3. Рассмотрим ту же пару минимизированных форм функции, что и в примере 2, хотя они удовлетворяют неравенству (ПЗ.11). Покажем, что граф, полученный последним способом, более сложен, чем полученный в примере 2. образуем суммы пар структурных чисел $[D_i \text{ мин}]$

$$[D'_1 \text{ мин}] = [xyz] + [adx] = [adyz],$$

$$[D'_2 \text{ мин}] = [cdv] + [adx] = [acvx].$$

Граф имеет $(\delta - 1) - 2$ независимых цикла, структурные числа которых рассчитаны. Оба цикла имеют общее ребро a . Такой граф легко вычертить (рис. ПЗ.3).

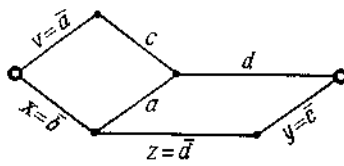


Рис. ПЗ.3.

Выделенные входная и выходная вершины определяются с учетом структурных чисел сечений $[K_{\text{мин}}]$, которые должны разделять эти вершины.

Сравнивая графы рис. ПЗ.2 и ПЗ.5, отметим, что они оба имеют одинаковое число ребер, но граф на рис. ПЗ.3 имеет на одну вершину больше. Поэтому граф (рис. ПЗ.2) более удобен, поскольку он следует из неравенства (ПЗ.11).

Случай 2. Выбранная пара минимизированных форм функции имеет минимальное, но не равное нулю число пар множеств $\{K_j^{\text{мин}}\}$ и $\{D_i^{\text{мин}}\}$, не удовлетворяющих соотношению (ПЗ.10).

В этом случае перед способом синтеза графа переключающей цепи, изложенным в случае 1, следует преобразовать $\{K_j^{\text{мин}}\}$ и $\{D_i^{\text{мин}}\}$ таким образом, чтобы удовлетворилось соотношение (ПЗ.10).

Это преобразование будем называть структурной стандартизацией пары минимизированных булевых функций.

Стандартизация дает увеличение числа ребер искомого графа по отношению к числу переменных в минимизированной форме функции.

Если соотношение (ПЗ.10) не удовлетворяется для всех пар множеств $\{K_j^{\text{мин}}\}$ и $\{D_i^{\text{мин}}\}$, то отдельные множества следует дополнить элементами, имеющимися в них, или уменьшить число общих элементов в соответствующих множествах так, чтобы удовлетворялось равенство (ПЗ.10).

Продemonстрируем это на примере. Для пары множеств

$$\begin{aligned} \{K_j^{\text{мин}}\} &= \{a, b, y\}, \\ \{D_i^{\text{мин}}\} &= \{a, b, c, x\} \end{aligned}$$

имеем

$$\text{card} \{ \{K_j^{\text{мин}}\} \cap \{D_i^{\text{мин}}\} \} = \text{card} \{a, b\} = 2.$$

Соотношение (ПЗ.10) не выполняется. Достичь его выполнения можно двумя способами:

$$1) \quad \{K_j^{\text{S}}\} = \{a', b, y\},$$

где $a' = a$, но $a' \neq a$, т. е. $\{a'\} \cap \{a\} = \emptyset$; следовательно, функтор a' выступает в другой ветви переключающей цепи, нежели такой же функтор a , или эти функторы a и a' представлены разными ребрами графа цепи. Условие (ПЗ.10) удовлетворяется, поскольку

$$\text{card} \{ \{K_j^{\text{S}}\} \cap \{D_i^{\text{мин}}\} \} = \text{card} \{b\} = 1;$$

$$2) \quad \{D_i^{\text{S}}\} = \{a, b, c, x, a'\}.$$

и

$$\{K_j^{\text{S}}\} = \{a, b, y, a'\},$$

тогда

$$\text{card} \{ \{K_j^{\text{S}}\} \cap \{D_i^{\text{S}}\} \} = \text{card} \{a, b, a'\} = 3,$$

т. е. условие (ПЗ.10) выполняется.

Пример 4. Рассмотрим способ структурной стандартизации минимизированных булевых функций

$$f_{\text{мин}}^K = (x + y)(x + z)(y + z),$$

$$f_{\text{мин}}^D = yz + xz + xy.$$

Обозначим множества

$$\{K_1^{\text{мин}}\} = \{x, y\}, \quad \{D_1^{\text{мин}}\} = \{y, z\},$$

$$\{K_2^{\text{мин}}\} = \{x, z\}, \quad \{D_2^{\text{мин}}\} = \{x, z\},$$

$$\{K_3^{\text{мин}}\} = \{y, z\}, \quad \{D_3^{\text{мин}}\} = \{x, y\}.$$

Проверим выполнение соотношения (ПЗ.10) для следующих пар множеств:

$$\text{card} \{ \{K_1^{\text{мин}}\} \cap \{D_1^{\text{мин}}\} \} = \text{card} \{ \{x, y\} \cap \{y, z\} \} = 1,$$

$$\text{card} \{ \{K_2^{\text{мин}}\} \cap \{D_1^{\text{мин}}\} \} = \text{card} \{ \{x, z\} \cap \{y, z\} \} = 1,$$

$$\text{card} \{ \{K_3^{\text{мин}}\} \cap \{D_1^{\text{мин}}\} \} = \text{card} \{ \{y, z\} \cap \{y, z\} \} = 2.$$

Поскольку третье равенство не удовлетворяет условию (ПЗ.10), образуем

$$\{K_3^{\text{S}}\} = \{y, z, z'\} \quad \text{и} \quad \{D_1^{\text{S}}\} = \{y, z, z'\}.$$

Примечание. Не следует принимать $\{K_3^{\text{S}}\} = \{y', z\}$ и $\{D_1^{\text{S}}\} = \{y, z'\}$, чтобы сохранились два первые равенства.

Тогда имеем

$$\text{card} \{ \{K_3^{\text{S}}\} \cap \{D_1^{\text{S}}\} \} = 3,$$

т. е. условие (ПЗ.10) удовлетворено.

Для следующих пар множеств также проверим выполнение условия ПЗ.10:

$$\begin{aligned} \text{card} \{ \{K_{1 \text{ мин}}\} \cap \{D_{2 \text{ мин}}\} \} &= 1, \\ \text{card} \{ \{K_{2 \text{ мин}}\} \cap \{D_{2 \text{ мин}}\} \} &= 2, \\ \text{card} \{ \{K_{3 \text{ мин}}\} \cap \{D_{2 \text{ мин}}\} \} &= 1. \end{aligned}$$

Учитывая второе равенство, принимаем

$$\{D_{2 \text{ мин}}^S\} = \{x, z'\},$$

поскольку это не нарушает первого и третьего равенств. Тогда

$$\text{card} \{ \{K_{2 \text{ мин}}\} \cap \{D_{2 \text{ мин}}^S\} \} = 1.$$

Для последних трех пар множеств проверки выполнение условия ПЗ.10:

$$\begin{aligned} \text{card} \{ \{K_{1 \text{ мин}}\} \cap \{D_{3 \text{ мин}}\} \} &= 2, \\ \text{card} \{ \{K_{2 \text{ мин}}\} \cap \{D_{3 \text{ мин}}\} \} &= 1, \\ \text{card} \{ \{K_{3 \text{ мин}}\} \cap \{D_{3 \text{ мин}}\} \} &= 1. \end{aligned}$$

Учитывая первое равенство, принимаем

$$\{K_{1 \text{ мин}}^S\} = \{x, y, y'\} \text{ и } \{D_{3 \text{ мин}}^S\} = \{x, y, y'\},$$

поскольку это не нарушает второго и третьего равенств. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \{K_{1 \text{ мин}}^S\} &= \{x, y, y'\}, & \{D_{1 \text{ мин}}^S\} &= \{y, z, z'\}, \\ \{K_{2 \text{ мин}}^S\} &= \{x, z\} = \{K_{2 \text{ мин}}\}, & \{D_{2 \text{ мин}}^S\} &= \{x, z'\}, \\ \{K_{3 \text{ мин}}^S\} &= \{y, z, z'\}, & \{D_{3 \text{ мин}}^S\} &= \{x, y, y'\}. \end{aligned}$$

Эти множества удовлетворяют соотношению (ПЗ.10).

После осуществления структурной стандартизации дальнейшее рассмотрение идентично случаю 1.

Применим данную процедуру к примеру 4.

Имеем число простых имплицит $\pi=3$, число простых импликант $\delta=3$, а число переменных $b=5$ (т. е. x, y, z, y', z').

Проверим выполнение неравенства (ПЗ.11):

$$\pi + \delta = 6, \quad b + 1 = 6.$$

Неравенство (ПЗ.11) соблюдается, следовательно, применима процедура а).

Число вершин графа

$$v = \pi + 1 = 4,$$

а структурное число графа A равно

$$A = [xyy'][xz][yzz'].$$

Определяем производную

$$\frac{\partial A}{\partial [D_{2 \text{ мин}}^S]} = \frac{\partial A}{\partial \begin{bmatrix} x \\ z' \end{bmatrix}} = [yy'z] \text{ (первая вершина).}$$

Суммируем все $\{K_{j \text{ мин}}^S\}$, получаем

$$[xyy'] + [xz] + [yzz'] = [y'z'] \text{ (вторая вершина).}$$

Примем структурное число $\{K_{2 \text{ мин}}^S\} = [xz]$ в качестве структурного числа третьей вершины. Структурное число четвертой вершины — это сумма структурных чисел предыдущих трех вершин:

$$[yy'z] + [y'z'] + [xz] = [xyz'] \text{ (четвертая вершина).}$$

Граф переключающей цепи, реализующий заданную булеву функцию, изображен на рис. ПЗ.4.

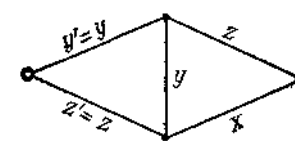


Рис. ПЗ.4.

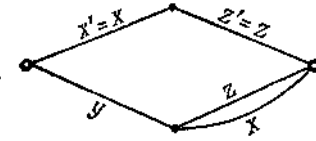


Рис. ПЗ.5.

Изменим стандартизацию, приведенную в примере 4, на следующую:

$$\begin{aligned} \{K_{1 \text{ мин}}^S\} &= \{y', y\}, & \{D_{1 \text{ мин}}^S\} &= \{y, z\}, \\ \{K_{2 \text{ мин}}^S\} &= \{x, z, x'\}, & \{D_{2 \text{ мин}}^S\} &= \{x, z, z', x'\}, \\ \{K_{3 \text{ мин}}^S\} &= \{y, z'\}, & \{D_{3 \text{ мин}}^S\} &= \{y, z'\}. \end{aligned}$$

В результате получим структурные числа вершин графа

$$[x'z'], [x'y], [xyz] \text{ и их сумму } [xzz'],$$

что соответствует последовательно-параллельной цепи рис. ПЗ.5. Приведенный метод синтеза переключающих цепей позволяет получить минимальные последовательно-параллельные и мостовые цепи.

Метод применим и для цепей со многими выходами.

Примеры геометрических изображений и обратных изображений структурных чисел

Порядковый номер	Структурное число	Геометрическое изображение	Обратное геометрическое изображение
1	$[\alpha]$		
2	$[\alpha_1, \alpha_2]$		
3	$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$		
4	$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$		
5	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_1 \\ \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix}$		
6	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2 \\ \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3 \end{bmatrix}$		
7	$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$		
8	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 \\ \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3 \\ \alpha_4, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_5 \end{bmatrix}$		
9	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3 \\ \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_4 \\ \alpha_5, \alpha_5, \alpha_5, \alpha_5, \alpha_1 \end{bmatrix}$		

2. Введение в геометрические методы моделирования

Введение

Задачи геометрического моделирования. Разделы математики, используемые в геометрическом моделировании, представляют собой главным образом **векторное и тензорное исчисление**; очевидно, что всегда **применяется информатика**, без помощи которой было бы невозможно вести разработки, требующие часто громадного количества вычислений как для определения **формы объекта**, так и для расчетов процессов, описываемых законами механики **непрерывных сред** или **динамики жидкостей**.

Было бы ошибочно рассматривать геометрическое представление объектов как чисто интеллектуальную операцию, так как оно всегда требует двумерного или очень часто трехмерного представления полученных результатов, необходимого для проведения исследований или, просто для того, чтобы служить основой эстетического восприятия.

Роль ЭВМ. Для выполнения геометрических алгоритмов требуется, чтобы ЭВМ имели специальные средства для вычисления координат точек, расположенных на траекториях, а также для осуществления таких геометрических операций, как переносы, повороты, изменения масштаба, построение различных видов проекций и сечений. При обработке материалов необходимо в реальном времени учитывать геометрические характеристики применяемого инструмента. Для предварительных расчетов координат точек поверхности, на которых осуществляется линейная интерполяция, и для вычисления направляющих косинусов нормали и их последующего использования требуется хранить в памяти ЭВМ большое количество чисел. Важной задачей является определение перемещения инструмента в реальном времени с учетом размеров обрабатываемого образца. Отсюда ясно, почему часто используется вычисление координат в реальном времени, применяемое в непосредственном числовом управлении исполнительными устройствами от чертежных устройств до металлорежущих станков.

Параметрические формы. Рассмотрим эволюцию основных математических методов, применяемых в геометрическом моделировании. Начиная с 1960 г., когда стало быстро нарастать число публикаций по

геометрическому моделированию, в большинстве работ использовалось декартово представление, казавшееся наиболее приемлемым для приложений. Однако затем получили признание методы, использующие параметрическое представление, во-первых, они обладают большой гибкостью, а, во-вторых, выполнение поворотов естественным образом приводит декартово представление к параметрическому.

Разнообразие задач и решений. Методам геометрического моделирования посвящено громадное число работ — подробный список литературы содержит бы тысячи названий. Чтобы представить себе их полный объем, можно рассмотреть типы решаемых задач, имеющих существенные различия.

В первую очередь следует представить объекты, которые по традиции описываются с помощью прямых и окружностей. Разработаны квазиобобщенные методы подобного описания, однако некоторые приемы сопряжения имели недостаточно строгое обоснование.

Затем следует остановиться на **методах определения формы объектов, основанных на многократной последовательной подгонке**. Условия эксплуатации подобных объектов требуют строгих и однозначных методов решения таких задач; в качестве примера можно привести расчеты корпусов судов и скоростных транспортных средств: самолетов, поездов, автомобилей.

Предметом обработки могут служить также объекты, основным назначением которых является удовлетворение эстетических требований, сформулированных либо самим разработчиком, либо теми, кто имеет к этому отношение. В подобных случаях могут быть использованы ранее полученные решения с небольшими уточнениями, но разработчик может также выразить свои требования с помощью машинных инструкций в цифровой форме. В ряде работ показана возможность выражения эстетических свойств математическими средствами через изменение кривизны. Эта попытка тем более похвальна, что заранее ясна ее безнадежность: **нельзя надеяться, что она позволит установить критерий, который во всех случаях заменит человеческое суждение.**

Наконец, **существуют поверхности, от которых требуется, чтобы они содержали определенное число фиксированных точек и были непрерывны, что приводит к неопределенности формулировки задачи и внесению элементов субъективности в ее решение.** Для таких случаев можно провести аналогию с задачами топографии, когда требуется провести изолинии, проходящие через точки,

координаты которых были предварительно определены на поверхности.

Очевидно, что условия **четырех предыдущих задач весьма различны**, поэтому не стоит удивляться разнообразию предлагаемых решений. Тем более, что использование возможностей информатики может только увеличить число вариантов.

Области применения. Можно без преувеличения сказать, что появление САПР привело к радикальному изменению основ промышленного производства, которое на протяжении многих веков развивалось скорее путем совершенствования средств, чем основных принципов. Плотники наносили свои чертежи на землю строительных площадок, каретники — на стены своих мастерских, греческие каменотесы — на стены храмов и памятников в процессе их возведения.

На смену чувствительной к влаге бумаге пришли материалы из пластмассы и лакированного железа; карандаш был заменен золотым граверным резцом, а лекала из грушевого дерева — гибкими рейками из материалов, полученных в результате достижений органической химии; для изготовления моделей теперь вместо ценных пород дерева применяются пластмассы, так как свойства деревянных моделей не были вполне удовлетворительными, несмотря на специально предпринимаемые меры; разработаны совершенные оптические устройства для точного воспроизведения контуров на алюминиевых листах; но при этом остаются неизменными подходы описательной геометрии, разработанные в начале 19-го века.

Разработчики принципиально новых технических средств отдают себе отчет в том, что они создают гораздо более дорогостоящую аппаратуру, чем раньше (при использовании традиционных методов). Угломер, линейка, циркуль, лекало, рейсмус, ножницы, зубило, стамеска, шабер, напильник, штангенциркуль, транспортир, отвес уступили место системам автоматического регулирования, программно-управляемой аппаратуре и лежащим в их основе ЭВМ.

Не вызывает сомнения, что почасовая стоимость работы автоматизированного оборудования оказывается весьма высока, и невозможно заранее предсказать, что пропорционально ей уменьшится время разработки новых изделий, неразрывно связанное с трудностями организации производства. При разработке новых моделей автомобилей, кораблей или самолетов, кроме всего прочего, приходится рассчитывать на добрую или недобрую волю операторов, а также других работников всех рангов, которых еще требуется убедить посвятить себя служению машине, разрушающей старые привычные представления. Очевидно также, что для организации промышленного

производства необходимо тщательно взвесить и финансовые возможности. Часто трудно удержать равновесие между **смелостью и хладнокровием**.

Терминология. Научный и технический язык, в особенности если он относится к таким современным областям как электроника и информатика, часто использует слова англосаксонского происхождения.

Выше уже говорилось о том, что к настоящему времени опубликовано очень большое число работ, посвященных математическим свойствам кривых и поверхностей. Многие из них представляют собой шаг вперед в изучении свойств параметрических пространств, но все они пока еще не в полной мере нашли применения в индустриальном мире. По этому поводу иногда шутят, что существуют проблемы, для которых еще не найдено решение, но каждое решение рано или поздно находит свою задачу. При изложении материала мы ограничились наиболее типичными и часто используемыми решениями. Основные идеи решения проблем моделирования и полученные результаты представляются нам более важными, чем изложение полных математических выкладок, которые уже приведены в литературе.

2.1. Основы графического представления информации

2.1.1. Введение

Одним из технических средств геометрического моделирования являются интерактивные методы графического представления информации. При их разработке используются определенные математические знания, в частности умение вычислять некоторые величины (расстояния, площади и т. д.), осуществлять переход от одного пространства к другому (от реального пространства к пространству экрана дисплея, от трехмерного пространства к двумерному), выполнять геометрические преобразования, создавать математические модели на основе геометрических свойств объектов.

После краткого введения в основы матричной алгебры в этом разделе будут рассмотрены математические методы, с помощью которых выполняются:

- основные операции машинной графики (пространственные преобразования, нормировка и т.д.);

- преобразования на плоскости, определение расстояний, периметров и т. д. в двумерном пространстве;
 - геометрические и перспективные преобразования, определение пересечений объектов и т. д. в трехмерном пространстве.
- Кроме того, кратко изложены методы, с помощью которых создаются математические модели геометрических объектов.

Основные сведения из матричной алгебры

Матрица представляет собой таблицу вида

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & x_{p3} & \dots & x_{pn} \end{pmatrix},$$

состоящую из p строк и n столбцов. Элементы матрицы обозначаются x_{ij} , где i -номер строки, j -номер столбца.

Матрицу, состоящую из одной строки или одного столбца, будем называть вектором, например:

$$V = |v_1 \quad v_2 \quad v_3 \dots v_n| - \text{вектор-строка},$$

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_p \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец}.$$

Матрицы, состоящие из p строк и n столбцов, образуют векторное пространство размерностью pn . Базис пространства образуют матрицами E_{ij} , единственный отличный от нуля (и равный 1) элемент которых находится на пересечении i -й строки и j -го столбца. Любую матрицу можно разложить по базису:

$$X = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_{ij} E_{ij}.$$

Матрицей X' , транспонированной по отношению к X , называют матрицу, для каждого элемента которой x_{ij} справедливо соотношение

$$x'_{ij} = x_{ji} \text{ для } i = (1, \dots, p), j = (1, \dots, n).$$

Матрица, для которой $X' = X$, называется симметричной. Матрица, для которой $X' = -X$, называется антисимметричной. Две матрицы X размерностью (p, n) и Y размерностью (s, t) равны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} p = s & \forall i \in (1, p), \\ n = t & \forall j \in (1, n), \quad x_{ij} = y_{ij}. \end{cases}$$

Сумма двух матриц $W = X + Y$, имеющих одинаковое число строк p и столбцов n , определяется следующим образом:

$$\forall i \in (1, p), \quad \forall j \in (1, n), \quad w_{ij} = x_{ij} + y_{ij}.$$

(Вычитание определяется аналогично.)

Произведение $W = X \cdot Y$ матрицы X , имеющей p строк и n столбцов, на матрицу Y , имеющую n строк и m столбцов, определяется по следующему правилу:

$$\forall i \in (1, p), \quad \forall j \in (1, m), \quad w_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik} y_{kj}.$$

Произведение $W = s \cdot X$ скаляра s на матрицу X определяется выражением

$$\forall i \in (1, p), \quad \forall j \in (1, n) \quad w_{ij} = s \cdot x_{ij}.$$

Напомним еще несколько важных свойств матриц:

- произведение матриц обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности справа и слева по отношению к сложению;
- для двух матриц X размерностью (p, n) и Y размерностью (s, t) произведение $X \cdot Y$ существует, если $n = s$.

Основные сведения об однородных координатах

Объект из n -мерного пространства может быть представлен в $n+1$ -мерном пространстве. При переходе от n -мерного к $n + 1$ -мерному пространству каждому объекту O может быть поставлено в соответствие бесконечное число его представлений O' . Однородные координаты представляют собой один из способов такого перехода, когда добавляется одна дополнительная координата (называемая масштабным фактором) так, что

- представление в трехмерном пространстве двумерного вектора (x, y) , соответствующего, например, точке на плоскости, задается следующими координатами:

$$(sx, sy, s),$$

где s - ненулевой скаляр;

- представление 3-мерного вектора (x, y, z) , соответствующего, например, точке в пространстве, в 4-мерном пространстве задается следующим образом:

$$(sx, sy, sz, s),$$

где s - ненулевой скаляр.

В однородных координатах компоненты вектора (a, b, c) при его проекции на плоскость и вектора (a, b, c, d) при проекции на трехмерное пространство определяются соответственно

$$(a/c, b/c)$$

и

$$(a/d, b/d, c/d).$$

Строго математически скаляр s при переходе от n -мерного к $n+1$ -мерному пространству выбирается произвольно при единственном условии - он должен быть отличен от нуля. Однако при использовании численных методов могут возникнуть некоторые другие ограничения:

- Результатом преобразования должны быть числа, которые могут быть использованы в качестве координат. Например, если устройство отображения работает только с целыми числами (или по любой другой причине необходимо работать только с ними), для произвольного s , например $s = 1$, нельзя представить точку с координатами $(0,5; 0,1; 2,5)$. Однако при разумном выборе s можно достичь того, что однородные координаты будут целыми числами. В частности, если для приведенного случая взять $s=10$, однородные координаты точки становятся целыми $(5, 1, 25, 10)$.
- Результаты преобразования не должны приводить к арифметическому переполнению. Оставаясь в представлении целых чисел и зная, что диапазон их значений в ЭВМ составляет $-2^{16} + 2^{16}$, для преобразования точки с координатами $(80000, 40000, 1000)$ можно выбрать, например, значение параметра $s = 0,1$.

2.1.2. Двумерное пространство (плоскость)

Вычисления в плоскости не представляют труда и основаны на понятиях планиметрии и аналитической геометрии. Мы ограничимся напоминанием основных сведений, рассмотрим примеры вычислений в ортонормированном базисе и проанализируем свойства рассматриваемых алгоритмов.

Основные операции

Преобразование координат пространства в координаты экрана дисплея

Одна из особенностей геометрического моделирования состоит в том, что оно позволяет пользователю работать в своем собственном пространстве, не заботясь о последующем представлении информации на экране. Для связи пространств пользователя и экрана в них выделя-

юся окна прямоугольной формы, края которых параллельны координатным осям. Переход от одного пространства к другому состоит в определении соотношения между точками с координатами (X_{π}, Y_{π}) в окне пользователя и $(X_{\varepsilon}, Y_{\varepsilon})$ в окне экрана (рис. 1).

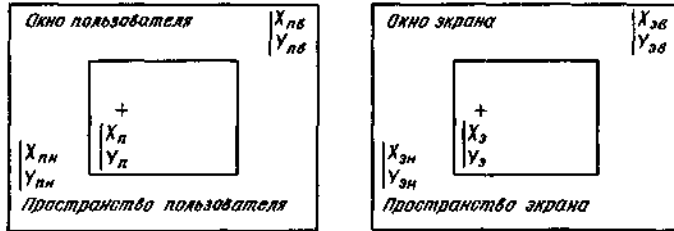


Рис. 1. Окно пользователя и окно экрана.

Окно пользователя определяется координатами нижнего левого $(X_{\pi л}, Y_{\pi л})$ и верхнего правого $(X_{\pi в}, Y_{\pi в})$ углов, окно экрана – аналогично $(X_{\varepsilon л}, Y_{\varepsilon л})$ и $(X_{\varepsilon в}, Y_{\varepsilon в})$

Из очевидных соотношений

$$\frac{X_{\varepsilon} - X_{\varepsilon л}}{X_{\varepsilon в} - X_{\varepsilon л}} = \frac{X_{\pi} - X_{\pi л}}{X_{\pi в} - X_{\pi л}}, \quad \frac{Y_{\varepsilon} - Y_{\varepsilon л}}{Y_{\varepsilon в} - Y_{\varepsilon л}} = \frac{Y_{\pi} - Y_{\pi л}}{Y_{\pi в} - Y_{\pi л}}$$

легко получаем выражения для связи координат

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon} &= AX_{\pi} + B, & Y_{\varepsilon} &= A'Y_{\pi} + B' & \text{и} \\ X_{\pi} &= CX_{\varepsilon} + D, & Y_{\pi} &= C'Y_{\varepsilon} + D'. \end{aligned}$$

Поиск пересечений

Пересечения плоских объектов находятся с помощью правил аналитической геометрии на плоскости. Рассмотрим в качестве примера пересечение двух прямых, заданных уравнениями:

$$\begin{aligned} AX + BY + C &= 0, \\ A'X + B'Y + C' &= 0. \end{aligned} \quad (1)-(2)$$

Очевидно, надо решить простую систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Сначала вычислим определитель

$$DET = AB' - BA'.$$

Если $|DET| < EPS$, прямые считаются параллельными (EPS - очень малая величина), в противном случае координаты точки пересечения определяются выражениями

$$\begin{aligned} X_{INT} &= (C'B - CB')/DET, \\ Y_{INT} &= (CA' - AC')/DET. \end{aligned}$$

Замечание. Использование однородных координат позволяет решить задачу в общем виде, охватывающем случай параллельных прямых. Действительно, запишем уравнения (1) и (2) в виде

$$\begin{aligned} AX + BY + CW &= 0, \\ A'X + B'Y + C'W &= 0. \end{aligned}$$

Точку пересечения этих прямых можно представить в виде вектора (с точностью до постоянного множителя W/DET , несущественного в однородных координатах)

$$P = ((C'B - CB'), (CA' - AC'), (AB' - BA')).$$

Точке, находящейся на бесконечности, будет соответствовать третья координата, равная нулю.

Пересечение окружности C с известными координатами центра (X_c, Y_c) и радиусом R и прямой D . Запишем уравнения окружности и прямой в виде

$$\begin{aligned} (X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 &= R^2, & (3) \\ AX + BY + C &= 0. & (4) \end{aligned}$$

Проверим сначала, существует ли хотя бы одна точка пересечения. Для этого расстояние от центра окружности до прямой должно быть меньше или равно радиусу окружности:

$$\frac{AX_c + BY_c + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \leq R.$$

Если это условие выполняется, для решения задачи достаточно решить систему уравнений (3) и (4). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} DELTA &= \sqrt{R^2(A^2 + B^2) - (AX_c + BY_c + C)^2}, \\ T_1 &= BX_c - AY_c + DELTA, \\ T_2 &= BX_c - AY_c - DELTA. \end{aligned}$$

Тогда для двух решений имеем

$$\begin{cases} X_1 = (BT_1 - AC)/(A^2 + B^2), \\ Y_1 = (-AT_1 - BC)/(A^2 + B^2); \\ X_2 = (BT_2 - AC)/(A^2 + B^2), \\ Y_2 = (-AT_2 - BC)/(A^2 + B^2). \end{cases}$$

Пересечение двух окружностей, заданных координатами центров (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) и радиусами R_1 и R_2 . Сначала необходимо проверить, что окружности не являются концентрическими (т. е. расстояние между их центрами больше EPS). После этого находим выражение для радикальной оси окружностей и задача сводится к предыдущему случаю: отыскиваются точки пересечения (если они существуют) радикальной оси и одной из окружностей. Радикальная ось двух окружностей представляет собой геометрическое место точек,

из которых можно провести касательные одинаковой длины к этим окружностям. Если уравнения окружностей имеют вид $X^2 + Y^2 + A_i X + B_i Y + C_i = 0$, где $i = 1, 2$, то уравнение радикальной оси имеет вид $(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)Y + (C_1 + C_2) = 0$.

Замечание 1. Обычно предметом поиска являются точки пересечения отрезков и дуг, поэтому необходимо проверять, что найденные точки пересечения прямых и окружностей принадлежат рассматриваемым отрезкам и дугам.

Замечание 2. Примеры, приведенные выше, иллюстрируют лишь используемые методы. При рассмотрении аналогичных геометрических свойств и понятий аналитической геометрии в трехмерном пространстве мы к подобным примерам возвращаться больше не будем.

Поиск решения при наличии ограничений

В большинстве двумерных систем в задачах с ограничениями отыскиваются точки, окружности или дуги окружностей, прямые или отрезки прямых и реже кривые. В качестве примера можно привести задачу отыскания отрезка, касательного к двум заданным окружностям. Задача может не иметь решения, или можно найти 2 или 4 отрезка, удовлетворяющих ее условию. Неоднозначность устраняется за счет дополнительной информации, например задания точки, вблизи которой должен пройти отрезок.

Задача с ограничениями в общем виде может быть определена так: (тип искомого объекта) (список ((ограничений) (элементов, на которые распространяются ограничения))).

Решение такого типа задач сводится, вообще говоря, к решению довольно сложных систем уравнений. Однако решение удается упростить сведением его к определенным частным случаям. Таким образом, можно предложить два общих метода решения этой задачи.

Решение системы уравнений

Метод состоит в том, что, исходя из ограничений, элементов, на которые действуют ограничения и, возможно, параметров, составляют систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Затем находят решения системы, из которых отбирают нужное (см. далее). Преимуществом метода является его общность, существенным недостатком - возможная неэффективность решения в общем виде.

Сведение к частным случаям

Попытаемся в отличие от предыдущего каждую возникающую систему уравнений решить для частного случая. Существенный недостаток такого подхода заключается в том, что добавление нового ограничения или нового элемента требует отдельного решения одной или нескольких систем (и соответственно составления одной или нескольких подпрограмм). Преимущество состоит в том, что не требуется использовать сложных методов решения и, овладев соответствующими навыками, решение любой задачи можно находить, сводя ее к частным случаям. С точки зрения вычислительной техники такой подход ценен тем, что позволяет создать библиотеку алгоритмов. Приведем два примера, которые иллюстрируют достоинства такого подхода.

Проведем окружность C_3 , касательную к двум окружностям C_1 и C_2 с координатами центров (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) и радиусами R_1 и R_2 . В частных случаях возможные центры окружности C_3 определяются как точки пересечения окружностей, концентрических с окружностями C_1 и C_2 и с радиусами:

$$\begin{aligned} &R_1 + R \text{ и } R_2 + R, \\ &R_1 + R \text{ и } |R_2 - R|, \\ &|R_1 - R| \text{ и } |R_2 - R|, \\ &|R_1 - R| \text{ и } R_2 + R, \end{aligned}$$

где R -радиус касательной окружности. (Ограничение заключается в том, что решение следует искать не на всем множестве точек плоскости, а на более узком множестве точек, лежащих на концентрических окружностях с приведенными радиусами.)

Отметим, что центры касательных окружностей расположены на расстояниях $R_1 + R$ или $|R_1 - R|$ от центра окружности C_1 и $R_2 + R$ или $|R_2 - R|$ от центра окружности C_2 .

Из геометрических соображений, используя аналогичные рассуждения, можно сделать вывод, что, например, окружность, касательная к трем непараллельным прямым, имеет центр на пересечении трех внутренних биссектрис и что ее радиус равен расстоянию от этой точки до любой из этих прямых.

Замечание. Можно упростить вычисления, если использовать преобразования, рассмотренные в следующем разделе. Можно, например, выбрать такой базис, в котором начало координат является одной из выделенных точек (центром одной из окружностей).

2.1.3. Вычисление периметров и площадей

Эти вычисления выполняются без труда для фигур, представляющих собой многоугольники. Из графических представлений легко получить правила вычислений. Пусть имеется замкнутый многоугольник с N вершинами (последняя вершина совмещена с первой). Обозначим через x_i, y_i координаты i -й вершины. Тогда можно показать, что периметр P и площадь A вычисляются по следующим формулам:

$$P = \sum_{i=1}^{N-1} [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]^{1/2},$$

$$A = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + x_N y_1 - x_1 y_N \right].$$

(Знак числового значения площади зависит от направления обхода точек. В правой системе координат (ось абсцисс - вправо, ось ординат - вверх) положительный знак возникает при обходе против часовой стрелки. Использование отрицательных площадей часто бывает полезным.)

Замечание. Приведенные формулы применимы только к многоугольникам. Если необходимо вычислить периметр или площадь другой фигуры, ограниченной более сложной кривой (например, отрезками и дугами), то приведенными формулами легко воспользоваться для приближенных вычислений после замены произвольного контура многоугольником. Точность результата будет зависеть от степени приближения многоугольника к заданной фигуре. При необходимости можно произвести точные вычисления (используя другие методы).

2.1.4. Геометрические преобразования на плоскости

Геометрические преобразования используются для перемещения и модификации объектов. Преобразования представлены в матричном виде с использованием приведенных выше сведений об однородных координатах. Последние необходимы еще и потому, что без них трудно обойтись при описании преобразования переноса.

Геометрическое преобразование, примененное к объекту или совокупности объектов, может быть композицией (последовательностью) нескольких преобразований. Для его описания будем использовать матрицу, представляющую собой произведение матриц более простых преобразований (что является следствием ассоциативности матричного умножения).

Основные преобразования следующие:

- преобразование переноса на вектор T ;
 - преобразование поворота относительно начала координат на угол a ;
 - преобразование масштаба на вектор E (умножение координат объекта на координаты вектора E).
- Рассмотрим математические выражения для основных преобразований (исходный объект - вектор $P(x, y)$ - преобразуется в вектор $P'(x', y')$. (Далее P и P' понимаются как векторы-строки.)
- Преобразование переноса на вектор $T(t_x, t_y)$:

$$P' = P + T,$$

при этом

$$\begin{cases} x' = x + t_x, \\ y' = y + t_y. \end{cases}$$

Легко показать, что в однородных координатах матрица, описывающая это преобразование, имеет вид

$$M(T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{vmatrix},$$

а преобразование вектора $P(x, y, 1)$ в вектор можно $P'(x', y', 1)$ записать в виде

$$P' = PM(T).$$

- Преобразование поворота относительно начала координат на угол a . Координаты преобразуются по следующему правилу:

$$P' = \begin{cases} x' = x \cos a - y \sin a, \\ y' = x \sin a + y \cos a. \end{cases}$$

Отсюда легко получается матрица преобразования:

$$M(R(a)) = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матричная запись преобразования:

$$P' = PM(R(a)).$$

- Преобразование масштаба на вектор $E(e_1, e_2)$. Правила преобразования координат:

$$x' = e_1 x, \quad y' = e_2 y.$$

Матрица преобразования:

$$M(E) = \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матричная запись преобразования:

$$P' = PM(E).$$

Цепочка преобразований

Более сложные преобразования можно определить как цепочку основных преобразований, примененных последовательно. Матрицу сложного преобразования будем искать в виде произведения матриц преобразований, составляющих цепочку.

Предположим, что к объекту применяется преобразование переноса на вектор $T(t_x, t_y)$, а затем преобразование поворота относительно начала координат на угол a . Выполним сначала перенос, обозначив результат через P' :

$$P' = PM(T).$$

Затем выполним поворот, обозначив результат через P'' :

$$P'' = P'M(R(a)).$$

Окончательно получаем

$$P'' = PM(T)M(R(a)).$$

Воспользуемся свойством ассоциативности матричного умножения и выполним сначала умножение матриц $M(T)$ и $M(R(a))$. Результат будет представлять собой матрицу полного преобразования:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ t_x \cos a - t_y \sin a & t_x \sin a + t_y \cos a & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

По аналогии с приведенными здесь рассуждениями можно определить матрицу любого сложного преобразования, состоящего из цепочки основных преобразований.

Пример 1. Определить матрицу преобразования, соответствующего повороту на угол a относительно точки $C(x_c, y_c)$.

Для решения этой задачи сначала отметим, что такое преобразование можно осуществить в три этапа:

- 1) преобразование переноса на $-C$ для того, чтобы совместить центр поворота с началом координат (так как нам известна матрица преобразования поворота только относительно начала координат);
- 2) преобразование поворота на угол a относительно начала;
- 3) преобразование переноса на C для возвращения центра поворота в прежнее положение.

Полное преобразование будет иметь вид

$$P' = P \cdot M(T(-C)) \cdot M(R(a)) \cdot M(T(C)) =$$

$$= P \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -C_x & -C_y & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= P \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -C_x & -C_y & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= P \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ -C_x \cos a + C_y \sin a + C_x & -C_x \sin a - C_y \cos a + C_y & 1 \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Определить матрицу, соответствующую преобразованию гомотетии с центром в точке $C(C_x, C_y)$ и масштабом $R(R_x, R_y)$.

Задача решается аналогично предыдущему случаю, так как нам уже известна матрица центральной гомотетии (изменение масштаба относительно начала координат). Требуемое преобразование получается путем выполнения следующей цепочки основных преобразований:

- 1) преобразование переноса на $-C$ для совмещения центра гомотетии с началом координат;
- 2) преобразование масштаба на вектор R ;
- 3) преобразование переноса на C для возвращения центра гомотетии в прежнее положение.

2.1.5. Геометрические преобразования в трехмерном пространстве

Геометрические преобразования в трехмерном пространстве осуществляются так же, как и на плоскости. Таким же образом определяются основные преобразования, и матрицы сложных преобразований получаются умножением соответствующих простых матриц.

Описание преобразований в трехмерном пространстве немного сложнее, чем для плоскости. Например, преобразование произвольного поворота представляется в виде комбинации преобразований поворотов относительно трех осей. Как и в плоскости, определим три основных преобразования, включающие преобразование поворота, которое в свою очередь состоит из трех последовательных преобразований.

Основные преобразования:

- преобразование переноса на вектор T ;

- преобразования поворотов вокруг оси X на угол a , вокруг оси Y на угол b , вокруг оси Z на угол c ;
 - преобразование масштаба.
- Матрицы основных преобразований легко получить из следующих определений:

- Матрица преобразования переноса на вектор $T(t_x, t_y, t_z)$:

$$M(T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{vmatrix}.$$

- Матрицы преобразования поворота (углы показаны на рис. 2):

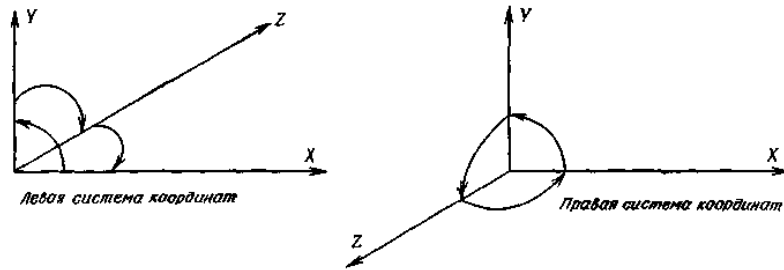


Рис. 2. Углы поворотов в трехмерном пространстве.

Матрица преобразования поворота относительно оси X на угол a :

$$M(R(x, a)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица преобразования поворота относительно оси Y на угол b :

$$M(R(y, b)) = \begin{vmatrix} \cos b & 0 & -\sin b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица преобразования поворота относительно оси Z на угол c :

$$M(R(z, c)) = \begin{vmatrix} \cos c & \sin c & 0 & 0 \\ -\sin c & \cos c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица преобразования масштаба на вектор $E(e_x, e_y, e_z)$:

$$M(E) = \begin{vmatrix} e_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Цепочка преобразований

Более сложные преобразования описываются так же, как и для плоскости. Предположим, например, что требуется выполнить преобразование поворота относительно оси X на угол a с последующим преобразованием переноса на вектор $T(t_x, t_y, t_z)$. Матрица полного преобразования равна произведению матриц его составляющих:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{vmatrix}.$$

В следующем примере показано, что также просто получить матрицу, описывающую «классическое» геометрическое преобразование из матриц основных преобразований.

Пример. Осуществить преобразование поворота относительно произвольной прямой d на угол c .

Для решения задачи прямую удобнее всего задать в параметрической форме через точку P , лежащую на прямой, и единичный вектор направления V (если прямая задана в другой форме, достаточно ее привести к параметрической). Этапы решения следующие:

- 1) преобразование переноса на $-P$ для того, чтобы прямая проходила через начало координат;
- 2) преобразования поворотов на угол a относительно оси X , затем на угол b относительно оси Y . Углы a и b выбираются так, чтобы прямая d после поворотов совпала с осью z (рис. 3);

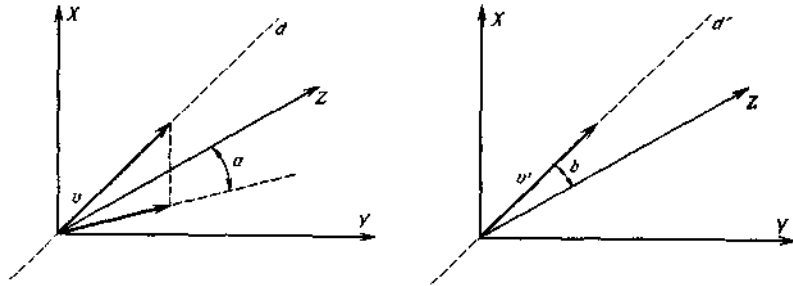


Рис. 3. Поворот вокруг произвольной прямой.

- 3) преобразование поворота относительно оси Z на угол c ;
- 4) преобразования поворотов на угол $-b$ относительно оси Y и на $-a$ относительно оси X;
- 5) преобразование переноса на P.

Замечание. Единственная трудность состоит в определении углов a и b . Для вычисления угла a можно воспользоваться соотношениями

$$\cos a = \frac{V_z}{(V_y^2 + V_z^2)^{1/2}} = \frac{V_z}{D},$$

$$\sin a = \frac{V_y}{(V_y^2 + V_z^2)^{1/2}} = \frac{V_y}{D}.$$

Отсюда матрица преобразования поворота для данного случая (из общего вида матрицы преобразования поворота относительно оси X) имеет вид

$$M(R(x, a)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_z/D & V_y/D & 0 \\ 0 & -V_y/D & V_z/D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для определения угла b найдем сначала, как преобразуется единичный вектор V после поворота на угол a относительно оси X:

$$V' = (V_x \ V_y \ V_z \ 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_z/D & V_y/D & 0 \\ 0 & -V_y/D & V_z/D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (V_x \ 0 \ D^2/D \ 1) = (V_x \ 0 \ D \ 1).$$

Отсюда получаем выражение для угла b

$$\cos b = D, \quad \sin b = -V_x$$

и для матрицы преобразования поворота на угол b относительно оси Y

$$M(R(y, b)) = \begin{vmatrix} D & 0 & V_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -V_x & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.1.6. Параллельные и перспективные проекции

В геометрическом моделировании применяются параллельные проекции, а перспективные обычно используют художники и архитекторы для изображения общих планов. Черчение с применением перспективных проекций более или менее сложных объектов довольно трудоемко, но использование вычислительной техники позволяет упростить эту процедуру. С помощью вычислительных устройств удалось коренным образом изменить саму постановку проблемы. Средства графических систем позволяют «видеть» объект в перспективе, легко исключая или представляя невидимые элементы изображения.

Перед пользователями графических систем в этом плане стоит следующая задача: необходимо представить реальный трехмерный объект на устройстве, имеющем двумерную поверхность отображения (экран, чертеж). Решение ее состоит в получении проекции трехмерного объекта на плоскость.

Ниже показано, что получение проекции объекта математически можно описать как преобразование. Поскольку речь пойдет о перспективных и других преобразованиях, напомним некоторые их свойства. Перспективную проекцию можно представить как последовательность двух преобразований: перспективного преобразования, которое преобразует трехмерное пространство в трехмерное, и следующего за ним преобразования - проектирования на двумерную плоскость (например, экран) для получения требуемого вида объекта.

На рис. 4 приведена классификация типов плоских проекций, используемых в графических системах.

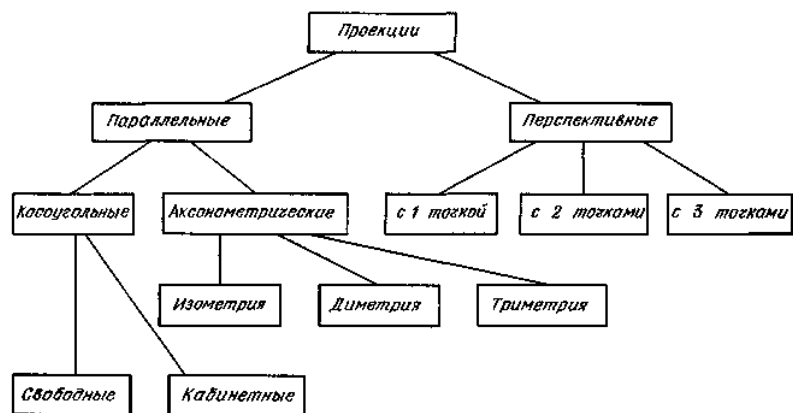


Рис. 4. Типы плоских проекций.

Итак, различают перспективные и параллельные проекции. Для получения перспективной проекции необходимо определить точки пересечения плоскости проекции с прямыми, исходящими из центра проектирования и проходящими через все точки объекта.

Параллельная проекция определяется аналогично, за исключением того, что центр проектирования находится на бесконечности (все прямые параллельны).

Аксонметрической проекцией называется параллельная проекция, у которой порождающие прямые перпендикулярны плоскости проекции. В противном случае имеем косоугольную проекцию.

Среди аксонметрических проекций различают:

- **изометрию:** в плоскости проекции углы между каждой парой осей равны;
- **диметрию:** в плоскости проекции равны между собой два угла между осями;
- **триметрию:** в плоскости проекции все три угла между осями различны.

Для косоугольных проекций проектирующие прямые составляют с плоскостью проекции угол, отличный от 90°. Различные типы косоугольных проекций характеризуются величиной этого угла. Выделяют два типа косоугольных проекций:

- **свободную проекцию:** угол между проектирующими прямыми и плоскостью проекции равен 45°;
- **кабинетную проекцию:** частный случай свободной проекции, в котором масштаб по третьей оси уменьшен в два раза.

При использовании перспективного проектирования стремятся получить такой вид изображаемого объекта, который наиболее реалистично отражал бы его, был бы возможно более близок к восприятию человеческим глазом. При этом используют различные типы перспективного проектирования в зависимости от выбранной поверхности изображения (плоскость, сфера, цилиндр).

Для описания преобразований проектирования, так же как и других геометрических преобразований, будем использовать матрицы, векторы и однородные координаты. Это позволит унифицировать изложение и упростить решение задач геометрического моделирования.

Рассмотрим матричные представления различных типов проекций.

Аксонметрические проекции

Аксонметрия является параллельной проекцией. Рассмотрим сначала ортографические проекции в плоскостях $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Матрицы преобразований проектирования для этих случаев легко выводятся из определений

$$M_{\text{орт}}(x = 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_{\text{орт}}(y = 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_{\text{орт}}(z = 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для ортографических проекций на плоскости $x = p$, $y = p$, $z = p$ необходимо применить еще преобразование переноса

$$M_{\text{орт}}(x = p) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Изометрия, диметрия и триметрия получаются комбинацией поворотов, за которыми следует проекция из бесконечности. Если нужно описать проекцию на плоскость $z = 0$, то сначала необходимо осуществить преобразование поворота на угол b относительно оси Y , затем на

угол a относительно оси X . Матрица, описывающая эти два преобразования, имеет вид

$$M = \begin{vmatrix} \cos b & 0 & -\sin b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos b & \sin b \cdot \sin a & -\sin b \cdot \cos a & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ \sin b & -\sin a \cdot \cos b & \cos a \cdot \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вместе с преобразованием проектирования на плоскость $z = 0$ окончательная матрица имеет вид

$$M' = M \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos b & \sin b \cdot \sin a & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & 0 & 0 \\ \sin b & -\sin a \cos b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Применим это преобразование к единичным векторам, направленным по осям X и Y :

$$U'_x = [1 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot M' = [\cos b \ \sin b \cdot \sin a \ 0 \ 0],$$

$$U'_y = [0 \ 1 \ 0 \ 1] \cdot M' = [0 \ \cos a \ 0 \ 0].$$

Диметрия характеризуется одинаковыми факторами искажения при преобразовании U'_x и U'_y в U'_x и U'_y , т.е.

$$U'_x = U'_y.$$

Отсюда

$$\cos^2 b + \sin^2 b \cdot \sin^2 a = \cos^2 a,$$

или

$$1 - \sin^2 b + \sin^2 b \sin^2 a = 1 - \sin^2 a,$$

$$\sin^2 b (\sin^2 a - 1) = -\sin^2 a,$$

и окончательно получаем для связи углов a и b

$$\sin^2 b = \frac{\sin^2 a}{1 - \sin^2 a}.$$

Таким образом, выбрав угол a , можно вычислить угол b и определить матрицу диметрической проекции.

Для получения изометрии необходимо взять одинаковые факторы искажения по всем трем осям

$$U'_x = U'_y = U'_z.$$

Из выражения для U'_z

$$U'_z = [0 \ 0 \ 1 \ 1] \cdot M' = [\sin b \ -\sin a \cdot \cos b \ 0 \ 1]$$

имеем еще одну связь между углами a и b

$$\cos^2 b + \sin^2 b \sin^2 a = \cos^2 a,$$

$$\sin^2 b + \sin^2 a \cos^2 b = \cos^2 a.$$

Преобразуя, как для предыдущего случая, получаем

$$\sin^2 b = \frac{\sin^2 a}{1 - \sin^2 a}, \quad \sin^2 b = \frac{1 - 2\sin^2 a}{1 - \sin^2 a}.$$

Отсюда

$$\sin^2 a = 1 - 2\sin^2 b, \quad \sin^2 a = 1/3,$$

$$\sin a = \sqrt{1/3}, \quad \sin^2 b = 1/2.$$

Косоугольные проекции

В косоугольных проекциях проектирующие прямые образуют с плоскостью проекции угол, отличный от 90° . Рассмотрим проекцию на плоскость XOY (рис. 5) и предположим, что P_x и P_y являются составляющими косоугольной проекции единичного вектора Z на эту плоскость, т.е. вектор $[0 \ 0 \ 1 \ 1]$ преобразуется в вектор $[P_x \ P_y \ 0 \ 1]$.

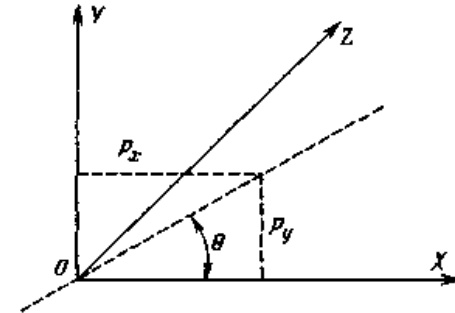


Рис. 5. Косоугольные проекции.

Матрица такого преобразования имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_x & P_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для свободной проекции $P_x = \cos 45^\circ$, $P_y = \sin 45^\circ$, а для кабинетной проекции $P_x = 1/2 \cos 45^\circ$, $P_y = 1/2 \sin 45^\circ$.

Перспективные проекции

Перспективную проекцию будем представлять в виде цепочки перспективного преобразования и преобразования проектирования на плоскость, предполагая, что проектирование осуществляется на плоскость $Z = 0$ (рис. 6).

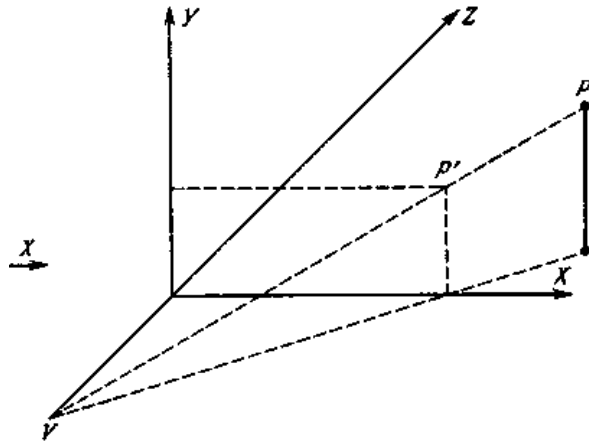


Рис. 6. Перспективные проекции.

В качестве точки проектирования выберем лежащую на оси Z точку $V(0, 0, v_z)$ и определим точки пересечения лучей, $P'(x', y', z')$ исходящих из точки проектирования и проходящих через все точки объекта $P(x, y, z)$ с плоскостью проекции $Z = 0$. Легко показать, что

$$x' = \frac{-v_z}{z - v_z} x, \quad y' = \frac{-v_z}{z - v_z} y$$

или

$$x' = \frac{1}{-z/v_z + 1} x, \quad y' = \frac{1}{-z/v_z + 1} y.$$

Матрица преобразования перспективного проектирования имеет вид:

$$M(P_{\text{перс}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что точка $(0, 0, 1, 0)$, расположенная на бесконечности на оси Z , преобразуется в точку $(0, 0, 1, -1/v_z)$, если к ней применить перспективное преобразование (без проектирования):

$$[0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1 \ -1/v_z],$$

или $[0 \ 0 \ -v_z \ 1]$. Отсюда следует, что любая прямая, параллельная оси Z , в результате такого преобразования будет проходить через точку

$[0 \ 0 \ -v_z \ 1]$. Эта точка называется точкой схода.

По аналогии можно рассмотреть еще две матрицы перспективного преобразования

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/v_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/v_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

для которых точки схода расположены соответственно на осях X с абсциссой $-1/v_x$ и Y с ординатой $-1/v_y$.

Рассмотренные перспективные преобразования являются преобразованиями с одной точкой схода. Можно рассматривать также перспективное преобразование с двумя точками схода, матрица которого содержит два ненулевых члена (кроме 1) в четвертом столбце:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/v_z \\ 0 & 1 & 0 & -1/v_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и с тремя точками схода, матрица которого имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/v_x \\ 0 & 1 & 0 & -1/v_y \\ 0 & 0 & 1 & -1/v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.7. Моделирование объектов

Геометрическое моделирование является важным средством математического моделирования, так как для многих приложений необходимо представлять геометрические свойства объектов. Следует отметить, что геометрическое моделирование в общем случае базируется в основном на структуре данных (блоки, ограничители, деревья) и очень редко на элементах математики. Исключение составляет представление кривых и поверхностей.

Отсутствие теории или слабое теоретическое обоснование ограничивает области применения моделирующих систем. Кроме того, одновременное использование объектов, смоделированных различным образом (например, твердых тел и поверхностей), для большинства систем часто приводит к неразрешимым противоречиям.

В данном главе изложены математические начала геометрического моделирования, за исключением способов представления кривых и

поверхностей. Затрагиваемые математические аспекты в общем довольно просты, важно уметь их использовать в реализуемых на ЭВМ алгоритмах. Дано только введение в математические проблемы без указания способов их реализации. Этим вопросам посвящены способы представления кривых и поверхностей, излагаемые ниже.

2.2. Кривые и поверхности

2.2.1. Основные зависимости

Первые работы, посвященные обработке кривых и поверхностей сложной формы, были выполнены, по-видимому, после 1942 г. совместно фирмами IBM и Bendix-Aviation и касались формы лопаток газовых турбин.

Затем к 1955 г. по программам АРТ была осуществлена двумерная обработка профилей, состоящих исключительно из отрезков прямых и дуг окружностей.

Это еще не была система автоматизированного моделирования геометрических объектов, так как речь шла только о том, чтобы реализовать вполне традиционными методами с помощью числовых команд известные зависимости.

«Аналитические» зависимости

За исключением исследований, проводившихся в авиационной промышленности США, большая часть работ, относившихся к автоматизированному моделированию геометрических объектов, имела целью обеспечить разработчиков и инженеров средствами черчения известных механических объектов исключительно традиционными методами — с помощью линейки и циркуля. Еще не стоял вопрос о решительном отказе от методов, имеющих тысячелетние традиции и берущих свое начало от архитекторов Вавилона, землемеров Александрии и каменотесов средних веков.

Таким образом, основными геометрическими телами были параллелепипеды, пирамиды, цилиндры и конусы вращения, сферы и торы, которые часто называются «аналитическими», однако вряд ли можно надеяться, что использование этого прилагательного получит одобрение у математиков.

Проблема состояла в объединении этих тел с помощью сложения или вычитания и в привлечении информатики для выполнения операций описательной геометрии, переносов, поворотов, сечений, наложений. Далее будут рассмотрены проблемы, которые возникают при определении сшивающих поверхностей и для решения которых

недостаточно только линейки и циркуля. В самом простом случае такими поверхностями являются **огibaющие сферы постоянного радиуса, которые обеспечивают плавное изменение касательной при переходе от одной сшиваемой поверхности к другой**. В более сложном случае радиус сферы может изменяться в определенных пределах, причем закон изменения радиуса отражает только искусство автора применяемого метода.

Экспериментальные зависимости

В большинстве случаев с помощью тел, называемых аналитическими, нельзя описать реальные геометрические объекты. На протяжении долгого времени выход из этого положения состоял в представлении объекта с помощью произвольно проведенных линий, взаимное сопряжение которых осуществлялось специалистами очень высокой квалификации: модельщиками, литейщиками, изготовителями штампов.

Для классификации подобных зависимостей трудно было подобрать подходящие определения. Использовались такие выражения, как поверхности двойной кривизны, поверхности переменной кривизны, искривленные поверхности. В англоязычной литературе использовались такие термины, как *space-curves*, *sculptured surfaces*, *twisted surfaces*, *free-form surfaces*.

На самом деле единственным общим свойством всех этих зависимостей является полное отсутствие какого бы то ни было предварительного математического определения, даже частичного, в результате чего решение задачи начиналось с выполнения последовательных шагов аппроксимации и заканчивалось вручную, каждый шаг подгонки основывался на результатах экспериментов или просто на указаниях дизайнера. Из-за недостатка информации такие зависимости иногда назывались «экспериментальными».

Несмотря на отмеченное выше общее свойство, назначение зависимостей могло быть совершенно различным: одни имели отношение к объектам из области техники, другие выполняли эстетические функции, третьи служили в основном для описания пространственных свойств объектов.

Зависимости, используемые в технике. О техническом изделии судят прежде всего по коэффициенту полезного действия, но, очевидно, нельзя пренебрегать и его себестоимостью. Коэффициент полезного действия может иметь самые разные выражения. Для балки, например, это соотношение допустимой нагрузки и массы использованного для ее изготовления бетона, для колеса турбины или реактора, винта корабля — отношение затраченной и полезной энергии, для транспортных

средств — самолета, ракеты, автомобиля, поезда, корабля— коэффициент трения.

Проблема состоит в математически точном воспроизведении формы изделия, исходя из координат многочисленных точек, расположенных на его поверхности, измеренных более или менее совершенными инструментами, начиная от рейсмуса и складного метра до самых совершенных приборов, например лазерных или фотограмметрических. Измерение наклонов касательных тоже может быть использовано для этой цели, однако оно не дает точности, сравнимой с измерением линейных координат.

Часто с помощью метода математического сглаживания удается выявить аномалии в значениях координат последовательных точек. Причинами их могут быть локальные выбросы, а также несовершенство изготовления макета. В этом случае небольшая коррекция результатов измерений, в результате которой достигается более совершенная математическая непрерывность, равносильна проведению более точных измерений на предыдущем этапе. Если попытаться выразить в цифрах требования к относительной точности, то можно назвать число 10^{-4} , или одну десятую миллиметра на метр, что на практике не всегда легко обеспечить. Для деталей, подвергающихся механическим напряжениям, эта величина может быть существенно увеличена, тем более, что вычисления деформаций методами механики сплошных сред не обеспечивают такой высокой точности.

Зависимости, определяемые эстетическими требованиями. Форма изделия, задуманная дизайнером, должна удовлетворять трем главным условиям, расположенным в порядке убывания важности, а именно:

1. Нравиться дизайнеру.
2. Нравиться генеральному директору и административному совету.
3. Нравиться потребителю.

Желательно, также, чтобы при этом производственные затраты не приводили к существенному увеличению себестоимости продукции. Требуемая точность изготовления должна быть порядка 10^{-3} , что соответствует 4 мм на полной длине легкового автомобиля или 0,5 мм на ширину сиденья. Эта точность вполне достижима, однако с точки зрения производства для обеспечения сборки деталей без дополнительных затруднений может возникнуть необходимость приведенную выше цифру разделить на четыре.

Зависимости, называемые «топографическими». Это определение было предложено для обозначения зависимостей, часто встречающихся в промышленном производстве. Для того чтобы применить законы планиметрии к географической карте, необходимо получить

координаты точек, расположенных на естественных линиях: линиях одинакового уровня, тальвегах, уровнях подъема воды и т. д. Затем их необходимо объединить наиболее точным образом, хотя после этого нельзя утверждать, что положение линий не может измениться, например, за счет процессов эрозии. Также и определенные механические детали, в частности выполненные из листового металла, должны, с одной стороны, состыковываться с соседними деталями, а с другой — не иметь точек соприкосновения или перекрытия с другими, подвижными или неподвижными элементами. В последнем случае нужно учитывать свободный ход подвижных элементов.

2.2.2. Схемы получения решений

Выше мы рассмотрели основные проблемы, которые возникают перед разработчиком модели математического объекта. Предложено множество путей их решения, что вполне естественно и свидетельствует об актуальности исследований. Наиболее типичные общепринятые решения будут приветны в других разделах и достаточно подробно, здесь же мы дадим только краткое описание идей.

Булевы комбинации

Сначала были разработаны системы, в которых основную роль играли геометрические тела, определенные выше как аналитические. Комбинируя затем эти простые базовые тела с помощью операций гомотетии, сложения и вычитания, находят пересекающиеся объемы, удаляют излишки материала в тех местах, где должны располагаться отверстия, пазы для шпонок, пустоты, облегчающие конструкцию. С помощью ЭВМ определяются и запоминаются линии пересечений, а затем и пределы движения инструментов при станочной обработке. При определении радиусов кривизны в зоне сшивки поверхностей приходится решать специальные проблемы, которые рассмотрены в последующих разделах.

Переход от классической к современной форме представления данных. Интерполяция

Когда хотят выразить в цифровой форме полученные ранее классические, т. е. принципиально не предназначенные для ЭВМ, данные, то, естественно, начинают с измерения координат точек, расположенных на поверхности, удаление которых друг от друга зависит от сложности воспроизводимого объекта. Следующий этап после преобразования данных в цифровую форму заключается в разработке **алгоритма, т. е. автоматической процедуры нахождения единственного решения на основе имеющихся данных.**

Решение отыскивается путем последовательного выполнения определенных элементов обработки. Сначала с помощью дуг кривых попарно соединяются соседние точки, затем находятся элементы поверхностей, соединяющие эти кривые, сохраняющие в местах сшивки непрерывность более или менее высокого порядка: непрерывность угла наклона касательной, кривизны, а иногда и градиента кривизны. На практике это достижимо только в идеальном случае. Алгоритм дает удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда обрабатываемые кривые являются достаточно гладкими, иначе решение может быть полностью ошибочным.

Теперь остается только определить дополнительные условия либо в форме дополнительных точек, через которые должны проходить найденные зависимости, либо в форме заданных касательных к уже известным точкам, либо, в более редких случаях, в форме заданных радиусов кривизны. Дополнительные условия могут определяться также и самим разработчиком.

Видно, что даже для случая интерполяции, когда отыскивается поверхность, проходящая через заданные точки, процедура далека от того, чтобы быть действительно алгоритмической. Начальные условия обработки сегмента поверхности могут зависеть от результатов обработки предыдущего сегмента; таким образом, малейшие искажения, внесенные в начале обработки, могут накапливаться и приводить к нежелательным последствиям. В некоторых системах этот недостаток устранен; в них обрабатываются кривые, разделенные на множество отрезков, без сохранения на их границах непрерывности тех или иных свойств (например, кривизны).

Алгоритмический метод может быть распространен и на поверхности. Наиболее известным примером является метод Кунса, но при этом, для того чтобы получить хороший результат, необходимо, вообще говоря, использовать неопределенную подгонку.

Прямой подход. Аппроксимация

Методы характеристических многоугольников и сеток часто называют аппроксимирующими, несмотря на то что в этих методах кривая или поверхность проходит точно через заранее заданные точки. Основное отличие этого метода от интерполяции заключается в том, что он дает необходимую свободу для применения векторных производных и определения кривизны линий и поверхностей.

Таким образом, для моделирования кривых и поверхностей не нужно увеличивать число опорных точек, что упрощает последующие вычисления и хранение данных. Очевидно, что промежуточные вершины характеристических многоугольников и сеток не

располагаются на моделируемых кривых и поверхностях, как и для интерполяционных систем, использующих векторные производные более или менее высокого порядка. Оптимальным был бы такой метод обработки, который сочетал бы интерполяцию предварительно определенной зависимости на редко расположенных точках с аппроксимацией для последующего уточнения результатов.

2.2.3. Условия, учитываемые при поиске решения

Ранее были показаны основные цели создания первых автоматизированных систем геометрического моделирования. Отметим их большое разнообразие и как следствие большое число и разнообразие предложенных решений. Тем не менее попробуем сформулировать некоторые общие понятия.

Разнообразие зависимостей

Для создания изображения многих геометрических объектов все еще используются только отрезки прямых и дуги окружностей и существуют системы, возможности которых этим и ограничиваются. С другой стороны, можно добиться значительного упрощения описания кривых, поверхностей и пространств, если использовать их параметрическое представление. В настоящее время существует много такого математического обеспечения, которое, за исключением очень частных случаев, не делает различия в обработке кривых и поверхностей, заданных как в «аналитическом» виде, так и в параметрическом.

Пространственные кривые

Многие чертежи выполняются с помощью плоских кривых и причины этого очевидны:

1. При восстановлении размеров объекта по имеющемуся макету удобно заблокировать одну из степеней свободы измерительного устройства, определяя, таким образом, координаты точек, расположенных в одной плоскости.

Это, разумеется, много проще, чем измерение размеров объекта от руки с помощью щупа вдоль определенной характерной линии, четкость локализации которой не всегда удовлетворительна. Кроме того, на точность измерений влияют положение источника освещения и даже угол зрения оператора.

2. Чертеж представляет собой одну проекцию, по которой можно сразу восстановить размеры объекта.

3. Пространственная кривая является пересечением двух цилиндров и имеет директрисы своих плоских проекций.

4. Пространственную кривую всегда можно разбить на большое число очень коротких отрезков дуг окружностей (или парабол), таких что различие между ними будет несущественно.

Однако такой подход обладает и недостатками:

1. Независимо от того, каким целям служат получаемые зависимости (техническим или эстетическим), исходным материалом для них служит воображение разработчика: оно формирует некий остов, состоящий из главных линий, которые редко бывают плоскими. Например, в одном случае это могут быть линии, описывающие динамические явления в жидкости, в другом — линии, описывающие общий вид разрабатываемого дизайнером объекта.

2. Перевод в цифровую форму зависимостей, построенных классическим образом, является дорогостоящей операцией, которая не всегда точно отражает намерения разработчика. Это в конечном итоге приводит к дополнительным дискуссиям, поправкам, задержкам и издержкам. В настоящее время существует большое число систем автоматизированного моделирования геометрических объектов, с помощью которых пользователь может точно выражать свои желания и намерения с помощью аппаратных, а главным образом программных средств.

3. Выполнение таких операций, как последовательные повороты, изменения масштаба или линейные преобразования с пространственной кривой, заданной с помощью своих проекций, является трудоемкой операцией и часто приводит к задержкам в выполнении работы.

В заключение отметим, что именно программное обеспечение выполняет геометрическую обработку объектов, построенных на основе прямых и окружностей и представленных в параметрическом виде.

Доступность

Использование систем автоматизированного моделирования геометрических объектов требует взаимодействия многочисленных специалистов различных направлений. При этом необходимо, чтобы системы автоматизированного моделирования геометрических объектов в целом и получение геометрических зависимостей в особенности были непосредственно доступны представителям всех специальностей. Для большинства из них нет необходимости в глубоком понимании свойств параметрических пространств и тем более в их доказательстве. Напротив, необходимо чтобы у них было интуитивное восприятие явлений, связанных с операциями над векторами, а не над коэффициентами, чтобы их профессиональные знания больше были связаны с геометрией, чем с анализом.

Несомненно, на широкое применение некоторых систем оказывает отрицательное влияние тот факт, что, несмотря на совершенство применяемых математических методов, у пользователей возникают трудности с их освоением.

Быстрота реакции

Когда системы автоматизированного моделирования геометрических объектов только начинали создаваться, основными областями применения систем автоматизированного моделирования геометрических объектов являлись управление и вычисления. Таким образом, необходима была тщательная подготовка для решения поставленных задач, проведение вычислений только тогда, когда становятся доступными соответствующие данные. Работы в этой области последовательно развивались, для представления результатов использовались такие формы, как чертежи, диаграммы или числовые таблицы.

Затем появилась возможность получать более точные результаты, однако она длительное время оставалась мало привлекательной для специалистов, которые накопили уже значительный опыт без машинного изготовления чертежей и выполнения операций описательной геометрии. Задержка была тем более долгой, что в то время существовала тенденция к территориальной и административной концентрации средств информатики, предлагалось даже обращаться к мощным вычислительным центрам, расположенным за границей. Все это приводило к тому, что средством передачи данных служили перфоленты и магнитные ленты, так как передача цифровых данных по проводным линиям связи не обеспечивала требуемой надежности.

Системы автоматизированного моделирования геометрических объектов получили развитие только потому, что пользователи располагали автономными средствами информатики, позволяющими за несколько минут получать чертежи и за несколько часов — трехмерные макеты. Для достижения этой цели необходимо было значительно поднять производительность чертежных устройств и станков, и эти задачи практически решены. Однако нельзя полагать, что все возможное в этой области уже сделано, ибо прогресс остановить нельзя.

Хороший метод не требует кропотливой предварительной работы. Напротив, быстрота реакции вычислительной системы дает возможность выполнить несколько попыток и сразу же внести необходимые поправки. Для специалиста по-прежнему остается незаменимым двух- или трехмерный чертеж, дополненный необходимыми цифрами, причем не всегда легко отразить в числах достижения в области графических средств.

2.3. Введение в методы моделирования геометрических объектов

2.3.1. Объемное моделирование

Ранее мы говорили о большом разнообразии зависимости подлежащих определению (их больше, чем может представиться в начале работы). Что же касается используемых методов, то их можно разбить на три категории:

1. Построение геометрических моделей с помощью сочетания простых твердых тел, называемое объемным моделированием.
2. Интерполяция на предварительно определенных линиях и точках.
3. Прямое моделирование с помощью последовательных приближений с использованием ЭВМ в диалоговом режиме.

Мы также говорили о том, что для определения формы почти всех геометрических объектов используется метод объемного сочетания простых тел, образованных с помощью отрезков прямых и дуг окружностей. Если этот метод непригоден, для определения формы объекта сначала находится ряд последовательных (обычно плоских) сечений, для построения которых используют шаблоны, обычные и гибкие лекала, а затем выполняется интерполяция на найденных сечениях, которая требует привлечения специалистов-модельщиков, литейщиков или слесарей-сборщиков высокой квалификации. Необходимость точного соблюдения посадочных размеров накладывает также определенные требования на способ обработки заготовок и на сглаживание острых кромок с помощью фасок или фигурных закруглений.

Программное обеспечение объемного моделирования перекладывает на ЭВМ выполнявшуюся ранее специалистами задачу — определение модели с помощью сочетания или совмещения элементарных тел.

«Аналитические» зависимости

Как мы уже говорили, к этой категории относятся тела, используемые в объемном моделировании: прямоугольные параллелепипеды, цилиндры и конусы вращения, сферы и торы. Если строго придерживаться определений, то к этому списку следовало бы добавить прямые и наклонные призмы, гиперболические параболоиды, пирамиды, гиперболоиды вращения и коноиды, но большая часть из них практически никогда не использовалась. Отметим также, что из-за необходимости учета таких элементов моделирования, как литейные и кузнечные формы, специалисты часто используют еще одно тело, называемое «кучей песка», однако при этом всегда известно, по какую

сторону поверхности раздела находится твердое тело. Использование поверхностей типа листа Мебиуса не допускается!

Булевы комбинации

Если придерживаться правил булевой алгебры, можно осуществлять комбинирование тел с помощью таких операций, как пересечение, объединение, исключение, дополнение и т. д. Реально используют главным образом объединение (или сложение) и исключение (или вычитание), много реже используется пересечение и практически никогда — дополнение.

Из рис. 1 без дополнительных объяснений ясен смысл операций сложения и вычитания.

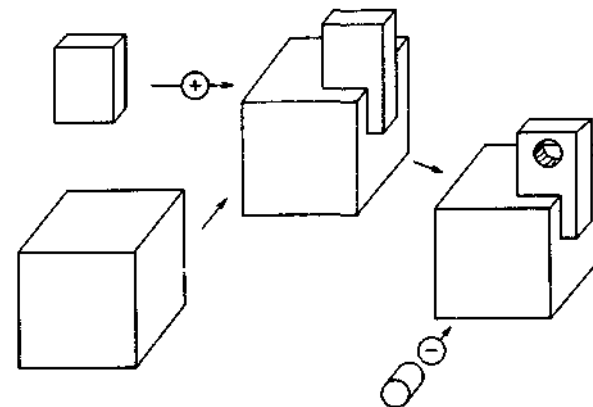


Рис. 1. Выполнение булевых операций с аналитическими телами.

Комбинируя эти элементарные операции, можно без труда представить выемки, выступы, фаски, скругления и т. д.

Ограничительные линии

Практическая реализация вычитания какого-либо тела соответствует удалению материала в процессе обработки детали (рис. 2). В этом случае линия пересечения двух поверхностей представляет собой прямой результат работы режущего инструмента и ее предварительного определения не требуется. При выполнении сложения (рис. 3) необходимо знать точную длину последовательно выполняемых проходов режущего инструмента по образующим пересекающихся поверхностей. Расчет ограничительных линий не представляет трудностей, так как элементарные тела имеют простые формы.

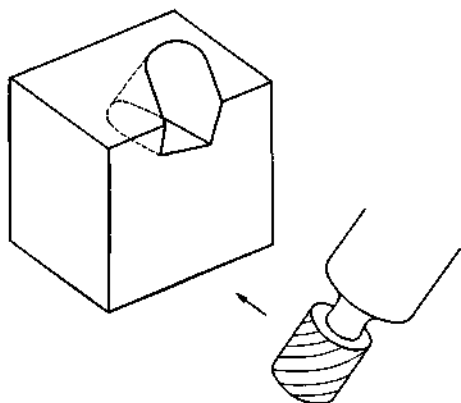


Рис. 2. Естественное выполнение булевого вычитания с помощью режущего инструмента.

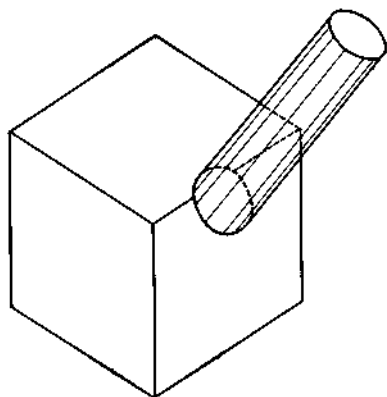


Рис. 3. Пересечение аналитических тел.

Чаще всего координаты точек, расположенных на ограничительной линии, загружаются в память ЭВМ. Точки располагаются достаточно близко друг к другу, для того чтобы с помощью линейной интерполяции можно было вычислить конечную точку любой образующей.

Поверхности сшивки

Наиболее простой способ определения поверхности сшивки заключается в использовании сферы (рис. 4), которая перемещается, оставаясь касательной к двум сшиваемым поверхностям F_1 и F_2 .

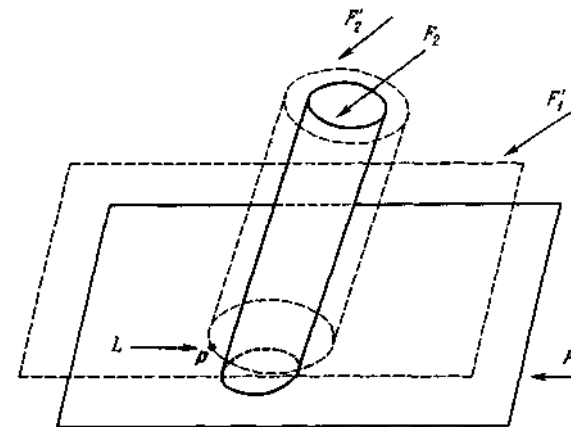


Рис. 4. Положение центра сшивающей сферы.

Очевидно, что траектория движения центра сферы является линией пересечения L двух поверхностей F'_1 и F'_2 , параллельных сшиваемым поверхностям и отстоящим от них на величину радиуса сшивки.

Вспомогательная сшивающая поверхность должна быть полностью определена, так как ее нельзя обработать сразу на всю длину инструментом типа фрезы со сферическим концом, кроме того, необходимо знать предельную точку каждой образующей сопрягаемых поверхностей, а также потому, что при обработке сопряженной детали поверхность сшивки является выпуклой и не может быть обработана инструментом с вогнутым профилем. Характеристическая линия охватывающей поверхности представляет собой дугу окружности с центром в точке P на кривой L и расположена между двумя перпендикулярами, опущенными из точки P на F_1 и F_2 .

Отсюда следует, что в памяти ЭВМ должна храниться информация относительно достаточно большого числа точек, для того чтобы можно было выполнить простую линейную интерполяцию. Информация должна содержать декартовы координаты точек, а также направляющие косинусы нормалей к поверхности, которые необходимы для учета собственного радиуса режущего инструмента и возможного припуска на обработку.

Если задается такой метод сшивки, при котором радиус сшивающей поверхности является переменным и изменяется в определенных пределах, то обычно не требуется точное определение закона его

изменения. Расчеты при этом усложняются, но принцип нахождения поверхности сшивки остается без изменения.

Использование параметрических методов описания поверхностей
 Не всегда можно определить форму объектов, используя только комбинации «аналитических» тел. Возникает необходимость в построении систем, в которых наряду с объемным моделированием используется также и параметрический способ описания поверхностей. Подобные системы используются довольно широко.

Как мы уже отмечали, одной из распространенных задач геометрического моделирования является графическое представление кривых и поверхностей.

Рассмотрим три типа задач: интерполяцию, сглаживание и аппроксимацию. Введем следующие обозначения:

Ω - n -мерное множество, принадлежащее пространству R^n ($n \geq 1$);

$\{\delta_i\}_{i \in I}$ -множество функционалов, т.е. отображений, которые каждой функции f , определенной на Ω , ставят в соответствие действительное число $\delta_i(f)$. Наиболее типичный пример: для данной точки P пространства R^n функционал δ_n будет равен $\delta_n(f) = f(P)$ -значению f в точке P ; $\{z_i\}_{i \in I}$ -заданное множество действительных чисел; V -множество функций, определенных на Ω , которые могут быть функциями интерполяции, сглаживания или аппроксимации (полиномы, кусочно-полиномиальные и другие функции).

Уточним постановку рассматриваемых задач.

Задача интерполяции

Найти элемент v из V , такой что для всех i из I

$$\delta_i(v) = z_i.$$

Задача сглаживания

Найти элемент v из V , такой что множество величин $\{\delta_i(v)\}_{i \in I}$ не очень удалено от множества $\{z_i\}_{i \in I}$. Критерий удаления может быть математически выражен достаточно строго (при использовании B -сплайнов или функций Безье), но всегда полезно его уточнить в общем виде. Он определяется через полунорму (полунорма φ отличается от нормы тем, что в ней из условия $\varphi(a) = 0$ не следует равенство $a = 0$) φ на R^I , и задачу можно сформулировать так: найти элемент v из V , такой что полунорма

$$\varphi(\{\delta_i(v)\}_{i \in I} - \{z_i\}_{i \in I})$$

будет минимальной.

Задача аппроксимации

Исходные данные для задачи:

W - множество функций, определенных на Ω со значениями в R ; f - элемент W ; $V \subset W$; φ -полунорма, определенная в W .

Задача состоит в том, чтобы найти элемент v из V , такой что полунорма $\varphi(f - v)$ будет минимальной.

Для функций одной переменной мы приводим классическое описание решений перечисленных задач. Это поможет читателю оценить метод, который он предполагает использовать, и обратиться к другим разделам этой книги или к специальной литературе для применения в конкретном случае. Мы старались не употреблять специальные математические понятия. Мы представили широкий спектр существующих методов и подробно рассмотрели вопросы линейности, выбора базиса, геометрических свойств данных (в частности, в случае поверхностей).

Линейность

Будем отдавать предпочтение методам, которые обладают одним из следующих свойств:

- результат линейно зависит от данных;
- решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений.

Выбор базисных функций

Речь идет о корректном выборе параметров множества функций V , на котором отыскивается решение. Эти параметры неявно определяют выбор базиса и могут изменяться в процессе решения задачи.

Геометрические свойства данных

В тех случаях, когда для решения задачи требуется выполнить разбиение области данных, равномерное разбиение может существенно упростить реализацию метода, работу с данными, вычисление функционалов и т. д.

2.3.2. Кривые

В методах, к описанию которых мы приступаем, обычно используется ортонормированный базис (на плоскости или в пространстве). Будем предполагать, если не оговорено противоположное, что рассматриваемые кривые являются однозначными функциями в этом базисе: одной абсциссе t соответствует одна и только одна ордината $f(t)$.

2.3.2.1. Основные понятия

Линейное преобразование

Пусть в ортонормированном базисе (o, x, y, z) задана кривая Γ , называемая «базовой кривой» (рис. 1).

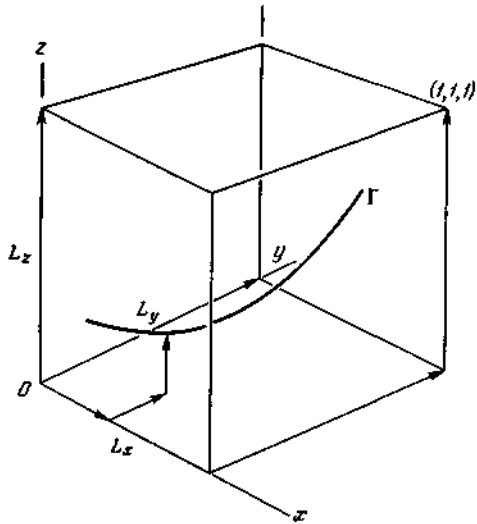


Рис. 1. Базовая кривая.

Точки кривой $\Gamma(u)$ определяются с помощью следующего выражения:

$$\Gamma(u) = \alpha_x f_1(u) + \alpha_y f_2(u) + \alpha_z f_3(u), \quad (4.1)$$

где α_x , α_y и α_z — единичные векторы осей Ox , Oy и Oz .

Для определения кривой C (рис. 2) в произвольном базисе $OXYZ$, который является базисом, например, чертежного устройства или обрабатывающего станка, необходимо сначала базис $oxyz$ подвергнуть преобразованию переноса на вектор \mathbf{a}_0 , а затем линейному преобразованию, при котором векторы α_x , α_y и α_z становятся соответственно векторами \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 .

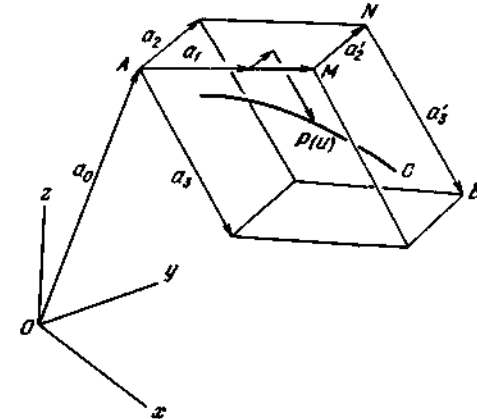


Рис. 2. Линейное преобразование базовой кривой.

В результате этого кривая Γ становится кривой C , точки которой в базисе $OXYZ$ определяются выражением

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i f_i(u), \quad (2)$$

в котором функции f_i совпадают с функциями из выражения (1).

Характеристический многоугольник

Более удобным оказывается представление кривой не с помощью векторов \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 , а путем последовательного расположения этих векторов как \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2' и \mathbf{a}_3' (рис. 2) и построения таким образом многоугольника, называемого характеристическим, определяющего кривую C (рис. 3).

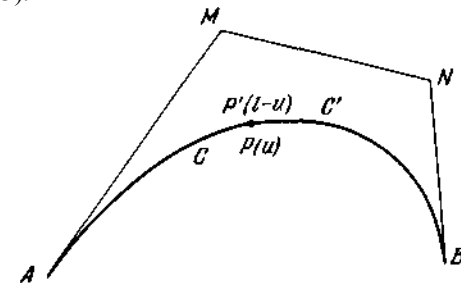


Рис. 3. Характеристический многоугольник кривой.

Обобщение на многомерное пространство

Допустим, что базовая кривая задана в m -мерном пространстве. Тогда проекция ее характеристического многоугольника на двумерное или трехмерное пространство будет представлять собой m -сторонний характеристический многоугольник, а вместо (2) будет верно следующее выражение:

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i f_{i,m}(u). \quad (3)$$

Такое обобщение понятия базовой кривой дает возможность получить большее разнообразие кривых, что приводит к уменьшению числа элементов разбиения.

2.3.2.2. Определение положения точки

Функции f

Трехсторонние многоугольники. Выбор функций f определяются свойствами базовой кривой:

1. Точка $\Gamma(0)$ является началом координат o базиса $oxuz$ (рис. 1). Ее координаты — $(0, 0, 0)$.
2. Координаты точки $\Gamma(1)$ равны $(1, 1, 1)$.
3. Касательной в точке $\Gamma(0)$ является ось ox .
4. Касательная в точке $\Gamma(1)$ параллельна оси oz .
5. Значение параметра u меняется в пределах от 0 до 1.

Отсюда следует, что концами отрезка кривой с характеристическим многоугольником $AMNB$ (рис. 3) являются точки A (начало) и B (конец). Касательными к кривой в этих точках являются соответственно AM и NR . Кроме того:

1. Поскольку $\mathbf{P}(0) = \mathbf{A} = \mathbf{a}_0$, то

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0 \text{ и } f_0(0) = 1. \quad (4)$$

($f_0(u)$ — множитель при a_0 , отсутствующий в формуле (2). Как будет показано ниже, $f_0(u) = 1$.)

2. Из условия $\mathbf{P}(1) = \mathbf{B} = \sum_{i=0}^3 \mathbf{a}_i$ следует

$$f_0(1) = f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1. \quad (5)$$

3. Так как в точке A кривая C имеет касательную AM , то

$$\frac{d\mathbf{P}(0)}{du} = k\mathbf{a}_1,$$

где коэффициент k является положительной скалярной величиной, значение которой должно быть определено из других условий. Отсюда следует

$$\frac{df_0(0)}{du} = \frac{df_2(0)}{du} = \frac{df_3(0)}{du} = 0. \quad (6)$$

4. Из того что кривая C имеет в точке B касательную NB , следует

$$\frac{d\mathbf{P}(1)}{du} = k'\mathbf{a}_3,$$

где коэффициент k' также является положительной скалярной величиной. Отсюда получаем

$$\frac{df_0(1)}{du} = \frac{df_1(1)}{du} = \frac{df_2(1)}{du} = 0. \quad (7)$$

Соотношения (4) — (7) представляют собой 14 условий и нужно найти еще два для определения четырех кубических функций. Построим касательные к кривой Γ : в точке $(0, 0, 0)$ в плоскости oxu и в точке $(1, 1, 1)$ в плоскости, параллельной oyz . Имеем

$$\frac{d^2f_3(0)}{du^2} = \frac{d^2f_1(1)}{du^2} = 0. \quad (8)$$

Решая систему уравнений (4) — (8), находим

$$\begin{aligned} f_0(u) &= 1 - \text{const}, \\ f_1(u) &= u^3 - 3u^2 + 3u, \\ f_2(u) &= -2u^3 + 3u^2, \\ f_3(u) &= u^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что это семейство функций симметрично по отношению к перестановке u и $(1 - u)$, т. е.

$$\begin{aligned} f_1(1 - u) &= 1 - f_3(u), \\ f_2(1 - u) &= 1 - f_2(u), \\ f_3(1 - u) &= 1 - f_1(u). \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, кривая C' (рис. 3), характеристическим многоугольником для которой является $BNMA$, геометрически совпадает с кривой C , характеристическим многоугольником для которой является $AMNB$, и можно записать

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}'(1 - u). \quad (11)$$

Обобщение на многомерное пространство. Выше отмечалось, что любую линию можно представить как проекцию на двумерное или трехмерное пространство базовой кривой, заданной в m -мерном пространстве. В этом случае ее характеристический многоугольник состоит из m векторов $\mathbf{a}_i (i \in [1, m])$.

Обобщая для этого случая выражения (4) — (8), получим

$$\begin{aligned}
 &1) f_{0, m}(u) = 1, \\
 &2) f_{i, m}(0) = 0 \quad i \in [1, m], \\
 &3) f_{i, m}(1) = 1 \quad i \in [1, m], \\
 &4) d^j f_{i, m}(0)/du^j = 0 \quad i \in [j, m], j \in [1, m-1], \\
 &5) d^j f_{i, m}(1)/du^j = 0 \quad i \in [1, m-j], j \in [1, m-1].
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Формулы (12) содержат $m(m + 1)$ условий, определяющих m функций $f_{i, m}(u)$, имеющих следующий вид:

$$f_{i, m}(u) = \frac{(-u)^i}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1} \left[\frac{(1-u)^m - 1}{u} \right]}{du^{i-1}}.
 \tag{13}$$

На рис. 4 приведены графики этих функций на интервале (0, 1) для случая $m = 5$.

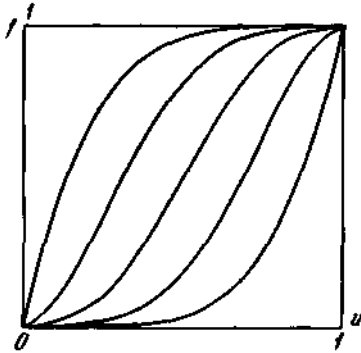


Рис. 4. Функции f для случая $m = 5$.

Правило для вычисления коэффициентов поясняется следующими формулами, соответствующими $m = 6$:

$$\begin{aligned}
 f_{1, 6} &= -x^6 + 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 15x^2 + 6x, \\
 f_{2, 6} &= 5x^6 - 24x^5 + 45x^4 - 40x^3 + 15x^2, \\
 f_{3, 6} &= -10x^6 + 36x^5 - 45x^4 + 20x^3, \\
 f_{4, 6} &= 10x^6 - 24x^5 + 15x^4, \\
 f_{5, 6} &= -5x^6 + 6x^5, \\
 f_{6, 6} &= x^6.
 \end{aligned}$$

Для вычисления функций $f_{i, m}$ могут быть использованы также и другие формулы:

$$f_{i, m}(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \cdot \binom{m}{j} \cdot \binom{j-1}{i-1} \cdot u^j =
 \tag{14}$$

$$= \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \frac{m!}{j!(i-1)!(j-i)!(m-j)!} u^j.
 \tag{15}$$

Основные свойства функций f . Из многочисленных свойств функций f отметим только те, которые имеют практическое значение в теории моделирования:

1. Функции f симметричны по отношению к замене u на $(1 - u)$, т. е.

$$f_{i, m}(1 - u) = 1 - f_{m-i+1, m}(u),
 \tag{16}$$

что следует из формулы (14).

$$2. \quad \sum_{i=1}^m f_{i, m}(u) = m \cdot u,
 \tag{17}$$

откуда следует, что характеристический многоугольник, состоящий из одинаковых векторов, определяет прямую, производная по параметру u которой является константой. Таким образом, расстояние между двумя точками отрезка этой прямой пропорционально разности между значениями параметра в этих точках.

$$3. \quad \int_0^1 f_{i, m}(u) du = \frac{i}{m+1}.
 \tag{18}$$

Из этого свойства следует:

3.1. Интегралы от функций f в пределах от 0 до 1 образуют арифметическую прогрессию с разностью $1/(m + 1)$.

$$3.2. \quad \sum_{i=1}^m \int_0^1 f_{i, m}(u) du = \frac{m}{2}.
 \tag{19}$$

$$4. \quad \frac{df_{i, m}(0)}{du} = \frac{df_{m-i+1, m}(1)}{du} = m,$$

$$\frac{df_{i, m}(0)}{du} = 0, \quad i \neq 1,$$

$$\frac{df_{i, m}(1)}{du} = 0, \quad i \neq m.$$

Отсюда следует, что первые параметрические производные в точках A и B равны соответственно

$$\frac{d\mathbf{P}(0)}{du} = m \cdot \mathbf{a}_1, \tag{20}$$

$$\frac{d\mathbf{P}(1)}{du} = m \cdot \mathbf{a}_m$$

5.
и

$$\frac{d^2 f_{1, m}(0)}{du^2} = - \frac{d^2 f_{2, m}(0)}{du^2} = - m(m - 1)$$

$$\frac{d^2 f_{m, m}(1)}{du^2} = - \frac{d^2 f_{m-1, m}(1)}{du^2} = m(m - 1). \tag{21}$$

Отсюда следует, что вторые параметрические производные в точках A и B равны соответственно

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{P}(0)}{du^2} &= m(m - 1)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1), \\ \frac{d^2 \mathbf{P}(1)}{du^2} &= m(m - 1)(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{m-1}), \end{aligned} \tag{22}$$

и выпуклость кривой в этих точках направлена по отношению к вектору \mathbf{a}_1 (или \mathbf{a}_m) так же, как и к вектору \mathbf{a}_2 (или \mathbf{a}_{m-1}). Радиус кривизны в точках $P(0)$ и $P(1)$ зависит только от \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 (или \mathbf{a}_m и \mathbf{a}_{m-1}) и вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{R} = \frac{\left| \frac{d\mathbf{P}}{du} \right|^3}{\left| \frac{d\mathbf{P}}{du} \times \frac{d^2 \mathbf{P}}{du^2} \right|}. \tag{23}$$

(Символ \times означает векторное произведение.)

Рассмотрим дугу кривой AB (рис. 5) и ее характеристический многоугольник $AMN... B$, состоящий из m векторов.

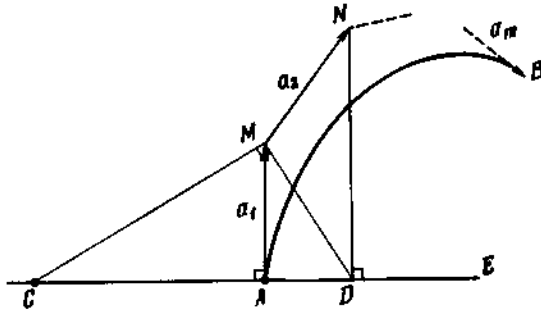


Рис. 5. Построение центра кривизны начальной точки кривой.

В этом случае

$$\frac{AM}{MN} = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2}.$$

Построим точку D , являющуюся проекцией точки N на прямую E , перпендикулярную AM . Теперь последовательно определяем

$$\frac{d\mathbf{P}(0)}{du} = m \cdot \mathbf{a}_1$$

$$\frac{d^2 \mathbf{P}(0)}{du^2} = m(m - 1)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)$$

и

$$\frac{d\mathbf{P}(0)}{du} \times \frac{d^2 \mathbf{P}(0)}{du^2} = m^2 \cdot (m - 1)(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \tag{24}$$

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{m^3 |\mathbf{a}_1|^3}{m^2 (m - 1) |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \frac{m}{m - 1} \frac{|\mathbf{AM}|^3}{|\mathbf{AM} \times \mathbf{AD}|} = \\ &= \frac{m}{m - 1} \frac{|\mathbf{AM}|^2}{|\mathbf{AD}|} = \frac{m}{m - 1} |\mathbf{AC}|. \end{aligned}$$

Для точки B можно проделать такие же построения, используя векторы \mathbf{a}_m и \mathbf{a}_{m-1} . Кривизна равна нулю, если векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 (или \mathbf{a}_m и \mathbf{a}_{m-1}) коллинеарны.

6. Для графического построения функций $f_{i, m}$ на отрезке $[0, 1]$ можно использовать следующий метод:

Возьмем квадрат $ACBD$ (рис. 6) произвольного размера и разделим его горизонтальные стороны на m равных частей.

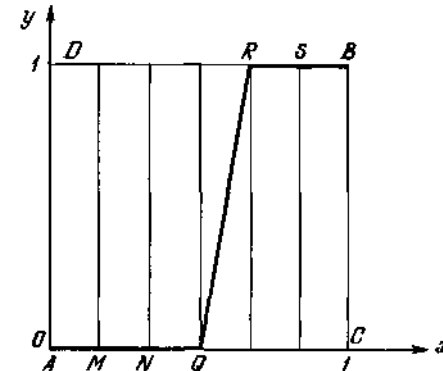


Рис. 6. Характеристический многоугольник функции f .

Зададим для функции $f_{i, m}(u)$ характеристический многоугольник $AM... SB$, сторонами которого являются:

- $i-1$ первых отрезков стороны AC , например AM , MN и NQ ;
 - отрезок прямой, соединяющий конец $i-1$ -го отрезка на стороне AC с началом i -го отрезка на стороне DR
 - $m-1$ последних отрезков на стороне DB , в данном случае RS и SB .
- Таким образом, график функции $f_{4,6}$ в определяется характеристическим многоугольником $AMNQRSB$.

7. Будем говорить, что функция $f_{i,m}(u)$ в точке A имеет контакт i -го порядка с осью ox и контакт $(m-i-1)$ -го порядка в точке B с прямой, параллельной оси x .

8. Графики функций отменяют $f_{2,m}$ до $f_{m-1,m}$ точку перегиба с абсциссой $(i-1)/(m-1)$.

9. С помощью простых построений можно получить точку кривой $P(u)$ и касательную к ней в этой точке. Рассмотрим, например, характеристический многоугольник $AMNQRB$ (рис. 7) и найдем точки A', M', \dots, R' , для которых выполняются следующие соотношения:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{MM'}{MN} = \dots = \frac{RR'}{RB} = u,$$

затем найдем точки A'', M'', \dots, Q'' , удовлетворяющие условиям

$$\frac{A'A''}{A'M'} = \frac{M'M''}{M'N'} = \dots = \frac{Q'Q''}{Q'R'} = u$$

и т. д.

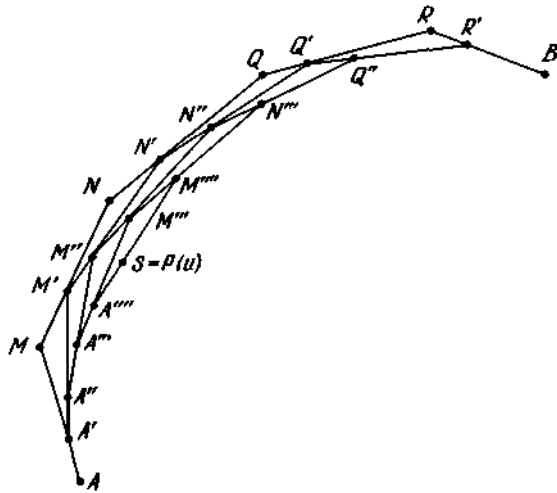


Рис. 7. Построение текущей точки по методу Верне.

Последний отрезок, полученный в этой процедуре $A'''M'''$, содержит точку S , такую, что

$$\frac{A'''S}{A'''M'''} = u.$$

Точка S совпадает с $P(u)$, а отрезок $A'''M'''$ является касательной к кривой в этой точке. Более того, для отрезков кривой $AP(u)$ и $P(u)B$ характеристическими многоугольниками являются соответственно $AA'A''A'''A''''P(u)$ и

$$P(u)M'''N'''Q'''R'B.$$

10. Если k первых векторов характеристического многоугольника равны нулю, то касательная в начальной точке совпадает с $(k+1)$ -м вектором. Пусть

$$a_i = 0 \quad i \in [1, k].$$

Тогда из формулы (12) следует

$$\frac{d^j f_{i,m}}{du^j} = 0 \quad i \in [j, m],$$

и если $j = k+1$, то

$$\frac{d^{k+1} P(0)}{du^{k+1}} = a_{k+1} \frac{d^{k+1} f_{k,m}(0)}{du^{k+1}}. \quad (25)$$

11. Будем придерживаться следующих соглашений:

$$\begin{aligned} \binom{a}{b} &= 1 \text{ при } b = 0, \text{ даже если } a < 0, \\ \binom{a}{b} &= 0 \text{ при } b > a, \\ \binom{a}{b} &= 0 \text{ при } b < 0, \\ \binom{a}{b} &= 1 \text{ при } a = b, \text{ для любых } a \text{ и } b, \text{ положительных или отрицательных.} \end{aligned}$$

(Аналогично соглашению $0! = 1$.)

Используя соотношение (14), для определения функции $f_{0,m}(u)$ получим

$$f_{0,m}(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^{0+j} \binom{m}{j} \binom{-1}{j-1} u^j. \quad (26)$$

Коэффициент $\binom{-1}{j-1}$ равен нулю, за исключением случаев $j = 0$.

Отсюда следует

$$f_{0, m}(u) = (-1)^0 \binom{m}{0} \binom{-1}{-1} u^0.$$

Поскольку все четыре сомножителя равны 1, то $f_{0, m} = 1$. Можно рассуждать и по-другому:

$$f_{0, m}(0) = f_{0, m}(1) = 1.$$

Кроме того, все производные функции $f_{0, m}$ равны нулю для m , равного нулю или единице, следовательно,

$$f_{0, m}(u) = 1.$$

12. Допустим, что $i = m + n > m$. В этом случае

$$f_{m+n, m}(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^{j+m+n} \binom{m}{j} \binom{j-1}{m+n-1} u^j,$$

и так как

$$m + n - 1 > j - 1 \quad (27)$$

член $\binom{j-1}{m+n-1}$ равен нулю для всех значений j . Следовательно, если ранг функции превышает m , она тождественно равна нулю.

Функции \mathcal{B}

Исследуем изменение формы кривой при изменении характеристического многоугольника.

Определение функции \mathcal{B} . Обозначим через s_i векторы (рис. 8) вершин характеристического многоугольника по отношению к произвольному началу. Очевидно, что $a_i = s_i - s_{i-1}$ и

$$P(u) = \sum_{i=0}^n (s_i - s_{i-1}) \cdot f_{i, m}(u).$$

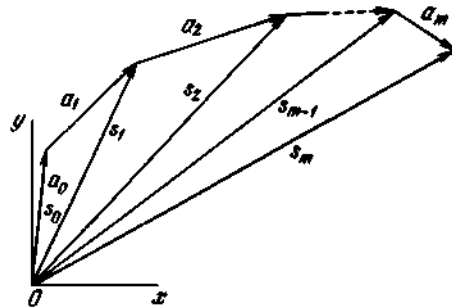


Рис. 8. Представление характеристического многоугольника с помощью векторов s .

С учетом соотношений (14) и (26) можно записать

$$P(u) = \sum_{i=0}^m s_i [f_{i, m}(u) - f_{i+1, m}(u)].$$

Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} f_{i, m}(u) - f_{i+1, m}(u) &\approx \\ &= \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \binom{m}{j} \binom{j-1}{i-1} u^j - \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j+1} \binom{m}{j} \binom{j-1}{i} u^j = \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} u^j \left[(-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} - (-1)^{i+j+1} \binom{j-1}{i} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \binom{m}{j} u^j \left[\binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i} \right], \end{aligned}$$

поскольку $(-1)^{i+j} = -(-1)^{i+j+1}$. Выражение в квадратных скобках приводится к виду

$$\begin{aligned} \binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i} &= \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} + \frac{(j-1)!}{i!(j-i-1)!} = \\ &= \frac{(j-1)!}{(j-1)!(j-i-1)!} \left(\frac{1}{j-i} + \frac{1}{i} \right), \end{aligned}$$

так как $i! = i(i-1)!$ и $(j-i)! = (j-i)(j-i-1)!$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i} &= \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i-1)!} \frac{j}{i(j-i)} = \\ &= \frac{j(j-1)!}{i(i-1)!(j-i)(j-i-1)!} = \frac{j!}{i!(j-i)!} = \binom{j}{i}. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом этого соотношения находим

$$\begin{aligned} f_{i, m}(u) - f_{i+1, m}(u) &= \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \binom{m}{j} \binom{j}{i} u^j = \\ &= \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение (29) определяет полиномы Бернштейна, которые обычно обозначаются через $\mathcal{B}_{i, m}(u)$.

Таким образом, выражение для точки $P(u)$ можно представить в виде

$$P(u) = \sum_{i=0}^m s_i \mathcal{B}_{i,m}(u). \quad (30)$$

Например, для полиномов Бернштейна при $m = 5$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{0,5} &= (1-u)^5 = -u^5 + 5u^4 - 10u^3 + 10u^2 - 5u + 1, \\ \mathcal{B}_{1,5} &= 5u(1-u)^4 = 5u^5 - 20u^4 + 30u^3 - 20u^2 + 5u, \\ \mathcal{B}_{2,5} &= 10u^2(1-u)^3 = -10u^5 + 30u^4 - 30u^3 + 10u^2, \\ \mathcal{B}_{3,5} &= 10u^3(1-u)^2 = 10u^5 - 20u^4 + 10u^3, \\ \mathcal{B}_{4,5} &= 5u^4(1-u) = -5u^5 + 5u^4, \\ \mathcal{B}_{5,5} &= u^5 = u^5. \end{aligned}$$

коэффициентов, а на рис. 9 представлены графики приведенных шести функций.

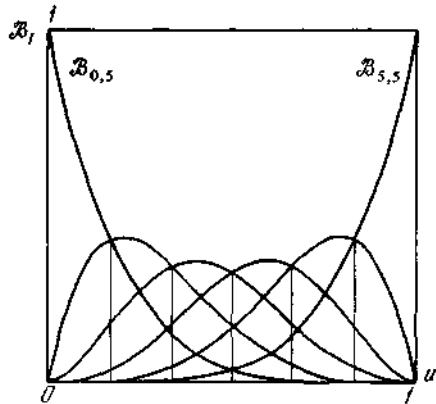


Рис. 9. Семейство функций Бернштейна.

Свойства функций Бернштейна. Из многочисленных свойств функций Бернштейна выделим следующие:

1. $\mathcal{B}_{0,m}(0) = 1$; $\mathcal{B}_{i,m}(0) = 0$, $i \in [1, m]$.
2. $\mathcal{B}_{i,m}(1) = 0$, $i \in [0, m-1]$; $\mathcal{B}_{m,m}(1) = 1$.
3. Кривая i -го порядка в точках $P(0)$ и $P(1)$ имеет с осью абсцисс контакты соответственно i -го и $(m-i)$ -го порядков.
4. $\sum_{i=0}^m \mathcal{B}_{i,m}(u) = 1$.

Таким образом, функции \mathcal{B} удовлетворяют одному из условий, иногда называемых условиями Коши, и форма кривой $P(u)$ не меняется, если вершины характеристического многоугольника, взятые как единое целое, подвергаются преобразованиям переноса и поворота. Действительно, рассмотрим кривую C , заданную вершинами характеристического многоугольника, точки которой определяются выражением

$$P(u) = \sum_{i=0}^m s_i \mathcal{B}_{i,m}(u). \quad (31)$$

Если каждая вершина смещается на вектор Δ , то новый характеристический многоугольник определяет кривую C , текущая точка которой записывается следующим образом:

$$P'(u) = \sum_{i=0}^m (s_i + \Delta) \mathcal{B}_{i,m}(u) = P(u) + \Delta \sum_{i=0}^m \mathcal{B}_{i,m}(u). \quad (32)$$

Учитывая, что $\sum_{i=0}^m \mathcal{B}_{i,m}(u) = 1$, имеем

$$P'(u) = P(u) + \Delta. \quad (33)$$

$$5. \int_0^1 \mathcal{B}_{i,m}(u) du = \frac{1}{m+1}.$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=0}^m \int_0^1 \mathcal{B}_{i,m}(u) du = 1.$$

6. За исключением $\mathcal{B}_{0,m}$ и $\mathcal{B}_{m,m}$, функции \mathcal{B} имеют максимум в точке $u = i/m$.

Значение функции в этой точке равно

$$\mathcal{B}_{i,m} \left(\frac{i}{m} \right) = \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{i^i (m-i)^{m-i}}{m^m}. \quad (34)$$

Некоторые из этих значений приведены в табл. 1.

Таблица 1. Максимальные значения некоторых функций Бернштейна

$m \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	0,50	1								
3	1	0,44	0,44	1							
4	1	0,42	0,37	0,42	1						
5	1	0,41	0,34	0,34	0,41	1					
6	1	0,40	0,33	0,31	0,33	0,40	1				
7	1	0,39	0,32	0,29	0,29	0,32	0,39	1			
8	1	0,39	0,31	0,28	0,27	0,28	0,31	0,39	1		
9	1	0,38	0,31	0,27	0,26	0,26	0,27	0,31	0,38	1	
10	1	0,38	0,30	0,27	0,25	0,25	0,25	0,27	0,30	0,38	1

7. Для получения графиков функций \mathcal{B} можно использовать их характеристические многоугольники, построение которых можно провести по следующему методу.

• Возьмем квадрат $ABCD$ (рис. 10) и разделим его стороны на m равных отрезков.

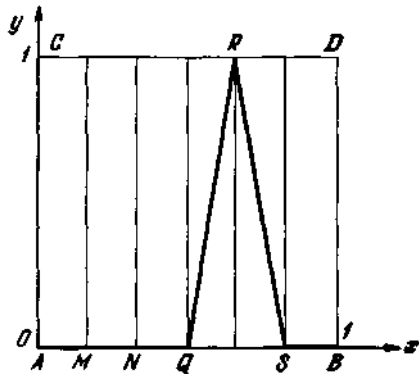


Рис. 10. Характеристический многоугольник для построения функций Бернштейна.

• Графику функции $\mathcal{B}_{i,m}$ соответствует характеристический многоугольник $AM...SB$, стороны которого представляют собой: $(i - 1)$ первых отрезков, лежащих на стороне AB , в данном случае AM, MN и NQ ; отрезок, соединяющий конец i -го отрезка на стороне AB с началом $(i + 1)$ -го отрезка на стороне DC ; отрезок, соединяющий начало $(i + 1)$ -го отрезка на стороне CD с началом $(i + 2)$ -го отрезка на стороне AB ; $(m - i - 1)$ последних отрезков, лежащих на стороне AB . Таким

образом, для случая, изображенного на рис. 10, характеристическим многоугольником является $AMNQRSB$.

8. Функции $\mathcal{B}_{i,m}$ и $\mathcal{B}_{i+1,m}$ пересекаются в точках с абсциссами $u = (i + 1)/(m + 1)$.

9. Функции \mathcal{B} от аргументов u и $(1 - u)$ образуют симметричные семейства. На рис. 9 ось симметрии проходит через точку с абсциссой $u = 0,5$.

10. Если две кривые имеют один и тот же характеристический многоугольник, но соответствующие вершины s_0, \dots, s_m и s'_0, \dots, s'_m связаны соотношением $s_i = s'_{m-i}$, то такие кривые геометрически совпадают, причем точка $\mathbf{P}(u)$ совпадает с точкой $\mathbf{P}'(1 - u)$. Действительно, пусть

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m s_i \mathcal{B}_{i,m}(u)$$

$$\text{и } \mathbf{P}'(v) = \sum_{i=0}^m s_{m-i} \mathcal{B}_{i,m}(v) = \sum_{i=0}^m s_i \mathcal{B}_{m-i,m}(v) =$$

$$= \sum_{i=0}^m s_i \binom{m}{m-i} v^{m-i} (1-v)^{m-(m-i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^m s_i \binom{m}{m-i} (1-v)^i v^{m-i}.$$

Положим $v = 1 - u$, тогда

$$\mathbf{P}'(1 - u) = \sum_{i=0}^m s_i \binom{m}{m-i} (1-u)^{m-i} [1 - (1-u)]^i =$$

$$= \sum_{i=0}^m s_i \binom{m}{m-i} u^i (1-u)^{m-i},$$

и, так как

$$\binom{m}{i} = \binom{m}{m-i},$$

Получаем $\mathbf{P}(u) = \mathbf{P}'(1 - u)$.

$$11. \quad \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du} = m[\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u)]. \quad (35)$$

Запишем функцию $\mathcal{B}_{i,m}(u)$ в виде

$$\mathcal{B}_{i,m}(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} = \frac{m!}{i!(m-i)!} u^i (1-u)^{m-i}$$

и найдем ее производную

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du} &= \frac{m!}{i!(m-i)!} [i u^{i-1} (1-u)^{m-i} - (m-i) u^i (1-u)^{m-i-1}] = \\ &= \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!} u^{i-1} (1-u)^{m-i} - \frac{m!}{i!(m-i-1)!} u^i (1-u)^{m-i-1}. \end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) &= \binom{m-1}{i-1} u^{i-1} (1-u)^{m-i} = \\ &= \frac{(m-1)!}{(i-1)!(m-i)!} u^{i-1} (1-u)^{m-i} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) &= \binom{m-1}{i} u^i (1-u)^{m-i-1} = \\ &= \frac{(m-1)!}{i!(m-i-1)!} u^i (1-u)^{m-i-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du} = m[\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u)].$$

Это свойство используется в разд. 2.3.2.3.

Полиномиальные функции

Зная векторы, определяющие вершины характеристического многоугольника, легко получить коэффициенты полиномиальной параметрической функции, задающей ту же кривую

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i u^i, \quad (36)$$

которая более приспособлена к вычислениям на ЭВМ и использование которой приводит к упрощению некоторых расчетов. Определим коэффициенты, например, для $m = 4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{a}_0, \\ \mathbf{b}_1 &= 4\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 &= -6\mathbf{a}_1 + 6\mathbf{a}_2, \\ \mathbf{b}_3 &= 4\mathbf{a}_1 - 8\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3, \\ \mathbf{b}_4 &= -\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4. \end{aligned}$$

Формулу для определения векторов \mathbf{b} можно записать в матричном виде

$$[\mathbf{M}_{a \rightarrow b}][\mathbf{a}_i] = [\mathbf{b}_i].$$

Матрица перехода имеет размер $(m+1) \times (m+1)$ и задается следующей формулой:

$$[\mathbf{M}_{a \rightarrow b}] = \left[(-1)^{l+c} \binom{l-2}{l-c} \right] \binom{m}{l}. \quad (37)$$

Индексы l и c обозначают соответственно строку и столбец.

Зная векторы \mathbf{b} , с помощью обратной матрицы (37) можно получить векторы \mathbf{a} . На практике вместо векторов \mathbf{a} часто используют векторы \mathbf{s} . Для этого случая

$$[\mathbf{M}_{s \rightarrow b}] = \left[(-1)^{l+c} \frac{m!}{(c-l)!(m-c)!l!} \right]. \quad (38)$$

Обратная матрица

$$[\mathbf{M}_{b \rightarrow s}] = [\mathbf{M}_{s \rightarrow b}]^{-1} = \left[\frac{c!(m-l)!}{(c-l)!m!} \right]. \quad (39)$$

2.3.2.3. Годографы

Первый годограф

Первым годографом кривой $\mathbf{P}(u)$ называется кривая $(d\mathbf{P}/du)(u)$, где вектор $d\mathbf{P}/du$ откладывается от некоторой фиксированной точки.

Рассмотрим кривую G (рис. 11) и ее характеристический многоугольник с вершинами \mathbf{s}_i .

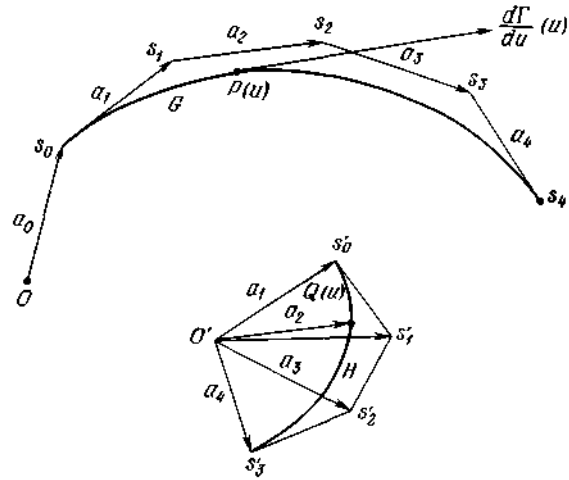


Рис. 11. Кривая и ее годограф.

Из произвольной точки O' построим векторы, совпадающие по величине и направлению с векторами \mathbf{a}_i . На концах этих векторов построим характеристический многоугольник, который будет определять кривую H степени $(m - 1)$.

С учетом того что $\mathbf{s}'_i = \mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_i$ для точки $\mathbf{Q}(u)$ кривой, находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(u) &= \sum_{i=0}^{m-1} (\mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_i) \mathcal{B}_{i,m-1}(u) = \\ &= \sum_{i=0}^m \mathbf{s}_i [\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Запишем отдельно выражения в квадратных скобках, используя свойство 11 из разд. 2.3.2.2:

$$\frac{1}{m} \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du},$$

и получим

$$\mathbf{Q}(u) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m \mathbf{s}_i \frac{d\mathcal{B}_{i,m}(u)}{du} = \frac{1}{m} \frac{d\mathbf{P}(u)}{du}. \quad (41)$$

Следовательно, кривая H является годографом кривой G с точностью до коэффициента $1/m$.

Последовательные годографы.

Для кривой H (рис. 11) так же можно построить кривую L , которая будет представлять собой годограф H в масштабе $1/(m - 1)$ и, следовательно, второй годограф кривой G в масштабе $1/[m(m - 1)]$. Таким образом, для точки $\mathbf{R}(u)$ кривой L справедливо выражение

$$\frac{d^2\mathbf{P}(u)}{du^2} = m(m - 1)\mathbf{R}(u). \quad (42)$$

Подобную процедуру можно продолжать до тех пор, пока очередной годограф не вырождается в точку, совпадающую с начальной точкой построения. Свойство вырождения имеет место только для полиномиальных зависимостей. Свойства, описываемые в следующем разделе, также относятся только к полиномиальным кривым.

Свойства годографов

1. Годографу n -го порядка кривой степени m соответствует характеристический многоугольник с $m - n$ сторонами.
2. Годографы порядков $m-2$, $m-1$ и m представляют собой соответственно дугу параболы, отрезок прямой и точку, отличную от начальной.
3. Если кривой степени $m - n$ соответствует характеристический многоугольник, состоящий из m векторов, то ее годограф $(m - n)$ -го порядка представляет собой набор из n совпадающих точек. С помощью этого свойства можно убедиться в возможности уменьшения степени кривой.
4. Обозначим через g и h проекции на плоскость кривой G и ее первого годографа H соответственно. Тогда
 - Если прямая $OQ(u)$ является касательной к кривой h , то точка $\mathbf{P}(u)$ на кривой g , соответствующая точке касания, является точкой перегиба (рис. 12). Более того, касательные к кривым g и h в точках $\mathbf{P}(u)$ и $\mathbf{Q}(u)$, параллельны друг другу.

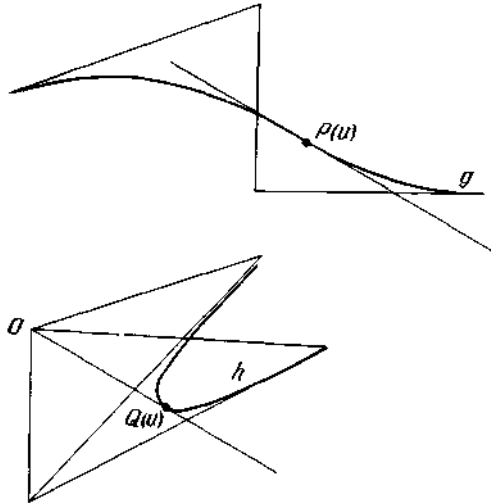


Рис. 12. Кривая с точкой перегиба и ее годограф.

- Если прямая $OQ(u)$ является касательной к кривой h и $Q(u)$ является точкой перегиба, то кривизна в точке $P(u)$ кривой g равна нулю, но точка $P(u)$ не является точкой перегиба. Касательные в точках $P(u)$ и $Q(u)$ параллельны друг другу, а прямая $OQ(u)$ является касательной к проекции второго годографа (рис. 13). Из нулевой кривизны в точке $P(u)$ следует параллельность первой и второй производной в этой точке.

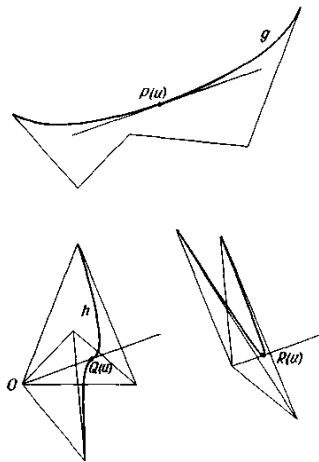


Рис. 13. Кривая с точкой нулевой кривизны и ее годограф.

- Если точка $Q(u)$ совпадает с точкой O , то точка $P(u)$ является точкой излома (рис. 14). Касательные в точках $P(u)$ и $Q(u)$ параллельны друг другу.

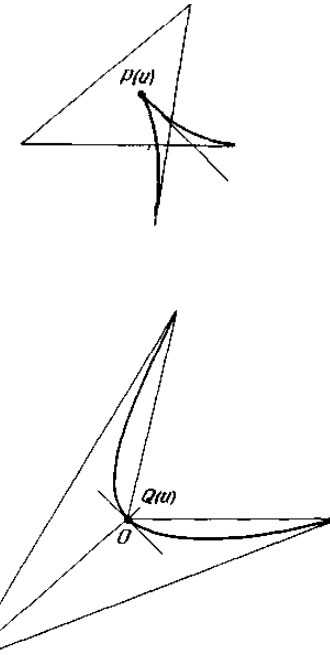


Рис. 14. Кривая с точкой излома и ее годограф.

- Если точка $Q(u)$ совпадает с точкой O и, кроме того, является точкой перегиба, то точка $P(u)$ является точкой излома второго рода (рис. 15).

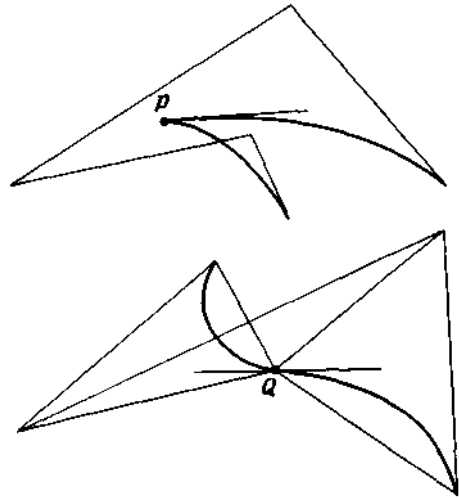


Рис. 15. Кривая с точкой излома второго рода и ее годограф.

5. Если G является кубической кривой, то H и h представляют собой параболы:

- Если точка O лежит вне кривой h , то кривая g имеет две точки перегиба, расположенные не обязательно между точками $P(0)$ и $P(1)$.
- Если точка O лежит внутри кривой h , то кривая g не имеет точек перегиба.
- При u , стремящемся к бесконечности, касательные к кривой g стремятся стать параллельными к оси симметрии h .

2.3.2.4. Построение характеристического многоугольника

Рассмотрим некоторые методы построения характеристических многоугольников.

Предварительные условия.

Одним из требований при этом является прохождение дуги кривой через определенное число точек или по крайней мере с небольшим отклонением от них. Для кривых, составленных из отдельных дуг, требуется непрерывность наклона в точке примыкания, а иногда и непрерывность кривизны, в частности при рассмотрении аэродинамических явлений.

Алгоритмы построения

Алгоритм — это автоматический метод получения результата. Однако практика использования методов геометрического моделирования показывает, что большую роль играют опыт и воображение.

Итак, проблема заключается в **нахождении кривой степени m , проходящей через определенные точки с заданным отклонением.**

Выбор способа параметризации. Сначала поставим в соответствие каждой точке значения параметра u .

Упрощенный метод. Этот метод состоит в **выборе значений параметров** в виде арифметической прогрессии с разностью $1/m$, заключенных между 0 и 1. Он применяется в тех случаях, когда кривизна меняется незначительно и точки расположены примерно на равных расстояниях.

Метод ломаной линии. Точки соединяются ломаной линией (рис. 16), длина которой

$$L = \sum_{i=1}^m |a_i|, \tag{43}$$

а значение параметра в точке P_j определяется выражением

$$u_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^j |a_i| \right)}{L}. \tag{44}$$

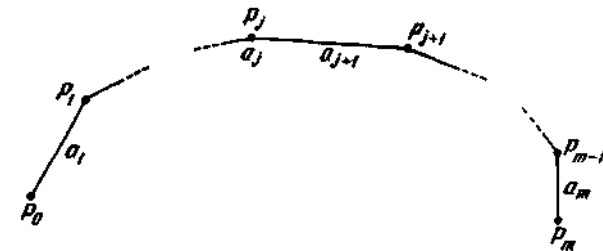


Рис. 16. Построение характеристического многоугольника по упрощенному методу.

Метод дает удовлетворительные результаты при незначительно меняющейся кривизне для любого расположения точек.

Метод, использующий дуги кривых. Отрезки ломаной линии могут быть заменены дугами окружности или параболы, но в большинстве случаев результаты почти не отличаются от полученных с помощью предыдущего метода.

Проективный метод. Сначала строится кривая, характеристический многоугольник которой представляет собой ломанную линию. Вершины многоугольника проектируются на кривую, значения параметров в точках проекций принимаются такими же, как в исходных точках (рис. 17).

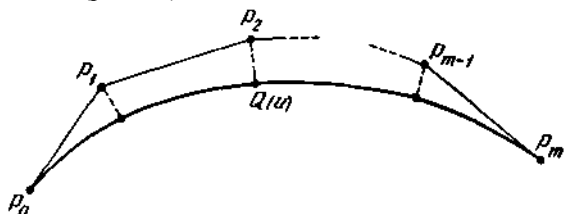


Рис. 17. Построение характеристического многоугольника по проективному методу.

Построение вершин. Простая кривая. Общий случай. Выбрав значения параметров в каждой точке, можно составить $(n + 1)$ уравнений вида

$$\mathbf{P}(u_j) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i u_j^i \quad (45)$$

и получить систему линейных уравнений относительно неизвестных \mathbf{b}_i .

Если величины n и m имеют одинаковое значение, решение системы находится сразу. Если $n < m$, то коэффициентам \mathbf{b} с индексами от $n + 1$ до m присваиваются нулевые значения и решение сводится к предыдущему случаю. Если $n > m$, точного решения не существует, но можно применить метод наименьших квадратов. При этом каждой точке ставится в соответствие вес в зависимости от ее расстояния до кривой.

Помимо точек, через которые должна проходить кривая, можно задать также наклоны касательных в этих точках. Можно учесть также и кривизну, но слишком возрастающая при этом трудоемкость вычислений заставляет в некоторых случаях отдавать предпочтение добавлению лишних точек. Подобные задачи часто возникают в авиационной промышленности, и уже разработаны методы, позволяющие учитывать в решении непрерывность до высоких порядков.

Наконец, если n значительно превышает m , а допустимые отклонения являются небольшими, при решении задачи возникают большие трудности. В этом случае приходится искомую кривую

составлять из нескольких отрезков, обеспечивая между ними **непрерывность наклона и кривизны**.

Частные случаи: окружности, эллипсы и параболы. Обычно предполагается, что в реальных объектах соединительные дуги и закругления имеют постоянную кривизну. Для того чтобы избежать включения в систему геометрического моделирования специальных программ для описания таких кривых, решение можно искать в приближенном виде. При этом часто обращаются к **кубическим кривым**, но для получения высокой точности необходимо использовать кривые более высоких степеней.

Для правильного определения характеристического многоугольника искомой кривой необходимо учитывать следующие условия:

1. Кривая должна проходить через среднюю и крайние точки дуги окружности (рис. 18).

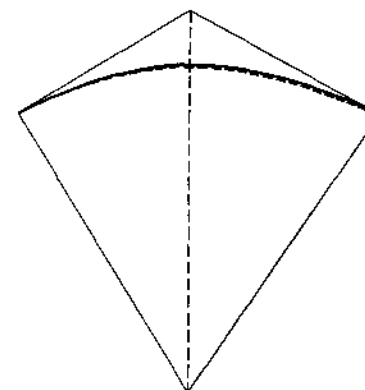


Рис. 18. Метод центральной точки в приближении дуги окружности.

2. Секторы, соответствующие дуге окружности и отрезку кривой, должны иметь равные площади (рис. 19).

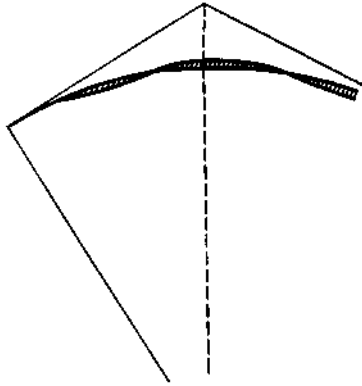


Рис. 19. Метод площадей в приближении дуги окружности.

3. Различие между радиусами окружности и кривой должно быть минимальным (рис. 20).

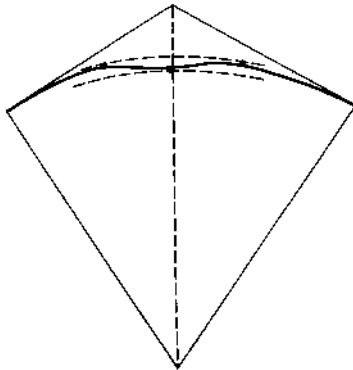


Рис. 20. Метод минимизации радиальных отклонений в приближении дуги окружности.

Практически все три условия дают очень близкие результаты и обычно выбирают первое условие как самое простое.

Из рис. 21 при предположении $AB = 1$ найдем

$$BC = \cos \alpha, \quad AC = \sin \alpha, \\ CE = 1 - \sin \alpha, \quad CJ = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

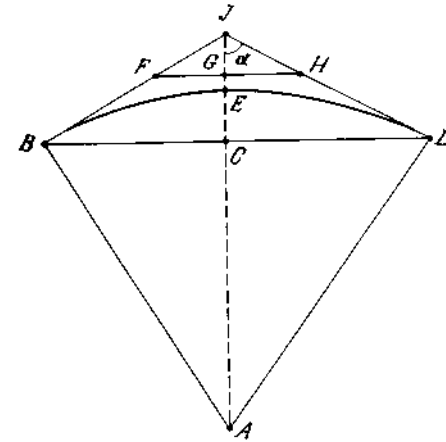


Рис. 21. Графическое построение для метода центральной точки.

Используя свойства функций f или \mathcal{B} , имеем для кубических кривых $(CE/CG) = 3/4$, или $CG = 4/3 (1 - \sin \alpha)$. Прямая FGH параллельна BD , а $BFHD$ является характеристическим многоугольником для дуги BED .

Следовательно,

$$\lambda = \frac{BF}{BJ} = \frac{CG}{CJ} = \frac{4(1 - \sin \alpha)\sin \alpha}{3 \cos^2 \alpha} = \frac{4 \sin \alpha}{3(1 + \sin \alpha)}. \quad (46)$$

Номограмма, приведенная на рис. 22, дает оптимальное значение величины λ как функции угла α :

$$\lambda = \Phi(\alpha).$$

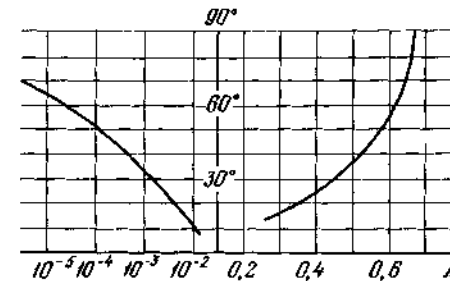


Рис. 22. Номограмма для рис. 21.

Приведена также зависимость от того же аргумента величины ε — относительного значения максимального расстояния между дугой

окружности и кубической кривой. В частности, для дуги окружности, вписанной в прямой угол, т. е. когда угол $\alpha = 45^\circ$, имеем $\lambda = 0,552$ и $\varepsilon = 2,7 \cdot 10^{-4}$. Очевидно, что многоугольник, состоящий из двух векторов, соответствует параболе.

Если при изготовлении детали не требуется высокая точность, то для полуокружности можно взять многоугольник, представленный на рис. 23 или 24, а для полной окружности — на рис. 25.

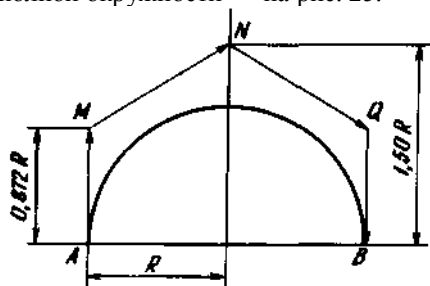


Рис. 23. Аппроксимация полуокружности при невысокой точности.

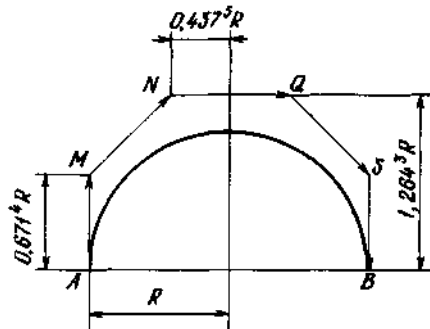


Рис. 24. Аппроксимация полуокружности с более высокой точностью.

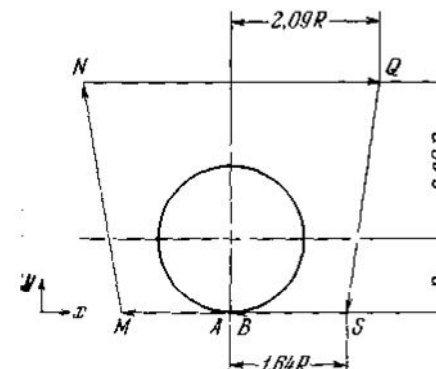


Рис. 25. Аппроксимация окружности с невысокой точностью.

Аналогичные подходы можно применить для построения характеристических сеток сферы (рис. 26) и тора (рис. 27) с точностью 10^{-4} .

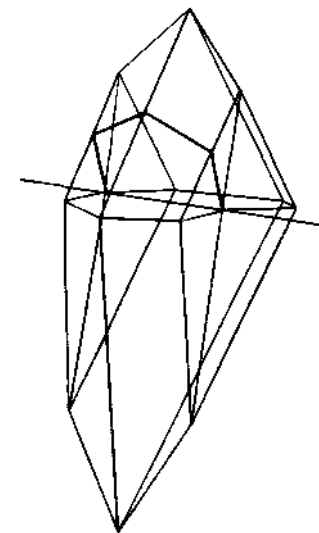


Рис. 26. Характеристическая сетка для аппроксимации сферы.

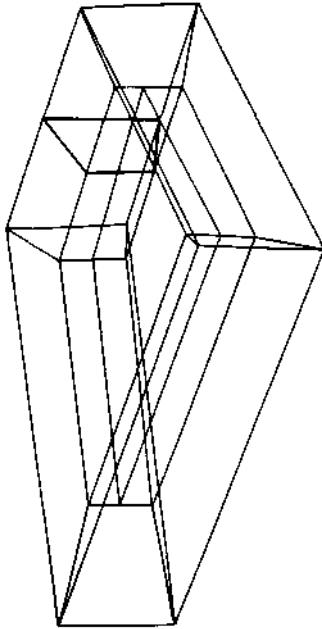


Рис. 27. Характеристическая сетка для аппроксимации тора.

Дуги кривых, заданные с помощью наклона и кривизны в конечных точках. Рассмотрим дугу плоской кривой (рис. 28) и обозначим через AT и BT касательные к кривой в крайних точках дуги.

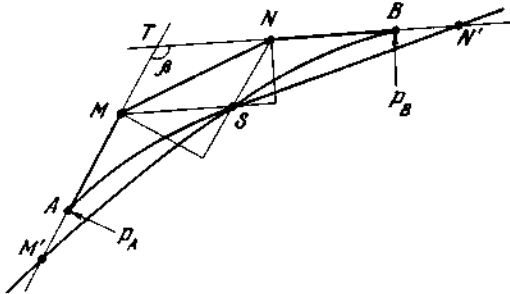


Рис. 28. Определение дуги кубической кривой по положению центров кривизны в граничных точках.

Найдем точки M и N из условия, что радиусы кривизны в крайних точках дуги должны быть равны ρ_A и ρ_B .

Введем обозначения для длин отрезков $AT = l_A$ и $TB = l_B$ и построим параллелограмм $MTNS$.

Легко убедиться, что

$$\rho_A = \frac{3}{2} \frac{|AM|^2}{|MS \sin \beta|}, \quad \rho_B = \frac{3}{2} \frac{|BN|^2}{|NS \sin \beta|}.$$

Отсюда получаем

$$MS = \frac{3|AM|^2}{2\rho_A \sin \beta}, \quad NS = \frac{3|BN|^2}{2\rho_B \sin \beta}. \quad (47)$$

Точка S является точкой пересечения двух парабол, определяемых соотношениями (47), которые пересекают прямые TA и TB в точках N' и M' . При этом справедливы следующие соотношения:

$$\rho_A = \frac{3}{2} \frac{|TA|^2}{|TN'| \sin \beta},$$

$$\rho_B = \frac{3}{2} \frac{|TB|^2}{|TM'| \sin \beta},$$

$$\frac{TN'}{TB} = \frac{3}{2} \frac{|TA|^2}{\rho_A TB \sin \beta} = \frac{3}{2} \frac{l_A^2}{\rho_A l_B \sin \beta},$$

$$\frac{TM'}{TA} = \frac{3}{2} \frac{|TB|^2}{\rho_B TA \sin \beta} = \frac{3}{2} \frac{l_B^2}{\rho_B l_A \sin \beta}.$$

Теперь спроектируем изображение, приведенное на рис. 28, так, чтобы tab стал прямоугольным равнобедренным треугольником (рис. 29).

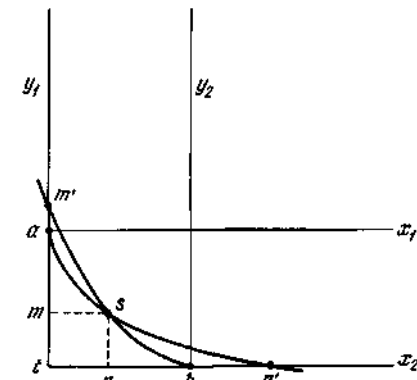


Рис. 29. Преобразование рис. 28.

Тогда параболы asn' и bsm' в системах координат y_1ax_1 и y_2ax_2 задаются следующими выражениями:

$$x_1 = \frac{3}{2} \frac{l_A^2}{\rho_A l_B \sin \beta} y_1^2, \quad y_2 = \frac{3}{2} \frac{l_B^2}{\rho_B l_A \sin \beta} x_2^2. \quad (48)$$

На номограмме (рис. 30) параболы определяются абсциссами своих точек пересечения с прямыми $x_1 = 1$ и $y_2 = 1$, т. е.

$$y_1(1) = \pm \frac{2}{3} \frac{\rho_A l_B \sin \beta}{l_A^2}, \quad (49)$$

$$x_2(1) = \pm \frac{2}{3} \frac{\rho_B l_A \sin \beta}{l_B^2}. \quad (50)$$

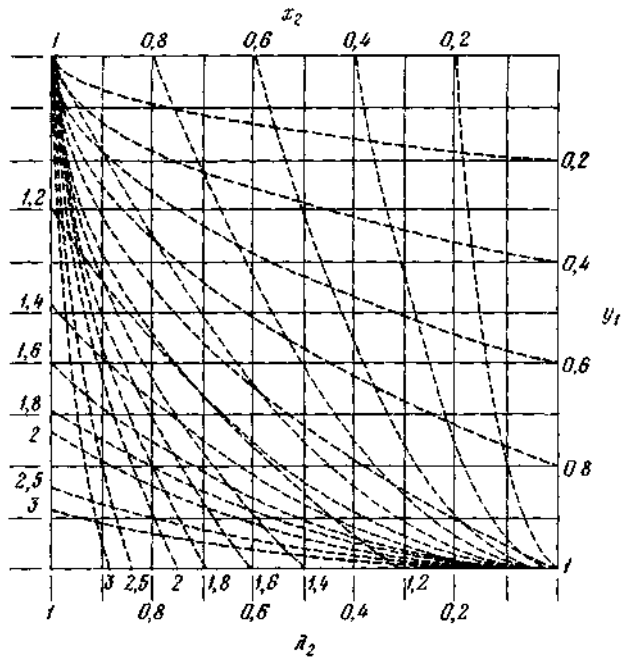


Рис. 30. Номограмма, соответствующая рис. 28.

По номограмме, приведенной на рис. 31, находят значения $y_1(1)$ и $x_2(1)$, а с помощью номограмм рис. 29 и 30 — значения λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие соотношениям $AM = \lambda_1 AT$ и $BN = \lambda_2 BT$.

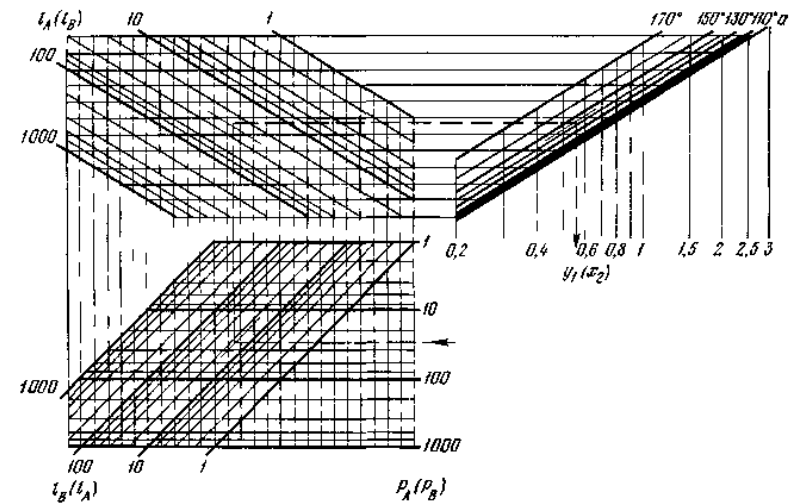


Рис. 31. Номограмма для построения характеристического многоугольника кривой, приведенной на рис. 28.

Рис. 29 соответствует случаю отсутствия точки перегиба на дуге AB , который встречается наиболее часто. В общем случае следует использовать номограмму, приведенную на рис. 32.

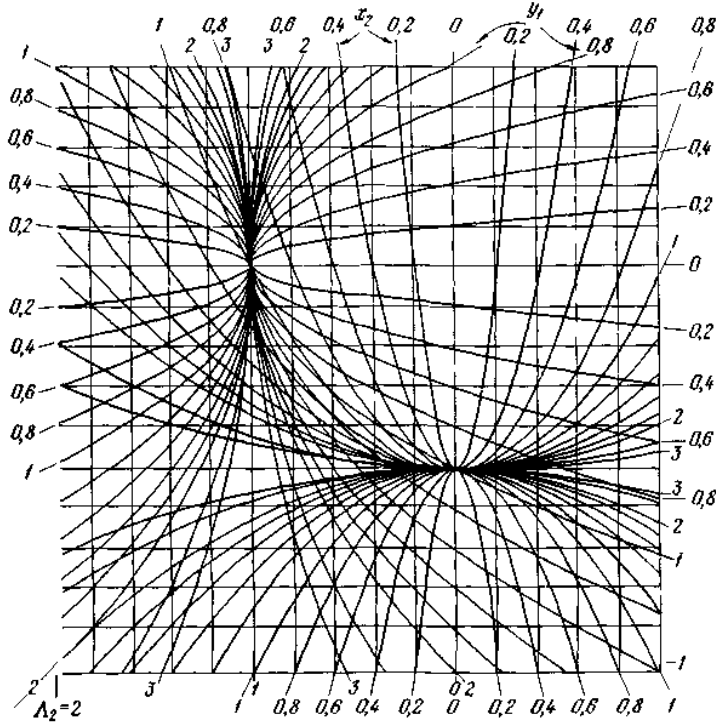


Рис. 32. Обобщение номограммы рис. 30

Выбор правильной дуги параболы зависит от ориентации первой производной и направлений выпуклости кривой в крайних точках. Кривые, составленные из нескольких дуг. Сшивка с сохранением непрерывности касательных. Рассмотрим точки P , через которые требуется провести кривую, составленную из сшитых между собой дуг (рис. 33).

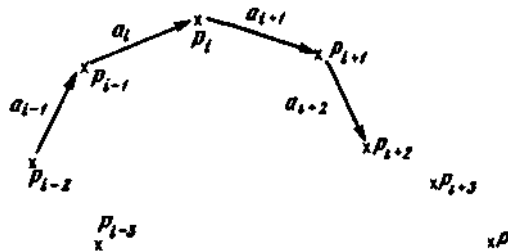


Рис. 33. Точки составной кривой.

На точках P_{i-2}, \dots, P_{i+2} определим векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i-1} &= \mathbf{P}_{i-1} - \mathbf{P}_{i-2}, \\ &\dots \\ \mathbf{a}_{i+2} &= \mathbf{P}_{i+2} - \mathbf{P}_{i+1}. \end{aligned} \quad (51)$$

При этом величина параметра u_m , соответствующая точкам P_m , выражается в следующем виде:

$$u_m = \frac{\sum_{j=i-1}^m |a_j|}{\sum_{j=i-2}^m |a_j|} \quad (52)$$

Отсюда следует, что

$$u_{i-2} = 0 \text{ и } u_{i+2} = 1. \quad (53)$$

Запишем уравнение кривой, проходящей через точки P_{i-2}, \dots, P_{i+2} ,

в виде

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{k=0}^4 \mathbf{b}_k u^k \quad u \in [0, 1], \quad (54)$$

где коэффициенты \mathbf{b}_k являются корнями системы линейных уравнений

$$P_m = \sum_{k=0}^4 b_k u_m^k.$$

Из выражения (54) следует

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \sum_{k=1}^4 \mathbf{b}_k k u^{k-1}. \quad (55)$$

Для отрезка этой кривой, заключенного между точками P_i и P_{i+1} , положение текущей точки $\mathbf{Q}(v)$ задается в виде

$$\mathbf{Q}(v) = \sum_{k=0}^4 \mathbf{b}_k [u_i + (u_{i+1} - u_i)v]^k \quad v \in [0, 1]. \quad (56)$$

Из выражений (54)–(56) получаем

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dv} = (u_{i+1} - u_i) \sum_{k=1}^4 \mathbf{b}_k k [u_i + (u_{i+1} - u_i)v]^{k-1}$$

и, в частности,

$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{P}_i = \mathbf{P}(u_i),$$

$$\frac{d\mathbf{Q}(0)}{dv} = (u_{i+1} - u_i) \sum_{k=1}^4 \mathbf{b}_k k u_i^{k-1} = (u_{i+1} - u_i) \frac{d\mathbf{P}(u_i)}{du}. \quad (57)$$

Для текущей точки $\mathbf{R}(t)$ отрезка этой же кривой, заключенного между точками \mathbf{P}_{i-1} и \mathbf{P}_i , имеем

$$\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}(u_i) = \mathbf{P}_i$$

и

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = (u_i - u_{i-1}) \frac{d\mathbf{P}(u_i)}{du}. \quad (58)$$

Таким образом, векторы $d\mathbf{Q}/dv$ и $d\mathbf{R}/dt$ коллинеарны и отношение их модулей записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{R}(1)}{dt} = \frac{d\mathbf{Q}(0)}{dv} \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь кривую, проходящую через точки $\mathbf{P}_{i-1}, \dots, \mathbf{P}_{i+3}$, и обозначим через $\mathbf{S}(w)$ текущую точку отрезка, ограниченного точками \mathbf{P}_i и \mathbf{P}_{i+1} . Этот отрезок не совпадает в точности с отрезком, текущая точка которого выше была обозначена через $\mathbf{Q}(v)$, но, вообще говоря, отклонение между ними невелико. Точка $\mathbf{S}(1)$ совпадает с точкой \mathbf{P}_{i+1} , и для определения значения первой производной в этой точке можно воспользоваться выражением, аналогичным выражению (58).

Рассмотрим отрезок окончательной кривой, ограниченный точками \mathbf{P}_i и \mathbf{P}_{i+1} , и обозначим через $\mathbf{T}(z)$ его текущую точку. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(0) &= \mathbf{P}_i = \mathbf{Q}(0), \\ \mathbf{T}(1) &= \mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{S}(1), \\ \frac{d\mathbf{T}(0)}{dz} &= \frac{d\mathbf{Q}(0)}{dv}, \\ \frac{d\mathbf{T}(1)}{dz} &= \frac{d\mathbf{S}(1)}{dw}. \end{aligned} \quad (60)$$

Таким образом, касательные в точках $\mathbf{T}(0)$ и $\mathbf{T}(1)$ соответственно коллинеарны касательным, определенным аналогичным образом для отрезка кривой, ограниченного точками \mathbf{P}_{i-1} и \mathbf{P}_i , а также \mathbf{P}_{i+1} и \mathbf{P}_{i+2} . В данном частном случае, рассмотренном в качестве примера, кривая соединяет пять точек (от P_0 до P_4 , или от P_{n-4} до P_n).

Для замкнутой кривой, точки P_0 и P_n которой совпадают, число условий в точке P_0 уменьшается за счет кривой, содержащей точки $\mathbf{P}_{n-2}, \dots, \mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_2$.

Сшивка с сохранением непрерывности кривизны. Из выражения (56) следует

$$\frac{d^2\mathbf{Q}}{dv^2} = (u_{i+1} - u_i)^2 \sum_{k=2}^4 \mathbf{b}_k k(k-1) [u_i + (u_{i+1} - u_i)v]^{k-2} \quad (61)$$

и

$$\frac{d^2\mathbf{Q}(0)}{dv^2} = (u_{i+1} - u_i)^2 \sum_{k=2}^4 \mathbf{b}_k k(k-1) u_i^{k-2}, \quad (62)$$

а также

$$\frac{d^2\mathbf{Q}(1)}{dv^2} = (u_i - u_{i-1})^2 \sum_{k=2}^4 \mathbf{b}_k k(k-1) u_i^{k-2}. \quad (63)$$

Для кривой, соединяющей точки $\mathbf{P}_{i-2}, \dots, \mathbf{P}_{i+2}$, векторы $d\mathbf{Q}(0)/dv$ и $d^2\mathbf{Q}(0)/dv^2$ определяют положение центра кривизны точки $\mathbf{Q}(0)$, другими словами — точки P_c . Это же положение центра кривизны соответствует и точке $\mathbf{R}(1)$.

Отрезок кривой, определяемый условиями, налагаемыми на величины

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}(0), \mathbf{T}(1), \\ &\frac{d\mathbf{Q}(0)}{dv}, \frac{d\mathbf{T}(1)}{dz}, \\ &\frac{d^2\mathbf{Q}(0)}{dv^2}, \frac{d^2\mathbf{T}(1)}{dz^2}, \end{aligned} \quad (64)$$

является кривой пятой степени и сшивается с примыкающими отрезками способом, аналогичным описанному выше.

Заметим, что кривая, ограниченная точками \mathbf{P}_{i-2} и \mathbf{P}_{i+2} , является кривой четвертой степени и обеспечивает необходимые условия в граничных точках отрезков $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$, для которых можно выбрать кривые третьей или пятой степеней. Не следует забывать, что геометрическая непрерывность, связанная с непрерывностью наклона и кривизны, не требует совпадения значений первых и вторых производных по обе стороны точки сшивки.

Сшивка с сохранением непрерывности порядка более 3. Используя соотношение (56), можно определить величины $d^2\mathbf{Q}(0)/dv^2$ и $d^2\mathbf{R}(1)/dt^2$ и найти выражения для отрезков кривых $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$, обеспечивающие сохранение непрерывности производных четвертого порядка. В этом случае нужно предварительно построить кривую шестой степени, проходящую через точки $\mathbf{P}_{i-3}, \dots, \mathbf{P}_{i+3}$. Максимально достижимый порядок непрерывности зависит, кроме всего прочего, от типа используемой ЭВМ и емкости памяти.

Изменение формы кривой с помощью векторов. Форму кривой удобно изменять путем изменения ее характеристического многоугольника. В случае кубической кривой (рис. 34) имеем

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{Q}(0)M = \frac{1}{3} \frac{d\mathbf{Q}(0)}{dv}, \quad (65)$$

$$\mathbf{a}_3 = N\mathbf{Q}(1) = \frac{1}{3} \frac{d\mathbf{Q}(1)}{dv},$$

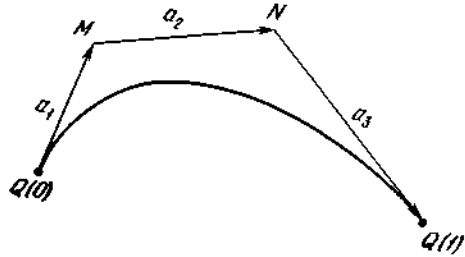


Рис. 34. Кубическая кривая.

а для кривой пятой степени (рис. 35):

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{Q}(0)M = \frac{1}{5} \frac{d\mathbf{Q}(0)}{dv},$$

$$\mathbf{a}_2 = MN = \mathbf{a}_1 + \frac{1}{20} \frac{d^2\mathbf{Q}(0)}{dv^2}, \quad (66)$$

$$\mathbf{a}_4 = RS = \mathbf{a}_5 - \frac{1}{20} \frac{d^2\mathbf{Q}(1)}{dv^2},$$

$$\mathbf{a}_5 = S\mathbf{Q}(1) = \frac{1}{5} \frac{d\mathbf{Q}(1)}{dv}.$$

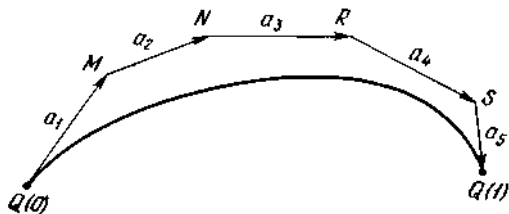


Рис. 35. Кривая пятой степени.

Произвольные изменения кривой. Покажем, как можно изменить форму ранее определенного отрезка кривой без изменения граничных

условий. Для сохранения наклона достаточно изменить модуль вектора \mathbf{a}_1 или \mathbf{a}_n (рис. 36).

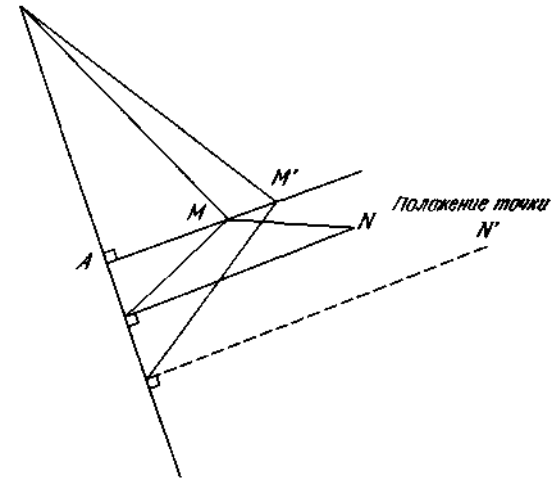


Рис. 36. Изменение характеристического многоугольника с сохранением центра кривизны.

При этом точка M перемещается в положение M' , а для сохранения кривизны достаточно точку N' расположить на линии, параллельной \mathbf{a}_1 , в соответствии со свойством 5 из разд. 2.3.2.2 (рис. 5).

Изменение сегмента кривой. Рассмотрим отрезок кривой и соответствующий ему характеристический многоугольник. Вектор $P(u)$, задающий положение текущей точки кривой, определяется выражением

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{s}_i \mathcal{B}_{i,m}(u).$$

Сместим вершину S , характеристического многоугольника на вектор Δ , после чего положение текущей точки кривой будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(u) &= \mathbf{s}_0 \mathcal{B}_{0,m}(u) + \dots + (\mathbf{s}_i + \Delta) \mathcal{B}_{i,m}(u) + \dots \\ &+ \mathbf{s}_m \mathcal{B}_{m,m}(u) = \mathbf{P}(u) + \Delta \mathcal{B}_{i,m}(u). \end{aligned} \quad (67)$$

Видно, что смещение каждой точки кривой определяется вектором, параллельным Δ и имеющим модуль $\Delta \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u)$.

Максимальное смещение имеет точка $\mathbf{P}(i/m)$, и его величина (см. табл. 1) близка к $\Delta/3$.

Из свойств функций \mathcal{B} следует, что если $2 \leq i \leq m-2$, то касательные в граничных точках не меняют наклон, и что если $3 \leq i \leq m-3$, то кривизна в этих точках не меняется.

2.3.2.5. Интерполяция полиномами

Интерполяционные полиномы Лагранжа

Исходные данные:

- 1) $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$;
- 2) $\{\delta_i\}_{i \in I}$; $I = \{0, 1, \dots, m\}$, $\delta_i(f) = f(t_i)$,

где $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq b$;

- 3) $z_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$;
- 4) $V = P^m$ - множество полиномов степени, меньшей или равной m , т.е. V - векторное пространство размерностью $m+1$.

Первым этапом решения задачи интерполяции является выбор базиса для V .

Очевидно, в качестве простейшей базы можно взять степенные функции вида $1, t, t^2, \dots, t^m$, т.е. задача сводится к нахождению полинома

$$v(t) = \sum_{j=0}^m v_j t^j,$$

такого, что $\delta_i(v) = v(t_i) = z_i$, $i \in I$.

Для вычисления коэффициентов v_j требуется решить систему $m+1$ линейных уравнений с $m+1$ неизвестными:

$$\sum_{j=0}^m v_j t_i^j = z_i, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Матрица этой системы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = t_i^j$, называется матрицей Вандермонда. Поскольку все t_i различны, она является обратной; следовательно, задача допускает единственное решение, но вычисление коэффициентов довольно трудоемко: оно требует решения системы или обращения матрицы A , не содержащей нулевых элементов.

Можно показать, что выбор одночленного базиса не является лучшим. На практике предпочтение отдается другим базисным полиномам, использование которых приводит к простым системам уравнений.

Базисные полиномы Лагранжа. Возьмем в качестве базиса P^m полиномы Лагранжа

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad i \in I.$$

Легко убедиться, что в этом базисе решением является

$$v(t) = \sum_{i=0}^m z_i L_i(t),$$

поскольку $L_i(t_i) = 1$ и $L_i(t_i) = 0$ для $i \neq j$ (т.е. матрица системы диагональна). Для определения значения функции v в произвольной точке t необходимо предварительно вычислить значения всех L_i в этой точке.

Если обозначить $\Pi(t) = \prod_{j=0}^m (t - t_j)$, то

$$L_i(t) = \frac{1}{t - t_i} \frac{\Pi(t)}{\Pi'(t_i)}.$$

Базис Лагранжа удобен, когда нужно строить большое число интерполяционных полиномов для разных исходных данных z_i на одних и тех же точках t_i . Полиномы L_i зависят только от t_i , поэтому достаточно построить таблицы L_i и ограничиться их однократным вычислением.

Базисные полиномы Ньютона. Рассмотрим базис P^m , состоящий из полиномов Ньютона:

$$N_0(t) = 1, \quad N_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} (t - t_j), \quad i = 1, \dots, m.$$

Легко показать, что система уравнений в этом случае имеет нижнюю треугольную матрицу. Действительно, из вида интерполяционного полинома

$$\alpha(t) = \sum_{j=0}^m c_j N_j(t)$$

следует система уравнений для вычисления коэффициентов c_j

$$v(t_i) = \sum_{j=0}^m c_j N_j(t_i) = \sum_{j=0}^i c_j N_j(t_i) = z_i, \quad i \in I, \\ N_j(t_i) = 0 \quad \text{для } j > i.$$

Решение системы записывается в виде

$$c_0 = z_0, \quad c_i = [z_i - \sum_{j=0}^{i-1} c_j N_j(t_i)] / N_i(t_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Величины c_i называются разделенными разностями порядка i на значениях z_0, \dots, z_i .

Важное преимущество этого базиса состоит в том, что очень просто добавляются новые точки интерполяции, при этом все вычисленные ранее полиномы N_j и их коэффициенты не меняются. Это следует из

классического определения разделенных разностей. Для заданных точек t_0, \dots, t_m и функции f разделенная разность определяется с помощью рекуррентных соотношений:

$$d[t_i] = f(t_i), \quad d[t_i, t_j] = \frac{f[t_i] - f[t_j]}{t_i - t_j}, \quad i \neq j,$$

$$d[t_0, \dots, t_m] = \frac{d[t_0, \dots, t_{m-2}, t_{m-1}] - d[t_0, \dots, t_{m-2}, t_m]}{t_{m-1} - t_m},$$

где $d[t_0, \dots, t_m]$ -разделенная разность порядка m . Заметим, что значения разделенных разностей не зависят от нумерации точек t_i . Если σ обозначает множество точек и x и y - две дополнительные точки, то

$$d[\sigma, x, y] = \frac{d[\sigma, x] - d[\sigma, y]}{x - y}.$$

Следует отметить однако, что добавление новой точки приводит к появлению значительных осцилляции (рис. 37-39).

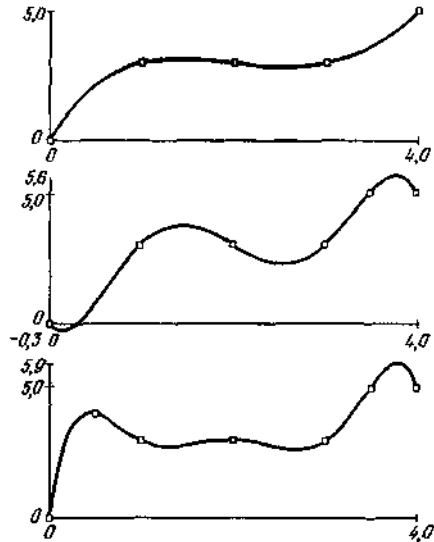


Рис. 37. Интерполяция с помощью полиномов Ньютона на 5-7 точках.

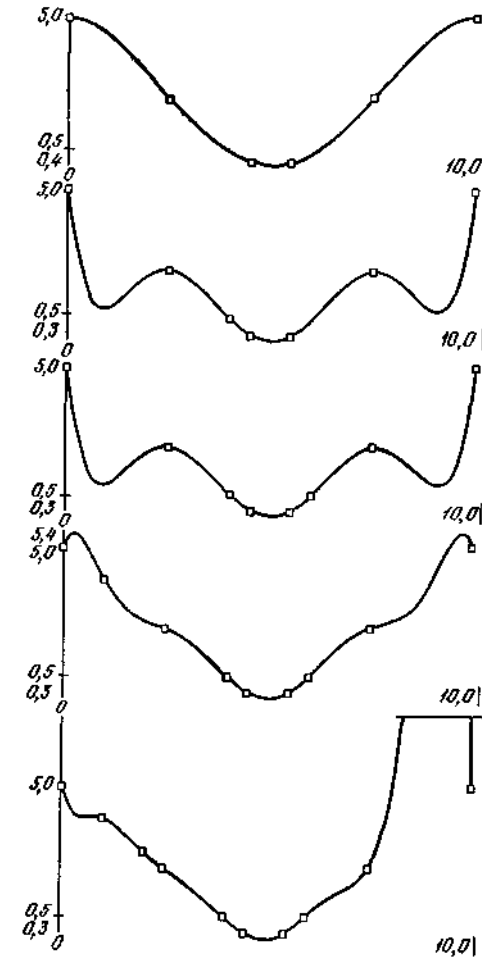


Рис. 38. Интерполяция с помощью полиномов Ньютона на 6-10 точках. Положение точек задается функцией $|x - 5|$.

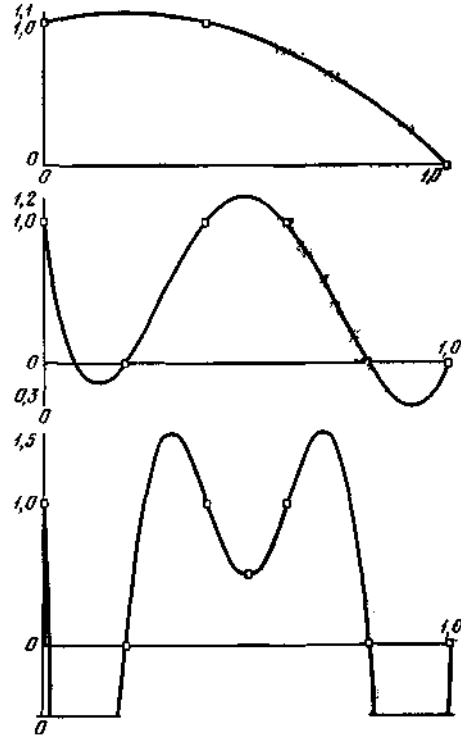


Рис. 39. Интерполяция с помощью полиномов Ньютона на 3, 6 и 7 точках. Добавление одной точки приводит к появлению значительных осцилляций.

Итак, мы двумя способами построили интерполяционный полином Лагранжа. Очевидно, выбор базисных полиномов оказывает существенное влияние на последующие вычисления. Из двух рассмотренных методов обычно отдают предпочтение базисным полиномам Ньютона с нахождением коэффициентов с помощью разделенных разностей. Для вычисления интерполяционного полинома на большом числе точек следует использовать интерполяционные сплайны.

Погрешность и сходимость. При решении задачи интерполяции нельзя упускать из виду такие важные свойства применяемого метода, как погрешность и сходимость. Дадим их общее определение и проиллюстрируем на примере интерполяционных полиномов

Лагранжа. Воспользуемся прежними обозначениями Ω , $\{\delta_i\}_{i \in I}$, V и др. Обозначим через P оператор интерполяции, который каждой функции f из W ставит в соответствие функцию Pf из V , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\delta_i(Pf) = \delta_i(f), \quad i \in I;$$

$$P^2f = P(Pf) = Pf.$$

Оператор интерполяции P называют точным на полиномах степени m , если для каждого полинома p из P справедливо соотношение $Pp = p$. Интерполяционный метод Лагранжа для $m + 1$ точек исходных данных является точным на полиномах степени, меньшей или равной m .

Погрешность интерполяции в общем виде определяется выражением

$$Rf(t) = f(t) - Pf(t).$$

Для нахождения погрешности интерполяционной формулы Ньютона воспользуемся легко проверяемым соотношением

$$f(t) = \sum_{i=0}^m d[t_0, \dots, t_i] N_i(t) + d[t_0, \dots, t_m, t] \Pi(t).$$

Отсюда получим выражение для ошибки

$$Rf(t) = d[t_0, t_1, \dots, t_m, t] \Pi(t).$$

В общем случае, если для полиномов степени m интерполяция осуществляется точно, для произвольной функции ошибку находят по формуле Тейлора, предполагая функцию f дифференцируемой $m + 1$ раз. При этом получают два выражения

$$Rf(t) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \Pi(t), \quad a \leq \xi \leq b, \quad Rf(t) = \int_a^b K_m(x, t) f^{(m+1)}(x) dx,$$

где K — функция ядра ошибки.

Рассмотрим теперь проблему сходимости. Пусть P_m — интерполяционный полином для функции f по $m+1$ точкам. Должна ли ошибка интерполяции Rf стремиться к нулю, если m стремится к бесконечности? Для положительного ответа на этот вопрос надо наложить сильные ограничения на f (непрерывности самой функции и ее производных недостаточно) — функция f должна быть аналитической на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} |f(t) - P_m(t)| = 0.$$

Напомним, что функция f называется аналитической на $[a, b]$, если существуют такие a , и c , что f допускает разложение в степенной ряд, сходящийся на $[a, b]$:

$$f(t) = a_0 + a_1(t - c) + \dots + a_i(t - c)^i + \dots$$

Достаточное условие аналитичности функции f состоит в том, что все ее производные должны быть ограничены на $[a, b]$. Например,

$e^t, \sin t, \cos t$ аналитичны на любом интервале, $\operatorname{tg} t$ - на интервале $[a, b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$.

Следует отметить, что исследование сходимости различных методов интерполяции, аппроксимации или сглаживания позволяет довольно объективно оценить их эффективность. Однако для этого используются сложные математические приемы, описание которых выходит за рамки данной книги.

Интерполяционные полиномы Эрмита

Этот тип полиномов является обобщением интерполяционных полиномов Лагранжа и используется тогда, когда заданы не только значения функции, но также и касательные в данных точках. Таким образом, число условий удваивается и интерполяционный полином минимальной степени будет принадлежать пространству, размерность которого в два раза больше, чем в предыдущем случае. Здесь будут рассмотрены только первые производные, хотя обобщение можно распространить и на случай производных более высокого порядка.

Исходные данные:

1) $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$;

2) $\{\delta_i\}_{i \in I}, I = \{0, 1, \dots, 2m + 1\}$, причем

$$\delta_i(f) = f(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

$$\delta_i(f) = f'(t_i), \quad i = m + 1, \dots, 2m + 1,$$

где $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$;

3) $V = P^{2m+1}$ - множество полиномов степени, меньшей или равной $2m + 1$. Размерность этого векторного пространства равна $2m + 2$.

4) $z_i \in \mathbb{R}, i \in I$, где первые $m + 1$ значений соответствуют ординатам точек с абсциссами t_i , остальные - коэффициентам наклона касательных в этих точках.

■ Рассмотрим сначала частный случай: $m = 1, t_0 = 0, t_1 = 1$. Введем базисные полиномы следующего вида:

$$\varphi_0(t) = (2t + 1)(1 - t^2), \quad \varphi_2(t) = t(1 - t^2),$$

$$\varphi_1(t) = (3 - 2t)t^2, \quad \varphi_3(t) = (t - 1)t^2.$$

Это полиномы третьей степени, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\varphi_i(j) = \delta_{i,j}, \quad \varphi'_i(j) = \delta_{i-2,j}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad j = 0, 1,$$

где $\delta_{i,j} = 1$, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$.

Интерполяционный полином Эрмита для этого случая имеет вид

$$v(t) = z_0 \varphi_0(t) + z_1 \varphi_1(t) + z_2 \varphi_2(t) + z_3 \varphi_3(t),$$

что эквивалентно выражению с использованием оператора интерполяции

$$Pf(t) = \delta_0(f) \varphi_0(t) + \delta_1(f) \varphi_1(t) + \delta_2(f) \varphi_2(t) + \delta_3(f) \varphi_3(t).$$

■ Переходя к общему случаю, попытаемся записать интерполяционный полином Эрмита в виде

$$v(t) = \sum_{i=0}^{2m+1} z_i \varphi_i(t), \quad \varphi_i \in V,$$

где полиномы φ_i должны удовлетворять следующим условиям:

$$\varphi_i(t_j) = \delta_{i,j}, \quad \varphi'_i(t_j) = \delta_{i-m,j}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m + 1, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

которые позволяют их искать в виде

$$\varphi_i(t) = u_i(t) L_i^2(t), \quad \varphi_{i+m+1}(t) = v(t) L_i^2(t), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где L_i - полином Лагранжа ($L_i(t_j) = \delta_{i,j}$). Проводя вычисления, получаем

$$v(t) = \sum_{i=0}^m z_i [1 - 2(t - t_i) L_i(t_i)] L_i^2(t) + \sum_{i=0}^m z_{i+m+1} (t - t_i) L_i^2(t).$$

Интерполяционный полином Эрмита является единственным и интерполяция является точной на полиномах степени $2m + 1$. Ошибка интерполяции равна

$$Rf(t) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} [\Pi(t)]^2, \quad \text{где } a \leq \xi \leq b.$$

В заключение отметим, что полиномиальную интерполяцию имеет смысл применять лишь для небольшого числа точек (не больше пятнадцати) из-за того, что вместе с числом точек растет степень полинома и имеют место большие осцилляции в промежутках между точками (рис. 37-39). Базис Лагранжа должен применяться в тех случаях, когда вычисляется большое число интерполяционных полиномов на одних и тех же точках, поскольку система уравнений получается диагональной. В других случаях обычно используют базис Ньютона, приводящий к треугольной системе, а использование разделенных разностей позволяет легко добавлять новые точки интерполяции.

Кусочная полиномиальная интерполяция

С помощью кусочной полиномиальной интерполяции можно обойти упомянутые выше затруднения и строить интерполирующие функции на большом числе точек. Идея состоит в том, чтобы строить независимо друг от друга полиномы на каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$, сшивая их между собой. Для этой цели можно использовать также и сплайны, но они будут рассмотрены в других разделах.

В качестве исходных данных возьмем следующие:

1) $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$;

2) $\delta_i(f) = f(t_i), a = t_0 < \dots < t_m = b$;

3) $z_i \in \mathbb{R}$.

Пример 1. Рассмотрим наиболее простой метод интерполяции: на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ Pf является интерполяционным полиномом Лагранжа, построенным для двух точек t_i и t_{i+1} :

$$Pf(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} z_{i+1} + \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} z_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

а на всем отрезке $[a, b]$ Pf является непрерывной функцией, состоящей из таких кусков. Достоинством метода является его равномерная сходимости при увеличении числа точек:

$$\|f - Pf\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - Pf(t)| \leq C \max_i |t_{i+1} - t_i|$$

(C -постоянная, зависящая только от f). Недостаток метода состоит в том, что решение представляет собой недифференцируемую функцию.

Пример 2. Чтобы устранить этот недостаток, можно потребовать, чтобы производные были непрерывны в точках шивки t_i . Проведем кусочный полином таким образом, чтобы для $t \in [t_0, t_2]$ он представлял собой интерполяционный полином Лагранжа второй степени, проведенный по точкам t_0, t_1, t_2 , а на каждом следующем участке для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 2, \dots, m - 1$, состоял бы из полиномов P_i , таких, что $P_i(t_i) = z_i$, $P_i(t_{i+1}) = z_{i+1}$ и $P'_i(t_i) = P'_{i-1}(t_i)$,

$$P_i(t) = z_i \left(1 - \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right)^2 \right) + z_{i+1} \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) + P'_{i-1}(t_i) \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right).$$

На отрезке $[a, b]$ Pf является дифференцируемой, кусочно-полиномиальной функцией второй степени. При использовании метода нужно соблюдать осторожность, поскольку возможно накопление ошибок при вычислении производных.

Пример 3. Предположим, что кроме значений функции в точках известны также значения ее производной. В этом случае на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ можно построить интерполяционный полином Эрмита. Обозначим через λ_i производную функции f в точке t_i и положим

$$\tau = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i},$$

$t \in [t_i, t_{i+1}]$. Тогда

$$Pf(t) = \varphi_0(\tau)f(t_i) + \varphi_1(\tau)f(t_{i+1}) + \varphi_2(\tau)(t_{i+1} - t_i)\lambda_i + \varphi_3(\tau)(t_{i+1} - t_i)\lambda_{i+1},$$

где функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ определены выше.

Если производная неизвестна, можно попытаться вычислить ее приближенное значение. Это можно сделать двумя способами; один

(общий) связан с применением сплайнов и рассмотрен ниже, другой (локальный) рассмотрен в следующем примере.

Пример 4. Производную в точках t_i оценивают по значению производной интерполяционного полинома Лагранжа, построенного на точках t_{i-p}, \dots, t_{i+p} , где p - малое целое (для точек t_0 и t_m берут $2p + 1$ точек с одной стороны). Например, для $p = 2$ имеем

$$\lambda_i = \frac{t_i - t_{i+1}}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})} f(t_{i-1}) + \frac{2t_i - t_{i-1} - t_{i+1}}{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})} f(t_i) + \frac{t_i - t_{i-1}}{(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i-1})} f(t_{i+1}).$$

В случае когда точки эквидистантны, формулы упрощаются. Если $h = t_{i+1} - t_i$, то

$$\lambda_i = \frac{1}{h} [f(t_{i-1}) + 2f(t_i) + f(t_{i+1})].$$

Таким образом, на каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ строится полином третьей степени, интерполяционная функция на отрезке $[t_0, t_m]$ непрерывна и дифференцируема, а метод интерполяции обладает сходимостью.

Интерполяция сплайнами

Со времени введения сплайнов Шёнбергом им посвящено большое число работ, в которых даны их различные представления. Мы будем использовать представление для кубических сплайнов, и приведем некоторые обобщения.

В качестве исходных данных возьмем следующие:

- 1) $\Omega = [a, b]$;
- 2) $\delta_i(f) = f(t_i)$, $a < t_0 < t_1 < \dots < t_n < b$;
- 3) $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$.

Кубические сплайны. Вернемся к примеру 3, где предполагались известными производные λ_i функции f в точках t_i . Обозначим

$$\tau = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad \text{для } t_i \leq t \leq t_{i+1}, \text{ тогда}$$

$$f_\lambda(t) = Pf(t) = \varphi_0(\tau)f(t_i) + \varphi_1(\tau)f(t_{i+1}) + \varphi_2(\tau)(t_{i+1} - t_i)\lambda_i + \varphi_3(\tau)(t_{i+1} - t_i)\lambda_{i+1}.$$

Функция f_λ является непрерывной и дифференцируемой на отрезке $[t_0, t_n]$.

Если производная функции f в точке t_i неизвестна, f_λ можно рассматривать как семейство функций, зависящих от параметра

$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда λ_i можно определить с помощью двух критериев.

Первый критерий:

$$f''_{\lambda}(t_0) = 0;$$

f_{λ} непрерывна и дважды дифференцируема на (t_0, t_n) ;

$$f''_{\lambda}(t_n) = 0.$$

Второй критерий: из всех функций $f_{\lambda}(t)$ выбирается такая функция, которая обращает в минимум

$$J(\lambda) = \int_{t_0}^{t_n} (f''_{\lambda}(t))^2 dt.$$

Первый критерий соответствует выбору регулярной функции, второй позволяет выбрать функцию с минимальной кривизной; последнее условие является основным свойством кубического сплайна. В действительности оба критерия эквивалентны, так как приводят к одному результату: из первого следует система $n+1$ линейных уравнений, идентичная системе, к которой приводит минимизация выражения $J(\lambda)$ ($J'(\lambda) = 0$).

Этот метод интересен тем, что получаемая система уравнений имеет мною нулевых коэффициентов, т. е. не требует много машинного времени и места в памяти. Другим его достоинством является вычислительная устойчивость. Сходимость метода пропорциональна h^2 , где $h = \max |t_{i+1} - t_i|$. Можно получить сходимость порядка h^4 , изменяя граничные условия $f''(t_0) = 0$ и $f''(t_n) = 0$. Примеры интерполяции кубическими сплайнами приведены на рис. 40-42.

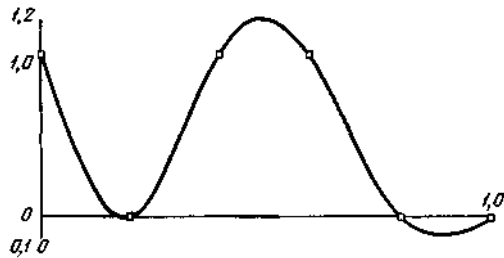


Рис 40. Интерполяция сплайном на 6 точках (ср. с рис. 39)

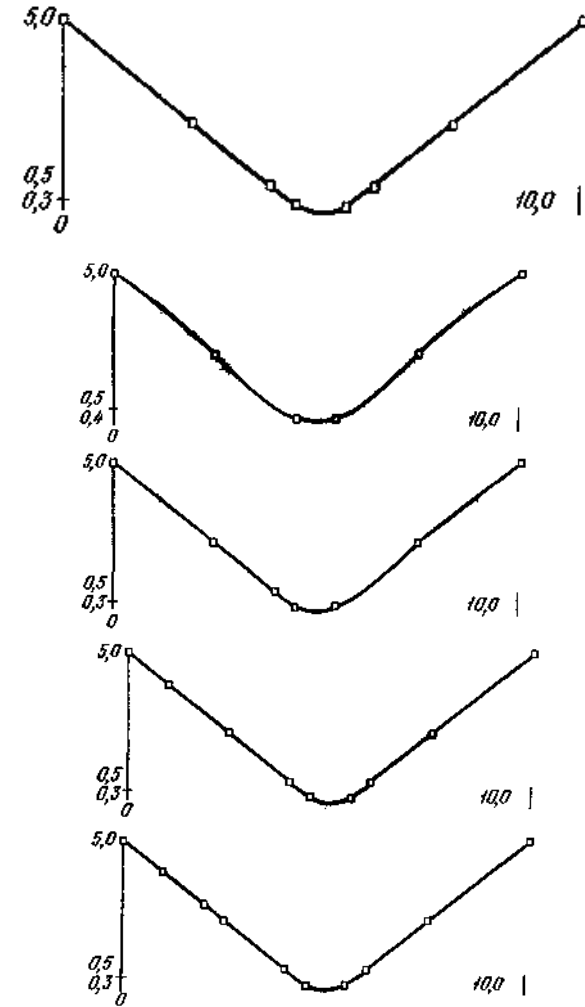
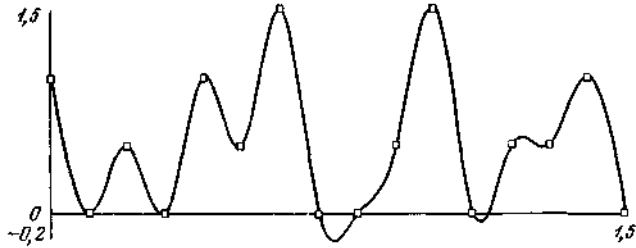


Рис. 41. Интерполяция сплайном на 6-10 точках. Положение точек задается функцией $|x - 5|$ (ср. с рис. 38)



Рк. 42. Интерполяция сплайном на 16 точках Интерполяционная кривая хорошо описывает произвольные данные.

Полиномиальные сплайны. Полиномиальным сплайном степени q на n точках t_i называют функцию s , которая является полиномом степени $2q - 1$ на каждом интервале (t_i, t_{i+1}) , $(i = 1, \dots, n - 1)$ и полиномом степени $q - 1$ на интервалах $[a, t_1)$ и $(t_n, b]$ и имеет непрерывную производную $s^{(2q-2)}$. Обозначим через S множество функций s , которые могут быть представлены в виде

$$s(t) = \sum_{j=0}^{q-1} a_j t^j + \sum_{i=1}^n d_i \frac{(t - t_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!},$$

где $(t - t_i)_+ = t - t_i$ при $t - t_i > 0$ и $(t - t_i)_+ = 0$ при $t - t_i \leq 0$

$$\text{и } \sum_{i=1}^n d_i (t_i)^k = 0, \quad k = 0, \dots, q - 1.$$

Отметим, что на каждом интервале функция s полностью определяется своим значением и значением производных до порядка $q - 1$ на обоих концах интервала. Для известных данных z_i функцию s отыскивают из условий $s(t_i) = z_i$, а также из условия минимизации

$$\int_a^b [s^{(q)}(t)]^2 dt.$$

На практике чаще всего встречается рассмотренный выше случай $q = 2$. Для $q = 3$ существующие методы дают удовлетворительные результаты только для ограниченного числа точек ($n \leq 30$).

Помимо интерполяции, сплайны можно использовать и в других задачах. Ниже будут рассмотрены B -сплайны, метод наименьших квадратов и др. Во всех случаях придается большое значение выбору «хороших» базовых функций на множестве S .

Сплайны общего типа. Из изложенного выше ясно, что сплайн можно определить двумя способами: исходя из взаимного согласования простых функций и из решения задачи минимизации. Третье определение использует понятие «воспроизводящего ядра».

Это определение мы используем ниже в примере, когда будем рассматривать задачи с двумя пространственными переменными.

В теории сплайнов показывается, что второе определение допускает обобщение в двух направлениях:

- обобщение критерия минимизации: если D -дифференциальный оператор, можно искать минимум $\int_a^b [Df(t)]^2 dt$;

- обобщение используемых функционалов: $\varphi(f) = \max_{a < t < b} |f(t)|$, либо

$$\varphi(f) = \max_{a < t < b} |f'(t)|, \quad \text{либо} \quad \varphi(f) = \max_{a < t < b} |\alpha f(t) + \beta f'(t)|, \quad \text{либо} \quad \varphi(f) = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Большой интерес может представлять также сплайн «под напряжением», критерием для определения которого является минимизация выражения

$$\int_a^b \{ [f''(t)]^2 + u^2 [f'(t)]^2 \} dt.$$

На каждом интервале получают функцию вида

$$\alpha + \beta x + \gamma \operatorname{sh} px + \delta \operatorname{ch} qx.$$

2.3.2.6. Сглаживание

Методы сглаживания используются в тех случаях, когда необходимо найти функцию, проходящую вблизи большого числа заданных точек. Мы рассмотрим три метода сглаживания:

- метод наименьших квадратов;
- сглаживающие сплайны;
- функции Безье и B -сплайны.

Метод наименьших квадратов

Рассмотрим два векторных пространства V и W конечных размерностей. Пусть n и m соответственно размерности V и W , $n \leq m$. Обозначим через $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ и $(w_i)_{1 \leq i \leq m}$ базисные функции пространств V и W . Предположим, что в W определено скалярное произведение, обозначаемое $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т. е. операция, которая каждой паре (x, y) элементов из W ставит в соответствие действительное число $\langle x, y \rangle$ из R , такое что

1) $\forall x \in W \langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\forall x, y \in W \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

3) $\forall \lambda, \mu \in R, \forall x, y, z \in W \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$.

(В качестве упражнения возьмите $W = R^2$ и определите скалярное произведение в евклидовой геометрии.)

С помощью скалярного произведения можно определить понятие расстояния $\varphi(x - y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ и довольно просто производить вычисления.

При использовании метода наименьших квадратов задача сглаживания формируется следующим образом:

- 1) пусть T -линейный оператор преобразования V в W полного ранга n , т. е. обладает свойством: $Tv = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;
- 2) пусть w - элемент W ;
- 3) найти элемент \bar{v} из V , такой что

$$\varphi(T\bar{v} - w) \leq \varphi(Tv - w), \quad \forall v \in V.$$

Предположим, существует такое \bar{v} , что

$$\varphi(T\bar{v} - w) = \min_{v \in V} \varphi(Tv - w).$$

Тогда решение \bar{v} должно удовлетворять вариационному уравнению

$$\langle T\bar{v}, Tv \rangle = \langle w, Tv \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Поскольку V имеет конечную размерность, это выражение можно записать в виде

$$\langle T\bar{v}, Tv_i \rangle = \langle w, Tv_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$. Введем обозначения:

- вектор $\lambda = (\lambda_j), 1 \leq j \leq n$;
- $\tau = (\tau_{ij})$, где $\tau_{ij} = \langle Tv_i, Tv_j \rangle, 1 \leq i, j \leq n$;
- $\beta = (\beta_i)$, где $\beta_i = \langle w, Tv_i \rangle, 1 \leq i \leq n$.

Тогда решение задачи сводится к решению системы n уравнений с n неизвестными:

$$\tau \lambda = \beta.$$

Таким же образом могут быть сформулированы другие задачи и методы их решения. Здесь V - пространство аппроксимирующих функций, W - пространство наблюдений. Поясним изложенное выше на примере. Пусть

- $V = P^{m-1}$ - множество полиномов степени, меньшей или равной $n-1$;
- $W = R^m$ со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i;$$

- t_i - действительные числа ($i = 1, \dots, m$) и T -линейный оператор преобразования V в W ,

$$Tp = (\delta_i p)_{1 \leq i \leq m} = (p(t_i)), \quad p \in V;$$

- z - элемент R^m .

Решение задачи сглаживания методом наименьших квадратов состоит в нахождении полинома \bar{p} степени не больше $n - 1$, который минимизирует выражение

$$\sum_{i=1}^m (p(t_i) - z_i)^2.$$

Если через v_j обозначить базисные полиномы V , получим

$$\tau_{ij} = \langle Tv_i, Tv_j \rangle = \sum_{k=1}^m v_i(t_k) v_j(t_k), \quad \beta_i = \sum_{k=1}^m z_k v_k(t_i).$$

Допустим также, что

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}},$$

где $a_{ij} = v_i(t_j)$, тогда $\tau = A^t A$ и $\beta = A^t z$, где A^t - транспонированная матрица A , и система линейных уравнений запишется в виде

$$A^t A \lambda = A^t z.$$

Эта система может быть решена с помощью методов, описанных в последующих разделах. Однако вычисление матрицы $A^t A$ (порядка n) в процессе решения системы может снизить точность решения. Поэтому предпочитают использовать другой метод, который мы кратко опишем здесь. В его основе лежит метод Гивенса в котором матрица A представляется в виде произведения двух матриц $A = QS$, где Q - ортогональная матрица порядка n , а матрица R имеет следующую структуру:

$$S = \begin{vmatrix} \tilde{S} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix},$$

где \tilde{S} - верхняя треугольная матрица порядка n . Тогда уравнение $A^t A \lambda = A^t z$ можно записать в виде $S^t Q^t QS \lambda = S^t Q^t z$, что эквивалентно

$$S^t S \lambda = S^t Q^t z.$$

Обозначим через $[Q^t z]_n$ вектор, принадлежащий R^n и состоящий из и первых компонентов $Q^t z$. Тогда

$$\tilde{S} \tilde{S} \lambda = \tilde{S}^t [Q^t z]_n,$$

где \tilde{S} - обратимая матрица, а $\tilde{S}^t \tilde{S}$ является разложением Холецкого матрицы $A^t A$. Отсюда

$$\tilde{S} \lambda = [Q^t z]_n.$$

Матрица полученной системы является верхней треугольной, и систему легко решить. Примеры решения приведены на рис. 43 и 44.

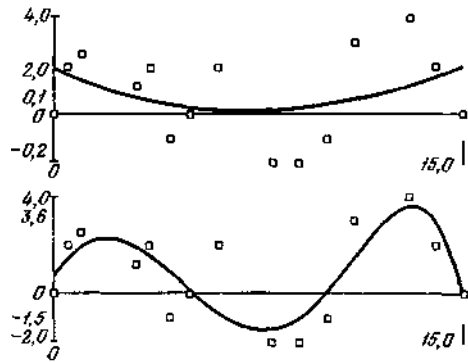


Рис. 43. Сглаживание методом наименьших квадратов полиномами 3 и 5 степени.

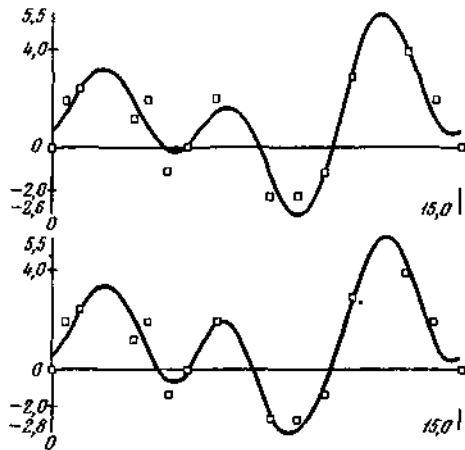


Рис. 44. Сглаживание методом наименьших квадратов тригонометрическими полиномами 3 и 5 степени:

$$\sum x_i \sin(2\pi(x_i - a)/(b - a)) + \sum y_i \cos(2\pi(x_i - a)/(b - a)).$$

Описанный метод прост, эффективен, обладает высокой вычислительной устойчивостью. Кроме того, можно показать, что

$$\sum_{i=1}^m (\bar{p}(t_i) - z_i)^2 = \sum_{i=1}^m ((Q^T z)_i)^2,$$

и тем самым получить информацию об ошибках сглаживания. Отметим также, что если $m = n$ и удачно выбраны точки t_i и базовые функции v_i , то можно получить систему уравнений с диагональной матрицей. В рассмотренном выше примере вместо полиномов можно использовать другие функции, например B -сплайны, которые описаны ниже. Задачу можно обобщить, рассматривая пространство функций с дополнительными ограничениями линейного типа. В таких случаях систему уравнений решают методом неопределенных множителей Лагранжа.

Сглаживающие сплайны

Рассмотрим пример применения кубических сплайнов для сглаживания (рис. 45-47).

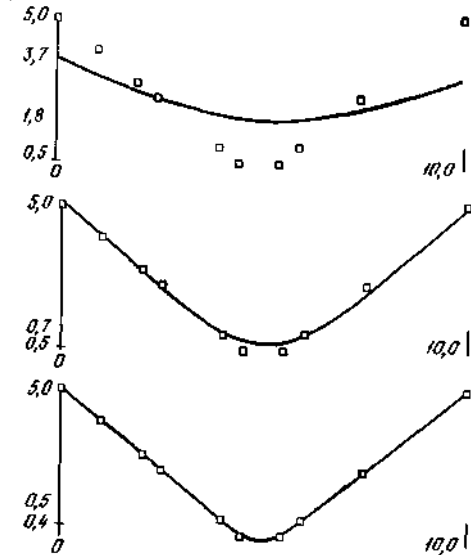


Рис. 45. Сглаживание кубическим сплайном на 10 точках с различными параметрами сглаживания ρ . Положение точек задается функцией $|x - 5|$:

- $\rho=10$ (результат близок к прямой, полученной по методу наименьших квадратов);
- $\rho = 100$ (приемлемый результат для произвольных данных);
- $\rho = 500$ (результат близок к интерполяционному сплайну).

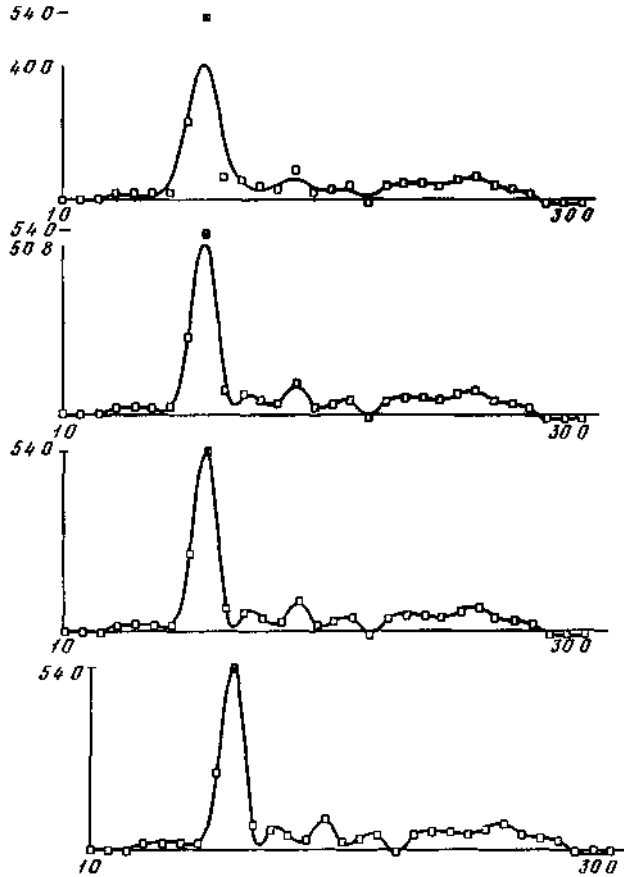


Рис. 46. Сглаживание кубическим сплайном произвольных данных с различными значениями параметра сглаживания $\rho(10, 100, 500, 10000)$.

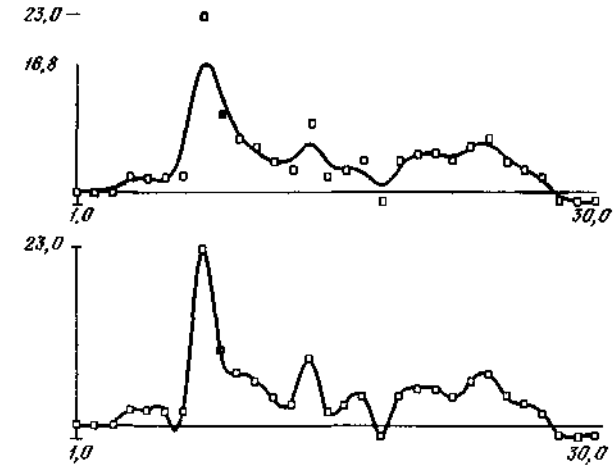


Рис. 47. Сглаживание кубическим сплайном данных, приведенных на рис. 46, за исключением точки, помеченной x , ордината которой уменьшена с 54 до 10, для двух значений параметра сглаживания $\rho [10, 500]$.

Пусть ρ -действительное положительное число. Тогда на данных $(t_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}$ сглаживающий сплайн f_λ будет функцией, которая минимизирует критерий

$$J_\rho(f) = \int_b^a (f''(t))^2 dt + \rho \sum_{i=1}^n (f(t_i) - z_i)^2.$$

Решение будет кубическим сплайном (кусочный полином третьей степени на каждом интервале, дважды дифференцируемый с непрерывной второй производной).

От выбора ρ существенно зависят свойства сплайна. Для больших значений ρ сплайн пройдет близко к точкам, а для малых значений ρ сплайн будет ближе к прямой, проведенной методом наименьших квадратов. Существует метод автоматического выбора ρ (метод возрастающего признания), но при его использовании возникают трудности в процессе построения сплайна на неэквидистантных точках.

Функции Бэзе (рис. 48, 49)

Пусть f -действительная функция, определенная на отрезке $[0, 1]$.

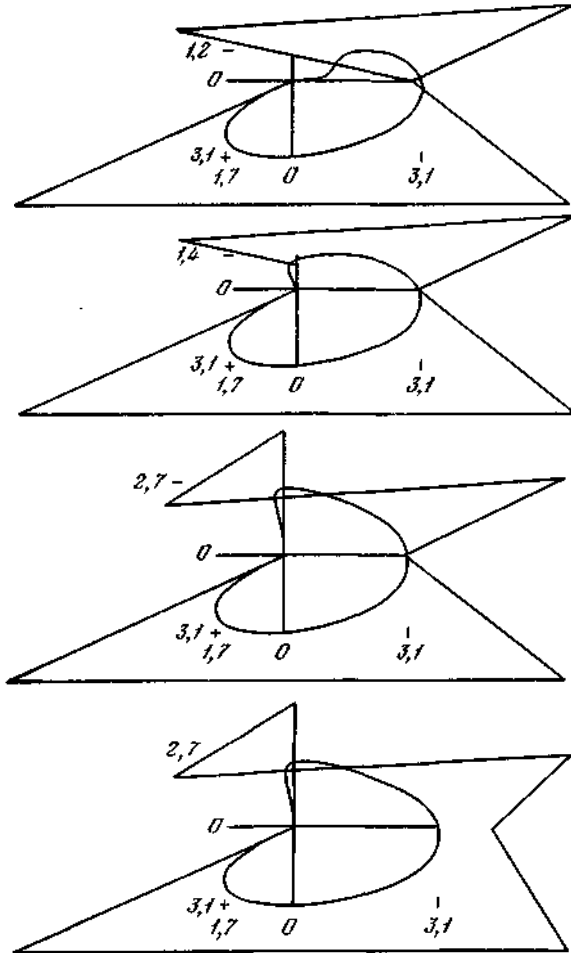


Рис. 48. Сглаживание с помощью кривых Безье на многоугольниках с координатами вершин:

- (0,0), (3,0), (-3,2), (7,3), (3,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0);
- (0,0), (0,1), (-3,2), (7,3), (3,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0);
- (0,0), (0,5), (-3,2), (7,3), (3,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0);
- (0,0), (0,5), (-3,2), (7,3), (5,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0).

Отметим касательные к кривой в крайних точках многоугольника, изменение всей кривой при изменении положения одной точки и образование петли за счет расположения данных.

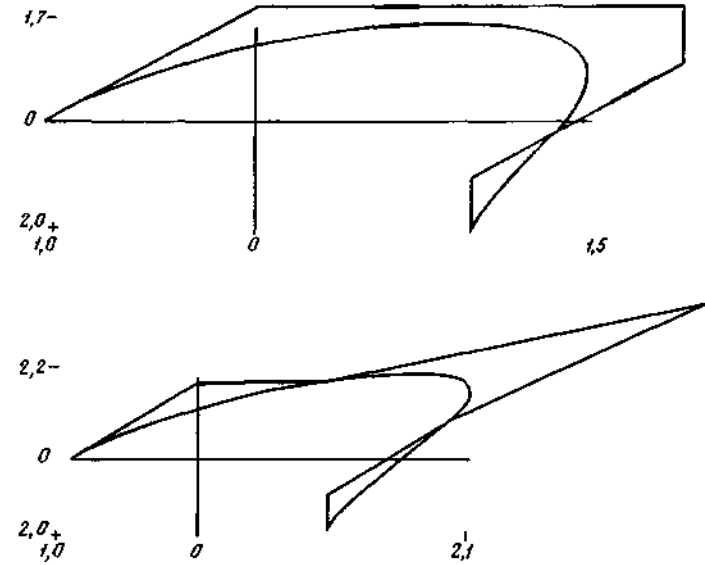


Рис. 49. Сглаживание с помощью кривых Безье на незамкнутых многоугольниках, отличающихся в данной точке.

Полиномом Бернштейна степени n , связанным с функцией f , называют

$$B_n(f; t) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \Phi_{n,i}(t),$$

где $\Phi_{n,i}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$. Напомним, что

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Функции $\Phi_{n,i}(t)$ удовлетворяют следующим свойствам:

- $\Phi_{n,i}(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$;
- $\sum_{i=0}^n \Phi_{n,i}(t) = 1; \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right) \Phi_{n,i}(t) = t$

и могут служить базисными полиномами степени, меньшей или равной n . Любой полином P_n степени n может быть представлен в виде

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n b_i \Phi_{n,i}(t).$$

Если принять

$$\Delta^0 b_i = b_i, \quad \Delta b_i = b_{i+1} - b_i, \quad \Delta^{k+1} b_i = \Delta(\Delta^k b_i),$$

получим

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k b_0 t^k.$$

Если b является последовательностью действительных чисел (b_0, b_1, \dots, b_n) , функцией Бэзе, связанной с b , называется полином

$$B_n(b; t) = \sum_{i=0}^n b_i \Phi_{n,i}(t).$$

Вычисление функций Бэзе осуществляется по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} b_{i,0} &= b_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ b_{i,j}(t) &= t b_{i,j-1}(t) + (1-t) b_{i-1,j-1}(t), \quad t \in [0, 1], \\ B_n(b, t) &= b_{n,n}(t). \end{aligned}$$

Подобные формулы существуют и для производных:

$$\begin{aligned} b_{i,0}^{(k)} &= \Delta^k b_i, \\ b_{i,j}^{(k)}(t) &= t b_{i,j-1}^{(k)}(t) + (1-t) b_{i-1,j-1}^{(k)}(t), \\ B_n^{(k)}(b, t) &= b_{n,n-k}^{(k)}(t). \end{aligned}$$

В-сплайны. Пусть $\Pi = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ — возрастающая последовательность действительных чисел и

$$g_m(s, t) = (s-t)^{m-1} = \begin{cases} (s-t)^{m-1}, & \text{если } s \geq t, \\ 0, & \text{если } s < t. \end{cases}$$

B -сплайн (степени m) $M_{i,m}(t)$ определяется как разделенная разность порядка m функции $g_m(s, t)$ по отношению к аргументу s на точках

$t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}$:

$$d[t_i] = g_m(t_i, t), \quad d[t_i, t_j] = (g_m(t_i, t) - g_m(t_j, t)) / (t_i - t_j),$$

$$M_{i,m}(t) = d[t_i, \dots, t_{i+m}] = \frac{d[t_i, \dots, t_{i+m-1}] - d[t_i, \dots, t_{i+m-2}, t_{i+m}]}{t_{i+m-1} - t_{i+m}}.$$

■ Нормализованный B -сплайн $N_{i,m}(t)$ определяется следующим образом:

$$N_{i,m}(t) = (t_{i+m} - t_i) M_{i,m}(t).$$

Если $t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+k_i-1}$, $(1 \leq k_i \leq m)$, обе функции $N_{i,m}$ и $M_{i,m}$ имеют производные лишь до порядка $m - k_i - 1$. Таким образом, наличие совмещенных точек может привести к нарушению непрерывности некоторых производных.

Если $m > 1$ и Π не имеет более $m - 1$ совмещенных точек, то $M_{i,m}$ и $N_{i,m}$ являются непрерывными функциями. Ниже рассматривается этот случай.

Элементы Π называются узлами B -сплайна.

Из рекуррентных формул для вычисления разделенных разностей можно получить формулы для нахождения функции $N_{i,m}(t)$

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [t_i, t_{i+1}); \\ 0, & \text{если } t \notin [t_i, t_{i+1}); \end{cases}$$

$$N_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m} - t}{t_{i+m} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

■ Эти функции обладают следующими свойствами:

- 1) $N_{i,m} > 0$, $t \in (t_i, t_{i+m})$;
- 2) $N_{i,m} = 0$, $t \notin (t_i, t_{i+m})$;
- 3) $\sum_{i=1}^m N_{i,m}(t) = 1$;

4) существуют такие числа ξ_1, \dots, ξ_m , что $\sum_{i=1}^m \xi_i N_{i,m}(t) = t$. Точки ξ_i

называются узловыми точками B -сплайна.

Сплайном степени m , определенным на отрезке $[a, b]$ называют функцию $S_m(\alpha, t)$, определяемую следующими соотношениями:

$$1) S_m(\alpha, t) = \sum_{j=0}^{m+n+1} \alpha_j N_{j,m+1}(t), \quad t \in [a, b];$$

$$2) \Pi = \{ \underbrace{t_0, \dots, t_0}_{m+1}, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, \underbrace{t_n, \dots, t_n}_{m+1} \};$$

$$t_0 = a; \quad t_n = b; \quad t_i \neq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$3) \alpha = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq m+n+1}; \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Кубический сплайн, определенный выше, является сплайном третьей степени. S_m является полиномом степени, меньшей или равной m , и на каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ имеет производные до порядка $m - 1$.

Отметим, что если

$$\Pi = \{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m+1} \},$$

то функции $N_{j,m+1}$ являются полиномами Бернштейна

Если требуется найти сплайн не на отрезке $[a, b]$, а на всем множестве \mathbb{R} , он может быть определен следующим образом:

$$\Pi = \{ t_i \}_{i \in \mathbb{Z}},$$

$$S_m(\alpha, t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j N_{j,m+1}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Для вычисления этих функций можно воспользоваться следующими формулами:

$$S_m(\alpha, t) = \sum_{i=t-m}^t \alpha_i N_{i,m+1}(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}];$$

$$\alpha_{i,0} = \alpha_i, \quad l-m \leq i \leq l;$$

$$\alpha_{i,j}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m-j+1}-t_i} \alpha_{i,j-1}(t) + \frac{t_{i+m-j+1}-t}{t_{i+m-j+1}-t_i} \alpha_{i-1,j-1}(t);$$

$$1 \leq j \leq m, \quad l-m+j \leq i \leq l;$$

$$S_m(\alpha, t) = \alpha_{i,m}(t).$$

Существуют другие алгоритмы вычисления функций S_m и ее производных.

Таким образом, B -сплайны $N_{j,m+1}$ для фиксированного m являются базисными функциями для пространства сплайнов степени m . Их практическая польза состоит в том, что для вычисления можно использовать приведенные выше рекуррентные формулы (подобные тем, которые использовались при вычислении функций Безье). **Аппроксимирующие функции Безье и сплайны.** Аппроксимирующей функцией Безье степени $n \geq 1$ для функции f на отрезке $[0, 1] \in \mathbb{R}$ называют полином Бернштейна степени n , связанный с f выражением

$$B_n(f, t) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \Phi_{n,i}(t).$$

Аппроксимирующим сплайном функций f на $[0, 1] \in \mathbb{R}$ называют следующую функцию: $S_m(f, t) = \sum_{i=0}^{m+n+1} f(\xi_i) N_{i,m+1}(t)$,

где $\Pi = \{t_0, \dots, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, \dots, t_n\}$, $t_0 = a$, $t_n = b$ и ξ_i определяются из уравнения

$$\sum_{i=0}^{m+n+1} \xi_i N_{i,m+1}(t) = t.$$

Аппроксимирующим сплайном функции f на всем множестве \mathbb{R} называют функцию

$$S_m(f, t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(\xi_i) N_{i,m+1}(t).$$

Перечислим несколько общих свойств определенных выше функций. Для функции f , заданной на $[0, 1] \in \mathbb{R}$ и непрерывной на нем, введем следующие обозначения:

- $V(f)$ - число изменений знака;
- $S(f)$ — число изменений знака монотонности;
- $T(f)$ - число изменений вогнутости.

Аппроксимирующие функции Безье и сплайны по отношению к функции f обладают следующими свойствами:

- число изменений знака уменьшается:
 $V(B_n(f)) \leq V(f)$ и $V(S_m(f)) \leq V(f)$;
- число изменений знака монотонности уменьшается:
 $S(B_n(f)) \leq S(f)$ и $S(S_m(f)) \leq S(f)$;
- число изменений вогнутости уменьшается:
 $T(B_n(f)) \leq T(f)$ и $T(S_m(f)) \leq T(f)$.

В ряде работ доказана справедливость этих соотношений.

Кроме указанных выше геометрических свойств аппроксимирующие функции Безье и сплайны обладают и другими полезными свойствами. В частности, можно показать, что на B -сплайн в отличие от функции Безье оказывает влияние малое число точек. Иными словами, изменение одного значения $f\left(\frac{i}{n}\right)$ оказывает влияние на $B_n(f, t)$ для всех $t \in [0, 1]$, в то время как для $S_m(f, t)$ это влияние ограничивается одной функцией $N_{i,t}$.

2.3.2.7. Аппроксимация

Приведем вкратце одну из формулировок задачи аппроксимации. Введем следующие обозначения:

- Ω - множество, принадлежащее \mathbb{R} ;
- f - функция, определенная на Ω , со значениями в \mathbb{R} ;
- V - конечномерное векторное пространство действительных функций, определенных на Ω , со значениями в \mathbb{R} ;
- W - векторное пространство, порожденное f и V ;
- $\|\cdot\|$ - норма в W .

Напомним, что норма является таким отображением W в \mathbb{R}^+ , что $\|g\| = 0$ тогда и только тогда, когда $g = 0$, кроме того,

$$\forall g \in W, \|\lambda g\| = |\lambda| \cdot \|g\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall g \in W,$$

$$\|g + h\| \leq \|g\| + \|h\|, \quad \forall g, h \in W.$$

В частности, норма может определяться скалярным произведением

$$\|g\| = (\langle g, g \rangle)^{1/2}.$$

Тогда задача аппроксимации заключается в следующем: найти (если существует) \tilde{f} -элемент пространства C , являющегося частью W , наиболее близкий к f в смысле нормы, т. е. найти функцию $\tilde{f} \in C$, такую что

$$\|f - \tilde{f}\| = \min_{g \in C} \|f - g\|.$$

Основные трудности, возникающие при теоретическом анализе задачи и ее решении, связаны со структурой пространства C и геометрическими свойствами нормы. Рассмотрим случай, когда $C = V$.

Наилучшая равномерная аппроксимация

Для этой задачи имеем

1) $\Omega = [0, 1]$;

2) V — подпространство векторного пространства непрерывных функций, отображающих Ω на R ;

3) $\|g\| = \max_{t \in [0, 1]} |g(t)|$.

Данная норма называется нормой максимума или равномерной нормой. Она определяет расстояние между двумя функциями как максимальное отклонение между их графиками. Задача имеет по крайней мере одно решение, но оно может быть неединственным, что приводит к затруднениям при составлении алгоритма решения. Единственность может быть обеспечена, если V удовлетворяет определенному условию, называемому условием Хаара. (Условие Хаара сводится к тому, чтобы любая функция $f(t) \in V$ имела не более $n - 1$ корня при $t \in \Omega$.)

Предположим, что V представляет собой множество полиномов степени, меньшей или равной n , т.е. будем искать решение в виде полинома $\bar{f} \in P_n$, расстояние которого от f минимально. Если \bar{f} является решением, то существуют $n + 2$ точки t_i , в которых

$$|f(t_i) - \bar{f}(t_i)| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - \bar{f}(t)|$$

и

$$f(t_{i+1}) - \bar{f}(t_{i+1}) = -(f(t_i) - \bar{f}(t_i)), i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Существует алгоритм для определения точек t_i и его обобщение.

Из изложенного видно, что наилучшая равномерная аппроксимация представляет собой весьма сложную задачу и вообще следует избегать такого типа норм, в выражениях для которых появляются операторы \max или \sup . Тем не менее, если функция f должна быть вычислена в большом числе точек за ограниченное время, может оказаться выгоднее искать именно наилучшую равномерную аппроксимацию на множестве полиномов. Подобные методы, как правило, используются при вычислении элементарных функций в алгоритмических языках высокого уровня.

Метод наименьших квадратов с непрерывными переменными

Условия задачи записываются следующим образом:

1) $\Omega = [a, b]$;

2) $\|g\| = \left(\int_a^b (g(t))^2 p(t) dt \right)^{1/2}$,

где непрерывная функция p отображает Ω в R^+ . В основе данной нормы лежит скалярное произведение $\langle g, h \rangle = \int_a^b g(t) h(t) p(t) dt$. Решение задачи \bar{f} существует и единственно. Его нахождение сводится к вычислению компонент \bar{f} в базовых функциях пространства V . Для этого необходимо решить систему из n уравнений с n неизвестными. Если $\{v_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ являются базовыми функциями V , то

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i v_i,$$

где $\bar{\alpha}_i$ являются решениями системы

$$\sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \int_a^b v_j(t) v_i(t) p(t) dt = \int_a^b f(t) v_i(t) p(t) dt, i = 1, \dots, n.$$

Для решения системы можно использовать методы, описанные в последующих разделах. Интерес представляет частный случай, когда базисные функции ортогональны:

$$\int_a^b v_i(t) v_j(t) p(t) dt = 0, i \neq j.$$

В этом случае матрица системы диагональна и $\bar{\alpha}_i$ легко определяются. Одна из таких систем базисных функций при $p \equiv 1$ представляет собой

$$\{1, \sin \pi t, \cos \pi t, \sin 2\pi t, \dots, \cos n\pi t\}.$$

Для этой ортогональной базы $\bar{\alpha}_i$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье функции f .

Если V представляет собой пространство полиномов степени не выше n , для него также можно построить ортогональный базис, пользуясь результатами, полученными в теории ортогональных полиномов (с другими p). Интерес к ним связан с наличием рекуррентных формул, помогающих вычислять отдельные полиномы. Определенная с их помощью функция \bar{f} также представляет собой равномерную аппроксимацию f , которая если и не является лучшей, то по крайней мере удовлетворительна (полиномы Чебышева).

Приведем основные типы ортогональных полиномов и рекуррентные формулы для их вычисления.

Полиномы Чебышева: $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, a = -1, b = 1,$

$$p_{n+1}(x) - 2xp_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x.$$

Полиномы Лагерра: $p(t) = -e^{-t}$, $a = 0$, $b = \infty$,

$$p_{n+1}(x) - (1 + 2n - x)p_n(x) + n^2p_{n-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 1 - x.$$

Полиномы Лежандра: $p(t) = 1$, $a = -1$, $b = 1$,

$$(n + 1)p_{n+1}(x) - (2n + 1)xp_n(x) + np_{n-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x.$$

Полиномы Эрмита: $p(t) = e^{-t^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$,

$$p_{n+1}(x) - 2xp_n(x) + 2np_{n-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 2x.$$

Мы рассмотрели метод наименьших квадратов с нормой лишь одного типа. На самом деле любая норма, основанная на скалярном произведении, в задачах аппроксимации приводит к решению симметричной системы линейных уравнений. Что касается ортогональных базисных полиномов, то не очевидно, что их применение оправдано во всех случаях.

Сформулируем задачу аппроксимации в общем случае. Найти такую функцию \tilde{f} , что

$$\|f - \tilde{f}\| = \min_{g \in C} \|f - g\|.$$

В этом случае C уже является частью W . Могут быть введены ограничения на класс искомых функций, например:

$$C = \{g \in W; g'(t) \geq 0, \forall t\}.$$

В литературе описываются решения этой задачи главным образом для случая выпуклого C :

$$\forall g_1, g_2 \in C, \forall \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1 \text{ влечет за собой } \lambda g_1 + \mu g_2 \in C.$$

Таким образом, задача сводится к оптимизации.

Обширная литература посвящена решению задачи аппроксимации с помощью сплайнов с ограничениями на форму. Основная трудность здесь состоит в поиске эффективных алгоритмов.

Практическая реализация рассмотренных алгоритмов обычно требует большого времени вычислений, большого объема памяти ЭВМ, важную роль играют также вопросы вычислительной устойчивости. Один из путей устранения указанных трудностей состоит в сегментации задачи, т.е. поочередном решении задачи на небольших областях с последующей сшивкой результатов, которая может быть осуществлена несколькими методами.

В методе подгонки общая задача разбивается на множество локальных задач, решаемых на непересекающихся интервалах. В методе сшивки границы локальных интервалов $[a_i, b_i]$ удовлетворяют соотношениям

$$a_i < b_{i-1} < a_{i+1} < b_i < a_{i+2} < b_{i+1} < \dots$$

Обозначим через f_i результат решения локальной задачи на отрезке $[a_i, b_i]$. Тогда окончательный результат на отрезке

$$[b_{i-1}, a_{i+2}]$$

определяется следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} f_i(t), & \forall t \in [b_{i-1}, a_{i+1}], \\ \varphi_0 \left(\frac{t - a_{i+1}}{b_i - a_{i+1}} \right) f_i(t) + \varphi_1 \left(\frac{t - a_{i+1}}{b_i - a_{i+1}} \right) f_{i+1}(t), & \forall t \in [a_{i+1}, b_i], \\ f_{i+1}(t), & \forall t \in [b_i, a_{i+2}], \end{cases}$$

где функции φ_0 и φ_1 - базисные полиномы Эрмита. Решение f является непрерывной дифференцируемой функцией, если таковыми являются функции f_i . Можно получить и другие варианты сшивки, если вместо φ_0 и φ_1 использовать другие функции.

Метод Франка с большим успехом применяется для функций многих переменных, но его можно использовать и в одномерном случае. В этом методе область Ω разбивается на локальные области Ω_i , для каждой из которых определяется неотрицательная функция w_i , равная нулю вне Ω_i . На каждой Ω_i локальной процедурой отыскивается решение f_i . Окончательный результат вычисляется по формуле

$$f(t) = \left(\sum_i w_i(t) f_i(t) \right) / \sum_i w_i(t).$$

Очевидно, что функция $f(t)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $f_i(t)$, и если w_i и f_i дифференцируемы, то это относится и к f .

Однако возможны случаи, когда сама функция или одна из ее производных имеет разрыв. Если точка разрыва известна, ее учитывают при решении задачи в качестве дополнительного условия и задача в целом остается линейной. Если известна только область, где находится точка разрыва, то решают задачу по обе стороны от этой области и вычисляют точку пересечения двух кривых, решая возникающие при этом нелинейные уравнения. В настоящее время разработаны более общие методы решения таких задач.

2.3.2.8. Кривые на плоскости и в пространстве

Будем считать, что кривые на плоскости и в пространстве задаются в параметрической форме и параметр, меняющийся на отрезке $[0, 1]$, отображается в пространство R^2 или R^3 . Замкнутой будет такая кривая c , для которой $c(0) = c(1)$.

Общий случай

Для данного случая интерполяция, сглаживание или аппроксимация состоят, вообще говоря, в применении изложенных выше методов к каждой координате. Поэтому здесь мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями. Для замкнутых кривых используются периодические функции интерполяции, сглаживания или аппроксимации. Если можно воспользоваться критерием минимизации, его можно применить ко всем компонентам (координатам), например общий критерий представить как сумму критериев по отдельным компонентам.

Единственная важная проблема состоит в том, что решение будет зависеть от способа выбора параметра. Большую помощь может оказать удачный выбор системы координат: например, если искомая кривая близка к окружности или эллипсу, нужно отдать предпочтение полярным координатам. Для исходных точечных данных параметр должен изменяться в пределах $[0, 1]$. Например, в качестве начальных параметров для кривой на R^2 , проходящей через точки P_0, P_1, \dots, P_n , можно выбрать

$$t_0^0 = 0, \quad t_1^0 = \frac{|P_0 P_1|}{\sum_i |P_i P_{i+1}|} = \frac{\text{Длина } P_0 P_1}{\sum_i \text{Длина } P_i P_{i+1}},$$

$$t_j^0 = \frac{\sum_{k=0}^{j-1} |P_k P_{k+1}|}{\sum_{i=0}^{n-1} |P_i P_{i+1}|} \quad (j = 1, \dots, n), \quad t_n^0 = 1.$$

После этого можно выбрать метод решения, найти кривую G_j и ее использовать для вычисления параметров в следующем приближении:

$$t_0^1 = 0,$$

$$t_j^1 = \frac{\sum_{k=0}^{j-1} |P_k P_{k+1}|_{C_1}}{\sum_{i=0}^{n-1} |P_i P_{i+1}|_{C_1}}$$

(где длины дуг измеряются вдоль кривой C_1).

Затем вычисляются кривую C_2 и т.д., выполняя необходимое число итераций. Процессы такого типа быстро сходятся (из 5-6 итераций) и параметры определяются из самой кривой.

Кривые Безье и B-сплайны

Благодаря своим свойствам в методах геометрического моделирования часто применяются кривые Безье и B-сплайны (рис. 50-52).

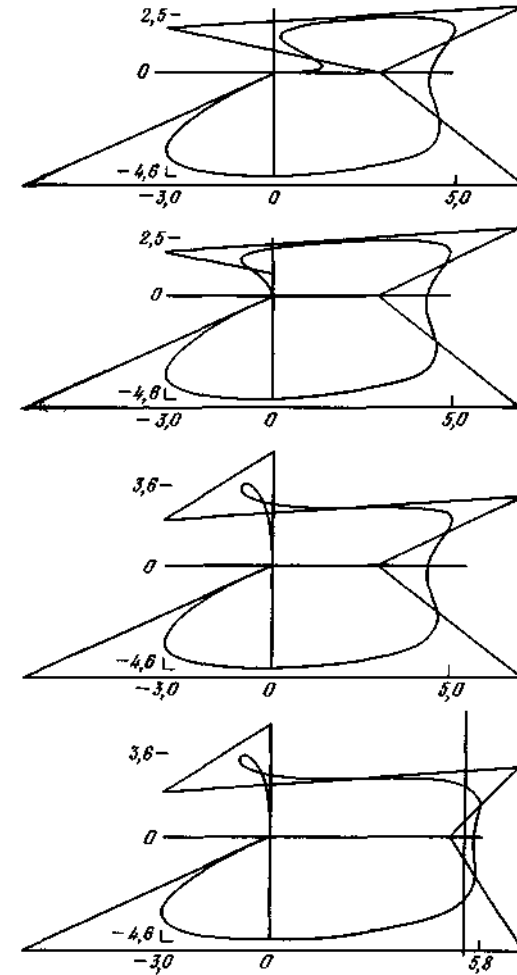


Рис. 50 Сглаживание B-сплайнами 3-й степени с эквидистантными узлами в интервале $[0, 1]$ на многоугольниках с координатами вершин: $(0,0), (3,0), (-3,2), (7,3), (3,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0); (0,0), (0,1), (-3,2), (7,3), (3,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0); (0,0), (0,5), (-3,2), (7,3), (5,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0)$.

Отметим касательные к кривым в крайних точках многоугольников, локальное изменение кривой при изменении положения одной точки и образование петли за счет расположения данных. Сравнение с кривой Безье (рис 48)

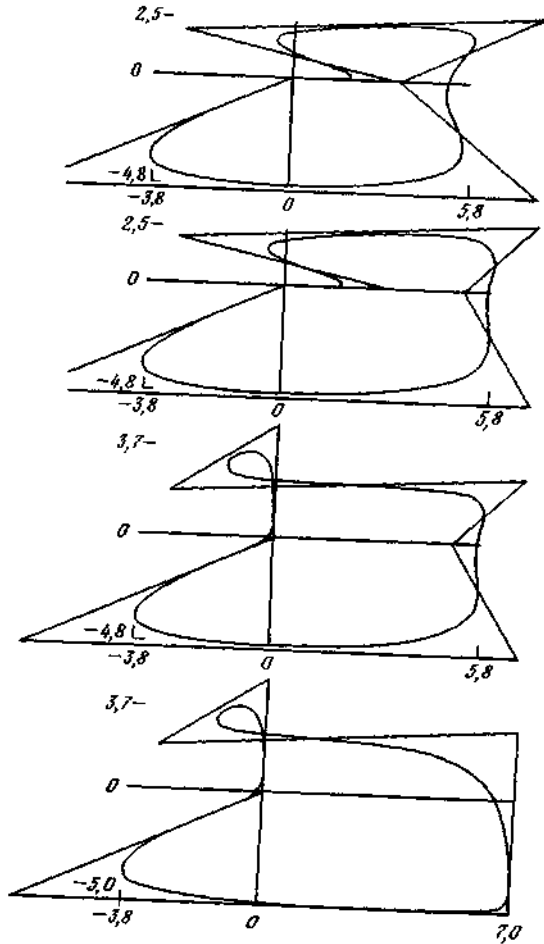


Рис. 51. Сглаживание B -сплайнами 3-й степени с эквидистантными узлами, периодическими на R , на многоугольниках с координатами вершин

- $(0,0), (3,0), (-3,2), (7,3), (3,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0);$
- $(0,0), (3,0), (-3,2), (7,3), (5,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0);$
- $(0,0), (0,5), (-3,2), (7,3), (5,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0);$
- $(0,0), (0,5), (-3,2), (7,3), (7,-5), (7,-5), (-7,-5), (0,0).$

Отметим дифференцируемость кривых, локальное изменение кривой при изменении положения одной точки, образование петли за счет

расположения данных. Сравните с кривыми Безье (рис. 48) и B -сплайнами (рис. 50).

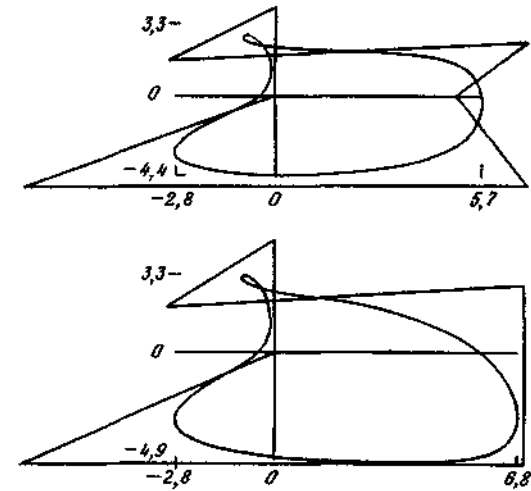


Рис. 52. Сглаживание B -сплайнами 5-й степени с эквидистантными узлами на R на многоугольниках с координатами вершин:

- $(0,0), (0,5), (-3,2), (7,3), (3,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0);$
- $(0,0), (0,5), (-3,2), (7,3), (5,0), (7,-5), (-7,-5), (0,0).$

Пусть Q -множество точек в R^2 (или R^3):

$$Q = \{Q_i; 0 \leq i \leq N\}.$$

Кривой Безье, связанной с Q , называется кривая, определяемая следующим образом:

$$B[Q](t) = \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}(t) Q_i,$$

т.е., если (x_i, y_i, z_i) являются координатами Q_i , то

$$x(t) = \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}(t) x_i, \quad y(t) = \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}(t) y_i, \quad z(t) = \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}(t) z_i.$$

В дополнение к известным свойствам заметим, что кривая Безье начинается в точке Q_0 и заканчивается в точке Q_N . В точке Q_0 (соответственно Q_N) она является касательной к отрезку Q_0Q_1 (соответственно к $Q_{N-1}Q_N$):

$$B[Q](0) = Q_0, \quad B[Q](1) = Q_N.$$

Более того, она целиком содержится в выпуклой оболочке точек Q_i . Существенное влияние на решение оказывает пространственное расположение и порядок точек Q_i . Последовательность отрезков $Q_i Q_{i+1}$ называется многоугольником Безье, связанным с Q , на котором строится кривая Безье.

Из общих свойств функций Безье вытекают следующие особенности их применения в данном случае:

изменение положения хотя бы одной точки приводит к заметному изменению кривой;

добавление хотя бы одной точки приводит к необходимости решения задачи заново;

при большом числе точек вычисление функций Безье затрудняется из-за большой степени полиномов.

После приобретения практических навыков вычисления функций Безье можно довольно быстро располагать точки Q_i так, чтобы получить желаемую форму кривой после небольших модификаций.

Аналогичная кривая, связанная с Q и построенная с помощью B -сплайнов, может быть представлена в следующем виде:

$$S[Q](t) = \sum_{i=0}^N N_{i,n}(t) Q_i.$$

Основная их особенность состоит в локальном характере определения. Это приводит к более простому учету изменения положения отдельных точек Q . Кроме того, они обладают более высокой вычислительной устойчивостью, что связано с небольшими степенями используемых полиномов.

2.3.3. Поверхности

2.3.3.1. Характеристические сетки

Поверхность может быть определена как геометрическое место точек, принадлежащих образующей кривой в процессе ее перемещения и деформации. Можно считать, что каждая вершина характеристического многоугольника образующей кривой при этом описывает траекторию, которая сама определяется некоторым характеристическим многоугольником (рис. 1).

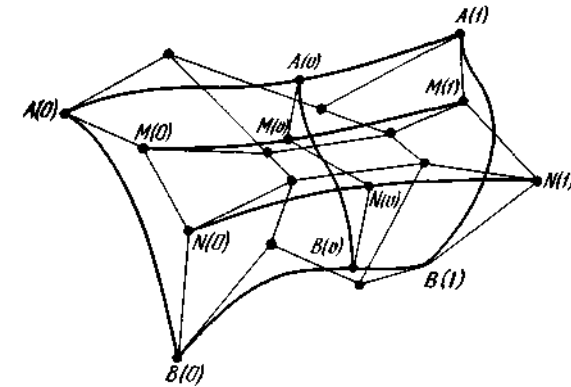


Рис. 1. Характеристическая сетка клетки разбиения.

Кривые $A(0)A(1)$ и $B(0)B(1)$ расположены на поверхности и называются главными образующими. Остальные, такие, как $M(0)M(1)$ и $N(0)N(1)$, называются вспомогательными образующими. Точки $A(v)$, $M(v)$, ..., $N(v)$ и $B(v)$ являются вершинами характеристического многоугольника образующей $A(v)B(v)$. Если все образующие имеют одинаковую степень, т. е. их характеристические многоугольники имеют одинаковое число сторон, то характеристическая сетка получается соединением вершин с одинаковыми индексами.

2.3.3.2. Определение положения точки

Использование функций f

Рассмотрим векторы $\alpha_i, i \in [0, m]$ (рис. 2), образующие характеристический многоугольник кривой $A(0)B(0)$, и векторы

$$\alpha_{i,j}, i \in [0, m]; j \in [0, n], \quad (1)$$

определяющие характеристические многоугольники образующих, берущих начало из крайних точек векторов α .

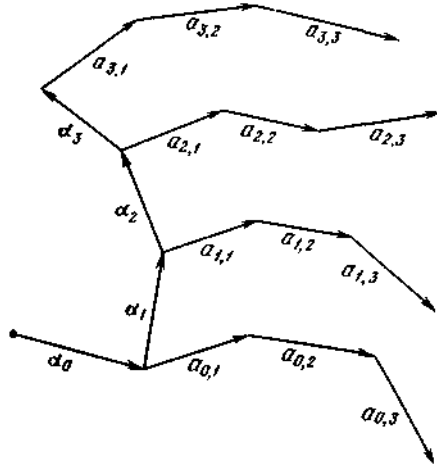


Рис. 2. Определение клетки разбиения с помощью функций f .

Можно показать, что текущая точка поверхности определяется с помощью общего выражения

$$\mathbf{P}(u, v) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i f_{i,m}(u) + \sum_{j=1}^n a_{0,j} f_{j,n}(v) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - a_{i-1,j}) f_{i,m}(u) f_{j,n}(v). \quad (2)$$

Однако оно непригодно для практического использования и приводит только в справочных целях.

Использование функций \mathcal{D}

Обозначим через S_{ij} $i \in [0, m], j \in [0, n]$ вершины характеристической сетки. Тогда образующие D_i $i \in [0, m]$ можно определить с помощью выражения

$$\mathbf{T}_i(v) = \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{D}_{j,n}(v). \quad (3)$$

Образующая $G(v)$, вершинами характеристического многоугольника которой являются $\mathbf{T}_i(v)$ (рис. 3), задается с помощью следующего выражения:

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \mathbf{T}_i(v) \mathcal{D}_{i,m}(u). \quad (4)$$

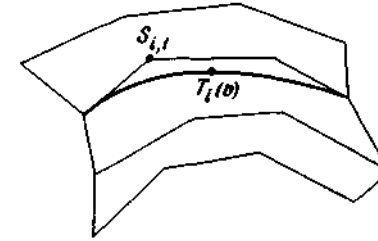


Рис. 3. Вспомогательная образующая клетки разбиения.

Подставляя вместо $\mathbf{T}_i(v)$ выражение (3), получаем

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{D}_{i,m}(u) \mathcal{D}_{j,n}(v). \quad (5)$$

Использование полиномиальных функций

Поверхности, как и кривые, иногда полезно представлять в виде

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} u^i v^j. \quad (6)$$

Для определения векторов b_{ij} представим выражение (5) в виде

$$\mathbf{P}(u, v) = [\mathcal{D}_{i,m}(u)] \begin{bmatrix} s_{0,0} & \dots & s_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m,0} & \dots & s_{m,n} \end{bmatrix} [\mathcal{D}_{j,n}(v)]. \quad (7)$$

Далее запишем представление $[\mathcal{D}_{i,m}(u)] = [u^i] \mathbf{M}$

и

$$[\mathcal{D}_{j,n}(v)] = \mathbf{M}' [v^j]$$

и преобразуем выражение (5) к виду

$$\mathbf{P}(u, v) = [u^i] \mathbf{M} [s_{i,j}] \mathbf{M}' [v^j].$$

Теперь используем другую форму записи для выражения (6):

$$\mathbf{P}(u, v) = [u^i] [b_{i,j}] [v^j], \quad (8)$$

и так как выражения (7) и (8) определяют одну и ту же зависимость, то приходим к выводу, что

$$[b_{i,j}] = \mathbf{M} [s_{i,j}] \mathbf{M}'.$$

Частные случаи

Вырожденные поверхности. Если обрабатываемая поверхность топологически подобна трехграннику (рис. 4), то одна из клеток разбиения будет иметь только три стороны.

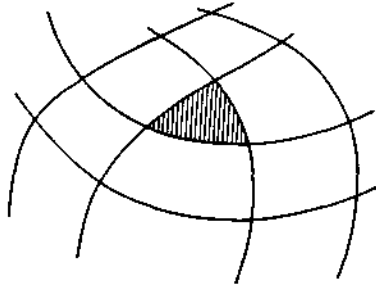


Рис. 4. Вырожденная клетка разбиения.

Нельзя игнорировать случаи, когда теряется большее число или даже все стороны, хотя практическая целесообразность такого анализа сомнительна.

Трехсторонняя клетка разбиения. Рассмотрим вершины $S_{0,j}$ (рис. 5), совпадающие с вершиной $S_{0,0}$.

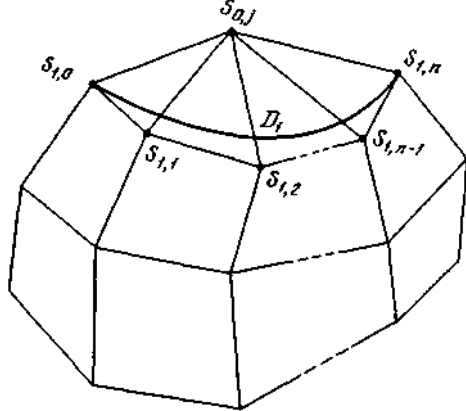


Рис. 5. Характеристическая сетка с вырожденными трехсторонними клетками.

Касательные к поверхности в этой точке образуют конус с образующей D_1 , вершинами характеристического многоугольника которой являются точки $S_{1,j}$. Для того чтобы точка $S_{0,0}$ не являлась вершиной конуса, необходимо и достаточно, чтобы точки $S_{0,0}$ и $S_{1,j}$ лежали в одной плоскости (рис. 6).

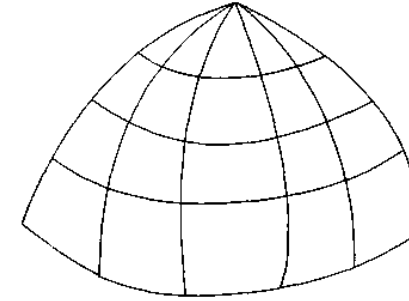


Рис. 6. Образующие вырожденных трехсторонних клеток.

В противном случае в точке $S_{0,0}$ существует бесконечное число касательных плоскостей.

Двусторонние клетки разбиения. Поверхность может иметь несколько точек, подобных рассмотренной выше. Если они не примыкают друг к другу (рис. 7), то задача сводится к предыдущей; однако возможна ситуация, когда две вершины, например $S_{0,j}$ и $S_{i,0}$, совпадают с $S_{0,0}$ (рис. 8).

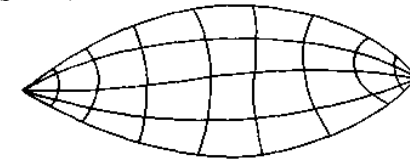


Рис. 7. Вырожденные клетки на двух противоположных сторонах.

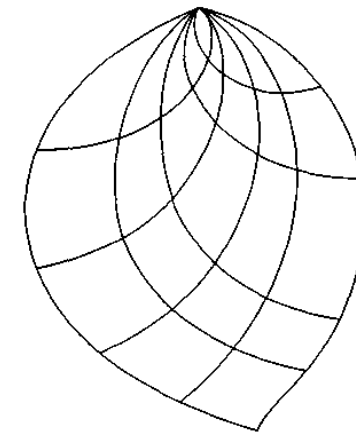


Рис. 8. Вырожденные клетки на двух примыкающих сторонах.

В этом случае образующие $G(v)$ и $G'(u)$ сходятся в точке $S_{0,0}$ и являются касательными к конусам, образующие которых имеют характеристические многоугольники с вершинами $S_{1,j}$ и $S_{i,1}$.

Для того чтобы в точке $S_{0,0}$ существовала единственная касательная плоскость, необходимо, чтобы точки $S_{1,j}$, $S_{i,1}$ и $S_{0,0}$ лежали в одной плоскости (рис. 9).

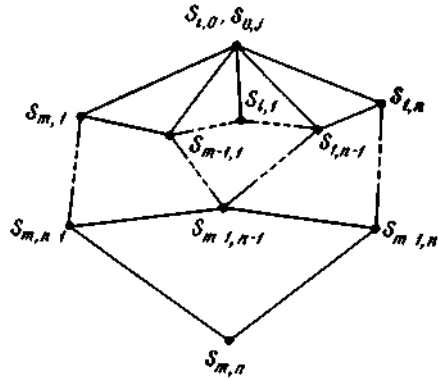


Рис. 9. Характеристическая сетка клетки, приведенной на рис. 8.

Односторонние клетки разбиения. В этом случае с точкой $S_{0,0}$ совпадают точки $S_{0,j}$, $S_{i,0}$ и $S_{m,i}$ (рис. 10 и 11).

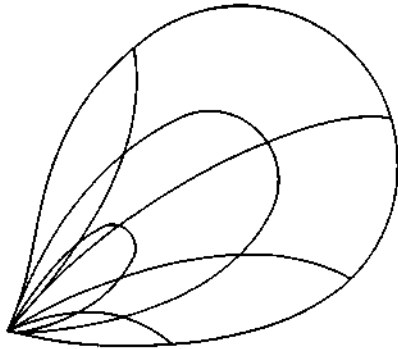


Рис. 10. Вырожденная клетка с одной стороной.

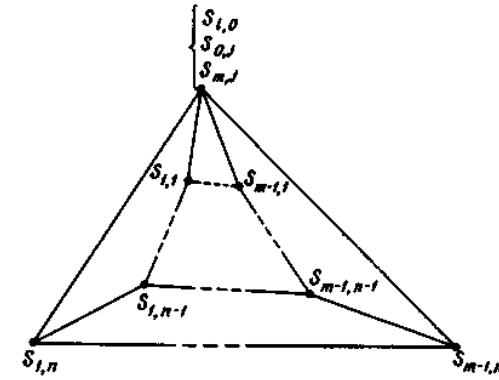


Рис. 11. Характеристическая сетка для рис. 10.

Оба конца образующих $G(v)$ замыкаются в точке $S_{0,0}$. Образующими касательных конусов являются кривые D_1 и D_{m-1} , характеристические многоугольники которых имеют вершины в точках $S_{1,j}$ и $S_{m-1,j}$. Образующие $G'(u)$ являются касательными к конусу с образующей D_i , имеющей характеристический многоугольник с вершинами $S_{i,1}$. Для того чтобы точка $S_{0,0}$ не была особенной, необходимо, чтобы точки $S_{0,0}$, $S_{1,j}$, $S_{i,1}$ и $S_{m-1,j}$ лежали в одной плоскости.

Клетки разбиения с нулевым числом сторон. В этом случае с точкой $S_{0,0}$ совпадают точки $S_{0,j}$, $S_{i,0}$, $S_{m,j}$ и $S_{i,n}$ (рис. 12).

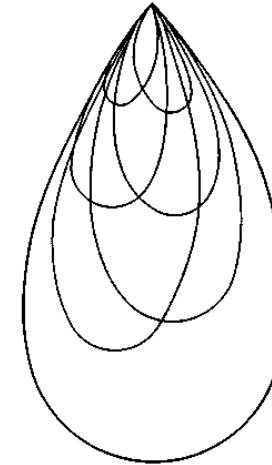


Рис. 12. Вырожденная клетка с нулевым числом сторон.

В точке $S_{0,0}$ конус, касательный к образующим, имеет в качестве образующих D_1, D_{m-1}, D_i и D'_{n-1} .

Точка $S_{0,0}$ не является особенной только в том случае, когда точки $S_{0,0}, S_{1,j}, S_{m-1,j}, S_{i,1}$ и $S_{i,n-1}$ лежат в одной плоскости (рис. 13).

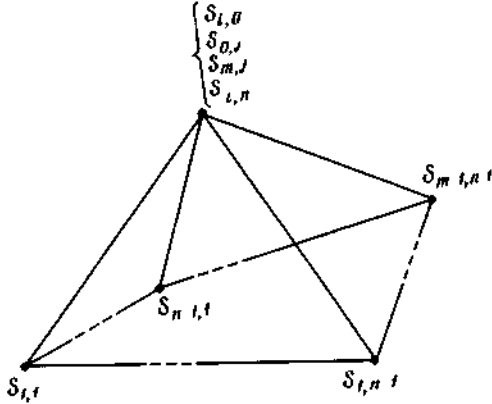


Рис. 13. Характеристическая сетка клетки рис. 12.

Поверхности с точкой излома. Если в одной из точек поверхности частные производные коллинеарны и не равны нулю, то нормальный вектор, определяемый как

$$N = \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v}, \tag{9}$$

равен нулю. Тем не менее можно определить направление нормали по вторым производным и, следовательно, касательную плоскость в этой точке. Для упрощения формул переместим начало параметрических координат таким образом, чтобы упомянутая выше точка имела нулевые координаты $P(0, 0)$. Текущую точку поверхности определим следующим образом:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} u^i v^j.$$

Имеем

$$\frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} = b_{1,0}; \quad \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} = b_{0,1}$$

и, поскольку

$$\frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} \times \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} = 0,$$

получаем

$$b_{1,0} = \lambda b_{0,1},$$

где λ — ненулевой скаляр.

Допустим, что принадлежащая поверхности кривая G определяется с помощью уравнения

$$v = \sum_{k=1}^p c_k u^k \tag{10}$$

и проходит через точку $P(0, 0)$, поскольку $c_0 = 0$.

Точки, принадлежащие кривой G , можно определить с помощью выражения

$$Q(u) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} u^i \left(\sum_{k=1}^p c_k u^k \right)^j. \tag{11}$$

При $u = 0$ имеют отличную от нуля первую производную члены этого выражения со степенью, равной 1. Они соответствуют следующим условиям:

$$i = 1, j = 0, k \in [1, p], \tag{12}$$

$$i = 0, j = 1, k = 1.$$

Это означает, что

$$\frac{dQ(0)}{du} = \frac{d}{du} \left[b_{1,0} u \left(\sum_{k=1}^p c_k u^k \right)^0 + b_{0,1} c_1 u \right] = b_{1,0} + b_{0,1} c_1, \tag{13}$$

а с учетом условий (12)

$$\frac{dQ(0)}{du} = b_{0,1}(\lambda + c_1). \tag{14}$$

Если $\lambda + c_1 \neq 0$, то касательные к кривой G и к границе клетки совпадают, но если

$$\lambda + c_1 = 0, \tag{15}$$

то первая производная равна нулю и касательная параллельна второй производной, которая соответствует членам второй степени, и определяется условиями

$$\begin{aligned} i = 2, j = 0, k \in [1, p]; \\ i = 1, j = 1, k = 1; \\ i = 0, j = 1, k = 2; \\ i = 0, j = 2, k = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{Q}(0)}{du^2} &= \frac{d^2}{du^2} \left[\mathbf{b}_{2,0} u^2 \left(\sum_{k=1}^n c_k u^k \right)^0 + \mathbf{b}_{1,1} u^2 c_1 + \mathbf{b}_{0,1} c_2 u^2 + \mathbf{b}_{0,2} c_1^2 u^2 \right] = \\ &= 2(\mathbf{b}_{2,0} + \mathbf{b}_{1,1} c_1 + \mathbf{b}_{0,1} c_2 + \mathbf{b}_{0,2} c_1^2), \end{aligned} \quad (17)$$

а с учетом условий (16)

$$\frac{d^2\mathbf{Q}(0)}{du^2} = 2(\mathbf{b}_{2,0} - \lambda \mathbf{b}_{1,1} + c_2 \mathbf{b}_{0,1} + \lambda^2 \mathbf{b}_{0,2}). \quad (18)$$

Это выражение можно упростить, введя следующее обозначение:

$$\mathbf{b}_{2,0} - \lambda \mathbf{b}_{1,1} + \lambda^2 \mathbf{b}_{0,2} = \mathbf{d}.$$

Тогда

$$\frac{d^2\mathbf{Q}(0)}{du^2} = \mathbf{d} + c_2 \mathbf{b}_{0,1} = \mathbf{e}. \quad (19)$$

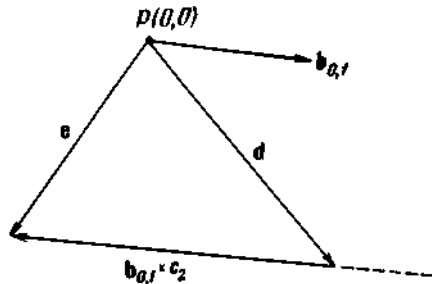


Рис. 14. Касательная плоскость в точке излома.

При изменении c_2 касательная к кривым, определенным таким образом, остается параллельной вектору \mathbf{e} (рис. 14), начало которого находится в точке $P(0, 0)$, а конец расположен на прямой, параллельной $\mathbf{b}_{0,1}$ и проходящей через конечную точку вектора \mathbf{d} , т. е. вектор \mathbf{e} расположен в плоскости, касательной к поверхности в точке $P(0, 0)$.

Следует заметить, что для кривой, определяемой выражением $d\mathbf{Q}(0)/du = 0$, имеем в нашем случае $d^2\mathbf{Q}(0)/du^2 \neq 0$.

Отсюда следует, что ее кривизна в точке $P(0, 0)$ является бесконечной и эта точка для кривой является точкой излома. Более того, касательные к кривым, для которых $c_1 \neq \lambda$, имеют общее направление с векторами $\mathbf{b}_{0,1}$ и $\mathbf{b}_{1,0}$. В точке $P(0, 0)$ индикатриса Дюпена сводится к двум точкам, расположенным на общей касательной к изопараметрическим кривым. (Индикатриса Дюпена характеризует искривленность поверхности в данной точке. Она

располагается в касательной плоскости и образуется отрезками, отложенными от точки $P(0, 0)$ в разных направлениях, длина которых равна кривизне в этом направлении.)

Можно считать, что нормальный вектор имеет вполне определенный аргумент и модуль, равный нулю. Его аргумент можно получить с помощью векторов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1$ и α_2 (рис. 15), которые являются элементами характеристических многоугольников главных образующих, проходящих через точку $P(0, 0)$.

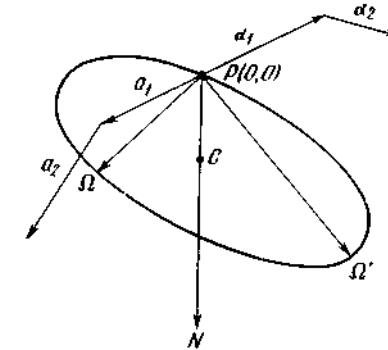


Рис. 15. Окружность Менье в точке излома.

Если центры кривизны образующих обозначить через Ω и Ω' , то из свойства 5 разд. 2.3.2..2 следует, что точки $P(0, 0), \Omega, \Omega'$ лежат на окружности Менье и искомая величина определяется диаметром, проходящим через точку $P(0, 0)$.

Если вектор \mathbf{d} равен нулю, необходимо использовать производную минимального порядка, отличную от нуля.

2.3.3.3. Годографы

Первые годографы

Предположим, что точки $S_{i,j}, i \in [0, m], j \in [0, n]$ являются вершинами характеристической сетки с клетками степени $(m \times n)$. Выберем точку O в качестве начала координат и проведем из нее (рис. 16) векторы, имеющие одинаковое направление с векторами $S'_{i,j} = S_{i+1,j} - S_{i,j}$.

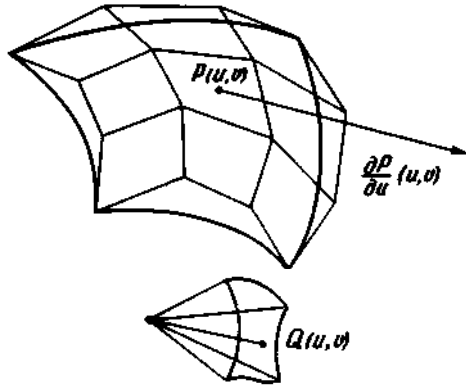


Рис16. Построение первого годографа клетки.

Их концы образуют вершины характеристической сетки для клетки степени $[(m - 1) \times n]$. Произвольная точка $Q(u, v)$ клетки определяется по формуле

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s'_{i,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (s_{i+1,j} - s_{i,j}) \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s_{i+1,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v). \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s_{i+1,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v). \quad (21)$$

Нижний предел изменения индекса i можно опять принять равным нулю, так как

$$\mathcal{B}_{-1,m-1}(u) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s_{i+1,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i+1,j} \mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v). \quad (22)$$

Кроме того, в выражении

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v)$$

верхний предел изменения индекса i можно принять равным m , так как $\mathcal{B}_{m,m-1} = 0$. С учетом этого выражение (20) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} \mathcal{B}_{i,m-1}(u) \mathcal{B}_{j,n}(v) = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} [\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u)] \mathcal{B}_{j,n}(v). \end{aligned}$$

Теперь используем соотношение (35):

$$\mathcal{B}_{i-1,m-1}(u) - \mathcal{B}_{i,m-1}(u) = \frac{1}{m} \frac{d \mathcal{B}_{i,m}(u)}{du}$$

и окончательно получаем

$$Q(u, v) = \frac{1}{m} \frac{\partial P(u, v)}{\partial u}.$$

Таким образом, поверхность H представляет собой годограф G относительно u в масштабе $1/m$.

Аналогично с помощью векторов, имеющих одинаковое направление с векторами $(s_{i,j+1} - s_{i,j})$, можно определить поверхность J , текущая точка которой задается выражением

$$R(u, v) = \frac{1}{n} \frac{\partial P(u, v)}{\partial v}.$$

Поверхность J является годографом G относительно v в масштабе $1/n$.

Смешанные годографы

Годограф поверхности H относительно v совпадает с годографом поверхности J относительно u , и его текущая точка определяется выражением

$$T(u, v) = \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

Он является смешанным годографом поверхности G в масштабе $1/mn$.

Существует простой способ определения смешанной производной и углах клетки. Рассмотрим точку $P(u, 0)$, лежащую на главной образующей, и точку $Q(u)$, зависящую от того же параметра и лежащую на первой вспомогательной образующей (рис. 17).

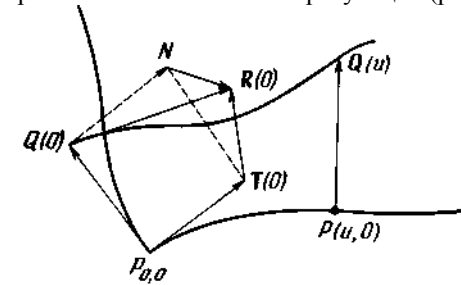


Рис. 17. Построение смешанной производной в углу клетки.

Можно записать следующие соотношения:

$$\mathbf{P}(u, 0)Q(u) = \frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{P}(u, 0)}{\partial v}$$

и

$$Q(0)R = \frac{1}{m} \frac{dQ(0)}{du}.$$

Учтем также, что

$$Q(u) = \mathbf{P}(u, 0) + \frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{P}(u, 0)}{\partial v}$$

и

$$\frac{dQ(u)}{du} = \frac{\partial \mathbf{P}(u, 0)}{\partial u} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(u, 0)}{\partial u \partial v}.$$

В частности,

$$\frac{dQ(0)}{du} = \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v}.$$

Отсюда следует

$$\mathbf{R} = Q(0) + \frac{1}{m} \frac{dQ(0)}{du} = \mathbf{P}(0, 0) + \frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} + \frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} + \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v}.$$

Но в угловой точке

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} = P(0, 0)Q(0),$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} = P(0, 0)T(0).$$

Для параллелограмма $T(0)P(0, 0)Q(0)N$ справедливо соотношение

$$\mathbf{NR} = \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v}.$$

Последовательные годографы

Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно получить общее выражение для годографа

$$\frac{(m-k+1)!}{m!} \frac{(n-l+1)!}{n!} \frac{\partial^{k+l} \mathbf{P}(u, v)}{\partial u^k \partial v^l}.$$

2.3.3.4. Линии видимого контура

Линия видимого контура поверхности S , наблюдаемой вдоль направления D , представляет собой линию контакта поверхности S и цилиндра, образующие которого параллельны D . Ее проекция на некоторую плоскость, не содержащую D , является огибающей проекций образующих поверхности на эту плоскость. Это свойство можно использовать для того, чтобы убедиться в отсутствии невидимых участков поверхности.

Рассмотрим поверхность C (рис. 18), первыми годографами которой являются H и J , а также поверхность L , представляющую собой геометрическое место точек — концов векторов N .

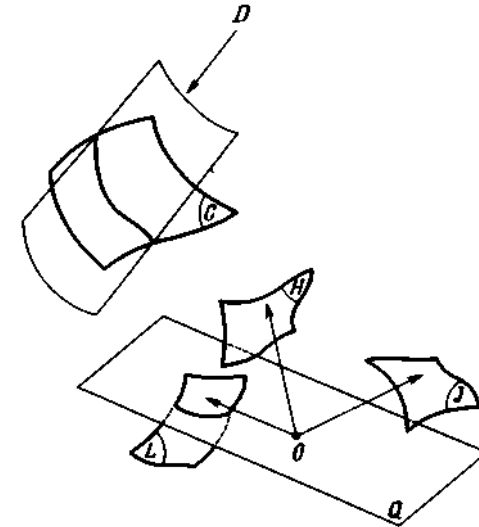


Рис. 18. Определение линии видимого контура.

Начало этих векторов располагается в точке O , а сами векторы определяются выражением

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial v}.$$

Нормали в точках, расположенных на линиях видимого контура, перпендикулярны направлению D . Векторы, соответствующие нормальям на поверхности L , параллельны этим нормальям и расположены в плоскости Q , перпендикулярной направлению D и содержащей точку O . Точки пересечения поверхностей L и Q соответствуют точкам линии видимого контура поверхности C .

Для того чтобы убедиться в том, что не существует невидимых участков поверхности C , достаточно проверить, что характеристическая сетка не пересекает плоскость Q_L . (Имеется в виду характеристическая сетка поверхности L .) Обратим внимание на то, что это условие является достаточным, но не необходимым, так как поверхность L находится внутри выпуклого объема, образованного характеристической сеткой.

2.3.3.5. Определение характеристической сетки

Априорные ограничения

Так же как и для кривых, в случае поверхностей на их параметры налагаются априорные ограничения. Они относятся к точкам, через которые проходит поверхность, а также к таким характеристикам, как наклон, кривизна, кручение. Ограничения на наклон используются главным образом на границах между смежными клетками. Отметим, что ограничения на кривизну и кручение приводят к решениям, лишенным наглядности.

Алгоритмы построения

Основным назначением алгоритмов является автоматическое построение поверхности, удовлетворяющей определенным условиям. В основе многих алгоритмов лежит метод наименьших квадратов.

Рассмотрим поверхность, состоящую из примыкающих клеток и определяемую множеством точек, через которые она проходит.

Выбор параметров. Рассмотрим поверхность

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} u^i v^j, \quad (23)$$

которую нужно разбить на примыкающие друг к другу клетки. Выберем на этой поверхности 25 точек, расположенных не очень далеко друг от друга, и обозначим их следующим образом:

$$\begin{matrix} P_{i-2, j-2} \dots P_{i+2, j-2} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ P_{i-2, j+2} \dots P_{i+2, j+2} \end{matrix} \quad (24)$$

Определим векторы

$$\mathbf{a}_{k,l} = \mathbf{P}_{k,l} - \mathbf{P}_{k-1,l}, \quad (25)$$

$$\mathbf{\alpha}_{k,l} = \mathbf{P}_{k,l} - \mathbf{P}_{k,l-1},$$

где

$$k \in [i-2, i+2], l \in [j-2, j+2].$$

Затем вычислим значения u и v по формулам

$$u_{k,j} = \frac{\sum_{m=i-1}^{k-i} |\mathbf{a}_{m,j}|}{\sum_{m=i-1}^{k-i} |\mathbf{a}_{m,j}|} \quad \text{и} \quad v_{i,l} = \frac{\sum_{n=j-1}^{l-j} |\mathbf{\alpha}_{i,n}|}{\sum_{n=j-1}^{l-j} |\mathbf{\alpha}_{i,n}|}. \quad (26)$$

Условия сшивки. Метод среднего параметра. Наиболее простой метод сшивки для более или менее простых поверхностей и разумным образом выбранных точек состоит в следующем. Значениям

параметров u с одинаковыми индексами i и v с параметрами v с одинаковыми индексами j присваиваются одинаковые значения. Следовательно, каждый параметр

$$u_{k,i} \quad (k \in [i-2, i+2]) \quad (27)$$

и

$$v_{k,l} \quad (l \in [j-2, j+2]) \quad (28)$$

заменяется своим средним значением

$$u_{i_0,j} = \frac{\sum_{k=i-2}^{i+2} u_{k,j}}{5} \quad (29)$$

и

$$v_{i,j_0} = \frac{\sum_{k=j-2}^{j+2} v_{i,k}}{5} \quad (30)$$

и все 25 коэффициентов $\mathbf{b}_{i,j}$ являются корнями системы линейных уравнений (23).

Сшивка по касательным. Клетка разбиения, углами которой являются точки $P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}$ и $P_{i+1,j+1}$ (рис. 19), определяется с помощью выражения

$$\mathbf{M}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \sum_{k=i-2}^{i+2} \sum_{l=j-2}^{j+2} \mathbf{b}_{k,l} \times [u_{i,j} + (u_{i,j+1} - u_{i,j})w]^k \times [v_{i,j} + (v_{i,j+1} - v_{i,j})z]^l. \quad (31)$$

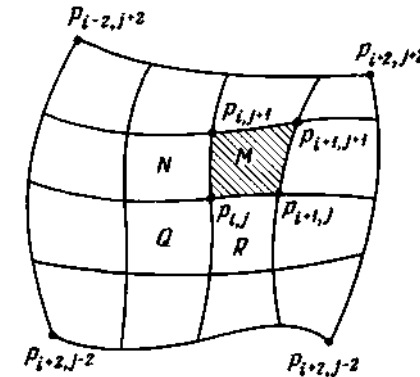


Рис. 19. Сшивка клеток по касательной.

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial w} &= \sum_{k=i-2}^{i+2} \sum_{l=j-2}^{j+2} \mathbf{b}_{k,l} k l (u_{i+1} - u_i) [u_i + (u_{i+1} - u_i) w]^{k-1} [v_j + (v_{j+1} - v_j) z]^l, \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} &= \sum_{k=i-2}^{i+2} \sum_{l=j-2}^{j+2} \mathbf{b}_{k,l} k l (u_{i+1} - u_i) (v_{j+1} - v_j) \times \\ &\quad \times [u_i + (u_{i+1} - u_i) w]^k [v_j + (v_{j+1} - v_j) z]^{l-1}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial w \partial z} &= \sum_{k=i-2}^{i+2} \sum_{l=j-2}^{j+2} \mathbf{b}_{k,l} k l (u_{i+1} - u_i) (v_{j+1} - v_j) \times \\ &\quad \times [u_i (u_{i+1} - u_i) w]^{k-1} [v_j + (v_{j+1} - v_j) z]^{-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из условий (23) и (32) следуют краевые условия в точке $\mathbf{M}(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(0, 0) &= \mathbf{P}_{i,j}, \\ \frac{\partial \mathbf{M}(0, 0)}{\partial w} &= (u_{i+1} - u_i) \frac{\partial \mathbf{P}(u_i, u_j)}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathbf{M}(0, 0)}{\partial z} &= (v_{j+1} - v_j) \frac{\partial \mathbf{P}(u_i, v_j)}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{M}(0, 0)}{\partial w \partial z} &= (u_{i+1} - u_i) (v_{j+1} - v_j) \frac{\partial^2 \mathbf{P}(u_i, v_j)}{\partial u \partial v}. \end{aligned} \quad (33)$$

Далее, для клеток, углы которых находятся в точках

$$\begin{matrix} P_{i-1,j} & P_{i,j} & P_{i-1,j+b} & P_{i,j+b} \\ P_{i-1,j-1} & P_{i,j-1} & P_{i-1,j} & P_{i,j} \\ P_{i,j-1} & P_{i+1,j-1} & P_{i,j} & P_{i+1,j} \end{matrix} \quad (34)$$

и текущие точки которых, обозначаемые через N , Q и R , вычисляются по приведенным выше формулам, предположим

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(1, 0) &= \mathbf{P}(u_i, v_j), \\ \frac{\partial \mathbf{N}(1, 0)}{\partial w} &= (u_i - u_{i-1}) \frac{\partial \mathbf{P}(u_i, v_j)}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathbf{N}(1, 0)}{\partial t} &= (v_{j+1} - v_j) \frac{\partial \mathbf{P}(u_i, v_j)}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial w \partial t} &= (u_i - u_{i-1}) (v_{j+1} - v_j) \frac{\partial^2 \mathbf{P}(u_i, v_j)}{\partial u \partial v}, \end{aligned} \quad (35)$$

с аналогичными краевыми условиями в точках $Q(1, 1)$ и $R(0, 1)$.

Очевидно, что в точках $\mathbf{M}(0, 0)$, $\mathbf{N}(1, 0)$, $Q(1, 1)$ и $R(0, 1)$ значения наклона, кривизны и кручения одинаковы, так как эти клетки являются частями более крупной клетки $P_{i-2,j-2} \dots P_{i+2,j+2}$

Бикубическая зависимость поверхности клетки, углы которой расположены в точках $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$ и $P_{i+1,j+1}$, определяется краевыми условиями (33), которые следуют из представления клеток со следующими углами:

$$\begin{matrix} P_{i-2,j-2} & P_{i+2,j-2} & P_{i-2,j+2} & P_{i+2,j+2} \\ P_{i-1,j+2} & P_{i+3,j-2} & P_{i-1,j+2} & P_{i+3,j+2} \\ P_{i-2,j-1} & P_{i+2,j-1} & P_{i-2,j+3} & P_{i+2,j+3} \\ P_{i-1,j-1} & P_{i+3,j-1} & P_{i-1,j+3} & P_{i+3,j+3} \end{matrix} \quad (36)$$

Следовательно, подклетки, углы которых находятся в точках $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$ и $P_{i+1,j+1}$, сшиваются по касательной с соседними клетками, имеющими один или два общих угла.

Сшивка с помощью соприкосновения. Рассмотрим клетку, поверхность которой описывается уравнением четвертой степени по каждому параметру по формулам разд. 2.3.3.5. Она имеет среднюю точку, удовлетворяющую некоторым условиям, наложенным на следующие величины:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(i, j); \\ &\frac{\partial \mathbf{P}(i, j)}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}(i, j)}{\partial v}; \\ &\frac{\partial^2 \mathbf{P}(i, j)}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{P}(i, j)}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{P}(i, j)}{\partial v^2}; \\ &\frac{\partial^3 \mathbf{P}(i, j)}{\partial u^2 \partial v}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{P}(i, j)}{\partial u \partial v^2}; \\ &\frac{\partial^4 \mathbf{P}(i, j)}{\partial u^2 \partial v^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Следовательно, можно найти 36 коэффициентов, определяющих зависимость, являющуюся полиномом пятой степени по каждому из параметров, для сшивки с соседними клетками с помощью соприкосновения.

Сшивка более высокого порядка. Для сшивки с использованием полиномов более высокого порядка сначала необходимо описать поверхность клетки уравнением пятой степени по каждому из параметров, где углы клетки расположены в точках с индексами $i-3, i+3, j-3, j+3$. Затем для каждого угла формулируют условия, начиная от значений \mathbf{P} и до $\partial^6 \mathbf{P} / \partial u^3 \partial v^3$. Каждой подклетке может соответствовать 64 коэффициента. Подобный метод сшивки представляет только теоретический интерес, на практике он почти не применяется.

Определение с помощью векторов. В случаях когда может возникнуть необходимость модификации клетки, полезно знать ее характеристическую сетку. Коэффициенты полиномиальной

зависимости определяются из краевых условий. Для нахождения вершин характеристической сетки можно использовать матрицу, описываемую формулой (37) п.2.3.2.2.

В случае бикубической сетки существует простое решение: например, для вершин $P(0, 0)$, A , C , D клетки (рис. 20), связанной с точкой $P(0, 0)$, имеем

$$PA = \frac{1}{3} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u}; \quad PB = \frac{1}{3} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v}; \quad PC = \frac{1}{9} = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}. \quad (38)$$

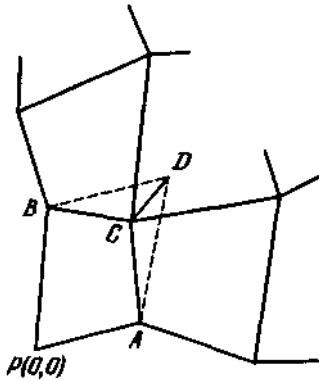


Рис. 20. Построение вектора кручения.

Точка D является четвертой вершиной параллелограмма $PABD$.

Произвольная модификация. Рассмотрим семейство бикубических клеток, вершины углов которых находятся в точке $P_{i,j}$. Известно, что в точке, общей для четырех клеток, стороны четырех ячеек характеристической сетки являются образующими гиперболического параболоида, а те, которые пересекаются в точке P , т. е. BF и DH , делят другие в отношении

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} = \frac{v_j - v_{j-1}}{v_{j+1} - v_j}. \quad (39)$$

Следовательно, точки P , A , ..., H (рис. 21) можно произвольным образом перемещать, сохраняя неизменным отношение (39).

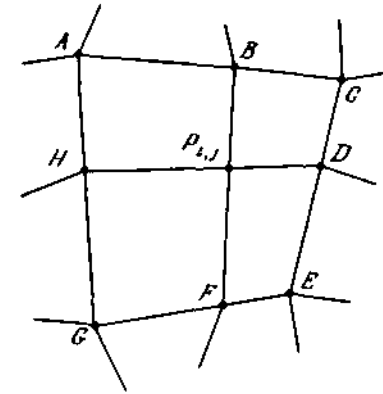


Рис. 21. Произвольная модификация клетки.

Метод шивки с помощью увеличения степени полинома. Если форма поверхности и распределение точек таковы, что применить метод среднего параметра не представляется возможным, то используют метод увеличения степени (рис.22). Известно, что если две бикубические клетки касаются друг друга по линии $P(0)P(1)$, то производные $\frac{\partial M(u, 1)}{\partial v}$ и $\frac{\partial N(u, 0)}{\partial w}$ являются коллинеарными только в том случае, если производные коллинеарны в точках $P(0)$ и $P(1)$, и, кроме того,

$$\frac{|\frac{\partial M(0, 1)}{\partial v}|}{|\frac{\partial N(0, 0)}{\partial w}|} = \frac{|\frac{\partial M(1, 1)}{\partial v}|}{|\frac{\partial N(1, 0)}{\partial w}|}.$$

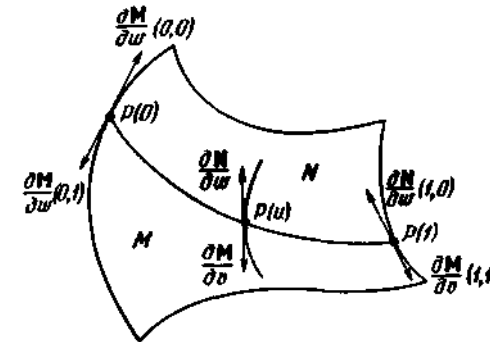


Рис. 22. Произвольная модификация с помощью увеличения степени.

Определение вспомогательных образующих. Основная проблема состоит в определении поверхностей клеток, касающихся по линии

$P_{i,j}P_{i+1,j}$. На рис. 23 представлены две клетки A и B , текущие точки которых обозначены соответственно через $M(u, v)$ и $N(u, w)$.

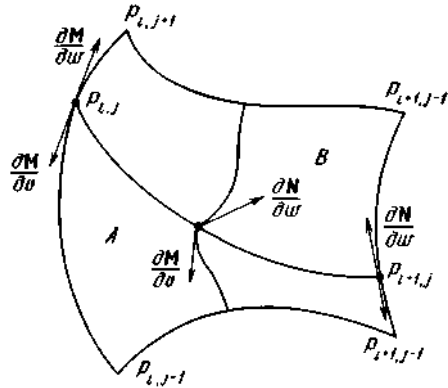


Рис. 23. Произвольная модификация с помощью вспомогательных образующих.

В вершинах углов значения $P, \partial P/\partial u, \partial P/\partial v$ и $\partial^2 P/\partial u \partial v$ определяются, как показано в методе сшивки по касательной.

В общем случае выполняется условие

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{u_{i,j} - u_{i,j+1}} \neq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}} \quad (40)$$

Следовательно, векторы $\partial M(u, 1)/\partial v$ и $\partial N(u, 0)/\partial w$ не являются коллинеарными, за исключением точек, соответствующих значениям параметра $u = 0$ или $u = 1$.

Характеристический многоугольник кривой $P_{i,j}P_{i+1,j}$, которая совпадает с кривыми $M(0,1) M(1, 1)$ и $N(0, 0) N(1, 0)$, имеет три стороны, так как поверхность клетки A , являющейся геометрическим местом точек M , описывается бикубической зависимостью. То же справедливо и для вспомогательной образующей $S(0)S(1)$ (рис. 24).

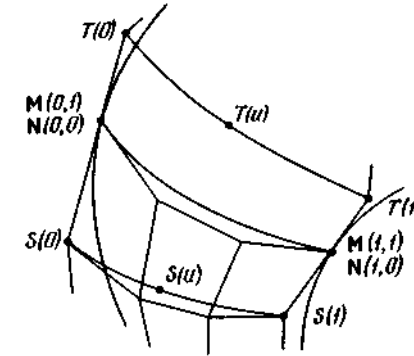


Рис. 24. Произвольная модификация. Определение первой вспомогательной образующей.

Для упрощения формул положим

$$\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{v_{i,j} - v_{i,j+1}} = \lambda_0 \text{ и } \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{v_{i+1,j} - v_{i+1,j+1}} = \lambda_1. \quad (41)$$

В клетке B , являющейся геометрическим местом точек N , обозначим через T точки, принадлежащие первой вспомогательной образующей, и определим ее с помощью выражения

$$T(u) = N(u, 0) + \frac{1}{3} \frac{\partial M(u, 1)}{\partial v} [\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) (-2u^3 + 3u^2)]. \quad (42)$$

Очевидно, что она является кривой шестой степени и ее характеристический многоугольник определяется шестью векторами. Для нахождения характеристической сетки модифицированной таким образом клетки необходимо вычислить другие главные или вспомогательные образующие, принадлежащие тому же семейству, вплоть до шестой степени, хотя зависимость от старших степеней является фиктивной, так как в действительности для этих кривых зависимость остается кубической.

При изменении значения параметра u от 0 до 1 величина в квадратных скобках в выражении (42) изменяется от λ_0 до λ_1 , а ее первая производная равна нулю для $u = 0$ и $u = 1$.

Отметим, что поверхность клетки B описывается зависимостью шестой степени по u и зависимостью третьей степени по v .

Обозначим через B' модифицированную клетку B и через $N'(u, w)$ — текущую точку этой клетки. Тогда можно записать

$$\frac{\partial N'(u, 0)}{\partial w} = 3[T(u) - N'(u, 0)]. \quad (43)$$

Учтем, что

$$N'(u, 0) = N(u, 0), \quad (44)$$

и получим

$$\frac{\partial N'(0, 0)}{\partial w} = 3[T(0) - N(0, 0)] = \frac{\partial M(0, 1)}{\partial v} \lambda_0 = \frac{\partial N(0, 0)}{\partial w}. \quad (45)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial N'(u, 0)}{\partial w} = \frac{\partial M(u, 1)}{\partial v} [\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) (-2u^3 + 3u^3)]. \quad (46)$$

Аналогичным образом, дифференцируя выражение (46) по u , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N'(u, 0)}{\partial u \partial w} &= \frac{\partial^2 M(u, 1)}{\partial u \partial v} [\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) (-2u^3 + 3u^2)] + \\ &+ \frac{\partial M(u, 1)}{\partial v} \frac{d}{du} [\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) (-2u^3 + 3u^2)]. \end{aligned} \quad (47)$$

Затем учтем, что

$$\frac{d}{du} (-2u^3 + 3u^2) = 6u(1 - u) \quad (48)$$

и эта величина равна нулю для $u = 0$ и $u = 1$, следовательно,

$$\frac{\partial^2 N'(0, 0)}{\partial u \partial w} = \lambda_0 \frac{\partial^2 M(0, 1)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 N(0, 0)}{\partial u \partial w}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 N'(1, 0)}{\partial u \partial w} = \lambda_1 \frac{\partial^2 M(1, 1)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 N(1, 0)}{\partial u \partial w}, \quad (50)$$

т. е. условия в точках $N'(0, 0)$ и $N'(1, 0)$ остаются такими же, как и до модификации клетки.

Обобщенная сшивка. В том случае, когда бикубическая клетка сшита с клеткой той же степени, ее вспомогательная образующая является кривой шестой степени, т. е. клетка принадлежит типу (6×3) . Из этого следует, что необходимо найти способы предотвращения последовательного возрастания степени до неприемлемых величин.

Рассмотрим характеристическую сетку бикубической клетки (рис. 25).

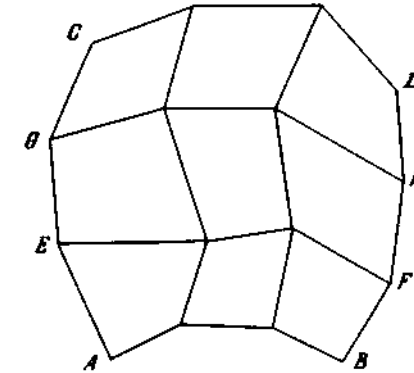


Рис. 25. Характеристическая сетка бикубической клетки.

Характеристические многоугольники ограничивающих ее кривых AB , BD , DC и CA , так же как и вспомогательных образующих EF и GH , имеют по три стороны. После сшивки с клеткой, прилегающей по стороне AB , вспомогательная образующая EF исходной клетки становится кривой шестой степени (рис. 26).

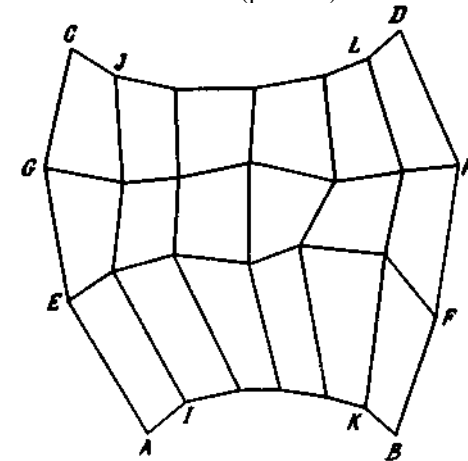


Рис. 26. Характеристическая сетка клетки порядка 6×3 .

Затем после сшивки с соседней клеткой, прилегающей по стороне DC , вспомогательная образующая GH также становится кривой шестого порядка (рис. 26).

И наконец, после сшивки с соседними клетками, прилегающими по сторонам AC и BD , вспомогательные образующие IJ и KL становятся кривыми шестого порядка, т. е. степень характеристической сетки клетки повышается до (6×6) , но 4 соседние клетки, прилегающие по главным образующим, остаются бикубическими.

Таким образом, происходит чередование клеток степени (3×3) и (6×6) и остаются применимы методы модификации, описанные ранее (произвольная модификация).

Модификация клетки

Из выражения

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{i,j} S_{i,m}(u) S_{j,n}(v)$$

видно, что если вершина $S_{i,j}$ характеристической сетки перемещается на вектор $\Delta_{i,j}$, то смещение каждой точки $P(u, v)$ определяется величиной

$$\Delta_{i,j} S_{i,m}(u) S_{j,n}(v).$$

Из свойств функций S следует, что максимальное смещение испытывает точка $P(i/m, j/n)$. Значения коэффициентов $S_{i,m}(i/m) S_{j,n}(j/n)$ берутся из табл. 1, и в большинстве случаев они близки к 0,1. Отметим также, что при использовании функций S происходит автоматическое сглаживание деформаций характеристической сетки.

Очевидно, что условия касания сохраняются для случаев

$$1 < i < m - 1, \quad 1 < j < n - 1,$$

или

$$2 < i < m - 2, \quad 2 < j < n - 2.$$

2.3.3.6. Тензорное произведение

В задачах моделирования поверхностей поверхностей возникают затруднения, связанные с особенностями геометрических свойств исходных данных. Мы рассмотрим наиболее благоприятные случаи, когда, используя свойства тензорного произведения, можно воспользоваться уже рассмотренными методами функции одной переменной. Затем дадим представление о других, более общих методах.

Рассмотрим простой случай, когда искомую функцию можно представить в виде линейной комбинации произведений функций одной переменной вида $\Phi(x)\Psi(y)$.

Метод Гордона и Кунса

Один из методов решения такой задачи состоит в следующем.

Пусть P_1 и P_2 - два интерполяционных оператора, определенных на множестве функций, отображающих отрезок $[0, 1]$ в R . $P_1 f$ и $P_2 f$ могут быть, например, интерполяционными полиномами Лагранжа или Эрмита для функции f . Если R_1 и R_2 являются операторами ошибки интерполяции для P_1 и P_2 соответственно, то имеем следующие тождества:

$$I = P_1 + R_1; \quad I = P_2 + R_2,$$

где I -тождественный оператор.

Если g - функция двух переменных, отображающая область $[0, 1] \times [0, 1]$ на R , то в дальнейшем будем применять операторы P_1 или P_2 к g , как к функции одной переменной $g(., y)$ (соответственно $g(x, .)$), рассматривая другую переменную как параметр. Поступая таким образом, легко получить следующие тождества:

$$g = P_1 P_2 g + (P_1 R_2 + P_2 R_1 + R_1 R_2) g, \\ g = (P_1 + P_2 - P_1 P_2) g + R_1 R_2 g.$$

Член $P_1 + P_2 - P_1 P_2$ называется булевой суммой и обозначается $P_1 \oplus P_2$. В каждом из этих двух тождеств присутствует интерполяционный оператор для g . Один из них $P_1 P_2 g$, другой $(P_1 \oplus P_2) g$. Приведем три примера, в которых показано их применение и различие между ними.

Интерполяция Лагранжа. Предположим, что P_1 и P_2 являются операторами интерполяции Лагранжа на точках 0 и 1:

$$P_1 f(t) = P_2 f(t) = (1 - t)f(0) + tf(1).$$

Тогда два приведенных выше оператора будут иметь вид

$$P_1 P_2 g(x, y) = (1 - x)(1 - y)g(0, 0) + (1 - x)yg(0, 1) + x(1 - y)g(1, 0) + xyg(1, 1),$$

$$(P_1 \oplus P_2)g(x, y) = (1 - x)g(0, y) + xg(1, y) + (1 - y)g(x, 0) + yg(x, 1) - (1 - x)(1 - y)g(0, 0) - (1 - x)yg(0, 1) - x(1 - y)g(1, 0) - xyg(1, 1).$$

Отсюда видно, что оба оператора выполняют интерполяцию по-разному. Для определения $P_1 P_2 g$ необходимо знать значения g только в вершинах квадрата, тогда как $(P_1 \oplus P_2)g$ требует значений g на сторонах квадрата.

Интерполяция Эрмита. Рассмотрим следующий пример, в котором операторы P_1 и P_2 являются операторами интерполяции Эрмита:

$$P_1 f(t) = P_2 f(t) = \varphi_0(t)f(0) + \varphi_1(t)f(1) + \varphi_2(t)f'(0) + \varphi_3(t)f'(1).$$

Тогда

$$P_1 P_2 g(x, y) = [\varphi_0(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x)] G \begin{vmatrix} \varphi_0(y) \\ \varphi_1(y) \\ \varphi_2(y) \\ \varphi_3(y) \end{vmatrix},$$

где

$$G = \begin{vmatrix} g(0, 0) & g(0, 1) & \frac{\partial}{\partial y} g(0, 0) & \frac{\partial}{\partial y} g(0, 1) \\ g(1, 0) & g(1, 1) & \frac{\partial}{\partial y} g(1, 0) & \frac{\partial}{\partial y} g(1, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(0, 0) & \frac{\partial}{\partial x} g(0, 1) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(0, 0) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(0, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(1, 0) & \frac{\partial}{\partial x} g(1, 1) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(1, 0) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(1, 1) \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} (P_1 \oplus P_2)g(x, y) &= \varphi_0(y)g(x, 0) + \varphi_1(y)g(x, 1) + \\ &+ \varphi_2(y)\frac{\partial}{\partial x}g(x, 0) + \varphi_3(y)\frac{\partial}{\partial x}g(x, 1) \left. \vphantom{\begin{aligned} (P_1 \oplus P_2)g(x, y) \\ + \varphi_2(y)\frac{\partial}{\partial x}g(x, 0) + \varphi_3(y)\frac{\partial}{\partial x}g(x, 1) \end{aligned}} \right\} P_2 g(x, y) \\ &+ \varphi_0(x)g(0, y) + \varphi_1(x)g(1, y) + \\ &+ \varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial y}g(0, y) + \varphi_3(x)\frac{\partial}{\partial y}g(1, y) \left. \vphantom{\begin{aligned} (P_1 \oplus P_2)g(x, y) \\ + \varphi_0(x)g(0, y) + \varphi_1(x)g(1, y) + \varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial y}g(0, y) + \varphi_3(x)\frac{\partial}{\partial y}g(1, y) \end{aligned}} \right\} P_1 g(x, y) \\ &- P_1 P_2 g(x, y). \end{aligned}$$

Относительно этих операторов можно сделать те же замечания, что и в предыдущем случае. В дополнение к ним должны быть известны значения перекрестных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

в вершинах квадрата. Существуют методы, позволяющие устранить эту трудность.

Метод Кунса. Наконец, в третьем примере допустим, что

$$P_1 f(t) = P_2 f(t) = \varphi_0(t)f(0) + \varphi_1(t)f(1).$$

Учитывая, что $(P_1 f)'(0) = (P_1 f)'(1)$, можно записать

$$\begin{aligned} (P_1 \oplus P_2)g(x, y) &= \varphi_0(x)g(0, y) + \varphi_1(x)g(1, y) + \varphi_0(y)g(x, 0) + \\ &+ \varphi_1(y)g(x, 1) - \varphi_0(x)\varphi_0(y)g(0, 0) - \varphi_0(x)\varphi_1(y)g(0, 1) - \\ &- \varphi_1(x)\varphi_0(y)g(1, 0) - \varphi_1(x)\varphi_1(y)g(1, 1). \end{aligned}$$

Этот метод чрезвычайно прост потому, что в нем требуется, чтобы нормальная производная функции была равна 0 на каждой стороне квадрата.

Замечания. В приведенных выше примерах куски поверхностей сшиваются непрерывным образом, а в последних двух случаях - вместе с нормальными производными по непрерывной границе. На их основе можно разрабатывать и другие методы построения поверхностей, но

при этом резко возрастает сложность вычисления функций. Если в методе предусматривается использование значений функции g или ее производных на границах квадрата, то их можно получить, решая предварительно линейную задачу для функции одной переменной.

Тензорное произведение и интерполяционные сплайны

Если известны значения функции на равномерной решетке точек $(ih, jk)_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M}$, можно определить интерполяционный сплайн с помощью тензорного произведения. Критерию минимизации в этом случае будет удовлетворять бикубический интерполяционный сплайн. На каждой прямой, параллельной одной из осей решетки, его значения равны значениям кубического сплайна как функции одной переменной. Таким образом, вычисление бикубического сплайна сводится к вычислению $2N + M$ или $2M + N$ сплайнов одной переменной. Это свойство распространяется и на другие типы интерполяционных функций.

Возможности применения методов, использующих тензорное произведение, ограничиваются геометрическими свойствами данных. Однако эти методы настолько эффективны и просты, что нередко прибегают к преобразованию области задания исходных данных или к специальной параметризации, чтобы обеспечить необходимые для них условия.

Сплайны, являющиеся решением задачи сглаживания, обладают другими свойствами. Вопросы применения в этом случае метода наименьших квадратов для нахождения бикубических сглаживающих сплайнов и другие рассмотрены в ряде работ.

Поверхности Безье и B-сплайна

Для моделирования поверхностей также широко применяются функции Безье и B-сплайны и метод тензорного произведения. Пусть Q - решетка точек в R^3 :

$$Q = \{Q_{ij}, 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M\}$$

Поверхностью Безье, связанной с Q , называется поверхность, определяемая следующим образом:

$$B[Q](s, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \Phi_{N,i}(s) \Phi_{M,j}(t) Q_{ij},$$

где s и t принадлежат отрезку $[0, 1]$ Аналогично поверхности B-сплайна, связанной с Q , называется поверхность, определяемая следующим образом:

$$S[Q](s, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M N_{i,N}(s) N_{j,M}(t) Q_{ij},$$

где функции Φ и N определены ранее. Не обязательно, чтобы узлы и узловые точки совпадали в обоих направлениях. При переходе от кривых к поверхностям сохраняется важное свойство поверхности Безье и B -сплайна расположены в выпуклой оболочке своей решетки. На практике используются главным образом билинейные ($N = M = n = m - 1$), биквадратные и бикубические поверхности. Отметим, наконец, что возможно обобщение этих представлений для правильных решеток, отличных от прямоугольных.

2.3.3.7. Методы интерполяции для произвольно расположенных точек

Для произвольно расположенных точек в случае функции нескольких переменных не существует общей теории интерполяции. Обычно при решении подобных задач налагают дополнительные условия на геометрическое расположение точек. Подход к решению задачи заключается либо в построении кусочно-полиномиальных функций (в общем случае они строятся на треугольной сетке), либо в использовании сплайнов.

Интерполяция на треугольнике

Во многих работах предпринимались попытки разработать методы, аналогичные методам Гордона и Кунса, но для треугольного элемента поверхности, причем во всех случаях стремятся свести двумерную задачу к одномерной. Приведем несколько примеров.

Рассмотрим треугольник T с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$ (рис. 27).

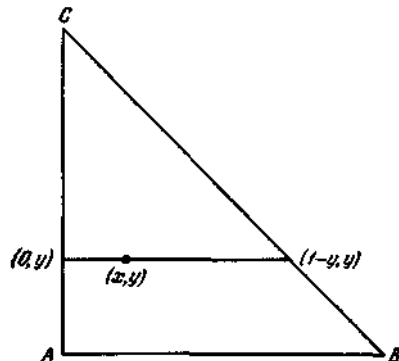


Рис. 27. Интерполяция Лагранжа функции двух переменных

Вычисления будем проводить в декартовых координатах. Построим на этих точках интерполяционную поверхность Лагранжа

$$P_1 g(x, y) = \frac{1-x-y}{1-y} g(0, y) + \frac{x}{1-y} g(1-y, y)$$

Аналогично определяем P_2 вдоль направления AC . Тогда интерполяционный оператор $P_1 \oplus P_2$ позволяет осуществить непрерывную сшивку (в пространстве C^0). Подобным образом можно осуществить непрерывную и дифференцируемую сшивку (в пространстве C^1), если в качестве исходных операторов взять

$$P_1 g(x, y) = \varphi_0 \left(\frac{x}{1-y} \right) g(0, y) + \varphi_1 \left(\frac{x}{1-y} \right) g(1-y, y) + \varphi_2 \left(\frac{x}{1-y} \right) (1-y) \frac{\partial}{\partial x} g(0, y) + \varphi_3 \left(\frac{x}{1-y} \right) \frac{\partial}{\partial x} g(1-y, y)$$

и P_2 , который определяется вдоль направления AC . Булева сумма приводит к появлению перекрестных производных, при вычислении которых возникают большие трудности. Вместо использования направлений, параллельных сторонам треугольника, можно взять направление из вершины треугольника на противоположную сторону. Разработан другой метод, в котором каждой вершине треугольника ставятся в соответствие координатные оси, образованные прилетающими сторонами, и в каждой паре осей осуществляется интерполяция с помощью булевой суммы, а окончательное решение берется в виде комбинации полученных функций. При вычислениях в каждом треугольнике вместо декартовых координат обычно используют так называемые барицентрические координаты, в которых с произвольной точкой P внутри треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 28) связываются три положительных или равных нулю числа

$$\lambda_i = \frac{\text{Площадь треугольника } PA_jA_k}{\text{Площадь треугольника } A_1A_2A_3}; \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j \neq k.$$

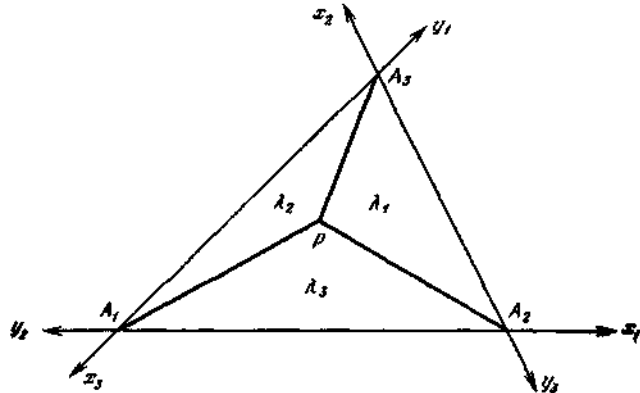


Рис 28. Интерполяция с использованием барицентрических координат.

Затем вычисляют интерполяционную функцию класса C^0 , оставляя инвариантными полиномы первой степени:

$$Pg(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 [g(1 - \lambda_2, \lambda_2, 0) + g(1 - \lambda_3, 0, \lambda_3) - g(1, 0, 0)] + \lambda_2 [g(\lambda_1, 1 - \lambda_1, 0) + g(0, 1 - \lambda_3, \lambda_3) - g(0, 1, 0)] + \lambda_3 [g(\lambda_1, 0, 1 - \lambda_1) + g(0, \lambda_2, 1 - \lambda_2) - g(0, 0, 1)].$$

Достоинством этих методов является возможность непрерывной сшивки самих поверхностей или поверхностей вместе со своими нормальными производными. При их использовании могут возникнуть трудности, связанные с разбиением области на треугольники и с выбором метода сшивки.

Описанные методы позволяют строить некоторые конечные элементы.

Конечные треугольные элементы

Вкратце суть проблемы состоит в следующем. Конечный элемент определяется как триплет (K, P, Σ) , где

- 1) K -замкнутый многогранник из R^2 (в данном случае - треугольник);
- 2) $P \subset C^s(K)$ - пространство действительных функций, отображающих K на R , непрерывных и s раз дифференцируемых;
- 3) Σ - конечное множество линейных, линейно независимых функционалов, определенных на $C^s(k)$ и таких, что $\forall l_i \in \Sigma, \forall z \in R^N, \exists$ единственный $p \in P, l_i(p) = z_i, i = 1, \dots, N$.

Конечный элемент считается принадлежащим классу k , если интерполирующая функция, построенная на данном разбиении, непрерывна вместе со своими производными до k -го порядка. Обычно в качестве P берут пространство полиномов, базис которого $\{p_i\}$ удовлетворяет условию

$$l_i \{p_j\} = \delta_{ij}.$$

Полиномы здесь также представляются в барицентрических координатах.

Приведем два примера конечных элементов.

Пример 1. Конечный элемент Лагранжа первой степени класса C : P -пространство полиномов первой степени;

$$\Sigma = \{l_1, l_2, l_3\}; l_i(f) = f(A_i); p_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_i,$$

где A_i - вершины треугольника $K = A_1 A_2 A_3$.

Пример 2. Конечный элемент Эрмита класса C^1 . Если использовать только полиномы, для его построения потребуется 18-мерное пространство, определяемое так, что в вершинах треугольника задаются значения самой функции и ее первой и второй производных.

В качестве P могут быть использованы также пространства рациональных или кусочно-полиномиальных функций. Для сохранения границ области иногда используют криволинейные треугольники. В теории изопараметрических элементов изучаются преобразования перехода от обычных к криволинейным конечным элементам с сохранением необходимых свойств.

Интерполяционные сплайны и нерегулярные данные

Для неравномерно расположенных исходных данных поиск интерполяционных сплайнов от нескольких переменных осуществляется теми же способами, что и для одной переменной, среди которых выше были рассмотрены:

- а) применение кусочно-полиномиальных функций с определенными условиями сшивки;
- б) минимизация критерия.

Первый способ разрабатывался многими авторами, однако до сих пор нет такого метода, который можно было бы действительно применить на практике. Разработка метода минимизации критерия основывается на теории воспроизводящих ядер. Существуют методы решения задач на ограниченных областях R^2 . В некоторых работах эта теория распространена на неограниченные множества.

Таким образом, минимизация критерия (аналог энергии изгиба бесконечной пластины)

$$\iint_{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mu(x, y) \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mu(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mu(x, y) \right)^2 dx dy$$

с интерполяционными условиями

$$\mu(x_i, y_i) = z_i, i = 1, \dots, n,$$

приводит к определению сплайна следующего вида:

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i K(x - x_i, y - y_i) + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

где функция K (полугильбертово ядро) связана с выбранным критерием

$$K(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2),$$

а $\lambda_i, \alpha, \beta, \gamma$ определяются из решения линейной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n K(x_i - x_j, y_i - y_j) \lambda_j + \alpha x_i + \beta y_i + \gamma &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 0. \end{aligned}$$

Существует много численных методов решения этой задачи, в частности и такие, в которых не надо упорядочивать интерполяционные точки. Если n велико (>130), решение системы и вычисление сплайнов затруднительно. Для $n < 80$ метод Гаусса дает вполне удовлетворительные результаты, если первые точки выбирать удаленными друг от друга.

Возможно применение и других критериев минимизации, которые приводят к различным видам ядер:

$K(x, y) = (x^2 + y^2)^{\theta/2}$ (θ -действительное положительное нецелое число);

$$K(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^k \ln(x^2 + y^2).$$

В зависимости от значений θ и k полученный сплайн будет иметь большее или меньшее число производных.

Сшивка

Интерполяционные процедуры могут быть выполнены на расположенных рядом треугольных и прямоугольных элементах так, чтобы обеспечить построение непрерывных и дифференцируемых поверхностей при условии, что эти процедуры должны быть класса C^1 с общими данными на границах. Как и в случае одной переменной, решение задачи сразу для всей области может быть весьма трудоемким, поэтому часто разбивают задачу на несколько локальных задач с последующей сшивкой решений. Предположим, например, что

поверхности S_{ij} были вычислены в результате решения локальных задач на областях $R_{ij}((a_i, b_i) \times (c_j, d_j))$ (рис. 29).

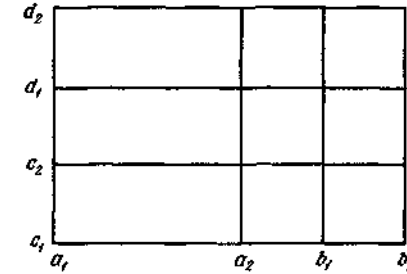


Рис. 29. Разбиение области интерполяции.

Тогда окончательное решение определяется следующей формулой:

$$S(x, y) = \sum_{i,j=1}^2 \Psi_i(x) \Phi_j(y) S_{ij}(x, y),$$

где

$$\Psi_1(x) = \begin{cases} 1 & a_1 \leq x \leq a_2, \\ \Phi_0\left(\frac{x - a_2}{b_1 - a_2}\right) & a_2 \leq x \leq b_1, \\ 0 & b_1 \leq x \leq b_2, \end{cases} \quad \Phi_1(y) = \begin{cases} 1 & c_1 \leq y \leq c_2, \\ \Phi_0\left(\frac{y - c_2}{d_1 - c_2}\right) & c_2 \leq y \leq d_1, \\ 0 & d_1 \leq y \leq d_2, \end{cases}$$

$$\Psi_2(x) = 1 - \Psi_1(x), \quad \Phi_2(y) = 1 - \Phi_1(y).$$

Можно также использовать метод Франка (разд. 2.2.4), определяя весовые функции для случая R^2 . Если выбрать весовые функции для каждой точки в задаче интерполяции таким образом, что

$$w_i(x, y) = (R_i^2 - ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2))_+,$$

тогда можно вычислить локальные поверхности на дисках с центром (x_i, y_i) и радиусом R .

Рассмотренные методы сшивки предполагают сегментацию поверхности с целью упрощения вычислений и предполагают заданными значения функции и ее производной. Однако часто в задачах интерполяции известны только значения самой функции, но не ее производных (экспериментальные результаты, численные расчеты и т. п.). В этом случае можно предложить следующий алгоритм вычислений:

- произвести разбиение области на треугольники, взяв в качестве вершин треугольников точки, в которых известны значения функции;
- выбрать метод интерполяции на области треугольной формы. Ввести дополнительное множество точек, необходимое для реализации метода;

- вычислить в каждой дополнительной точке P недостающие данные с помощью интерполяционного сплайна, определенного по известным значениям в вершинах треугольника, содержащего P ;
 - провести интерполяционную поверхность на каждом треугольнике. Если позволяют условия, следует выбрать равномерное разбиение. В этом случае необходимо:
 - определить равномерное разбиение;
 - выбрать метод интерполяции и определить множество точек, как и раньше;
 - каждой точке P поставить в соответствие точки данных θ_p , лежащие на многогранниках, формирующих сетку разбиения и содержащих P .
- На θ_p строят локальную поверхность, с помощью которой вычисляют недостающие точки.

2.3.3.8. Автоматическое разбиение на треугольники

Рассматриваемая задача разбиения на треугольники аналогична задаче, возникающей в методе конечных элементов с неравномерно расположенными данными. При этом возможны два случая:

- автоматическое разбиение области, заданной своими границами;
- автоматическое разбиение на заданных точках.

Решение определяется выбором критерия оптимального разбиения. Рассмотрим два метода предварительного разбиения, а затем их усовершенствование.

Разбиение на области

Для автоматического разбиения заданной области Q из R^2 предположим, что она является связной (без дыр, в противном случае достаточно ввести фиктивные вспомогательные границы) и известна ее граница. Это равносильно тому, что заранее известны вершины разбиения на границе. Идея метода состоит в том, чтобы, начиная от известных вершин I_1, \dots, I_n , строить остальные точки разбиения, постепенно продвигаясь в глубь области. Можно выделить следующие этапы этой работы:

- *Начальный этап:* выбираются три последовательные точки, расположенные на границе, и упорядочивается их нумерация в направлении по часовой стрелке. Область Ω представим в виде 2 частей: τ -часть, где разбиение уже проведено, D - оставшаяся часть. В исходном состоянии имеем

$$F = \{I_1, I_2, I_3\}, \quad \tau = \emptyset, \quad D = \Omega.$$

- Пока область D не сведена к отрезку, для

$$F = \{I_1, \dots, I_n\}$$

отыскиваем такое p , чтобы $\theta = \widehat{I_{p-1}I_pI_{p+1}} = \inf_i \widehat{I_{i-1}I_iI_{i+1}}$, где $\widehat{I_{p-1}I_pI_{p+1}}$ обозначает угол, образованный отрезками $I_{p-1}I_p$ и I_pI_{p+1} .

- Находим k , удовлетворяющее условию

$$k \frac{\pi}{3} < \theta \leq (k+1) \frac{\pi}{3}.$$

- Если $k = 0$:
 - строим треугольник T с вершинами $I_{p-1}I_pI_{p+1}$,
 - $\tau \rightarrow \tau \cup T$, $D = D - T$;
 - исключаем точку I_p из F .
- Если $k > 0$:
 - строим точки P_1, \dots, P_k таким образом, чтобы

$$\widehat{I_{p-1}I_pP_j} = \frac{j\theta}{k+1}$$

и треугольники $T_0 = I_{p-1}I_pP_1$,

$$T_i = P_iI_pP_{i+1}, \quad T_k = P_kI_pI_{p+1}$$

были бы максимально близки к равносторонним;

- строим треугольники T_0, \dots, T_k ;
- $\tau \rightarrow \tau \cup T_0 \cup \dots \cup T_k$, $D = D - (T_0 \cup \dots \cup T_k)$;
- исключаем I_p из F и добавляем в F P_1, \dots, P_k ;
- если $p = 2$, добавляем к F граничную точку, предшествующую I_1 ;
- если $p = n - 1$, добавляем к F граничную точку, следующую за I_n .

Разбиение на заданных точках

Автоматическое разбиение на известных точках заключается в построении треугольников с вершинами в данных точках. Множество этих точек обозначим через $P = \{Q_1, \dots, Q_2\}$ и выпуклую замкнутую границу множества P - через C . Часть точек n_f будет лежать на границе, а часть n_i - внутри C .

Тогда

$$\begin{aligned} n &= n_f + n_i, \\ n_i &= n_f + 2(n_i - 1) \leq 2n, \\ n_c &= 2n_f + 3(n_i - 1) \leq 3n, \end{aligned}$$

где n_i - число треугольников, n_c - число сторон. Укажем на один из возможных алгоритмов решения задачи, близкий по своей идее к рассмотренному выше.

Согласно этому алгоритму, построение начинается с точек, лежащих на границе. Методы определения выпуклой граничной оболочки рас-

смотрены в ряде работ. Единственное отличие от описанного выше алгоритма состоит в построении точек, поскольку используются уже известные точки. Как и раньше, строятся точки P_i , а затем внутри окружности заданного радиуса определяется, имеются ли еще неиспользованные точки. Если их несколько, берут наиболее близкую к границе, если их нет - увеличивают радиус окружности.

Существуют также другие алгоритмы, использующие иные принципы разбиения. В них предусматривается построение начального треугольника, от которого разбиение распространяется на всю область.

Оптимизация разбиения на треугольники

Для оптимизации разбиения необходимо строить треугольники, максимально близкие к равносторонним. Решение подобной задачи ни в общем виде, ни для локальных четырехугольных областей не получено. На практике обычно задают начальное разбиение, а затем его последовательно оптимизируют в четырехугольных областях. Положение точек можно немного изменять. Для выпуклого четырехугольника отметим две возможности. Первая заключается в максимизации минимального внутреннего угла каждого треугольника, вторая возможность заключается в следующем. Определим область

$$D_i = \{P \in R^2 / d(P, Q_j) < d(P, Q_i), j \neq i, \forall j = 1, 2, 3, 4\}, i = 1, \dots, 4.$$

Если соединить точки Q_i и Q_k и при этом D_i и D_k имеют общую границу, то такое разбиение называется разбиением Делоне. Оно может быть проведено для множества произвольных точек.

Рассмотрим определения пространственных тел.

Характеристическая решетка в трехпараметрическом пространстве определяется набором характеристических сеток одинакового формата $(m \times n)$ со смещенными относительно друг друга вершинами с одинаковыми индексами.

Точки

Легко показать, что точка в этом пространстве задается с помощью следующего выражения:

$$P(u, v, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p S_{i,j,k} \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u) \cdot \mathcal{B}_{j,n}(v) \cdot \mathcal{B}_{k,p}(w). \quad (51)$$

Кривые

Введем вспомогательный параметр r , через который выразим остальные:

$$u = \Phi(r), v = \Psi(r), w = \Theta(r), \quad (52)$$

где функции Φ , Ψ и Θ являются полиномами степеней соответственно μ , ν и π . Определим канонический вид уравнения кривой степени $(m\mu + n\nu + p\pi)$ следующим образом:

$$P(r) = \sum_{i=0}^{m\mu + n\nu + p\pi} c_i r^i. \quad (53)$$

Обычно $\mu = \nu = \pi$.

Поверхности

Для определения поверхности в трехпараметрическом пространстве введем два вспомогательных параметра v и π .

$$u = \Phi(r, t), v = \Psi(r, t), w = \Theta(r, t). \quad (54)$$

Если функции Φ , Ψ и Θ являются полиномами степеней μ , ν и π по r и μ' , ν' и π' по t , то уравнение поверхности приобретает вид

$$P(r, t) = \sum_{i=0}^{m\mu + n\nu + p\pi} \sum_{j=0}^{m\mu' + n\nu' + p\pi'} c_{i,j} r^i t^j. \quad (55)$$

2.3.4. Параметрические преобразования

2.3.4.1. Кривые

Линейные преобразования

Иногда возникает необходимость изменить границы отрезка кривой, соединяющего две точки $P(0)$ и $P(1)$, причем новые границы могут находиться как вне, так и внутри этого отрезка. Обозначим значения параметра в новых граничных точках через u_0 и u_1 (рис. 1) и введем вспомогательный параметр w , такой, что

$$P(w) = \sum_{i=0}^m b_i [u_0 + (u_1 - u_0)w]^i = \sum_{i=0}^m b'_i w^i; w \in [0, 1],$$

а векторы b' связаны с векторами b через посредство соотношения

$$[b'_i] = [M_{b,b'}] [b_i], \quad [M_{b,b'}] = \left[\begin{matrix} u_0^l - l(u_1 - u_0)^{l-1} \binom{c-1}{l-1} \end{matrix} \right], \quad (1)$$

где l и c представляют собой номера строки и столбца общего члена матрицы c , $l \in [0, m]$.

Вершины нового характеристического многоугольника определяются

следующим образом:

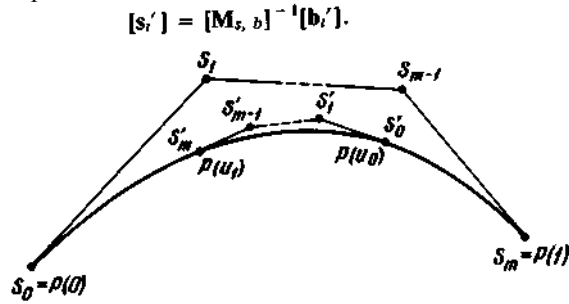


Рис. 1. Параметрическое преобразование кривой.

Из свойства линейности преобразования следует равенство степеней параметров w и u .

Нелинейные преобразования

Если осуществить переход к параметру w , связанному с прежним параметром u , с помощью соотношения $u = \Phi(w)$, то точка на кривой будет определяться следующим образом:

$$P(w) = \sum_{i=0}^m b_i [\Phi(w)]^i. \tag{2}$$

Очевидно, что кривая при этом не изменится, при условии что $\Phi(w)$ является действительной функцией. Различие будет проявляться в соотношении между длиной траектории точки P , пробегаемой по кривой, и изменением величины параметра.

Действительно,

$$\frac{dP(w)}{dw} = \sum_{i=0}^m i b_i [\Phi(w)]^{i-1} \frac{d\Phi(w)}{dw},$$

а член $d\Phi(w)/dw$ не является константой.

Этот метод может быть использован для изменения распределения параметра по отрезку кривой и для его более простой модификации. Его недостатком является увеличение степени.

Увеличение числа вершин характеристического многоугольника

Изменяя положение вершин характеристического многоугольника, можно изменить форму определяемого им отрезка кривой. Однако возможно, что, добившись улучшения в одном месте, мы проиграем в другом. Чтобы устранить этот недостаток и получить возможность более гибкого представления кривых, можно увеличить число векторов характеристического многоугольника. Не всегда удастся простыми

средствами выполнить это преобразование, поэтому можно рекомендовать следующий метод.

Рассмотрим точку $P(u)$, определяемую выражением

$$P(u) = \sum_{i=0}^m b_i u^i.$$

Очевидно, что она совпадает с точкой

$$Q(u) = P(u) + \sum_{i=m+1}^{m+n} O u^i.$$

Выражения для обеих точек можно представить в виде

$$P(u) = [u^i] [b_i] \quad i \in [0, m],$$

$$Q(u) = [u^i] [b'_i] \quad i \in [0, (m+n)],$$

где

$$[b'_i] = \begin{bmatrix} [b_i] \\ \{0\} \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что новые вершины характеристического многоугольника, число которых равно $(m+n+1)$, можно определить следующим образом:

$$[b'_i] [M_s, s]^{-1} = [s'_i].$$

Другими словами, кривая $Q(u)$ представляется полиномом степени $(m+n)$, хотя в действительности ее степень равна m . Очевидно, что, когда над характеристическим полиномом производятся последующие модификации, степень кривой (за редчайшими исключениями) принимается равной $(m+n)$.

На рис. 2 показан простой метод, с помощью которого можно увеличить число сторон характеристического многоугольника с m до $m+1$, не меняя форму кривой.

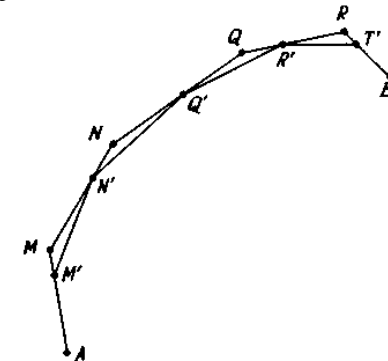


Рис. 2. Увеличение числа вершин характеристического многоугольника.

Здесь $AMN \dots RB$ — характеристический многоугольник, имеющий m сторон, а точки $A M' N' \dots R' T' B$, определяющие вершины искомого многоугольника, определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} \frac{AM'}{AM} &= \frac{m}{m+1}, \\ \frac{MN'}{MN} &= \frac{m-1}{m+1}, \\ &\dots \\ \frac{RT'}{RB} &= \frac{1}{m+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уменьшение числа вершин характеристического многоугольника

Теоретическое решение. Решение без изменения переменных. Зная векторы \mathbf{a} или \mathbf{s} , можно определить векторы \mathbf{b} . Если n последних векторов строго или приближенно равны нулю, то справедливо следующее выражение:

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m s_i \mathcal{B}_{i, m}(u) = \sum_{i=0}^{m-n} \mathbf{b}_i u^i. \quad (4)$$

Зная векторы \mathbf{b}_i , можно определить новые векторы \mathbf{s}'_i и \mathbf{b}'_i $i \in \{0, m-n\}$.

В случае приближенного равенства нулю следует немного изменить $(m-n)$ -й вектор для того, чтобы его конец совпадал с точкой $P(1)$. Кроме того, можно произвольным образом распределить поправки между несколькими векторами. Отметим, что если последние n векторов \mathbf{b} равны нулю, то годограф порядка $(m-n)$ обращается в точку.

Решение с использованием вспомогательной переменной. Если можно найти функцию степени n

$$v = \Phi(u),$$

такую, что

$$\mathbf{P}(u) = \Phi(u)\mathbf{Q}(u), \quad (5)$$

то, поскольку $\mathbf{Q}(u)$ имеет форму полинома, справедливо выражение

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i u^i = \sum_{i=0}^{m-n} \beta_i [\Phi(u)]^i,$$

из которого следует

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^{m-n} \beta_i v^i.$$

Следует иметь в виду, что отыскание полинома-делителя обычно является весьма сложной задачей.

Приближенное решение. Решение при известных точках на отрезке кривой. Если определить координаты требуемого числа точек, лежащих на отрезке кривой, то можно применить один из методов, описанных ранее (алгоритмы построения).

Решение с учетом граничных условий. Предыдущий метод не сохраняет непрерывности между прилегающими отрезками. Устранить этот недостаток позволяет следующий метод.

Рассмотрим отрезок кривой C , определяемый следующим выражением:

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i u^i \quad u \in [0, 1].$$

Тогда условиями в точке $P(0)$ будут

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{b}_0 \\ \frac{d^i \mathbf{P}(0)}{du^i} &= i! \mathbf{b}_i \end{aligned} \right\} i \in [1, m], \quad (6)$$

а в точке $P(1)$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(1) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i \\ \frac{d^i \mathbf{P}(1)}{du^i} &= \sum_{j=i}^m \frac{i!}{(i-j)!} \mathbf{b}_j \end{aligned} \right\} i \in [0, m]. \quad (7)$$

Если положить $d^0 f/du^0 = f(u)$, то условия (6) можно упростить

$$\frac{d^i \mathbf{P}(1)}{du^i} = i! \mathbf{b}_i. \quad (8)$$

Условия (6) и (7) математически эквивалентны и определяют одну и ту же кривую.

Ниже рассмотрены приближенные методы, с помощью которых кривую C степени m можно описать зависимостью степени p ($p < m$).

Случай нечетного p . Зная векторы \mathbf{b}_i , $i \in [0, (p-1)/2]$, можно получить $[(p+1)/2]$ первых векторов S_i характеристического многоугольника аппроксимирующей кривой. Затем, зная вершины $S_m, S_{m-1}, \dots, S_1, S_0$ характеристического многоугольника кривой L' , можно таким же образом получить $[(p+1)/2]$ первых векторов S'_i многоугольника, аппроксимирующего кривую L' . Вершины S'_i и S''_j определяют искомым аппроксимирующий характеристический многоугольник, принадлежащий кривой L , на концах которой соблюдаются те же граничные условия до порядка $[(p+1)/2]$, что и для кривой C^1 , иначе говоря, из исходного характеристического многоугольника отбирается $(p+1)/2$ вершин слева и столько же —

справа. Отобранные вершины образуют характеристический многоугольник аппроксимирующей кривой.

Случай четного p . Как и выше, получаем $[(p/2)+1]$ вершин из условий для каждого из концов отрезка, но теперь полное число вершин составляет $(p + 2)$ вместо требуемых $(p + 1)$. Вершина с номером $[(p/2) + 1]$ выбирается посередине отрезка, соединяющего две вершины с номерами $[(p/2) + 1]$.

Оба метода удобны для применения в тех случаях, когда кривая высокой степени является результатом перемещения, общего преобразования базиса или пересечения поверхностей. Если же высокая степень кривой связана с ее негладкой формой, то сомнительно, чтобы можно было добиться понижения степени другим методом, кроме деления кривой на несколько отрезков.

Отображения

Рассмотрим разбиение поверхности F на бипараметрические клетки (рис. 3) и построим на ней экспериментально полученную кривую G , у которой известны некоторые точки пересечения с изопараметрическими кривыми на F .

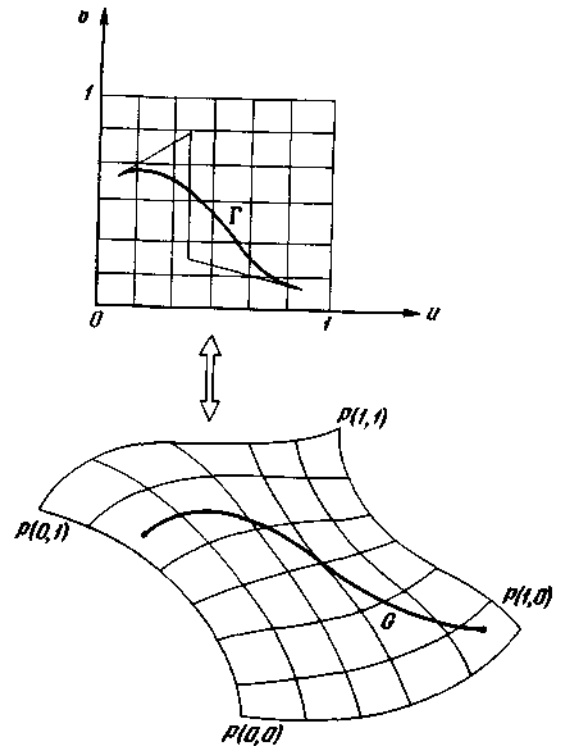


Рис. 3. Принцип определения пересекающей кривой.

Возьмем также плоскость в декартовой системе координат с разбиением на единичные квадраты и отложим на ней точки, декартовы координаты которых совпадают с параметрическими координатами кривой на плоскости F . Через эти точки на плоскости проведем кривую Γ невысокой степени. Если координаты на плоскости x и y заменить на u и v , то для точек на кривой Γ можно записать

$$u = \sum_{h=0}^p c_h w^h, \quad v = \sum_{k=0}^p d_k w^k, \tag{9}$$

где c_h и d_k — скалярные, а не векторные величины, и w — вспомогательный параметр.

Кривая G является отображением кривой Γ на поверхность F :

$$\mathbf{P}(w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} \left(\sum_{h=0}^p c_h w^h \right)^i \left(\sum_{k=0}^p d_k w^k \right)^j. \tag{10}$$

Объединив члены с одинаковой степенью, получим

$$P(w) = \sum_{l=0}^{(m+n)} e_l w^l,$$

где векторные коэффициенты e определяются выражением

$$e_l = \sum_{h, i, j, k} b_{i, j} (c_k)^i (d_k)^j, \quad hi + kj = l. \quad (11)$$

2.3.4.2. Поверхности

Линейные преобразования

Рассмотрим клетку C , параметрические координаты в которой изменяются в пределах $(u, v) \in [0, 1]$. Тогда текущая точка подклетки, ограниченной образующими $G(u_0)$, $G(u_1)$, $H(v_0)$ и $H(v_1)$ (рис. 4), задается следующим выражением:

$$P(w, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i, j} [u_0 + (u_1 - u_0)w]^i [v_0 + (v_1 - v_0)t]^j = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i, j} w^i t^j. \quad (12)$$

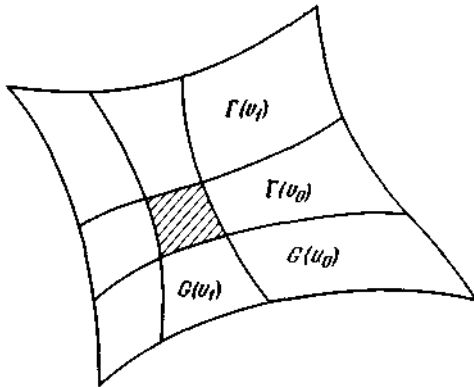


Рис. 4. Определение подклетки.

Для его использования необходимо найти матрицу $M_{b, c}$, связывающую коэффициенты $b_{i, j}$ и $c_{i, j}$:

$$[b_{i, j}] [M_{b, c}] = [c_{i, j}].$$

Более простым может оказаться другой способ, при использовании которого сначала определяются отрезки главных и вспомогательных образующих между значениями параметра u_0 и u_1 . Таким образом определяется под клетка (рис. 5), образующие которой Δ ограничены значениями v_0 и v_1 :

$$P(w, t), \quad w, t \in [0, 1],$$

которая совпадает с подклеткой

$$P(u, v), \quad u \in [u_0, u_1], \quad v \in [v_0, v_1].$$

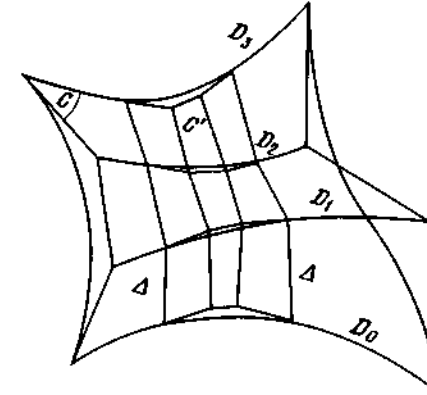


Рис. 5. Линейное преобразование клетки.

В этих вычислениях используется матрица (1).

Нелинейные преобразования

Если вспомогательный параметр связан с основными с помощью соотношений $u = \Phi(w)$ и $v = \Psi(t)$, то выражение для текущей точки приобретает следующий вид:

$$P(w, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i, j} [\Phi(w)]^i [\Psi(t)]^j. \quad (13)$$

Этот прием может быть использован для изменения расстояния между изопараметрическими кривыми без изменения формы поверхности. Его очевидным недостатком является увеличение степени функций, а следовательно, и времени вычислений.

Увеличение числа вершин

Обобщим метод, применявшийся к кривым ранее, и произведем фиктивное увеличение степени клетки с помощью следующей операции:

$$[M_{s, b}]^{-1} \begin{bmatrix} [b_{i, j}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} = [s_{i, j}]. \quad (14)$$

Уменьшение числа вершин

Решение без изменения переменных. Если окажется, что коэффициенты годографа при наиболее высоких степенях имеют пренебрежимо малые значения, то можно без ущерба исключить соответствующие члены. Заметим только, что вероятность такой ситуации невелика.

Решение с вспомогательной переменной. Поиск функций $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$, являющихся делителями выражения $P(u, v)$, труден, а часто и невозможен, поэтому данное решение упоминается только для полноты картины.

Приближенные решения. Решение при известных точках на поверхности. Это решение является обобщением метода для кривых, приведенного ранее (решение при известных точках на отрезке кривой). Для него также характерно отсутствие непрерывности между прилегающими клетками.

Решение с учетом граничных условий. Рассмотрим клетку C степени $(m \times n)$, которую необходимо приближенно заменить на клетку степени $(p \times q)$, где $p < m$ и $q < n$ (ниже описывается метод, являющийся двумерным аналогом описанного ранее одномерного способа. Он сводится к отбору угловых элементов и построению с их помощью характеристической сетки.)

Используем представление клетки C с помощью тензора

$$\begin{bmatrix} s_{0,0} & \dots & s_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m,0} & \dots & s_{m,n} \end{bmatrix},$$

пользуясь которым можно получить

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & \dots & b_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,0} & \dots & b_{m,n} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Теперь выделим из этой матрицы часть:

$$\begin{bmatrix} b_{0,0} & \dots & b_{0,(q-1)/2} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{(p-1)/2,0} & \dots & b_{(p-1)/2,(q-1)/2} \end{bmatrix},$$

которую используем для получения компонент соответствующего тензора, определяющего клетку C' , аппроксимирующую C :

$$\begin{bmatrix} s'_{0,0} & \dots & s'_{0,(q-1)/2} & \dots & s'_{0,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s'_{(p-1)/2,0} & \dots & s'_{(p-1)/2,(q-1)/2} & \dots & s'_{(p-1)/2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s'_{p,0} & \dots & & \dots & s'_{p,q} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим тензор

$$\begin{bmatrix} s_{0,n} & \dots & s_{0,0} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m,n} & \dots & s_{m,0} \end{bmatrix},$$

представляющий клетку C'' , геометрически совпадающую с C , но углы которой $P''(0, 0)$, $P''(0, 1)$, $P''(1, 0)$ и $P''(1, 1)$ совмещены соответственно с углами $P(0, 1)$, $P(0, 0)$, $P(1, 1)$ и $P(1, 0)$ клетки C . Отсюда, используя уже известную процедуру, выводим следующие члены:

$$\begin{bmatrix} s'_{0,(p+1)/2} & \dots & s'_{0,q} \\ \vdots & & \vdots \\ s'_{(p+1)/2,(q+1)/2} & \dots & s'_{(p+1)/2,q} \end{bmatrix}$$

тензора C' .

Повторяя то же самое для тензоров

$$\begin{bmatrix} s_{m,0} & \dots & s_{m,n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{0,0} & \dots & s_{0,n} \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} s_{m,n} & \dots & s_{m,0} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{0,n} & \dots & s_{0,0} \end{bmatrix}$$

получаем члены тензора, описывающего клетку C' :

$$\begin{bmatrix} s'_{0,0} & \dots & s'_{0,q} \\ \vdots & & \vdots \\ s'_{p,0} & \dots & s'_{p,q} \end{bmatrix}$$

Если p и/или q являются четными, можно применить метод, описанный ранее (случай четного p) для кривых.

Сечение с помощью отображения

Предположим, что клетка C (рис. 6) содержит отображение L , которое соединяет главные образующие $G(0)$ и $G(l)$ и, следовательно, пересекает все изопараметрические кривые $G(u)$.

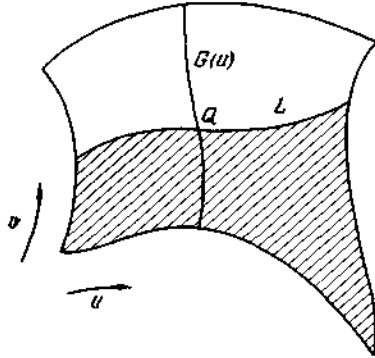


Рис. 6. Сечение клетки с помощью пересекающихся кривых.

Если это не выполняется, всегда можно разбить клетку C на две подклетки C' и C'' так, что хотя бы для одной из них это условие удовлетворяется. Значения параметров на кривой L можно представить в виде

$$u = \sum_{k=0}^p c_k w^k, \quad v = \sum_{k=0}^p d_k w^k, \quad (16)$$

т. е. параметрические координаты точки $Q(w)$, принадлежащей кривой L , являются функциями вспомогательного параметра w :

$$u(w), \quad v(w). \quad (17)$$

Точки кривой $G(u)$, расположенной между $H(0)$ и L , можно определить с помощью выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(w, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} [u(w)]^i [v(w)]^j = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} \left(\sum_{k=0}^p c_k w^k \right)^i \left(v \sum_{k=0}^p d_k w^k \right)^j, \end{aligned} \quad (18)$$

которое эквивалентно

$$\mathbf{R}(w, v) = \sum_{i=0}^{(m+n)p} \sum_{j=0}^n \mathbf{e}_{i,j} w^i v^j. \quad (19)$$

Таким образом, разбиение клетки степени $(m \times n)$ отображением степени p дает две подклетки степени $[(m \times n)p] \times n$.

Общий член суммы с индексами i, j :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k,i} w^k v &= \mathbf{b}_{i,j} (c_k w^k)^i (v d_h w^h)^j = \\ &= \mathbf{b}_{i,j} (c_k)^i (d_h)^j w^{(i+h)} v^j, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$l = j \quad \text{и} \quad k = gi + hj. \quad (21)$$

Существует еще одно решение, теоретически менее обоснованное, но которое требует меньшего объема вычислений и большего объема машинной памяти. Оно состоит в использовании определенных значений u , соответствующих точкам кривой L в качестве пределов образующих $G(u)$.

2.3.4.3. Обобщенный подход к деформациям

В этом разделе мы рассмотрим объекты, составленные из определенного числа сшитых друг с другом клеток, и решим задачу исправления формы объекта с помощью задания смещения нескольких его точек. Проследим шаг за шагом деформацию объекта по мере удаления от зоны начального построения.

Основные идеи

Параметрический базис. Обозначим через R_l ортогональный базис, заданный тремя единичными векторами OX, OY и OZ . Координаты в этом базисе обозначим через (x, y, z) (рис. 7).

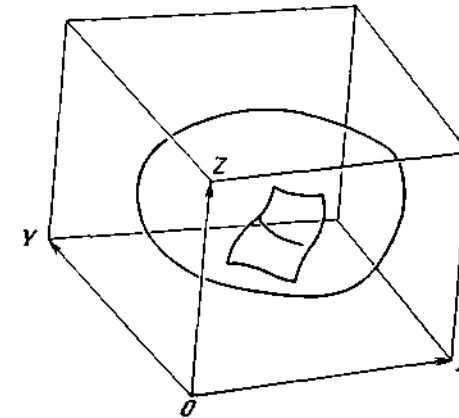


Рис. 7. Ортогональный базис.

Рассмотрим трехпараметрический базис R_2 , совпадающий в своей начальной форме с базисом R_1 . Он представляет собой решетку, образованную одинаковыми ячейками (рис. 8), стороны которых соответственно равны OX/p , OY/q , OZ/r и вершины расположены в точках

$$T_{i,j,k}, \text{ где } i \in [0, p], j \in [0, q], k \in [0, r]. \quad (22)$$

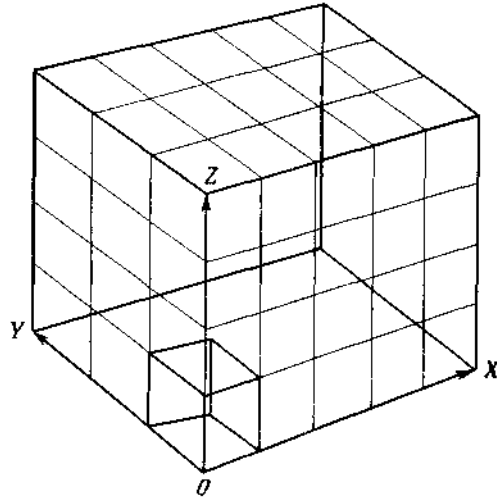


Рис. 8. Характеристическая решетка трехмерного базиса.

Параметрические координаты точки $P(x, y, z)$ в этом случае будут равны $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$.

Деформация решетки. Предположим, что необходимо переместить точку $P(x, y, z)$ на вектор δ . Для этого переместим вершину $T_{i,j,k}$ с координатами $i \approx px$, $j \approx qy$, $k \approx rz$, расположенную наиболее близко к этой точке. Перемещение этой вершины Δ должно удовлетворять соотношению

$$\delta = \Delta[\mathcal{B}_{i,p}(\xi)\mathcal{B}_{j,q}(\eta)\mathcal{B}_{k,r}(\zeta)], \quad (23)$$

где величина в квадратных скобках близка к $3 \cdot 10^{-2}$. Другими словами, смещение вершины Δ составляет

$$\Delta = \delta \frac{1}{\mathcal{B}_{i,p}(\xi)\mathcal{B}_{j,q}(\eta)\mathcal{B}_{k,r}(\zeta)}. \quad (24)$$

Определим полную деформацию объекта, у которого λ точек $P(\xi_g, \eta_g, \zeta_g)$, $g \in [1, \lambda]$ испытывают перемещение на векторы δ_g (часть из них может быть равна нулю).

Для этого сместим λ вершин, которые обозначим через $T_{i,j,k}$, где

$$i \approx p\xi, j \approx q\eta, k \approx r\zeta, \quad (25)$$

и смещение каждой вершины обозначим через Δ_l . Изменение положения каждой вершины Δ_l приводит к изменению положения каждой точки P_g равному

$$\delta_g = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r \sum_{l=1}^{\lambda} \Delta_l \mathcal{B}_{i,p}(\xi_g) \mathcal{B}_{j,q}(\eta_g) \mathcal{B}_{k,r}(\zeta_g). \quad (26)$$

При заданных величинах δ_g векторы Δ_l являются корнями системы линейных уравнений (26).

После этого вершины T_i в исходной решетке заменяются на T'_i :

$$T'_i \approx T_i + \Delta_i.$$

Таким образом определяется новое параметрическое пространство R_3 , вершинами решетки которого являются

- 1) найденные точки $T'_{i,j,k}$;
- 2) $[(p+1)(q+1)(r+1) - \lambda]$ вершин пространства R_2 , не испытавших смещения.

Зная вершины решетки пространства R_3 , можно определить коэффициенты $b_{r,j,k}$, описывающие модифицированную поверхность.

Координаты точки. Если координатами точки P в пространстве R_3 были ξ, η, ζ , то после рассмотренного выше преобразования координатами точки P' в пространстве R_3 будут

$$P'(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r b_{i,j,k} \xi^i \eta^j \zeta^k. \quad (27)$$

Особенности практического использования

Выражение (27), несмотря на свою простоту, плохо приспособлено для вычислений в реальном времени. Преобразуем его к более удобному виду, хотя при этом может снизиться точность вычислений.

Рассмотрим клетку, определенную в пространстве R_1 с помощью $[(m+1)(n+1)]$ вершин S_{gk} . Текущая точка клетки определяется выражением

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{g,i,j} u^i v^j = P(\xi_u, \eta_u, \zeta_u, v). \quad (28)$$

После преобразования пространства R_2 в R_3 координаты точки стали равны

$$P'(u, v) = P'(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r \beta_{i,j,k} \xi^i \eta^j \zeta^k. \quad (29)$$

Для нахождения вершины, близко расположенной к перемещаемой точке, необходимо величинам p, q и r присвоить значения 8 или 10. Для того чтобы объект находился в пространстве R_1 , его координаты

должны находиться в пределах от 0,1 до 0,9. Тем не менее, если объект обладает плоскостью симметрии, целесообразно совместить ее с поверхностью R_1 , так чтобы в пространстве R_1 находилась только половина объекта. При переходе от пространства R_2 к R_3 теоретически надо подвергнуть преобразованию каждую точку поверхности объекта, но это приведет к увеличению степени выражений. Поэтому обычно ограничиваются модификацией декартовых координат вершин характеристической сетки.

Очевидно, в таком случае непрерывность между двумя соседними клетками не всегда сохраняется, что может привести к необходимости более сложной обработки.

2.3.5. Сшивки

2.3.5.1. Общий случай

Кривые

Сшивка по касательной. Если концы двух отрезков кривых совмещены в одной точке и кривые являются касательными друг к другу в этой точке, то первый ненулевой вектор характеристического многоугольника одной кривой коллинеарен первому ненулевому вектору характеристического многоугольника другой, что можно выразить с помощью соотношения

$$a_i' = g a_i, \tag{1}$$

где g — отличный от нуля скаляр.

Если $g < 0$, кривые выходят из общей точки в противоположных направлениях (рис. 1).

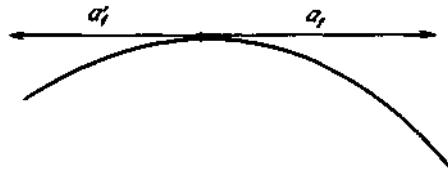


Рис. 1. Сшивка двух кривых по касательной.

Если $g > 0$, кривые выходят в одном направлении (рис. 2).

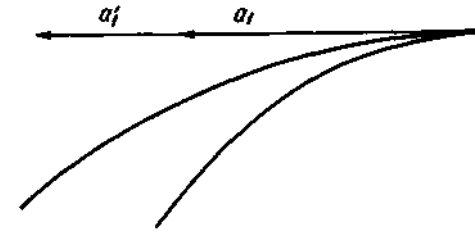


Рис. 2. Сшивка двух кривых по касательной (случай $g > 0$).

Сшивка с сохранением кривизны. Для того чтобы две кривые имели одинаковую кривизну в общей точке, они должны иметь один и тот же центр кривизны в этой точке и, следовательно, должны выполняться следующие 4 условия:

1. Наличие одной и той же касательной к обеим кривым, что соответствует условию (2).

2. Совпадение плоскостей кривизны к обеим кривым, что означает компланарность векторов a_1, a_2, a_i' и a_i' (рис. 3):

$$a_i' = h a_1 + k a_2. \tag{2}$$

3. Одинаковое направление векторов главных нормалей, т. е.

$$k > 0. \tag{3}$$

4. Совпадение значений радиусов кривизны.

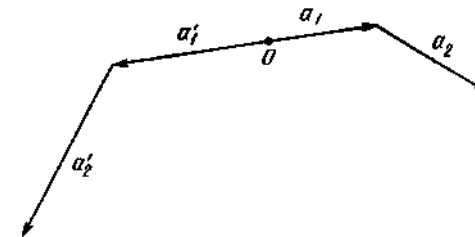


Рис. 3. Первые векторы характеристических многоугольников двух кривых, сшитые с сохранением кривизны.

Если C и C' являются кривыми степеней соответственно m и m' , то

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}(0)}{du} &= m\mathbf{a}_1, \\ \frac{d^2\mathbf{P}(0)}{du^2} &= m(m-1)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1), \\ \frac{d\mathbf{P}(0)}{du} \times \frac{d^2\mathbf{P}(0)}{du^2} &= m^2(m-1)(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \\ R(0) &= \frac{(m|\mathbf{a}_1|)^3}{m^2(m-1)|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \frac{m}{(m-1)} \frac{|\mathbf{a}_1|^3}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того,

$$R'(0) = \frac{m'}{m'-1} \frac{|\mathbf{a}'_1|^3}{|\mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}'_2|}. \quad (5)$$

Заменяя в выражении (5) \mathbf{a}'_1 и \mathbf{a}'_2 значениями из формул (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} R'(0) &= \frac{m'}{m'-1} \frac{|g\mathbf{a}_1|^3}{|g\mathbf{a}_1| \times |(h\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2)|} = \\ &= \frac{m'g^3}{m'-1gk} \frac{|\mathbf{a}_1|^3}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \frac{m'g^2}{m'-1k} \frac{|\mathbf{a}_1|^3}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для того чтобы обеспечить равенство выражений (4) и (5), необходимо и достаточно

$$\frac{m}{m-1} = \frac{m'}{m'-1} \frac{g^2}{k} \quad (7)$$

или

$$k = g^2 \frac{m'}{m} \frac{m-1}{m'-1}. \quad (8)$$

Заметим, что условие (3) выполняется одновременно с условием (8); таким образом, сшивка с сохранением непрерывности кривизны обеспечивается при выполнении условий (2) и (8).

Поверхности

Сшивка по касательной. Рассмотрим две клетки C и C' (рис. 4) степеней соответственно $(m \times n)$ и $(m' \times n')$, имеющих в качестве общей границы совпадающие кривые $\mathbf{P}(u, 0)$ и $\mathbf{P}'(u, 0)$.

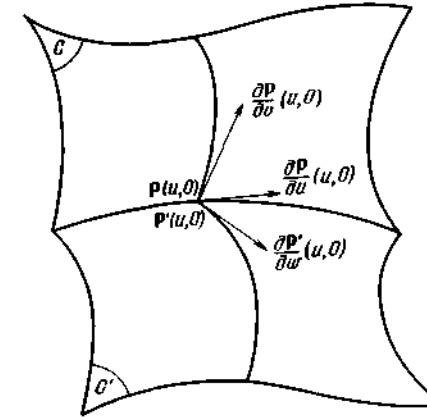


Рис. 4. Сшивка по касательной двух клеток.

Касательные к изопараметрическим кривым $\mathbf{P}(u_0, v)$ и $\mathbf{P}'(u_0, w)$ в общей точке $\mathbf{P}(u_0, 0) = \mathbf{P}'(u_0, 0)$ определяются выражениями $\partial\mathbf{P}(u_0, 0)/\partial v$ и $\partial\mathbf{P}'(u_0, 0)/\partial w$.

Для того чтобы клетки C и C' были касательны друг другу в точке $\mathbf{P}(u_0, 0)$, необходима и достаточна компланарность трех векторов $\partial\mathbf{P}(u, 0)/\partial v$, $\partial\mathbf{P}(u, 0)/\partial u$ и $\partial\mathbf{P}'(u, 0)/\partial w$.

Это условие можно записать следующим образом:

$$\left[\frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} \times \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial u} \right] \frac{\partial\mathbf{P}'(u, 0)}{\partial w} = 0, \quad (9)$$

но более предпочтительно использовать его в следующей форме:

$$\frac{\partial\mathbf{P}'(u, 0)}{\partial w} = h(u) \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} + k(u) \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial u}, \quad (10)$$

где вид полиномиальных функций h и k зависит от особенностей решаемой задачи.

Для клетки C' , которая описывается поверхностью степени $(m' \times n')$, текущая точка первой вспомогательной образующей $\mathbf{R}(u)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u) &= \mathbf{P}'(u, 0) + \frac{1}{n'} \frac{\partial\mathbf{P}'}{\partial w} = \\ &= \mathbf{P}(u, 0) + \frac{1}{n'} \left[h(u) \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} + k(u) \frac{\partial\mathbf{P}(u, 0)}{\partial u} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Степени слагаемых в квадратных скобках равны соответственно $(\eta + m)$ и $(\chi + n - 1)$,

где η и χ — степени функций h и k относительно параметра u .

Тогда выражение для R можно представить в виде

$$\mathbf{R}(u) = \sum_{i=0}^{m'} s_i \mathcal{B}_{i, m}(u), \quad (13)$$

где m' равно наибольшему из двух значений (12).

Отметим, что степень поверхности, описывающей клетку C' , становится равной $(m' + n')$ и что ограничивающая кривая $P(u, v)$ рассматривается как кривая степени m , когда она принадлежит клетке C , и как кривая степени m' для клетки C' . Таким образом, ее степень искусственно поднимается от m до m' (увеличение числа вершин характеристического многоугольника).

Тем не менее для других главных или вспомогательных образующих можно обойтись только фиктивным увеличением степени. Так, при определении условий сшивки между клетками C' и C'' (рис. 5) не потребуется бесполезного увеличения степени C'' .

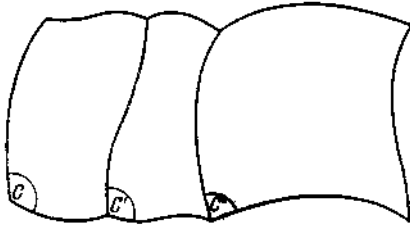


Рис. 5. Сшивки клеток C' и C'' .

Реально наиболее простой случай соответствует условиям $h(u) = \text{const}$, $k(u) = 0$.

Рассмотрим характеристические многоугольники главной образующей D , текущей точкой которой является $\mathbf{P}(u, 0)$, и первой вспомогательной образующей D_1 с текущей точкой $\mathbf{R}(u)$ (рис. 6).

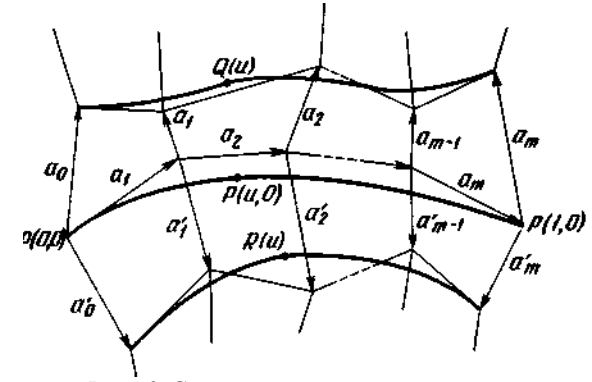


Рис. 6. Сшивки клеток по касательным.

Вершинами многоугольников являются соответственно точки $S_{i, 0}$ и $S_{i, 1}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial \mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} = n[\mathbf{R}(u) - \mathbf{P}(u, 0)],$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} = n \sum_{i=0}^m (s_{i, 1} - s_{i, 0}) \mathcal{B}_{i, m}(u). \quad (14)$$

Векторы, связывающие одноименные вершины характеристических многоугольников D и D_1 , можно представить в виде $\alpha_i = S_{i, 1} - S_{i, 0}$.

Отсюда получаем

$$\frac{\partial \mathbf{P}(u, 0)}{\partial v} = n \sum_{i=0}^m \alpha_i \mathcal{B}_{i, m}(u). \quad (15)$$

Следовательно, производные по v и w коллинеарны, а их величины пропорциональны с коэффициентом

$$\frac{\alpha_i}{\alpha'_i} = h = \text{const}. \quad (16)$$

На этом свойстве основан метод модификации клетки без изменения соседних. Проведем две изопараметрические кривые $G(u_0, v)$ и $H(u, v_0)$, проходящие через точку максимального смещения $\mathbf{P}(u, v_0)$. В результате получим четыре подклетки, согласующиеся между собой по правилу (11), где

$$h = \frac{u_0}{1 - u_0}; \quad k = 0 \quad \text{и} \quad h = \frac{v_0}{1 - v_0}; \quad k = 0. \quad (17)$$

$P(u_0, v_0)$ является общей угловой точкой для четырех начальных ячеек характеристических сеток подклеток (рис. 7), стороны которых представляют собой образующие гиперболического параболоида.

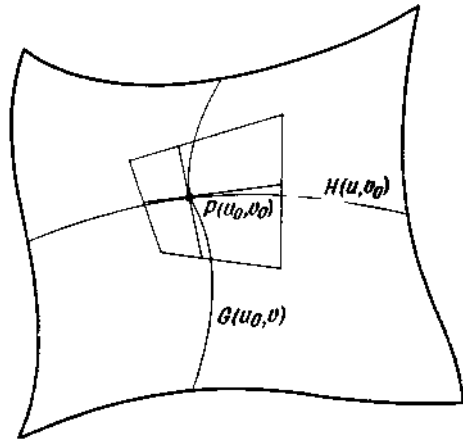


Рис. 7. Модификация клетки без изменения граничных условий.

Затем можно вместо $P(u_0, v_0)$ произвольным образом выбрать другую точку $P'(u_0, v_0)$, построив для нее гиперболический параболоид, удовлетворяющий только одному условию, определяемому выражением (17).

Таким образом, происходит точная сшивка четырех подклеток, условия сшивки вдоль граничной кривой C не меняются и она сохраняет свою исходную степень.

Отметим еще одно свойство, которое состоит в том, что параллельность векторов α'_i является достаточным условием параллельности векторов α_i без ограничения на величину их модулей. В этом случае цилиндр с направляющей D_0 и образующими, параллельными α_i , будет касаться кривой C , а кривая D'_1 будет иметь ту же степень m , что и кривые D и D_1 .

Сшивка более высокого порядка. В этом случае для поверхностей можно использовать те же идеи, которые легли в основу методов сшивки кривых (сшивка более высокого порядка), но их реализация является более трудоемкой.

2.3.5.2. Специальные случаи

Отображения

Рассмотрим две клетки C и C' (рис. 8), общей границей которых является кривая D .

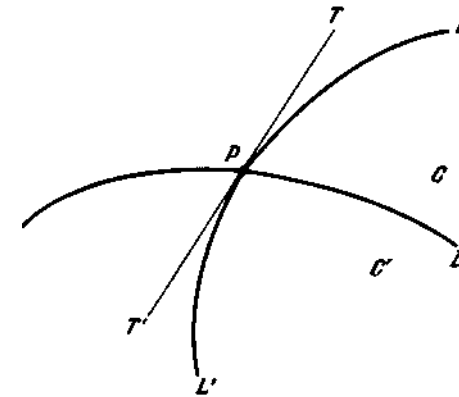


Рис. 8. Сшивка пересекающихся кривых.

Каждая из клеток содержит отображение, обозначенное L или L' , которое пересекает кривую D в точке P . На рис. 9 представлено эквивалентное изображение в декартовых координатах.

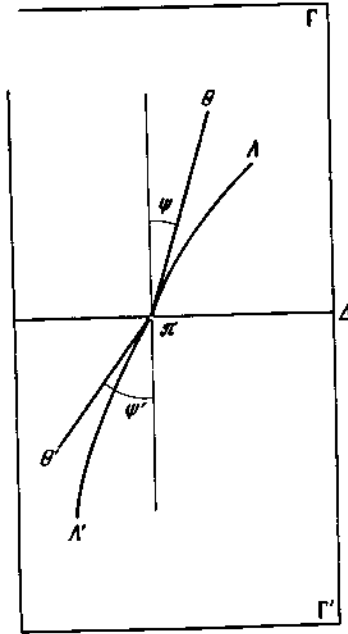


Рис. 9. Изображение пересекающихся кривых.

Аналогами клеток C и C' являются квадратные клетки Γ и Γ' , а аналогами кривых L и L' являются кривые Λ и Λ' , которые сходятся в точке Π , лежащей на граничной прямой Δ . Прямые θ и θ' , касательные к кривым Λ и Λ' в точке Π , образуют углы ψ и ψ' с нормалью к Δ . Аналогами касательных θ и θ' на рис. 8 являются прямые T и T' , касательные к кривым L и L' в точке P , удовлетворяющие следующим условиям:

$$T \text{ параллельно } \frac{\partial P}{\partial v} \cos \psi + \frac{\partial P}{\partial u} \sin \psi,$$

или

$$T \text{ параллельно } \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial u} \operatorname{tg} \psi, \tag{18}$$

а также

$$T' \text{ параллельно } \frac{\partial P'}{\partial w} + \frac{\partial P'}{\partial u} \operatorname{tg} \psi'.$$

С учетом выражения (10) имеем

$$T' \text{ параллельно } h(u) \frac{\partial P}{\partial v} + [k(u) + \operatorname{tg} \psi'] \frac{\partial P}{\partial u}. \tag{19}$$

Для того чтобы прямые T и T' были параллельны (коллинеарны), необходимо, чтобы в выражениях (18) и (19) коэффициенты при $\frac{\partial P}{\partial u}$ и $\frac{\partial P}{\partial v}$ были пропорциональны, т. е.

$$\frac{1}{h(u)} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{k(u) + \operatorname{tg} \psi'},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \psi' = \operatorname{tg} \psi h(u) - k(u).$$

Клетки

Примыкающие клетки. Если несколько клеток имеют общую угловую точку, их векторные коэффициенты должны удовлетворять определенным условиям. При этом следует различать случаи четного и нечетного числа клеток, сходящихся в общей точке, хотя подход к решению задачи в обоих случаях одинаков. Ниже рассмотрены случаи примыкания 4 и 3 клеток. Случай большего числа клеток не представляет принципиальных трудностей, хотя возрастание объема вычислений может служить ограничивающим фактором.

Случай четырех клеток. На рис. 10 представлены четыре клетки C , C' , C'' и C''' , текущие точки которых обозначим через $P(u, v)$, $P'(u, w)$, $P''(t, v)$ и $P'''(t, w)$.

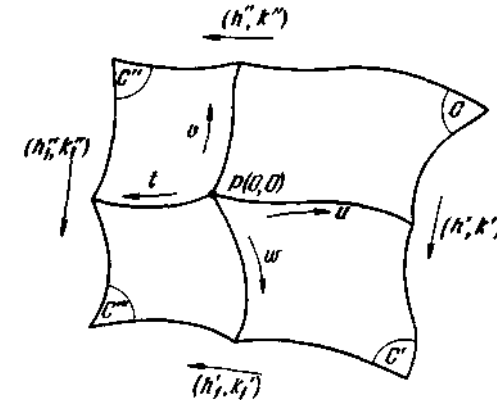


Рис. 10. Сшивка четырех примыкающих клеток.

Будем считать заранее известной клетку C и определим правила сшивки с ней клеток C' по линии $P(u, 0)$ и C'' по линии $P(0, v)$.

Обозначим через (h', k') и (h'', k'') условия плавного касания при сшивке соответствующих клеток на основе выражения (10).

Отметим также, что при нахождении клеток C' и C'' может оказаться необходимым принять во внимание целый ряд условий. Необходимым условием такого типа является, например, сшивка с клеткой C''' с обеспечением плавного касания (h'_i, k'_i) и (h''_i, k''_i) .

Если считать, что правила (h', k') и (h'', k'') заранее определены, то сшивку клеток следует производить таким образом, чтобы гарантировать их выполнение.

Для упрощения формул положим сначала, что степени поверхностей, описывающих все четыре клетки, равны $(m \times n)$. Зная характеристическую сетку клетки C и правило (h, k) , находим вершины $S'(i, 0)$ и $S'(i, 1)$ характеристической сетки клетки C' (рис. 11).

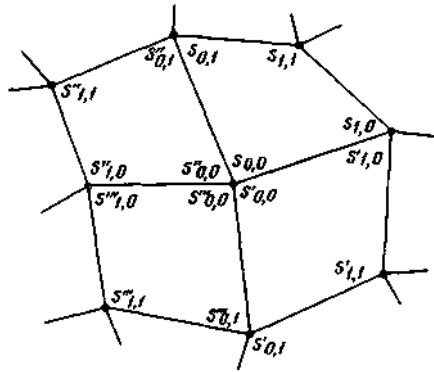


Рис. 11. Решетка угловых точек характеристических сеток четырех примыкающих клеток.

Таким же образом, используя правило (h'', k'') , определяем вершины $S''(0, j)$ и $S''(1, j)$ характеристической сетки клетки C'' . Правила (h'_i, k'_i) и (h''_i, k''_i) позволяют найти вершины характеристической сетки клетки C''' , из которых $S'''(0, 1)$, $S'''(1, 0)$ и $S'''(1, 1)$ определяются дважды — из условий сшивки клетки C''' с клетками C' и C'' . Это накладывает дополнительные ограничения на правила сшивки (h'_i, k'_i) и (h''_i, k''_i) , так как оба способа нахождения вершин должны давать один и тот же результат.

Вершины ячейки характеристической сетки клетки C''' степени $(m \times n)$, содержащей точку $P(0, 0)$, определяются следующим образом:

$$s_{0,0} = P(0, 0) = b_{1,0},$$

$$s_{0,1} = P(0, 0) + \frac{1}{m} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial n} = b_{0,0} + \frac{1}{m} b_{1,0},$$

$$s_{1,0} = P(0, 0) + \frac{1}{n} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} = b_{0,0} + \frac{1}{n} b_{0,1},$$

$$s_{1,1} = P(0, 0) + \frac{1}{m} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} + \frac{1}{n} \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} + \frac{1}{mn} \frac{\partial^2 P(0, 0)}{\partial u \partial v} = b_{0,0} + \frac{1}{m} b_{1,0} + \frac{1}{n} b_{0,1} + \frac{1}{mn} b_{1,1}. \quad (20)$$

Ограничения, налагаемые на (h'_i, k'_i) и (h''_i, k''_i) , приводят к идентичности векторных коэффициентов $b_{1,0}$, $b_{0,1}$ и $b_{1,1}$, полученных двумя способами: сшивкой клеток по цепочке C , C' и C'' и по цепочке C , C'' и C''' . Идентичность точки $P(0, 0)$ очевидна.

Для простоты положим, что точка $P(0, 0)$ совпадает с началом декартовой системы координат, т. е. $b_{0,0} = 0$. Для клеток C' имеем

$$\frac{\partial P'(0, 0)}{\partial u} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} = b_{1,0}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial P'(0, 0)}{\partial w} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} h'(0) + \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} k'(0) = b_{0,1} h'(0) + b_{1,0} k'(0), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P'(0, 0)}{\partial u \partial w} &= \frac{d}{du} \left[\frac{\partial P'(0, 0)}{\partial w} \right] = \frac{\partial^2 P(0, 0)}{\partial u \partial v} h'(0) + \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} \frac{dh'(0)}{du} + \\ &+ \frac{\partial^2 P(0, 0)}{\partial u^2} k'(0) + \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} \frac{dk'(0)}{du} = \\ &= b_{1,1} h'(0) + b_{0,1} \frac{dh'(0)}{du} - 2b_{2,0} k'(0) + b_{1,0} \frac{dk'(0)}{du}, \end{aligned} \quad (23)$$

так как $\frac{\partial^2 P(0, 0)}{\partial u^2} = \frac{d^2 b_{2,0} u^2}{du^2} = 2b_{2,0}$.

Аналогичные формулы справедливы и для клетки C'' :

$$\frac{\partial P''(0, 0)}{\partial v} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} = b_{0,1}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial P''(0, 0)}{\partial t} = \frac{\partial P(0, 0)}{\partial u} h''(0) + \frac{\partial P(0, 0)}{\partial v} k''(0) = b_{1,0} h''(0) + b_{0,1} k''(0), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t \partial v} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u \partial v} h''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial u} \frac{\partial h''(0)}{\partial v} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v^2} k''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}(0, 0)}{\partial v} \frac{dk''(0)}{dv} = \\ &= \mathbf{b}_{1,1} h''(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dh''(0)}{dv} + 2\mathbf{b}_{0,2} k''(0) + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dk''(0)}{dv}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для сшивки клетки C''' с клеткой C' необходимо выполнение условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial w} &= \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} = \mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0), \\ \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u} h_1'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} k_1'(0). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

С учетом выражений (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t} &= \mathbf{b}_{1,0} h_1'(0) + [\mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0)] k_1'(0) = \\ &= \mathbf{b}_{1,0} [h_1'(0) + k'(0) k_1'(0)] + \mathbf{b}_{0,1} h'(0) k_1'(0). \end{aligned} \quad (28)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t \partial w} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u \partial w} h_1'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u} \frac{dh_1'(0)}{dw} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w^2} k_1'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} \frac{dk_1'(0)}{dw} \end{aligned}$$

или с учетом выражений (21)—(23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t \partial w} &= \left[\mathbf{b}_{1,1} h'(0) + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dh'(0)}{du} + 2\mathbf{b}_{2,0} k'(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dk'(0)}{du} \right] h_1'(0) + \\ &+ \mathbf{b}_{1,0} \frac{dh_1'(0)}{dw} + 2\mathbf{b}_{0,2} k_1'(0) + [\mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0)] \frac{dk_1'(0)}{dw} = \\ &= \mathbf{b}_{0,1} \left[h_1'(0) \frac{dh'(0)}{du} + h'(0) \frac{dk_1'(0)}{dw} \right] + \mathbf{b}_{1,0} \left[\frac{dh_1'(0)}{dw} + \right. \\ &\quad \left. + k'(0) \frac{dk_1'(0)}{dw} + h_1'(0) \frac{dk'(0)}{du} \right] + \\ &+ \mathbf{b}_{1,1} h'(0) h_1'(0) + 2\mathbf{b}_{2,0} k'(0) h_1'(0) + 2\mathbf{b}_{0,2} k_1'(0). \end{aligned} \quad (29)$$

Сшивка клетки C''' с клеткой C'' выполняется аналогично:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t} = \mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0), \\ \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial w} &= \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v} h_1''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t} k_1''(0), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

или с учетом выражений (24) и (25)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial w} &= \mathbf{b}_{0,1} h_1''(0) + [\mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0)] k_1''(0) = \\ &= \mathbf{b}_{0,1} [h_1''(0) + k''(0) k_1''(0)] + \mathbf{b}_{1,0} h''(0) k_1''(0). \end{aligned} \quad (31)$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t \partial w} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t \partial v} h_1''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v} \frac{dh_1''(0)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t^2} k_1''(0) + \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial t} \frac{dk_1''(0)}{dt} \end{aligned}$$

и с учетом выражений (24)—(26):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}'''(0, 0)}{\partial t \partial w} &= \left[\mathbf{b}_{1,1} h''(0) + \mathbf{b}_{1,0} \frac{dh''(0)}{dv} + \mathbf{b}_{0,1} \frac{dk''(0)}{dv} + 2\mathbf{b}_{0,2} k''(0) \right] h_1''(0) + \\ &+ \mathbf{b}_{0,1} \frac{dh_1''(0)}{dt} + 2\mathbf{b}_{0,2} k_1''(0) + [\mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0)] \frac{dk_1''(0)}{dt} = \\ &= \mathbf{b}_{0,1} \left[\frac{dk''(0)}{dv} h_1''(0) + \frac{dh_1''(0)}{dt} + k''(0) \frac{dk_1''(0)}{dt} \right] + \\ &+ \mathbf{b}_{1,0} \left[\frac{dh''(0)}{dv} h_1''(0) + \frac{dk_1''(0)}{dt} h''(0) \right] + \\ &+ \mathbf{b}_{1,1} h''(0) h_1''(0) + 2\mathbf{b}_{0,2} k''(0) h_1''(0) + 2\mathbf{b}_{0,2} k_1''(0). \end{aligned} \quad (32)$$

Условия на (h_1', k_1') и (h_1'', k_1'') приводят к идентичности выражений (27) и (31), (28) и (30), а также (29) и (32).

Из идентичности выражений (27) и (31) следует

$$\mathbf{b}_{0,1} h'(0) + \mathbf{b}_{1,0} k'(0) = \mathbf{b}_{0,1} [h_1'(0) + k''(0) k_1'(0)] + \mathbf{b}_{1,0} h''(0) k_1''(0),$$

откуда

$$\begin{aligned} h'(0) &= h_1'(0) + k''(0) k_1'(0), \\ k'(0) &= h''(0) k_1''(0) \end{aligned} \quad (33)$$

и

$$\begin{aligned} k_1''(0) &= \frac{k'(0)}{h''(0)}, \\ h_1''(0) &= \frac{h'(0) h''(0) - k'(0) k''(0)}{h''(0)}. \end{aligned}$$

Из идентичности выражений (28) и (30) имеем

$$\mathbf{b}_{1,0} [h_1'(0) + k'(0) k_1'(0)] + \mathbf{b}_{0,1} h''(0) k_1''(0) = \mathbf{b}_{1,0} h''(0) + \mathbf{b}_{0,1} k''(0),$$

откуда

$$h_1'(0) + k'(0) k_1'(0) = h''(0)$$

и

$$\begin{aligned} h'(0)k'_i(0) &= k''(0), \\ k'_i(0) &= \frac{k''(0)}{h'(0)}, \\ h'_i(0) &= \frac{h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)}{h'(0)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Идентичность выражений (29) и (32) с учетом (33) и (34) дает

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_{0,1} \left[\frac{h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)}{h'(0)} \frac{dh'(0)}{du} + h'(0) \frac{dk'_i(0)}{dw} \right] + \\ & + \mathbf{b}_{1,0} \left[\frac{dh'_i(0)}{dw} + k'(0) \frac{dk'_i(0)}{dw} + \frac{h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)}{h'(0)} \frac{dk''(0)}{du} \right] + \\ & + \mathbf{b}_{1,1} [h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)] + \\ & + 2\mathbf{b}_{2,0} \frac{k''(0)[h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)]}{h'(0)} + 2\mathbf{b}'_{0,2} \frac{k''(0)}{h'(0)} = \\ & = \mathbf{b}_{1,0} \left[\frac{h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)}{h''(0)} \frac{dh''(0)}{dv} + h''(0) \frac{dk''_i(0)}{dt} \right] + \\ & + \mathbf{b}_{0,1} \left[\frac{dh'_i(0)}{dt} + k''(0) \frac{dk''_i(0)}{dt} + \frac{h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)}{h''(0)} \frac{dk''(0)}{dv} \right] + \\ & + \mathbf{b}_{1,1} [h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)] + \\ & + 2\mathbf{b}_{0,2} \frac{k''(0)[h'(0)h''(0) - k'(0)k''(0)]}{h''(0)} + 2\mathbf{b}'_{2,0} \frac{k''(0)}{h''(0)}. \end{aligned} \quad (35)$$

После нахождения клеток C , C' и C'' коэффициенты, участвующие в определении клетки C''' , можно разбить на две категории:

1. $h'_i(0)$, $k'_i(0)$, $h''_i(0)$ и $k''_i(0)$, которые находятся непосредственно из соотношений (27) и (28), как только правила (h', k') и (h'', k'') становятся известными.
2. $dh'_i(0)/dw$, $dk'_i(0)/dw$, $dh''_i(0)/dt$ и $dk''_i(0)/dt$, которые должны удовлетворять условиям (35).

Замечания.

1. Вектор $\mathbf{b}_{1,1}$ появляется с одним и тем же коэффициентом в двух членах выражения (35), что в данном случае не приводит к особым ограничениям.
2. Векторы $\mathbf{b}_{0,2}$, $\mathbf{b}_{2,0}$, $\mathbf{b}'_{0,2}$ и $\mathbf{b}'_{2,0}$ в выражении (35) не являются независимыми, один из них может быть выражен через три других.
3. Если $k'(0)$ и $k''(0)$ равны нулю, то кривые $P(u, 0)$, $P'(0, w)$, $P''(0, v)$ и $P'''(t, 0)$ являются попарно касательными в точке $P(0, 0)$, и для векторов $\mathbf{b}_{0,2}$, $\mathbf{b}_{2,0}$, $\mathbf{b}'_{0,2}$ и $\mathbf{b}'_{2,0}$ из формулы (35) нарушается справедливость

предыдущего замечания. В этом случае из выражений (33) и (34) следует

$$h'_i(0) = h''(0), \quad h''_i(0) = h(0), \quad k'_i(0) = k''(0). \quad (36)$$

4. Если $k'(0) = k''(0)$ и выполняются условия

$$\frac{dh'(0)}{du} = \frac{dh''(0)}{dv} = \frac{dh'_i(0)}{dw} = \frac{dh''_i(0)}{dt} = 0,$$

то формула (35) справедлива при выполнении следующих условий:

$$\frac{dk'_i(0)}{dw} = \frac{dk''(0)}{dv}$$

и

$$\frac{dk''_i(0)}{dt} = \frac{dk'(0)}{du}. \quad (37)$$

В этом случае не накладывается никаких ограничений на векторы $\mathbf{b}_{0,2}$, $\mathbf{b}_{2,0}$, $\mathbf{b}'_{0,2}$ и $\mathbf{b}'_{2,0}$.

Случай трех клеток. Рассмотрим три клетки C , C' и C'' (рис. 12), текущие точки которых обозначим через $P(u, v)$, $P'(u, w)$ и $P''(w, v)$.

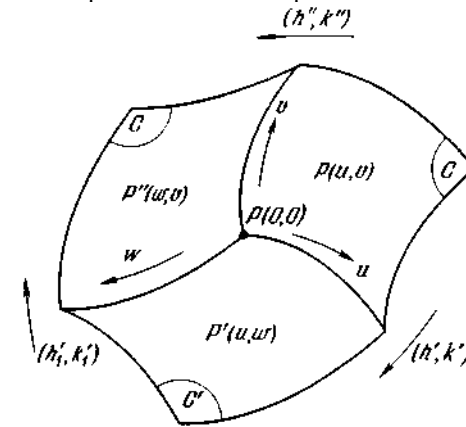


Рис. 12. Сшивка трех примыкающих клеток.

Обозначим через (h, k) и (h', k') правила сшивки клетки C соответственно с клетками C' и C'' по границам $P(u, 0)$ и $P(0, v)$, а через (h'_i, k'_i) — правило сшивки клеток C' и C'' .

Задача состоит в том, что по заранее известным правилам (h', k') и (h'', k'') нужно определить дополнительные условия, накладываемые на правило (h'_i, k'_i) . Предположим, что все три клетки имеют степень

$(m \times m)$ и точка $P(0, 0)$ совмещена с началом декартовой системы координат. Из выражений (21)—(23) следует

$$\frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u} = \mathbf{b}_{1,0}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} = \mathbf{b}_{0,1}h'(0) + \mathbf{b}_{1,0}k'(0), \quad (39)$$

а также

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u \partial w} = \mathbf{b}_{1,1}h'(0) + \mathbf{b}_{0,1}\frac{dh'(0)}{du} + 2\mathbf{b}_{2,0}k'(0) + \mathbf{b}_{1,0}\frac{dk'(0)}{du}. \quad (40)$$

Правило (h'', k'') сшивки клеток C' и C'' определяется по аналогии с выражениями (24)—(26):

$$\frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v} = \mathbf{b}_{0,1}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial w} = \mathbf{b}_{1,0}h''(0) + \mathbf{b}_{0,1}k''(0), \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v \partial w} = \mathbf{b}_{1,1}h''(0) + \mathbf{b}_{1,0}\frac{dh''(0)}{dv} + 2\mathbf{b}_{0,2}k''(0) + \mathbf{b}_{0,1}\frac{dk''(0)}{dv}. \quad (43)$$

Сшивка клеток C' и C'' по правилу (h'', k'') определяется следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w} = \mathbf{b}_{0,1}h'(0) + \mathbf{b}_{1,0}k'(0), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u}h_i'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w}k_i'(0) = \\ &= \mathbf{b}_{1,0}h_i'(0) + [\mathbf{b}_{0,1}h'(0) + \mathbf{b}_{1,0}k'(0)]k_i'(0) = \\ &= \mathbf{b}_{0,1}h'(0)k_i'(0) + \mathbf{b}_{1,0}[h_i'(0) + k'(0)k_i'(0)], \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}''(0, 0)}{\partial v \partial w} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u \partial w}h_i'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial u}\frac{dh_i'(0)}{du} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w^2}k_i'(0) + \frac{\partial \mathbf{P}'(0, 0)}{\partial w}\frac{dk_i'(0)}{dw} = \\ &= \left[\mathbf{b}_{1,1}h'(0) + \mathbf{b}_{0,1}\frac{dh'(0)}{du} + 2\mathbf{b}_{2,0}k'(0) + \mathbf{b}_{1,0}\frac{dk'(0)}{du} \right] h_i'(0) + \\ &+ [\mathbf{b}_{0,1}h'(0) + \mathbf{b}_{1,0}k'(0)]\frac{dk_i'(0)}{dw} + \mathbf{b}_{1,0}\frac{dh_i'(0)}{dw} + 2\mathbf{b}_{0,2}k_i'(0) = \\ &= \mathbf{b}_{0,1}[h_i'(0)\frac{dh'(0)}{du} + h'(0)\frac{dk_i'(0)}{dw}] + \\ &+ \mathbf{b}_{0,1}\left[h_i'(0)\frac{dk'(0)}{du} + \frac{dh_i'(0)}{dw} + k'(0)\frac{dk_i'(0)}{dw} \right] + \\ &+ \mathbf{b}_{1,1}h'(0)h_i'(0) + 2\mathbf{b}_{2,0}k'(0)h_i'(0) + 2\mathbf{b}_{0,2}k_i'(0). \end{aligned} \quad (46)$$

Из необходимости идентичности выражений (42) и (44), (41) и (45), а также (43) и (46) можно вывести условия, которым должны удовлетворять функции h'' и k'' .

Так, из идентичности выражений (42) и (4.4) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,1}k''(0) + \mathbf{b}_{1,0}h''(0) &= \mathbf{b}_{0,1}h'(0) + \mathbf{b}_{1,0}k'(0), \\ h''(0) &= k'(0), \\ k''(0) &= h'(0), \end{aligned} \quad (47)$$

а из идентичности выражений (41) и (45):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,1} &= \mathbf{b}_{0,1}h'(0)k_i'(0) + \mathbf{b}_{1,0}[h_i'(0) + k'(0)k_i'(0)], \\ k_i'(0) &= \frac{1}{h'(0)}, \\ h_i'(0) &= -\frac{k'(0)}{h'(0)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Идентичность выражений (43) и (46), с учетом выражений (38) и (48), приводит к тому, что

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1,1}k'(0) + \mathbf{b}_{1,0}\frac{dh''(0)}{dv} + 2\mathbf{b}_{0,2}h'(0) + \mathbf{b}_{0,1}\frac{dk''(0)}{dv} &= \\ &= \mathbf{b}_{0,1}\left[-\frac{k'(0)}{h'(0)}\frac{dh'(0)}{du} + h'(0)\frac{dk_i'(0)}{dw} \right] + \\ &+ \mathbf{b}_{1,0}\left[-\frac{k'(0)}{h'(0)}\frac{dk'(0)}{du} + \frac{dh_i'(0)}{dw} + k'(0)\frac{dk_i'(0)}{dw} \right] - \\ &- \mathbf{b}_{1,1}k'(0) - 2\mathbf{b}_{2,0}\frac{k'(0)^2}{h'(0)} + 2\mathbf{b}_{0,2}\frac{1}{h'(0)}. \end{aligned} \quad (49)$$

В выражениях (47)—(49) содержатся также условия, которым должны удовлетворять функции h_i и k_i .

Заметим, что если первые производные функций h', k', h'', k'', h_i и k_i в точке $P(0, 0)$ равны нулю, т. е. $u = v = w = 0$, выражение (49) преобразуется к виду

$$b_{0,2} = b_{2,0} [k'(0)^2 + b_{1,1}k'(0)h'(0) + b_{0,2}h'(0)]^2. \quad (50)$$

Случай n клеток. Рассмотрим n клеток, попарно касающихся вдоль n линий L и имеющих общую угловую точку P , в которой все они имеют касательную плоскость (рис. 13).

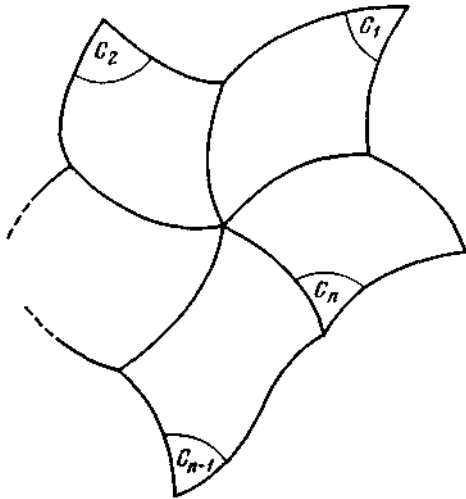


Рис. 13. Общий случай n примыкающих клеток.

Предположим, что известна клетка C_1 . Тогда определение клеток C_2, C_3, \dots, C_{n-1} не вызовет принципиальных трудностей, поскольку для сшивки каждой из них необходимо только выполнить условия плавного касания с предыдущей. Клетка C_n должна плавно касаться как клетки C_1 , так и клетки C_{n-1} .

В зависимости от того, четной или нечетной является величина n , условия сшивки этой клетки идентичны описанным ранее (случай четырех клеток).

Вспомогательные поверхности. Закругления сшиваемых клеток. Часто возникает необходимость сшивки двух клеток, которые найдены независимо друг от друга и для которых не выполняются условия плавного касания. Топологические условия взаимного расположения клеток могут быть различны, например клетки могут иметь или не

иметь общей границы. Более того, назначение поверхностей клеток может быть различным, например одна поверхность играет сугубо техническую роль, а другая — в значительной степени или целиком эстетическую.

Если клетки не имеют общей границы, можно использовать методы сшивки, описанные ранее. Ниже рассмотрен только случай клеток, имеющих общую границу.

Рассмотрим две клетки C' и C'' (рис. 14), общей границей которых является линия $L(u, 0)$.

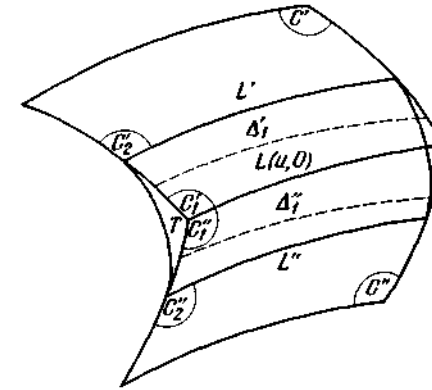


Рис. 14. Вспомогательная поверхность сшивки.

Проведем кривые L' и L'' , которые разбивают эти клетки на подклетки $C'1, C'2, C''1$ и $C''2$. Подклетки $C'2$ и $C''2$ оставим без изменения, а подклетки $C'1$ и $C''1$ заменим на касающуюся их по линиям L' и L'' одну клетку T .

Таким образом, для выполнения сшивки с клетками $C'2$ и $C''2$ достаточно определить две вспомогательные образующие $\Delta'1$ и $\Delta''1$, используя в случае необходимости рассмотренные выше методы (с помощью функций h и k). Можно также дополнительно построить вспомогательные образующие $\Delta'2, \Delta'3, \Delta''2, \Delta''3, \dots$, обеспечив только, чтобы они были той же степени, что и кривые L' и L'' . Вершины характеристических многоугольников этих кривых будут представлять собой вершины характеристической сетки сшиваемой клетки T .

В этом виде метод не очень отличается от того, который используется для нахождения произвольной клетки, кроме тех случаев, когда может потребоваться использование функций h и k для определения $\Delta'1$ и $\Delta''1$. Затем следует формально приравнять степени основных L' и L'' и вспомогательных $\Delta'1, \Delta'2, \dots, \Delta'3, \Delta''1$ образующих. Можно также попытаться использовать более удобный с

алгоритмической точки зрения метод, основанный на следующих предположениях:

- Степени клеток C'_2 и C''_2 равны соответственно $(m \times n')$ и $(m \times n'')$, а степень клетки T равна $(m \times 3)$.
- Функции сшивки имеют вид $h = \text{const}, k = 0$.

Для определения значения функции h можно привести следующие соображения. Характеристический многоугольник кривой L'_2 , лежащей на поверхности клетки d степени $(m \times n')$ имеет n' сторон (рис. 15).

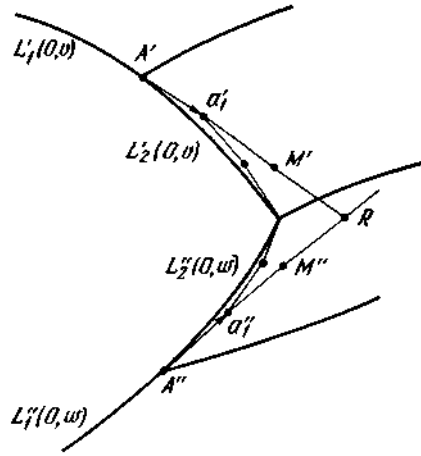


Рис. 15. Определение закругления сшивки.

Если допустить, что кривые L'_2 и L''_2 не имеют резких изменений кривизны, то можно считать, что их характеристические многоугольники несильно отклоняются от самих кривых, заканчивающихся в общей с ними точке, и длина характеристического многоугольника равна $A'R = n' \alpha'_1$ и

$$A''R = n'' \alpha''_1.$$

Минимальное изменение кривизны вдоль кубической кривой имеет место для значений $A'M'/A'R$ или $A''M''/A''R$, заключенных между 0,55 и 0,65, если α меняется в пределах от 45° до 90° . Обычно выбирают величину 0,6 тогда $h' = 0,6n'$, $h'' = 0,6n''$.

Дополнительная клетка. Рассмотрим клетки C_1, C_2, \dots, C_n , примыкающие друг к другу по граничным линиям, сходящимся в одной точке, причем примыкание осуществляется без плавного касания. Проведем в клетках изопараметрические кривые $L_1, M_1, \dots, L_n, M_n$, с помощью которых определим плавные закругления сшиваемых клеток $E_{1,2}, E_{2,3}, \dots$, по методу, описанному ранее (случай четырех клеток).

После этого остается только определить поверхность F , осуществляющую сшивку поверхностей $E_{1,2}, E_{2,3}$ и т. д. (рис. 16).

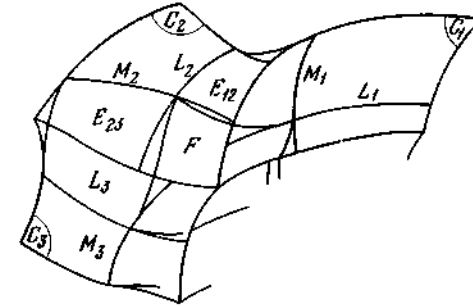


Рис. 16. Вспомогательные клетки для сшивки.

В общем случае на величину n — число сшиваемых поверхностей C не накладывается никаких ограничений. Следует только иметь в виду, как отмечалось ранее, что имеются небольшие отличия в решении для четных и нечетных значений n .

Случай четырех поверхностей. Рассмотрим четыре клетки C_1, \dots, C_4 (рис. 17), полученные в результате разбиения клеток B_1, \dots, B_4 кривыми $L_1, M_1, \dots, L_4, M_4$.

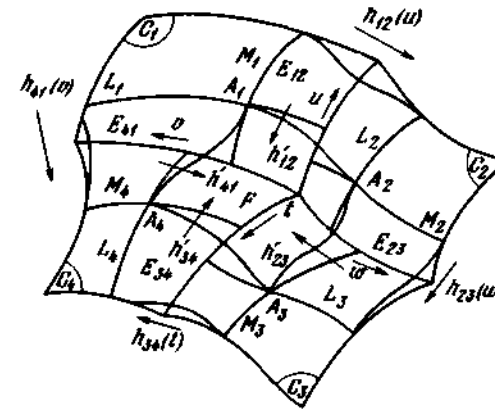


Рис. 17. Случай четырех вспомогательных клеток.

Определим сначала четыре сшивающие клетки $E_{1,2}, \dots, E_{4,1}$, степень которых равна $(m \times 3)$. Искомая поверхность F является касательной к клеткам $E_{1,2}, \dots, E_{4,1}$ по линиям $A_1 A_2, \dots, A_4 A_1$ и координаты точек A_1, \dots, A_4 в клетках C_1, \dots, C_4 равны $u = 0; v = 0$. Если кривые L_1, \dots, M_4 являются изопараметрическими, то функции сшивки клеток C_1, \dots, C_4 с клетками $E_{1,2}, \dots, E_{4,1}$ имеют вид $h(u)=const, k(u)=0$, и если $h_{1,2}(v) = h_{2,3}(v)$, то для сшивки клеток F и $E_{1,2}$ необходимо использовать правило:

$$h'_{1,2} = h_{1,4} \text{ и } k'_{1,2} = 0.$$

Если то же выполнить для всех четырех граничных линий, степень поверхности клетки F будет равна (3×3) . Но если, например, $h_{1,4} \neq h_{2,3}$, то функция $h'_{1,2}$ принимает следующий вид:

$$h'_{1,2}(\varphi) = h_{1,4}(2\varphi^3 - 3\varphi^2 + 1) + h_{2,3}(-2\varphi^3 + 3\varphi^2),$$

для того чтобы выполнялись условия

$$\frac{dh'_{1,2}(0)}{d\varphi} = \frac{dh'_{1,2}(1)}{d\varphi} = 0.$$

Выражения в скобках являются интерполяционными функциями Кунса. В этом случае степень поверхности клетки F равна (6×6) . Из 49 вершин ее характеристической сетки для получения девяти центральных вершин недостаточно использовать приведенные правила сшивки (функции h и k). Для их определения можно использовать следующий метод.

Обозначим через $S_{0,2}, S_{1,2}, S_{5,2}$ и $S_{6,2}$ вершины, полученные с помощью правил сшивки h и k . Рассмотрим вспомогательные вершины $R'_{2,2}$ и $R'_{4,2}$ (рис. 18), которые определим из условия равенства отрезков:

$$S_{1,2}R'_{2,2} = S_{0,2}S_{1,2}$$

$$\text{и } S_{5,2}R'_{4,2} = S_{6,2}S_{5,2}.$$

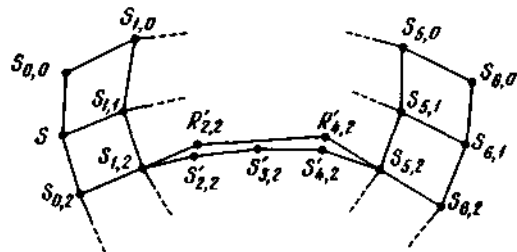


Рис. 18. Определение центральных точек характеристической сетки.

Таким образом, у многоугольника $S_{0,2}R'_{2,2}R'_{4,2}S_{6,2}$, характеризующего

кубическую кривую, мы фиктивно повышаем степень до шести за счет построения многоугольника $S_{0,2}S_{1,2}S'_{2,2}S'_{3,2}S'_{4,2}S_{5,2}S_{6,2}$.

Аналогично можно получить точки

$$S'_{2,2}, S'_{3,2}, S'_{4,2},$$

$$S'_{2,3}, S'_{3,3}, S'_{4,3},$$

$$S'_{2,4}, S'_{3,4}, S'_{4,4}.$$

Используя тот же прием, из точек

$$S_{2,0}, S_{2,1}, S_{2,5}, S_{2,6},$$

$$S_{3,0}, \dots, S_{3,6},$$

$$S_{4,0}, \dots, S_{4,6}$$

получают точки

$$S''_{2,2}, S''_{3,2}, S''_{4,2},$$

$$S''_{3,2}, S''_{3,3}, S''_{3,4},$$

$$S''_{4,2}, S''_{4,3}, S''_{4,4}.$$

Отсюда окончательно определяются

$$S_{2,2} = \frac{S'_{2,2} + S''_{2,2}}{2}, S_{3,2} = \frac{S'_{3,2} + S''_{3,2}}{2}, S_{4,4} = \frac{S'_{4,4} + S''_{4,4}}{2}$$

Случай трех поверхностей. Для этого случая используются несколько методов. Часть из них предоставляет некоторый простор для инициативы оператора и больше пригодна для решения эстетических задач, остальные же строго следуют составленному алгоритму.

Вырожденная клетка. Поверхность $A_1A_2A_3$ на рис. 19 представляет собой вырожденную клетку, сторона которой A_4A_1 сведена к точке A_1 .

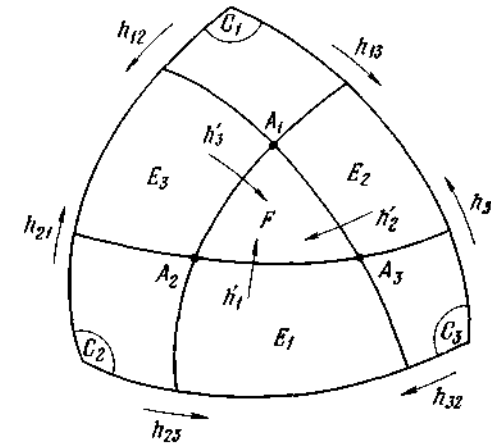


Рис. 19. Вырожденная клетка $A_1A_2A_3$.

Правило сшивки клеток C и E имеет вид $h = \text{const}$, $k = 0$, и условие $h_{1,2} = h_{3,1}$ влечет следующие выражения для правил h_1^i , h_2^i и h_3^i :

$$\begin{aligned} h_1^i &= h_{2,1} = h_{3,1}, \\ h_2^i &= h_{3,2}(-2u^3 + 3u^2), \\ h_3^i &= h_{2,3}(-2u^3 + 3u^2). \end{aligned}$$

Степень поверхности клетки F равна (6×3) .

Если $h_{2,1} \neq h_{3,1}$, выражение для h_1^i принимает вид $h_1^i = h_{2,1}(-2u^3 + 3u^2) + h_{3,1}(2u^3 - 3u^2 + 1)$,

а степень поверхности F равна (6×6) .

Когда степень поверхности равна (6×3) , вершины характеристической сетки определяются автоматически, а когда степень равна (6×6) , девять неопределенных вершин находятся по методу, изложенному ранее (дополнительная клетка).

Однако, как показано на рис. 20, вершины $S_{1,1}$ и $S_{1,5}$ совпадают соответственно с вершинами $S_{1,0}$ и $S_{1,6}$ и с помощью предыдущих методов вершины $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ и $S_{1,4}$ определить нельзя.

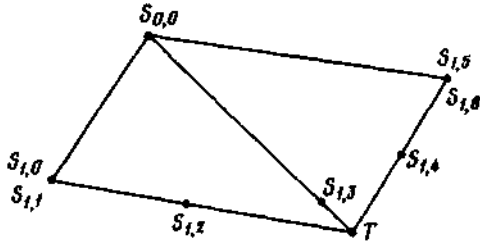


Рис. 20. Определение вершин характеристической сетки вырожденной клетки.

В этом случае фигура $S_{0,0}S_{1,1}TS_{1,6}$ является параллелограммом, а точки

$$S_{1,2}, S_{1,3} \text{ и } S_{1,4}$$

могут быть определены из условий

$$\begin{aligned} \frac{S_{1,0}S_{1,2}}{S_{1,0}T} &= \frac{S_{1,6}S_{1,4}}{S_{1,6}T} = 0,5, \\ \frac{S_{0,0}S_{1,3}}{S_{0,0}T} &= 0,83. \end{aligned}$$

Эти соотношения выбраны так, чтобы кривизна вдоль кривой, определяемой характеристическим многоугольником $S_{1,2}$, в большинстве случаев изменялась не очень сильно.

Клетка с точкой излома. На одной из трех граничных линий (рис. 21)

отложим точку A_4 , для которой значение параметра u равно 0,5.

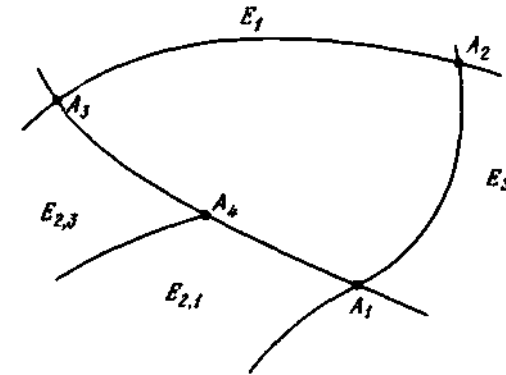


Рис. 21. Клетка с точкой излома.

Разделим клетку E_2 с помощью изопараметрической линии $L(0,5; v)$ на две полуклетки $E_{2,1}$ и $E_{2,3}$. Углами дополнительной клетки F будем считать точки A_1 , A_2 , A_3 и A_4 .

Заметим, что в точке A_4 частные производные $\partial P / \partial u$ и $\partial P / \partial v$ коллинеарны и что эта точка является точкой излома. Этот случай в принципе сводится к рассмотренному ранее (случай четырех поверхностей), вычисление нормали в точке A_2 выполняется не с помощью векторного произведения частных производных, а с привлечением специальной процедуры (поверхности с точкой излома). Известно, что правило сшивки клеток E_2 и C_1 имеет вид

$$h_{1,3} = \text{const}, k = 0,$$

а для клеток $E_{2,1}$ и C_1

$$h' = \frac{1}{2}h_{1,2}, k' = k_{1,3} = 0.$$

Вероятно, что, кроме особых случаев, сшивка клеток E_3 и F будет описываться кубической зависимостью, хотя степень клетки F будет равна (6×6) .

Диагональное разбиение. Данный метод заключается в разбиении одной из клеток, например C_1 , пересекающей ее кривой, для которой $u = t$, $v = t$. Таким образом, клетка C_1 делится на две вырожденные клетки C'_1 и C''_1 (рис. 22), нулевая сторона которых совпадает с точкой $B = S_{m,n}$.

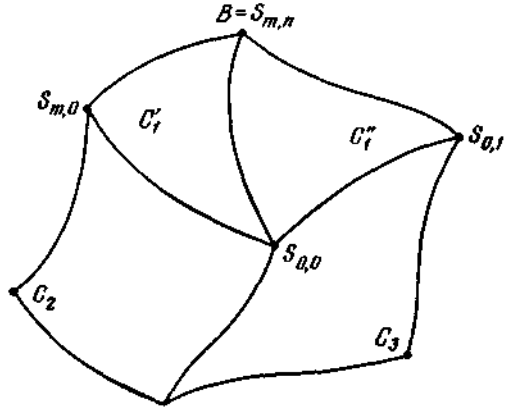


Рис. 22. Диагональное разбиение клетки.

Клетки C'_1 и C''_1 с угловыми точками соответственно $S_{m,n}$, $S_{0,0}$, $S_{m,0}$, $S_{m,n}$ и $S_{m,n}$, $S_{0,0}$, $S_{0,n}$, $S_{m,n}$, полученные разбиением клетки $S_{0,0} S_{m,0} S_{0,n} S_{m,n}$ пересекающей кривой $L(u, v)$, можно описать с помощью следующих выражений:

$$P'(t, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} t^{(i+j)} v^j,$$

$$P''(u, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} u^i t^{(i+j)}.$$

Разбиение с помощью изопараметрических кривых. При разбиении клеток C'_1 и C''_1 с помощью изопараметрических кривых

$$L'(t'_0, v), \quad \Lambda'(t', v_0)$$

и

$$L''(u, t'_0), \quad \Lambda''(u_0, t'')$$

образуется вспомогательная клетка (рис. 23) степени $(m \times 3)$, и решение сводится к случаю, описанному ранее (вырожденная клетка).

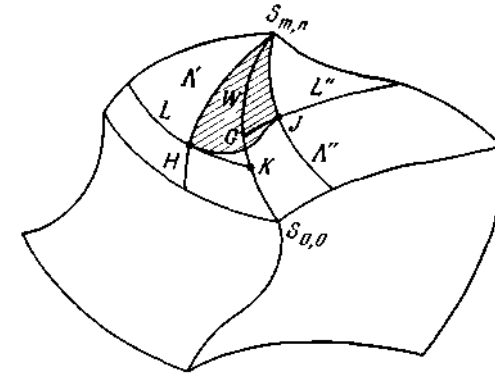


Рис. 23. Разбиение с помощью изопараметрических кривых.

Заметим, что теоретически клетка $S_{m,n} HJS_{m,n}$ не совпадает с клетками $S_{m,n} HKS_{m,n}$ и $S_{m,n} GJS_{m,n}$, их нужно находить самостоятельно.

Разбиение главной образующей. В этом случае, как и прежде, клетка C_1 разбивается пересекающей кривой $(u=v)$, а подклетки C'_1 и C''_1 (рис. 24) разбиваются в свою очередь с помощью кривых $L'(t_0, v)$ и $L''(u, t_0)$, и правило сшивки (h, k) описывается зависимостью третьей степени.

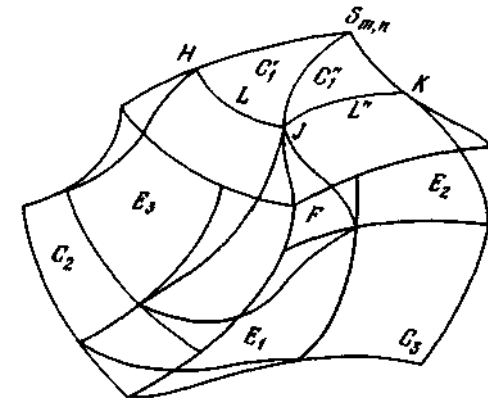


Рис. 24. Разбиение с помощью главных образующих.

Преимущество такого решения по сравнению с предыдущим заключается в том, что клетка $S_{m,n} HJK$ является частью клетки C_1 , ограниченной кривыми L' и L'' , и полная обработка выполняется за один прием.

Разделенная клетка. Если провести разбиение трех клеток E_1, E_2 и E_3 с помощью изопараметрических кривых, то получится шесть клеток $E_{1,2}, E_{1,3}, \dots, E_{3,2}$. Через произвольную точку T проведем три кривые TB_1, TB_2 и TB_3 , которые являются границами трех клеток F_1, F_2 и F_3 , касающихся друг друга по линиям TB_1, TB_2 и TB_3 и одновременно касательных к клеткам $E_{1,2}, E_{1,3}, \dots, E_{3,2}$.

Условия, которым должно удовлетворять положение точки T , приведены ранее. К ним можно добавить другие произвольные условия. Например, если требуется найти решение по строгому алгоритму, в качестве дополнительных условий можно взять следующие:

1. Разбиение клеток E_1, E_2 и E_3 выполняется с помощью изопараметрической кривой $L(0,5; \nu)$.
2. Положение точки T задается на нормали к плоскости треугольника $B_1B_2B_3$, проходящей через его центр тяжести (рис. 25).

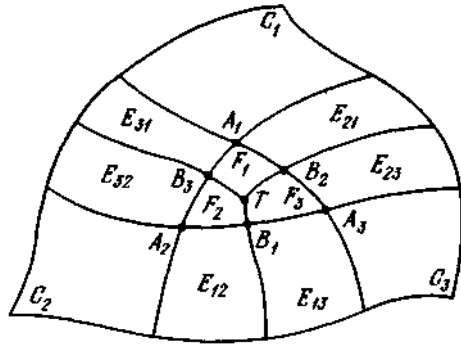


Рис. 25. Разделенная клетка.

3. Плоскости, касательные к клеткам E_1, E_2 и E_3 в точках B_1, B_2 и B_3 , пересекаются с нормалью GR в точках T_1, T_2 и T_3 . При этом положение точки T определяется следующим образом:

$$GT = (GT_1 + GT_2 + GT_3) \times 0,15.$$

Приведенное значение коэффициента 0,15 выбрано из тех соображений, что оно обеспечивает минимальное изменение кривизны клетки F при изменении углов, образуемых плоскостями, касательными к клеткам E_1, E_2 и E_3 в точках B_1, B_2 и B_3 в диапазоне от 90° до 180° .

4. Характеристические многоугольники граничных кривых, начинающихся в точке T , удовлетворяют следующим условиям (рис. 26):

$$TN_1 = \frac{1}{3} GB_1, \\ \dots \\ B_1M_1 = \frac{1}{3} B_1G.$$

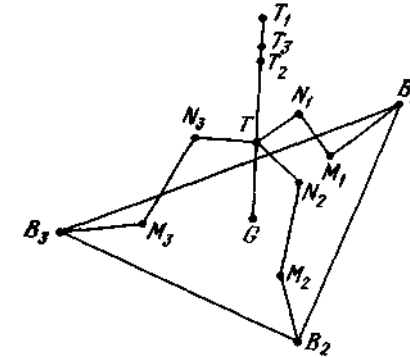


Рис. 26. Положение вершины T на нормали к плоскости $B_1B_2B_3$.

Ориентация отрезков B_1M_1, B_2M_2 и B_3M_3 становится определенной при известных правилах сшивки клеток $E_{1,2}, \dots, E_{3,1}, F_1, F_2$ и F_3 , например

$$h = h_0 + (h_1 - h_0)(-2u^3 + 3u^2) \text{ и } k = 0. \quad (51)$$

В частности, если $h_0 = h_1$, то

$$h = h_0 = \text{const.}$$

5. Для простоты используют одинаковые правила (h, k) сшивки клеток F_1, F_2 и F_3 . Они описываются кубической зависимостью, первые производные которой равны нулю при $u = 0$ и $u = 1$ и значение которой в точках B_1, B_2 и B_3 равны $h = 1, k = 0$.

6. Правило сшивки клеток $E_{2,1}$ и F_1 предусматривает, что функция h должна быть кубической, а k — нулевой. Кривая Δ_1 — первая вспомогательная образующая клетки F_1 (рис. 27) определяется как кривая шестой степени, при этом степень кривой A_1B_2 должна быть искусственно повышена до такого же значения, хотя на самом деле она является кубической. То же справедливо и для кривой A_1B_2 .

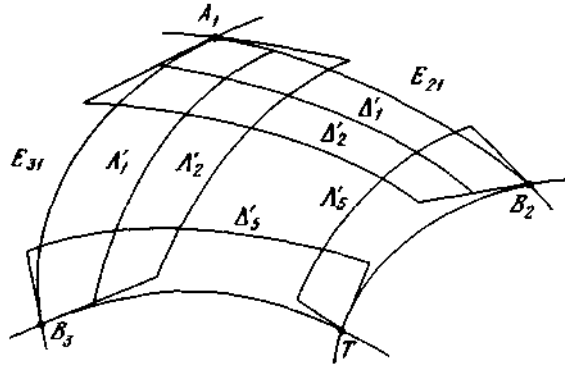


Рис. 27. Определение вспомогательных образующих.

Затем с помощью характеристического многоугольника определяется вспомогательная образующая Δ_i . Вершины многоугольника лежат на серединах отрезков прямых, соединяющих одноименные вершины характеристических многоугольников кривых $A_1 B_2$ и Δ_1 . Аналогичная процедура применяется и для Λ_1 , первой вспомогательной образующей, используемой при сшивке клеток $E_{3,1}$ и F_1 .

Правила сшивки клеток $E_{2,1}$, C_1 , $E_{3,1}$ и F_1 должны в точке A_1 удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{dh(0)}{du} = 0, \quad k(u) = 0.$$

При этом никаких специальных условий не накладывается на значение вторых производных в этой точке. Граничные кривые TB_2 и TB_3 являются кубическими, но их степень должна быть искусственно поднята до шести.

Для определения вспомогательных образующих Δ_5' и Λ_5' сначала находят четвертую вершину ячейки, одна из угловых точек которой является точкой T . С учетом условий, приведенных ранее, кривые Δ_5' и Λ_5' являются кубическими, и так как их степени искусственно увеличиваются до шести, характеристические многоугольники имеют по шесть сторон.

Таким путем определяются сорок вершин характеристической сетки, а для нахождения девяти последних применяется метод, описанный ранее (закругления сшиваемых клеток).

7. Клетки F_2 и F_3 находятся по методу, описанному ранее (случай четырех поверхностей).

Общее решение. На поверхности клеток C_1, C_2, \dots, C_n (рис. 28) проводятся изопараметрические или пересекающие кривые L и Λ .

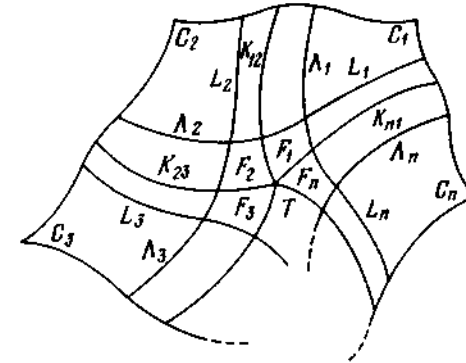


Рис. 28. Поверхности C_1, C_2, \dots, C_n , разделенные кривыми L и Λ .

Клетки $E_{1,2}, E_{2,3}, \dots, E_{n,1}$ определяются по методу, описанному ранее (разделенная клетка). Каждая из клеток делится изопараметрической кривой $K(0,5; v)$, а затем находятся клетки F_1, F_2, \dots, F_n , попарно касательные друг к другу, граница между которыми проходит по кривой, служащей продолжением кривой K .

Условия сшивки в точке T описаны в ранее (примыкающие клетки). Обобщение. Покажем, как можно обобщить решения, приведенные ранее. Рассмотрим множество клеток, имеющих общие границы (рис. 29), на которых не выполняются условия сшивки по касательной. В этом случае возможно использование методов, описанных ранее (примыкающие клетки и вспомогательные поверхности).

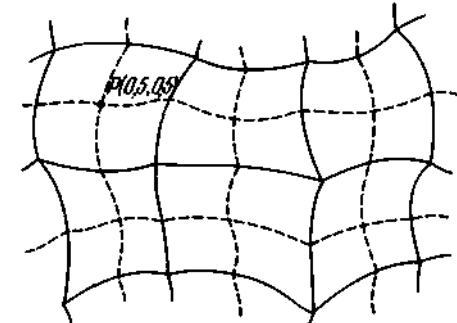


Рис. 29. Обобщение вспомогательных поверхностей

К наиболее простому решению привело бы разбиение клеток кривыми $L(u; 0,5)$ и $\Lambda(0,5; v)$. В этом случае полная поверхность

состояла бы из множества клеток, описанных ранее (вспомогательные поверхности), и от исходных клеток остались бы только их центральные точки $P(u = 0,5; v = 0,5)$.

3. Введение в моделирование геометрических объектов методами полюсов

Борьба за повышение качества продукции и рост производительности труда являются стратегическими целями современного производства. Реальные усилия, предпринимаемые для решения этих задач, охватывают в том числе и системы автоматизированного моделирования (САМ). Теория полюсов является хорошим тому примером.

Что такое производительность? Обычно ее мерой является произведенный продукт, т. е. производительность тесно связана с количественными показателями производства. Вклад САМ в повышение производительности проявляется в том, что разрабатываемые и применяемые новые математические методы действительно позволяют найти более простые конструктивные решения, избежать роста стоимости продукции при использовании более современной технологии производства транспортных средств. Кроме того, повышается эффективность обучения персонала, обслуживания производства и использования аппаратуры. И в этом плане теория полюсов является одним из математических методов САМ, который служит источником дополнительного повышения производительности конструкторского труда, приводит к сокращению сроков разработок.

Что такое качество? Оно главным образом зависит от нашей способности наладить систему постоянного контроля за совершенствованием производства, в которой САМ является важным звеном. Приведем для примера две фундаментальные задачи, в решении которых роль САМ трудно переоценить: определение влияния на форму кузова автомобиля действующих механических нагрузок (первая задача) и его аэродинамических свойств (вторая задача).

Применение средств автоматизации и вычислительной техники позволяет заглянуть в завтрашний день, способствует постоянному повышению качества продукции и росту производительности труда, в частности, и за счет решения названных выше задач.

Следует особенно выделить следующий аспект данной работы: разработка новых математических приемов и методов программирования непременно должна приводить к появлению более эффективных алгоритмов. Можно сказать, что хороший алгоритм сжимает время, ускоряя процесс вычислений. Теория простых и обобщенных полюсов (разработка которых началась в 60-х годах XX века), представляет собой исключительно мощный и эффективный математический метод, более простой, чем большинство обычно используемых алгоритмов.»

Понятие полюса было введено в 1958 г., однако его применение для интерполяции и других приложений, связанных с сохранением непрерывности восстанавливаемых функций, относится к 1981 г. Первая монография по теории полюсов была представлена Академией Безансона в 1983 г. Материал этой книги подвергался неоднократному редактированию с целью более доходчивого изложения некоторых деталей. Ведь читатель легко может пройти мимо очевидных, но невянятно изложенных вопросов, важных для понимания всего материала.

Большой вклад в подготовку материала к публикации внес Лошиц, который участвовал также в практической проверке предлагаемой теории. Его критические замечания сыграли заметную роль в устранении недостатков и помогли полнее отразить аспекты теории полюсов, имеющие важное значение для промышленного производства. И, конечно же, нельзя забыть *Поль де Кастельжо* одного из авторов теории полюсов и всех тех, кто принимал участие в становлении и развитии САМ.

3.1. Основная задача теории полюсов

3.1.1. Введение

Задачей теории полюсов является математическое описание кривых и поверхностей. Следует сказать, что графическому представлению уравнений, скрупулезному исследованию их поведения посвящено множество столько работ. Но лишь сравнительно недавно появились работы, посвященные **решению задачи точного представления геометрической формы объекта** с помощью простых методов.

Потребности промышленного производства стимулировали развитие этих работ. Дело в том, что форма кузова автомобиля, например, гораздо больше зависит от интуиции и приблизительных оценок, от воображения художника, чем от строгих математических методов. Поэтому получить ясную, четкую, цельную и однозначную информацию, свободную от неопределенностей, на практике оказывается невозможно.

В 1958 г. Поль де Кастельжо предложил фирме «Ситроен» набросок решения проблемы, а с 1963 г. эти приемы стали изучать сотрудники фирмы, участвующие в разработке новых моделей автомобилей. В то время это направление работы было совершенно новым, поэтому для успеха дела надо было заранее многое предусмотреть. Осознав простоту предлагаемой теории и ознакомившись с несколькими простыми алгоритмами, каждый может убедиться, что и он мог бы ее создать. Читатель увидит, что суть теории сводится к записи решения в простой наглядной форме, основанной на разумных определениях и понятиях. Таким образом устраняются сложные математические построения, требующие специальных математических знаний. При малейшей возможности автор теории (Поль де Кастельжо) без колебаний отбрасывали такие основные приемы численного анализа как ортогональные функции, разделенные разности и др. Их использование, как правило, ставит больше проблем, чем решает. Ниже описывается предлагается законченная теория интерполяции, которая является оригинальным обобщением точечной интерполяции Лагранжа, отличным от метода Эрмита. Она позволяет проводить аппроксимацию дугами полиномов *любой степени вплоть до бесконечной*, если этого требуют условия сшивки. При этом гарантируется строго **алгебраическое восстановление полинома, определенного на произвольном числе точек**. Более того, с ее помощью достигается сглаживание, гораздо более гибкое, чем с помощью метода наименьших квадратов, и не связанное с необходимостью минимизации. Эта теория делает очевидной оптимальность получаемых решений для фиксированных степени полинома и условий непрерывности. Как частный случай из нее вытекает теория *B*-сплайнов Ризенфельда и демонстрируется их несовершенство - они являются не чем иным, как линейными комбинациями определенных оптимальных и неоптимальных решений, и существенно уступают в общности предлагаемым методам. Другой частный случай данной теории - теория, разработанная советским ученым В. С. Рябенкиным.

3.1.2. Основные свойства полюсов

Применение теории полюсов позволяет существенно повысить эффективность взаимодействия человека и ЭВМ. Этому способствует ряд положений теории, которые обычно остаются незамеченными для тех, кто вплотную не сталкивался с проблемой. Наиболее важные из них следующие:

1. Результат интерполяции не зависит от выбора координатных осей.
2. Результат получается легко обозримым благодаря наличию специальным образом построенных опорных точек, которые мы назовем полюсами (из-за их математического происхождения); отметим, что они не имеют ничего общего с особыми точками кривых и поверхностей.
3. Перемещая полюсы, можно плавно изменять форму объекта.
4. Полюсы располагаются вблизи от геометрических объектов, что устраняет трудности, связанные с бесконечными ветвями, например трудности, которые возникают при черчении дуги окружности большого радиуса, если центр расположен вне чертежного планшета.
5. Удобство работы с проекциями. Полюсы проекции являются проекциями полюсов.
6. Независимость полюсов от направления обхода кривой при их вычислении.
7. Легко достигается плавность вычисленной кривой. В методах, использующих разложение в ряд, при возрастании степени разложения резко возрастают трудности стыковки на границах.
8. Использование полиномов. Разложение в ряд также приводит к полиному, но использование разложения влечет за собой потерю общности и гибкости. Разложение периодических функций в тригонометрический ряд дает обычно плохие результаты. Лучшие результаты дает их представление в виде суммы четной и нечетной частей, каждую из которых затем представляют с помощью полюсов $f(\cos u)$ и $f(\sin u)$.
9. В рамках аффинной геометрии полюсы обладают регулярными свойствами. Если же использовать дополнительную однородную координату H и перейти к проективной геометрии с помощью простого конического проектирования с центром в начале координат:

$$x = X/H, \quad y = Y/H, \quad z = Z/H,$$

то это может привести к трудностям, и поэтому такой подход не рекомендуется.

3.1.3. Особенности применения теории полюсов к моделированию кривых и поверхностей

Основу теории полюсов составляет небольшое число простых, но несъема эффективных соотношений. К ним относятся следующие:

1. Определение управляющей точки-полюса, исходя из полярной формы полиномов, используемых для интерполяции (термин «полюс» возник из тройного использования слога «по» и ничего общего не имеет с полюсами в теории вычетов функций комплексной переменной или с полюсами сферы).
2. Новое представление теории конечных разностей.
3. Искусная техника вычислений, которая позволяет переходить от точек объектов к полюсам и обратно. При этом можно провести аналогию с голографией, когда из размытого пятна получается четкое изображение.
4. Возможность плавной деформации геометрической формы объекта за счет подвижности полюсов (вплоть до образования выступов и ребер).

Рассмотрим теперь используемые способы описания геометрических объектов. В теории полюсов кривые на плоскости и в пространстве задаются в параметрическом виде как функции $x(t)$, $y(t)$ (и $z(t)$ для кривых в пространстве). Ограничения на размерность пространства отсутствуют. Описание поверхностей зависит от геометрии их разбиения задающими точками. При разбиении на клетки поверхность задается двумя параметрами u и v , изменения которых в определенных пределах ($u_i \leq u \leq u_{i+1}$, $v_i \leq v \leq v_{i+1}$) дают клетку поверхности. При разбиении на треугольники используются 3 параметра u , v , w ($u + v + w = 1$; $u, v, w \geq 0$). Число параметров можно легко увеличить, при этом не возникает никаких теоретических трудностей. Запись уравнений в виде $y = f(x)$ и $z = f(x, y)$ не применяется; ее можно использовать только как частный случай параметрической записи с $x = t$ (для первого случая) и $x = u, y = v$ (для второго случая).

Единственная трудность теории полюсов состоит в усвоении непривычных обозначений. В остальном эта теория элементарна.

3.2. Симметричные полярные формы

3.2.1. Полярная форма параметрического уравнения

Рассмотрим векторное уравнение, заданное с помощью симметрических полиномов S_1, S_2, \dots, S_n от переменных t_1, t_2, \dots, t_n и векторов \bar{V}_k :

$$\bar{P}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \bar{V}_0 + \sum_{k=1}^n S_k \bar{V}_k. \quad (1)$$

(Симметрическими полиномами n переменных t_1, t_2, \dots, t_n называются функции вида

$$S_0 = 1,$$

$$S_1 = t_1 + t_2 + \dots + t_n,$$

$$S_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + \dots + t_1 t_n + t_2 t_3 + \dots = \sum t_i t_j,$$

...

$$S_n = t_1 t_2 \dots t_n.$$

Эту запись можно сократить, внося нулевой член под знак суммы при $k = 0$ и приняв $S_0 = 1$. Более того, верхний предел суммирования может быть больше n , если предположить $S_m = 0$ при $m > n$. Это предположение используется в дальнейшем для увеличения степени.

Легко убедиться в справедливости рекуррентной формулы для симметрических полиномов

$$S_i = s_i + t_n s_{i-1}, \quad (2)$$

где S_i и s_i - симметрические полиномы для n и $n - 1$ переменных соответственно.

Если допустить, что все переменные $t_i = 1$, и записать значения функций S_i в виде таблицы, расположив построчно значения функций для возрастающего числа переменных, то получится арифметический треугольник Фибоначчи, ошибочно приписываемый Паскалю.

(Арифметический треугольник Фибоначчи имеет вид:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & & & & & 1 & & 3 & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{array})$$

Если $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$, уравнение (1) принимает вид параметрического уравнения кривой

$$\bar{P}_n(t) = P(\underbrace{t_1, t_2, \dots, t_n}_{=t}) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \bar{V}_k t^k. \quad (3)$$

Это выражение можно записать отдельно для компонент (проекций на координатные оси). Так для компоненты (проекции) X_p на ось OX можно написать следующее выражение:

$$X_p = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x_k t^k,$$

где x_k - проекция вектора \bar{V}_k на ось OX . То же имеет место для координат y, z, \dots . Уравнение (1) будем называть обобщенной полярной формой параметрического уравнения (3).

Для обратного перехода к уравнению (1) временно введем в уравнение (3) переменную u , благодаря которой оно становится однородным, и запишем формулу Эйлера для однородных функций степени n :

$$P_n(t, u) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k u^{n-k} \bar{V}_k = \frac{1}{n} \left(t \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial u} \right). \quad (4)$$

Взяв эту формулу за основу, подставим вместо t переменную t_1 и примем $u = 1$:

$$P(t_1; t) = t_1 \left(\frac{1}{n} \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \left(\frac{1}{n} \frac{\partial P}{\partial u} \right).$$

Выполним эту операцию для t_2, t_3, \dots, t_{n-1} и получим

$$\bar{P}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}; t) = \bar{V}_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (s_k + t s_{k-1}) \bar{V}_k. \quad (5)$$

(В предыдущем выражении переменная t_1 вводится только перед производной $\partial P/\partial t$, а в функции $P(t, u)$ сохраняется переменная t . Полученная функция $P_n(t_1, t)$ вновь дополняется аргументом u для достижения однородности и для нее производится вычисление по приведенной формуле с подстановкой t_2 перед производной $\partial P/\partial t$. Указанная процедура повторяется $n - 1$ раз (каждый раз вводится новая переменная t_i), в результате чего получается выражение (5).)

Легко убедиться, что при подстановке переменной t_n вместо i получаем исходное уравнение (1).

Назовем полюсами кривой, заданной параметрическим уравнением (3), точки в пространстве, которому принадлежат векторы v_0, \dots, v_n , причем координаты этих точек вычисляются подстановкой в уравнение (1) фиксированных значений переменных t_1, t_2, \dots, t_n . Эти значения

могут быть различными или одинаковыми, но всегда должны располагаться в порядке неубывания. Полюсы обозначаются следующим образом:

$$p_{1, 2, \dots, n} \quad (t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n).$$

3.2.2. Алгоритм включения новых полюсов

В обобщенной полярной форме зафиксируем все переменные, кроме одной (переменная t), и обозначим полученную линейную функцию через $p_{1, 2, \dots, (n-1)}(t)$. Рассмотрим два полюса, соответствующие значениям этой переменной t_i и t_j . Вследствие линейной зависимости от t можно записать отношение

$$\left| \begin{array}{ccc} p_{1, 2, \dots, (n-1)}(t) p_{1, 2, \dots, (n-1)}(t_i) p_{1, 2, \dots, (n-1)}(t_j) \\ 1 & 1 & 1 \\ t & t_i & t_j \end{array} \right| = 0 \quad (6)$$

для $t_i \leq t \leq t_j$. Отсюда следует формула для включения новых полюсов

$$p_{1, 2, \dots, (n-1)}(t) = \frac{(t - t_i) p_{1, 2, \dots, (n-1)}(t_j) + (t_j - t) p_{1, 2, \dots, (n-1)}(t_i)}{t_j - t_i}. \quad (7)$$

В литературе, посвященной B -сплайнам, аналогичная формула носит название формула Кокса - де Бура. С ее помощью, зная два полюса, различающихся одним индексом, можно вычислить любые другие полюсы для промежуточных значений t . Включение новых полюсов позволяет решать проблему более мелкого разбиения дуги. Если эту операцию повторить n раз для одного и того же значения переменной, то получим точку, принадлежащую кривой

$$\underbrace{p_{t_1, \dots, t_n}}_n = P(t) = P_t$$

Эта операция называется сокращением индексов и является фундаментальной в теории полюсов.

Любое линейное изменение параметра типа $t = aT + b$ не влияет на геометрическое положение полюсов. Преобразование типа $t = T^2$ сохраняет алгебраическую природу кривой, но изменяет степень параметрического представления и положение полюсов. Введение дополнительного члена степени $n + 1$ с нулевым коэффициентом тем более не изменяет алгебраическую природу кривой, но добавляет один индекс в обозначении полюсов, осуществляя операцию увеличения степени.

Итак, в теории полюсов главную роль играют **симметрические полиномы**, линейные по каждой переменной, из которых составляется

обобщенная полярная форма. Параметрическое уравнение кривой получается, если все переменные равны друг другу. Из дальнейшего будет ясно, что описываемая здесь техника обработки кривых и поверхностей граничит с искусством. Теория полюсов позволяет значительно упростить многие вычисления, в частности получение интерполяционных полиномов.

3.2.3. Производные полярной формы

Введем понятие производной полярной формы. Под производной формы подразумевают наклон прямой, задаваемой уравнением (7):

$$P'_{1, 2, \dots, (n-1)}(i, j) = \frac{P_{1, 2, \dots, (n-1)}(t_j) - P_{1, 2, \dots, (n-1)}(t_i)}{t_j - t_i}. \quad (8)$$

(Предполагается, что справедливы те же условия, при которых выводилась формула (7): все индексы фиксированы, кроме одного (t), который меняется в пределах от t_i до t_j .)

Нетрудно видеть, что это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (1). Производная полярной формы (которая называется годографом) является также полярной формой и записывается в виде

$$P'_{1, 2, \dots, (n-1)} = \sum_{k=1}^{k=n} s_{k-1} V_k. \quad (9)$$

(В этом выражении V_{k-1} - симметрические полиномы $n - 1$ переменных.)

Другими словами, P' является не чем иным, как коэффициентом при t_n в уравнении (1). Это свойство рекуррентно распространяется на производные высших порядков; n -я производная не зависит от параметров, а производные более высокого порядка равны нулю. Таким образом, с помощью теории полюсов можно решить определенный круг задач, не обращаясь к дифференциальному и еще в меньшей степени к интегральному исчислениям.

При обобщении понятия полюса на случай поверхностей укажем, что попытка распространить формулы (6) и (7) на трехмерное пространство встречает одну трудность. Если вместо t_i и t_j подставить точки M_i и M_j параметрической плоскости, то возможно появление вырожденных поверхностей. Но если использовать барицентрические координаты точки $M = pA + qB + rC$ ($p + q + r = 1$; A, B, C - вершины треугольника, внутри которого находится точка M), тогда формулы (6) и (7) можно обобщить следующим образом:

$$P_{1, 2, \dots}(M) = pP_{1, 2, \dots}(A) + qP_{1, 2, \dots}(B) + rP_{1, 2, \dots}(C).$$

При этом требуется, чтобы на каждом шаге три точки A, B, C действительно образовали треугольник (не были совмещены и не лежали на одной прямой). Таким образом, сокращение индекса оказывается возможным в любом n -мерном пространстве.

3.3. Символьный анализ

В теории полюсов широко используется разложение биннома Ньютона, а также другие результаты комбинаторного анализа. В этой главе мы приведем несколько полезных формул. В первую очередь обратим внимание на то, что произведение

$$A_n = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n) \quad (10)$$

представляет собой сумму всех симметрических полиномов и переменных, присутствующих в фундаментальной формуле (1). Формула (1) отличается только коэффициентами при различных степенях параметров, среди которых могут быть и нулевые. Аналогичное произведение с однородной зависимостью от переменных записывается в виде

$$B_n = (t_1 + u_1)(t_2 + u_2) \dots (t_n + u_n), \quad (10a)$$

причем на переменные могут накладываться два типа условий $u_i = 1$ или $t_i + u_i = 1$ для всех i .

Ниже рассматриваются обобщения этих формул для поверхностей.

3.3.1. Разбиение поверхности на прямоугольники

В этом случае используются два независимых параметра, а соответствующие функции определяются следующим выражением:

$$C_{n,p} = [(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n)][(1 + v_1)(1 + v_2) \dots (1 + v_p)]. \quad (11)$$

Формулу с однородной зависимостью от переменных можно получить по аналогии с выражением (10a). Точка с координатами u, v в пространстве параметров находится в прямоугольнике $u_i \leq u \leq u_j, v_r \leq v \leq v_s$.

3.3.2. Разбиение поверхности на треугольники

Для этого случая обычно используются барицентрические координаты u, v, w . Для тех, кто не знаком с этими координатами, поясним, что они представляют собой проекции точки трехмерного

пространства на треугольник в плоскости $x + y + z = 1$, вершины которого лежат на координатных осях:

$$\begin{aligned} x = 1 \quad x = 0 \quad x = 0 \\ y = 0 \quad y = 1 \quad y = 0 \\ z = 0 \quad z = 0 \quad z = 1 \end{aligned}$$

Точка с координатами u, v, w лежит внутри этого треугольника, причем

$$u = \frac{x}{x + y + z}, \quad v = \frac{y}{x + y + z}, \quad w = \frac{z}{x + y + z}.$$

Величины u, v, w остаются всегда положительными и удовлетворяют соотношению

$$u + v + w = 1.$$

Симметрические полиномы в этом случае являются произведением однородных функций от параметров

$$D_n = (u_1 + v_1 + w_1)(u_2 + v_2 + w_2) \dots (u_n + v_n + w_n) \quad (12)$$

с условием $u_i + v_i + w_i = 1$ для всех L

Очевидно, что все изложенное выше можно распространить на любое n -мерное пространство.

3.3.3. Связь со сплайнами

В данном разделе рассматривается следующий подход к описанию функций. Пусть заданы значения некоторой функции $f(x)$ на дискретном множестве точек $f(x_i), i = 0, 1, \dots, p$. Построим производящую функцию (полином)

$$F(t) = \sum_{i=0}^p f(x_i) t^i.$$

Тогда в соответствии с известными свойствами производящих функций справедливы следующие соотношения:

1) Если

$$h(x_i) = \sum_k f(x_k) g(x_i - x_k) \equiv f * g$$

(свертка функций), то $H(t) = F(t)G(t)$.

2) Если $g(x) \geq 0, g(x_i) = g(x_{p-i})$, то свертка по п. 1 представляет собой процедуру сглаживания (усреднения).

3) $F(t)(1-t)$ при разложении по степеням t дает первые конечные разности функции $f(x)$.

4) Если $f(x) \equiv 1$, то ее n -кратная свертка сама с собой дает сплайн n -го порядка.

Рассмотрим произведение

$$E_{n,p} = (1 + t_1 + t_1^2 + \dots + t_1^p)(1 + t_2 + t_2^2 + \dots + t_2^p) \dots \dots (1 + t_n + t_n^2 + \dots + t_n^p).$$

Для случая когда все t_i равны между собой, можно довольно просто вычислить коэффициенты полинома при t^q . Для этого следует воспользоваться рекуррентным соотношением. Предположим, что известно $E_{i,p}$:

$$E_{i,p} = k_0 + k_1 t + \dots + k_q t^q + \dots$$

Тогда для нахождения $E_{i+1,p}$ следует умножить это выражение на $1 + t + \dots + t^p$. Коэффициенты при этом удобно располагать в виде таблицы, каждый столбец которой соответствует определенной степени

$$\begin{array}{ccccccc} k_0 & k_1 & \dots & k_p & \dots & k_q & \\ 0 & k_0 & \dots & & & & \\ 0 & 0 & k_0 & \dots & & & \end{array}$$

Приведенная таблица служит для определения коэффициентов полинома при различных степенях t , которые получаются суммированием элементов в столбцах.

Этот алгоритм, который был известен уже Фибоначчи, является обобщением формулы бинома. Из него можно получить сплайны Шонберга, если заменить сумму средним, разделив ее на $p + 1$. Кроме того, на каждом шаге вычислений возрастает порядок непрерывности, что можно показать с помощью таблицы разностей. В примере взяты $p = 4$ и $n = 4$ (рис. 3.1).

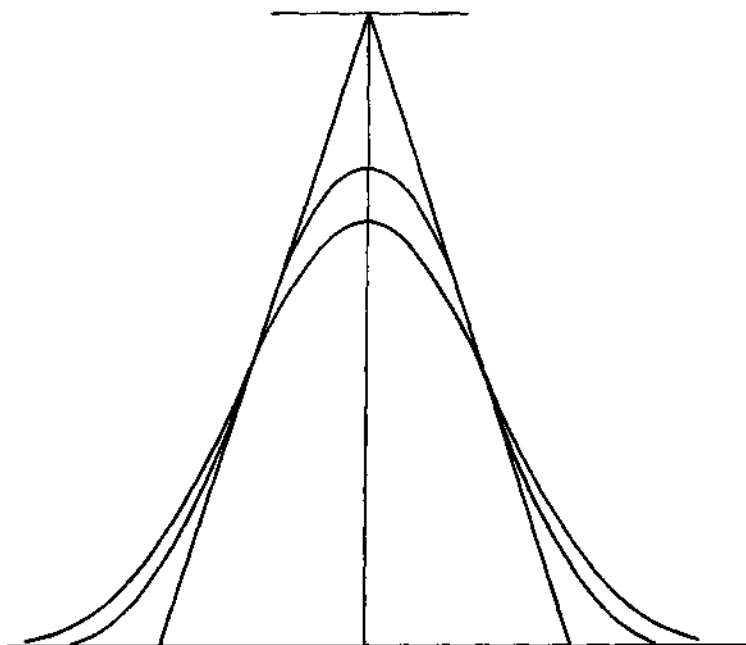


Рис. 3.1. Сплайны, полученные последовательным усреднением по точкам.

Сплайны можно представить себе как проекцию гиперкуба пространства E_p , рассеченного на n частей, на некоторую ось. Площадь сечения, перпендикулярного диагонали куба, как функция расстояния от начала координат представляет собой сплайн третьего порядка. В пределе $p \rightarrow \infty$ осуществляется переход к интегрированию и заданию функции на непрерывном множестве точек.

На каждом этапе вычисления разностей восстанавливаются коэффициенты, которые другим способом можно получить умножением на $(1 - t)$; n -я строка соответствует выражению $\left(\frac{1-t^{p+1}}{1-t}\right)^n$, пределом

которого при $p \rightarrow \infty$ является

$$\frac{1}{(1-t)^n}.$$

Не вдаваясь в подробности, отметим значение средних величин, которые могут быть использованы в различных приложениях (от изме-

рения дневных температур до биржевых курсов) для сглаживания случайных выбросов. Это скорее выравнивание, чем сглаживание

График на рис. 3.1 соответствует усреднению с $n = 3$ кривой из 125 точек ($p = 124$). Числовая таблица построена так, что каждый член является суммой пяти членов, находящихся в соседнем левом столбце (в двух строках выше и в двух строках ниже) до пятого столбца. Следующие столбцы представляют собой таблицу разностей ($n = 4, p = 4$).

+0	+0	+0	+1	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	-4	+0	+0	+0	+0	+0	+6	+0	+0	+0	+0	+0	+0	-4	+0	+0	+0	+0	+1	+0	+0	+0	+0	+0	+0									
+0	+0	+0	+0	+0	+1	+1	+1	+1	+2	+1	+1	+1	+1	+1	+2	+1	+3	+3	+3	+3	+4	+4	+5	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3									
+0	+0	+0	+0	+0	+0	+1	+1	+3	+3	+4	+5	+2	+2	+2	+2	-1	-4	-7	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-7	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4							
+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+1	+3	+6	+10	+15	+2	+2	+5	+17	+16	+12	+5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5				
+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+1	+10	+20	+3	+3	+6	+35	+68	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85			
+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+1	+10	+3	+3	+6	+35	+52	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68	+68		
+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+1	+1	+3	+4	+19	+80	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85	+85		
+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1		
+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0

Каждый участок, где Δ_4 оказывается нулем, соответствует полиному 3-й степени. Две соседние дуги имеют три общие точки (это максимально возможное число вследствие алгебраического тождества). Протяженность каждой дуги составляет 8 точек ($n + p$). Если ввести в рассмотрение функцию

$$C_+(x) \begin{cases} \text{для } x < 0 & C_+(x) = 0, \\ \text{для } x > 0 & C_+(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2), \end{cases} ,$$

то кривая средних (сплайн 3-го порядка) записывается в виде (Коэффициенты в приводимом ниже выражении представляют собой значения Δ_4 в граничных точках сплайнов (правый столбец таблицы).)

$$C_+(x) - 4C_+(x - m) + 6C_+(x - 2m) - 4C_+(x - 3m) + C_+(x - 4m),$$

где $m = p + 1$.

3.3.4. Предполагаемые обобщения

Описанный выше алгоритм усреднения обобщается на многомерный случай: вычисления зависят от элементарного окна, в котором произ-

водится усреднение. Оно может быть квадратным, прямоугольным или треугольным. Это окно отражает предельные свойства полинома от двух переменных:

$$(1 + \dots + t^i u^j + \dots) \begin{cases} 0 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq p & \text{(для квадратного окна),} \\ 0 \leq i + j \leq n & \text{(для треугольного окна).} \end{cases}$$

После выполнения n операций проверяют, остается ли окно гометичным самому себе. Возможны и другие формы окон - шестиугольные или круглые (в этом случае необходимо вычислять интегралы). При желании они могут быть центрированы (например, $-n \leq i \leq n; -p \leq j \leq p$), что является более наглядным, но и более сложным.

Из сказанного видно, какие богатые возможности открывает теория усреднения; эта теория связана с теорией операторов Лапласа. Ее результаты зависят от способа разбиения. Во всех случаях можно гарантировать непрерывность порядка $n - 1$ для участков размером n . Такими же свойствами обладают сплайны и в одномерном случае.

Использование полюсов позволяет подойти к построению кривых другим путем и также гарантировать их непрерывность. При этом остается свобода выбора двух параметров и вводится понятие степени восстановления, которое неявно присутствует в формулах численного интегрирования (Симпсон, Гаусс), но оказалось утерянным при переходе к теории сплайнов.

3.4. Индексное представление полюсов

В этой главе рассмотрены основные следствия из полярной формы параметрического уравнения, играющие важную роль в теории полюсов. Напомним, что **из основной формулы (1) следует векторный характер полюса**, т.е. при выводе основных правил не требуется знать ни осей координат, ни даже числа измерений m пространства E_m , которые могут быть любыми. С помощью полюсов можно обрабатывать любые кривые, в том числе и расположенные в n -мерном пространстве.

3.4.1. Последовательности индексов

Зафиксируем произвольную последовательность индексов t_i , упорядоченную в неубывающем порядке с возможными (в том числе и многократными) повторениями, например:

$$0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, \dots$$

Если степень параметрического уравнения выбрана равной n , то и в обозначении полюса будем использовать n индексов. (В этом случае в формуле (1) будут использованы симметрические функции n переменных. Для получения конкретного значения полюса необходимо на их место подставить n последовательных значений из приведенного ряда индексов.) Могут присутствовать и более высокие степени с нулевыми коэффициентами.

Примитивными полюсами кривой будем называть последовательность полюсов, содержащих n последовательных индексов, причем для каждого последующего полюса индексы берутся из исходной последовательности со сдвигом на один шаг. Например, для приведенного выше примера примитивными полюсами для $n = 5$ являются

$$P_{00122} P_{01222} P_{12223} P_{22233} P_{22334} P_{23345} P_{33455} P_{34556} \\ P_{45566} P_{55666} P_{56666} P_{66666} P_{66667}$$

В данном случае все полюсы различны, так как последовательность индексов состоит из 5 элементов. Если же какой-либо полюс содержит n -кратно повторяющийся индекс (в примере P_{66666}), то он является точкой, принадлежащей кривой.

3.4.2. Подполюсы

Формула (7) определяет процедуру включения индекса, состоящую в добавлении произвольного значения параметра t между значениями t_i и t_j :

$$t_0, \dots, t_i, t, t_j, \dots, t_e$$

Сокращение индекса состоит в n -кратном повторении этой операции, в результате чего получается полюс $P_{i_1 i_1 \dots i_1 t_0 \dots t_i t t t t t t t_j \dots t_e}$, совпадающий с точкой, лежащей на кривой. Сокращение индекса не изменяет алгебраическую запись дуги $t_i t_j$, но позволяет строить подполюсы.

3.4.3. Увеличение степени

Из основной формулы (1) видно, что можно увеличить степень параметрического уравнения, добавив еще один член с нулевым коэффициентом, не меняя при этом алгебраического выражения. Такая операция, называемая увеличением степени, приводит к добавлению одного индекса в записи полюсов. Ниже показано, что увеличение

степени необходимо производить вместе с увеличением кратности повторения всех примитивных индексов. Так, для примера из разд. 3.4.1 для $n = 6$ последовательность индексов должна быть следующей:

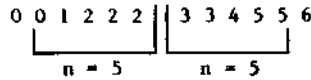
0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, ...

Можно показать, что повторение каждого индекса связано с порядком непрерывности дуг.

Для получения полюсов дуги $t_i t_j$ следует руководствоваться следующим правилом. Первый полюс содержит n индексов слева от промежутка $t_i t_j$ и включает максимальное число повторений индекса t_i . Аналогично последний полюс содержит n индексов справа от промежутка с максимальным повторением индекса t_j .

3.4.4. Включение индекса

Рассмотрим пятикратное включение индекса для промежуточной точки дуги $t_2 t_3$ в следующей последовательности индексов:



Удобнее всего описать эту операцию в виде треугольной таблицы полюсов (рис. 4.1), левый столбец которой представляет собой примитивные полюсы дуги $t_2 t_3$, а последующие столбцы - полюсы, полученные однократным, двукратным и т.д. включением индекса t .

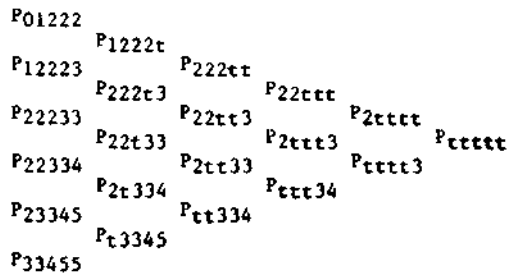


Рис. 4.1. Пятикратное включение индекса t .

P_{tttt} представляет собой значение кривой, описываемой полиномом 5-й степени, в точке t . На каждом шаге включения индекса образуются новые подполюсы. Такая многоступенчатая процедура сокращения индекса с участием всех примитивных полюсов дуги $t_2 t_3$ объясняется тем, что на каждом шаге можно выполнить

только однократное включение индекса, так как формула (7) получена в предположении, что все индексы фиксированы, кроме одного.

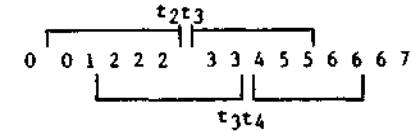
Детальное алгебраическое описание сокращения индексов довольно утомительно, в то же время запись в форме полюсов очень наглядна. Если необходимо, введенные индексы могут быть различными и при этом сохраняется симметричность алгебраического выражения по отношению к совокупности переменных.

3.4.5. Переход к следующей дуге

Рассмотрим соседнюю дугу $t_3 t_4$. Связанные с ней полюсы имеют индексы

122233 | 455666

Для перехода от дуги $t_2 t_3$ необходимо в общей цепочке индексов переместиться вправо на два шага, т. е. на число повторений p смежного индекса t_3 ($p = 2$):



В данном случае две последовательные дуги $t_2 t_3$ и $t_3 t_4$ имеют 4 общих полюса ($n - p + 1$) (рис. 4.2.).

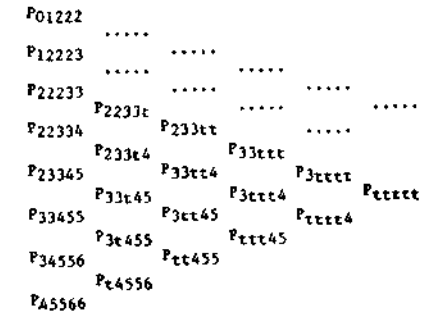


Рис. 4.2. Полюсы последовательных дуг

Ниже показано, что наличие общих полюсов определяет порядок непрерывности в точке сшивки двух дуг. Один общий полюс определяет нулевой порядок непрерывности, т.е. непрерывность самой кривой. Два общих полюса определяют первый порядок

непрерывности - в точке сшивки будет общая касательная, для трех общих полюсов - непрерывность кривизны и т.д.

Если индекс t_i повторяется p раз, можно выполнить еще $n-p$ включений данного индекса. Прделаем эту операцию для индекса t_3 из рассмотренного выше примера. На рис. 4.3 после $(n-p)$ включений индекса t_3 выполнены включения индекса t , расположенного до точки t_3 , и индекса u , расположенного после нее.

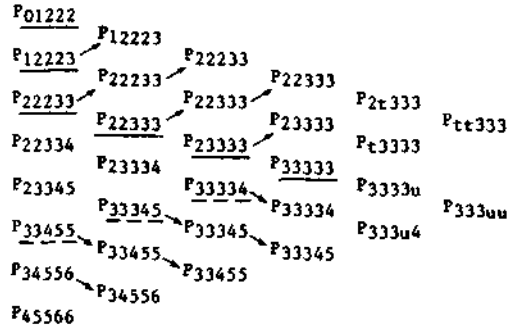


Рис. 4.3. Включение индексов t и u , расположенных соответственно до и после точки t_3 .

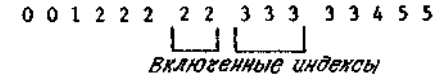
Стрелки связывают одинаковые полюсы. На рисунке показан треугольник полюсов, имеющих общее происхождение. В таблице на рис. 4.3 они подчеркнуты. Под общим происхождением понимаются примитивные полюсы, которые получены из одной цепочки индексов, в данном случае - с пятикратно повторенным индексом t_3 .

3.4.6. Непрерывность

При переходе от одной дуги к другой мы первые p примитивных полюсов (в данном случае два) заменили p новыми. Это означает, что обеспечивается непрерывный переход между дугами степени $(n-p)$. В следующем разделе вопрос о непрерывности обсуждается более подробно.

3.4.7. Простые полюсы

Простыми называются такие полюсы, которые получаются из последовательности индексов с дополнительно включенными параметрами t_i и t_j так, чтобы каждый из них повторялся n раз. Для рассматриваемого случая эта последовательность имеет вид



Такое включение всегда возможно, при этом среди простых полюсов окажутся такие, которые лежат на концах дуги. Продемонстрируем это на примере. В таблице на рис. 4.4 показано включение индексов t_2 и t_4 до пятикратного повторения. Исходные данные для таблиц (их первые столбцы) представляют собой подчеркнутые полюсы на рис. 4.3, т. е. полюсы, полученные из последовательности индексов с пятикратно повторенным.

<u>P₀₁₂₂₂</u>	<u>P₃₃₃₃₃</u>
P ₁₂₂₂₂	<u>P₃₃₃₃₄</u>
<u>P₁₂₂₂₃</u>	<u>P₃₃₃₃₄</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₃₃₃₄₄
<u>P₂₂₂₂₃</u>	<u>P₃₃₄₄₄</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₃₃₄₄₅
<u>P₂₂₂₂₃</u>	<u>P₃₃₄₄₅</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₃₃₄₄₅
<u>P₂₂₂₂₃</u>	<u>P₃₄₄₄₅</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₃₄₄₄₅
<u>P₂₂₂₂₃</u>	<u>P₄₄₄₄₄</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₄₄₄₄₄
<u>P₂₂₂₂₃</u>	<u>P₄₄₄₄₅</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₄₄₄₄₅
<u>P₂₂₂₂₃</u>	<u>P₄₄₅₅₅</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₄₄₅₅₅
<u>P₂₂₂₂₃</u>	<u>P₄₄₅₅₆</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₄₄₅₅₆
<u>P₂₂₂₂₃</u>	<u>P₄₅₅₅₆</u>
P ₂₂₂₂₃	P ₄₅₅₅₆

Рис. 4.4. Включение индексов 2 и 4 до пятикратного повторения.

В таблице подчеркнуты простые полюсы двух смежных дуг, у которых появляется одинаковый простой полюс. Основной интерес к простым полюсам связан со своеобразным представлением таблицы разностей, в которой присутствуют только индексы t_i и t_j . При этом в выражениях для производных и ввода индексов присутствует один знаменатель $(t_j - t_i)$.

3.4.8. Треугольная таблица разностей простых полюсах

Рассмотрим разности между последовательными простыми полюсами. Для упрощения вычислений воспользуемся представлением, использованным в предыдущей главе:

$$\prod_{i=0}^{i=n} (1 + t_i).$$

Поскольку речь идет о простых полюсах, s -й полюс соответствует разложению

$$(1 + t_0)^{n-s} (1 + t_1)^s,$$

а два последовательных полюса и разность (точнее, не разность, а результат вычислений по формуле (8) между ними соответственно

$$(1 + t_0)^{n-s+1} (1 + t_1)^{s-1},$$

$$(1 + t_0)^{n-s} (1 + t_1)^s, \quad \Delta = (1 + t_0)^{n-s} (1 + t_1)^{s-1} \cdot \frac{(1 + t_1) - (1 + t_0)}{t_1 - t_0},$$

т. е. $\Delta = (1 + t_0)^{n-s} (1 + t_1)^{s-1}$. Каждая последующая разность остается полюсом, но с уменьшенной на единицу степенью. В параметрическом разложении кривой по векторам V_k (см. формулы (1) и (3)) его коэффициенты будут соответствовать членам степени k в приведенном выше разложении. Составим таблицу разностей для конкретного примера с $n = 5$ (рис. 4.5).

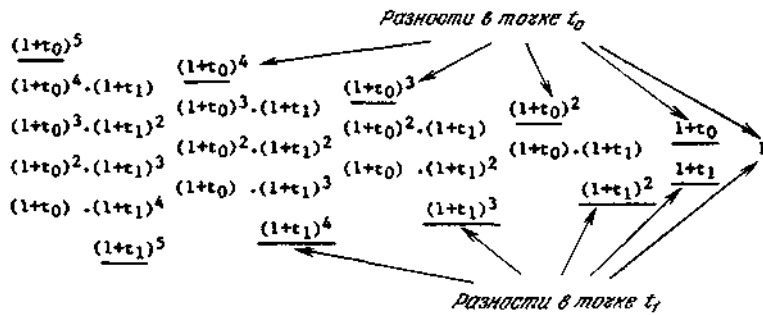


Рис. 4.5. Таблица разностей для $n = 5$.

Для точки t_0 разложение кривой и пять последовательных разностей имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Функция} &\rightarrow \Delta_0 \rightarrow V_0 + 5t_0 V_1 + 10t_0^2 V_2 + 10t_0^3 V_3 + 5t_0^4 V_4 + t_0^5 V_5 \\ \Delta_1 &\rightarrow V_1 + 4t_0 V_2 + 6t_0^2 V_3 + 4t_0^3 V_4 + t_0^4 V_5 \\ \Delta_3 &\rightarrow V_2 + 3t_0 V_3 + 3t_0^2 V_4 + t_0^3 V_5 \\ \Delta_4 &\rightarrow V_3 + 2t_0 V_4 + t_0^2 V_5 \\ \Delta_5 &\rightarrow V_5 \end{aligned}$$

3.4.9. Алгебраическое разложение дуги

Используя результаты предыдущего раздела, нетрудно убедиться, что алгебраическое уравнение кривой для $t_0 = 0$ можно представить в виде

$$\Delta_0 + 5t \Delta_1 + 10t^2 \Delta_2 + 10t^3 \Delta_3 + 5t^4 \Delta_4 + t^5 \Delta_5.$$

Для произвольного t_0 справедливо следующее разложение:

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{s=1}^{s=n} C_n^s (t - t_0)^s \Delta_s.$$

Таким образом, доказана теорема, утверждающая, что таблица разностей простых полюсов, умноженных на биномиальные коэффициенты, дает коэффициенты алгебраического разложения кривой.

3.4.10. Еще раз о непрерывности

Вернемся к вопросу о непрерывности в точке сшивки t_j двух дуг кривой. Когда индекс j повторяется p раз, две дуги имеют $n - p + 1$ общих полюсов, что приводит к существованию $n - p + 1$ простых полюсов той же алгебраической формы. Ниже показано, что алгебраическое разложение по полюсам по обе стороны от точки сшивки совпадает до степени $n - p$. При этом степень непрерывности равна числу идентичных разностей до и после сшивки.

Справедлива следующая теорема: всякое полюсное разложение дуги с n индексами позволяет восстановить алгебраическую форму дуги с помощью уравнения степени не более n , при этом порядок непрерывности при переходе между двумя дугами равен $n - p$, где p - число повторений индекса в точке сшивки.

Таким образом, непрерывность следует непосредственно из вида записи полюсов!

3.4.11. Полюсы и сплайны

В теории сплайнов, как и в теории полюсов, параметры можно выбирать произвольно, но если два параметра становятся близкими друг другу и за счет находящегося в знаменателе члена $t_j - t_i$ коэффициенты в выражении для разделенных разностей для точек t_i и t_j стремятся к бесконечности, остается ограниченной только их сумма. Подобные сплайны с близкими параметрами называются *субсплайнами*. Сохранение непрерывности путем вычитания бесконечных величин является недостатком субсплайнов, приводящим к потере информации, поэтому субсплайны на практике используются редко.

В отличие от этого в теории полюсов сохранение непрерывности для близких параметров происходит путем их обращения в нуль. Для получения непрерывности порядка $n - p$ необходимо учесть p дополнительных условий путем включения необходимого числа новых полюсов для учета непрерывности соответствующих производных.

Все результаты, полученные с помощью сплайнов, могут быть получены также с помощью полюсов, но не наоборот. Более того, при использовании B -сплайнов необходимо различать два типа узлов. Если эти типы узлов использовать в теории полюсов, это приведет к значительным усложнениям и станет невозможным вычисление подполюсов. А главное нельзя будет корректно определить степень интерполирующего полинома, называемую в теории полюсов *степенью восстановления*. Теория полюсов является полностью алгебраической, в то время как теория B -сплайнов основана на идеях математического анализа. Алгебраические методы позволяют полностью учесть все возможные варианты.

Далее будут показаны дополнительные преимущества теории полюсов, с помощью которой удается существенно упростить вычисления. Интерполяция начинается с вычисления полинома Лагранжа на $r+1$ точках, где r -степень восстановления (степень интерполяционного полинома). Из них определяются последовательности полюсов, а общая картина интерполяции образуется с помощью перегруппировки полюсов, полученных на различных участках. При этом всегда **остаются постоянными число индексов n , порядок непрерывности (связанный с числом повторения индексов) и степень восстановления r .**

Подобная схема вычислений обеспечивает высокую эффективность за счет большого числа удовлетворяемых условий при небольшом

числе параметров и достижение гибкого сглаживания без использования понятия минимума. Становится возможным определить лучшую интерполяцию, чем интерполяция с помощью сплайнов или B -сплайнов.

3.4.12. Прогрессивные полюсы

Прогрессивными называются полюсы, которые соответствуют последовательности индексов t_i без повторений для $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$. Правила сокращения индекса и построения текущей точки остаются прежними. Таблица на рис. 4.6 соответствует дуге t_2t_3 .

$$\begin{array}{cccc}
 \underline{P_{012}} & & & \\
 P_{123} & \frac{P_{12t}}{P_{2tt}} & P_{2tt} & P_{ttt} \\
 P_{234} & \frac{P_{2t3}}{P_{tt3}} & & \\
 \underline{P_{345}} & \frac{P_{t34}}{P_{ttt}} & &
 \end{array}$$

Рис. 4.6. Включение индекса с использованием прогрессивных полюсов.

Подчеркнута цепочка прогрессивных полюсов (подполюсов), соответствующая включению в исходную последовательность индексов точки t . Степень непрерывности равна для этого случая $n - 1$. Проблема увеличения степени интерполирующего полинома решается путем включения в исходную последовательность всех индексов с двукратным повторением ($p = 2$), при этом степень непрерывности не меняется:

$$n + 1 - p = n - 1.$$

Прогрессивные полюсы аналогичны точкам Ризенфельда B -сплайнов, однако отличаются от них способами включения промежуточных точек, интерполяцией на концах кривой, большей гибкостью при сшивке дуг и главным образом более доступным алгебраическим переходом к дугам более высоких степеней.

3.4.13. Обобщенные полюсы

Обобщенными называются полюсы, для которых в исходной последовательности индексов каждый индекс повторяется p раз. Построение текущей точки для этого случая приведено в таблице на рис. 4.7.

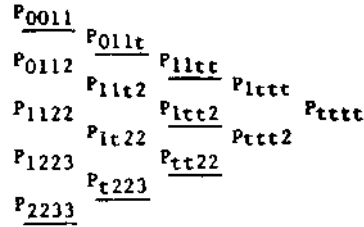


Рис. 4.7. Включение индекса с использованием обобщенных полюсов.

Подчеркнуты подполюсы, определяемые двукратным ($p = 2$) включением индекса с сохранением обобщенной структуры вновь полученных полюсов. Эту операцию при необходимости можно повторить.

3.5. Использование полюсов в расчетах

3.5.1. Операции с простыми полюсами

Простые полюсы предполагают максимальное повторение индексов, и построение текущей точки облегчается тем, что в формуле сокращения индексов (формула (7)) имеются только две константы

$$\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = q, \quad \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} = p,$$

причем $p + q = 1$, и алгоритм сокращения индекса имеет вид

$$M = pA + qB$$

и может применяться во всей цепочке последовательных сокращений, как показано в таблице на рис. 5.1.

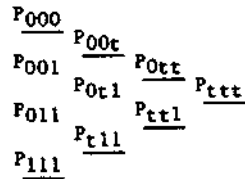


Рис. 5.1. Сокращение индекса с использованием простых полюсов.

Подчеркнуты простые подполюсы, соответствующие исходной дуге, разделенной промежуточной точкой.

Если провести сравнение со сплайнами, можно сделать вывод, что

увеличение степени при использовании сплайнов гораздо сложнее, так как отсутствует операция, аналогичная включению индекса.

3.5.2. Свойства простых полюсов

1. С помощью простых полюсов может быть описана любая дуга или последовательность дуг.
2. Описание дуги не зависит от примыкающих дуг только в простых полюсах.
3. Из всех полюсов простые являются наиболее близкими к кривой, прогрессивные - наиболее удаленными.
4. Для достижения непрерывности нужного порядка необходимо использовать не простые полюсы, а такие, у которых индексы повторяются требуемое число раз.
5. Изменение формы кривых путем перемещения полюсов всегда требует определенного избытка информации, увеличения степени включения промежуточных точек.

Простой полюс является единственным, который не содержит никакой избыточности, но наибольшей гибкостью обладает обобщенный полюс. При помощи таблицы разностей простых полюсов легко проверяется порядок непрерывности в точках сшивки соседних дуг.

3.5.3. Пример вычисления пятых степеней целых чисел

Сравним два метода вычисления пятых степеней целых чисел, каждый из которых требует составления таблицы разностей. Таблица на рис. 5.2, а иллюстрирует классический метод.

-243						1									
-32	211						1								
-1	31	-180					2	1							
0	1		+150				2	2	1						
+1	1	-30		-120			4	2		1					
+32	1	0	+30		120	0	8	4	2		1				
+243	1	0				0	8	4	4	2		2			
+1024	31	30	150		120	0	16		8						
+3125	211	180		240	120	0	32		16						
+7776	781	570	360		120	0	48		8						
	2101	1320		480			72		12		2				
	2101		1230					36		6		2			
	4651	2550					108		18		3				
							54			9					
							162		27						
							81								
							243								
							...								
							n5								
							n4	n4	n3	n2	n				
							n4m	n3m	n2m	nm	m				
							n3m2	n2m2	nm2	m2					
(n-1)5	Δ'1	20n3+10n	Δ'3	120n	Δ'5	0	n2m3	nm3	m3						
n5	Δ''1		Δ''3		Δ''5		nm4	m4							
(n+1)5							m5								
	a						b								

Рис. 5.2. Вычисление пятых степеней целых чисел: а - классическим методом; б - с помощью полюсов.

В ней

$$\Delta_1 = 5n^4 \pm 10n^3 + 10n^2 \pm 5n + 1,$$

а для вычисления Δ'' используется знак плюс, для Δ' - минус;
 $\Delta_3 = 30(2n^2 \pm 2n + 1), \Delta_5 = 120.$

Таблица на рис. 5.2,б построена с помощью полюсов. В данных примерах $m = n + 1$, но может быть и любым другим числом, в этом случае разности надо разделить на $m - n$. (Проследим более подробно, как построена эта таблица. Исходное уравнение имеет вид $y = t^5$. Его полярная форма равна $y = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$. Рассмотрим дугу $1 \leq t \leq 2$ (верхний

треугольник таблицы). Тогда полюсы, составляющие первый столбец таблицы, равны: $P_{11111} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $P_{11112} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$; $P_{11122} = 4$; $P_{11222} = 8$; $P_{12222} = 16$; $P_{22222} = 32$. Остальные столбцы представляют собой последовательные разности, деленные на $m-n$. Верхний ряд разностей нижнего треугольника совпадает с нижним рядом разностей верхнего, так как порядок непрерывности здесь максимален. Зная верхний ряд разностей, легко построить все остальные элементы треугольника, включая простые полюсы следующей дуги и т.д.)

Сравнение весьма показательно. С одной стороны, запутанная логика классической теории Ньютона и неудобные формулы вычисления коэффициентов, с другой - вполне понятные коэффициенты вида $n^x m^y$ для произвольных n и m .

3.5.4. Бета- и гамма-функции

Связь теории полюсов с традиционными методами обработки в определенном смысле аналогична связи между бета-функцией Эйлера и гамма-функцией. По определению

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = (p-1)!,$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{1}{(p+q-1)C_{p+q-2}^{p-1}}.$$

Некоторые авторы предпочитают нормировать на единицу интеграл в определении бета-функции с получением полиномов, называемых полиномами Бернштейна. Однако это ничего не прибавляет к пониманию сути явления и приводит к нежелательным осложнениям.

3.5.5. Пример вычислений значений полинома

Рассмотрим более общий случай вычисления значений многочленов. Сравним вычисления по известной схеме Горнера и аналогичному алгоритму теории полюсов. Представим полином $f(x)$ в виде разложения по формуле Тейлора в окрестности точки h

$$f(x) = P(h+x) = P(h) + xP'(h) + \dots + x^k P^k(h) + \dots + x^n P^n(h),$$

где

$$P^k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}.$$

В схеме Горнера значение коэффициентов полиномов $P^k(h)$ для функции

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

определяется путем последовательного вычисления величин

$$\begin{aligned} P_0 &= a_0, & P'_0 &= a_1, & P^{(k)} &= a_0 \\ P_1 &= hP_0 + a_1, & P'_1 &= a_0, & & \\ \dots & & \dots & & & \\ \dots & & \dots & & & \\ P_i &= hP_{i-1} + a_i, & P'_i &= hP'_{i-1} + P_{i-1}, \dots, & P^{(k)} &= hP^{(k)}_{i-1} + P^{(k-1)}_{i-1}, \dots, \\ \dots & & \dots & & & \\ P_n &= hP^{(k)}_{n-1} + a_n, & P'_n &= hP'_{n-1} + P_{n-1}, \dots, & P^{(k)} &= hP^{(k)}_{n-1} + P^{(k-1)}_{n-1}, \\ & & & & P^{(n)} &= a_0. \end{aligned}$$

Для вычисления выражения $P^{(k)}_i = hP^{(k)}_{i-1} + P^{(k-1)}_{i-1}$ можно использовать рекуррентную формулу (учтем, что производная от $P^{(k)}(x)$ равна $(k+1)P^{(k+1)}(x)$)

$$(k+1)P^{(k+1)}_i = (k+1)hP^{(k+1)}_{i-1} + kP^{(k)}_{i-1} + P^{(k)}_{i-1}.$$

В таблице на рис. 5.3 приведен пример вычисления по схеме Горнера значения полинома $P_4 = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$.

p	$p' = p(1)$	$\frac{1}{2} p'' = p(2)$	$\frac{1}{3} p''' = p(3)$	$\frac{1}{4} p^{(4)} = p(4)$
(a)	a	a	a	a
(б)	$at+b$	$2at+b$	$3at+b$	$4at+b$
(в)	at^2+bt+c	$3at^2+2bt+c$	$6at^2+3bt+c$	$4at+b$
(г)	at^3+bt^2+ct+d	$4at^3+3bt^2+2ct+d$	$6at^2+3bt+c$	$4at+b$
(д)	$at^4+bt^3+ct^2+dt+e$	$4at^3+3bt^2+2ct+d$	$6at^2+3bt+c$	$4at+b$
	e_1	d_1	c_1	b_1

Рис. 5.3. Вычисление значений полинома по схеме Горнера.

Пример применения полюсов для этой же цели приведен в таблице на рис. 5.4 для полинома $At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E$.

Полюсы	1	2	3	4
E	D	C	B	A
Dt+E	Ct+D	Bt+C	At+B	A
Ct^2+2Dt+E	Bt^2+2Ct+D	At^2+2Bt+C	At+B	A
Bt^3+3Ct^2+3Dt+E	At^3+3Bt^2+3Ct+D	At^2+2Bt+C	At+B	A
At^4+4Bt^3+6Ct^2+4Dt+E	At^3+3Bt^2+3Ct+D	At^2+2Bt+C	At+B	A
	E_1	D_1	C_1	B_1

Рис. 5.4. Вычисление значений полинома с помощью полюсов.

Оба алгоритма имеют много общего; они предусматривают выполнение одинакового числа умножений и используют похожие рекуррентные формулы. Схема Горнера предусматривает последовательное вычисление производных полинома до n -го порядка. Каждый элемент таблицы получается сложением произведения вышестоящего элемента на t с соседним элементом слева. Таким образом, таблица заполняется сверху вниз и слева направо.

Во второй схеме, наоборот, начинают справа, умножают очередной элемент на t , складывают с элементом слева из соседнего столбца и таким образом получают очередной элемент. Заполнение таблицы идет сверху вниз и справа налево. В обоих случаях, зная коэффициенты, можно вычислить значение полинома в точке t . Но во втором варианте таблица дает также и значение порядка непрерывности. Элементы в столбцах таблицы представляют собой производные в точках, являющихся полюсами.

3.5.6. Графические построения

Зная простые полюсы, легко графически построить непрерывную дугу (рис. 5.5).

$P_{000} = A$	$P_{00t} = L = pA+qB$	$P_{0tt} = I = pL+qM$	$P_{ttt} = P = pI+qJ$
$P_{001} = B$	$P_{0t1} = H = pB+qC$	$P_{tt1} = J = pH+qN$	
$P_{011} = C$	$P_{t11} = N = pC+qD$		
$P_{111} = D$			

Рис. 5.5. Полюсы кривой и построение текущей точки.

В таблице на рис. 5.6 показана схема включения полюсов для этого случая, где $q = (t - t_0)/(t_1 - t_0)$, $p = (t_1 - t)/(t_1 - t_0)$.

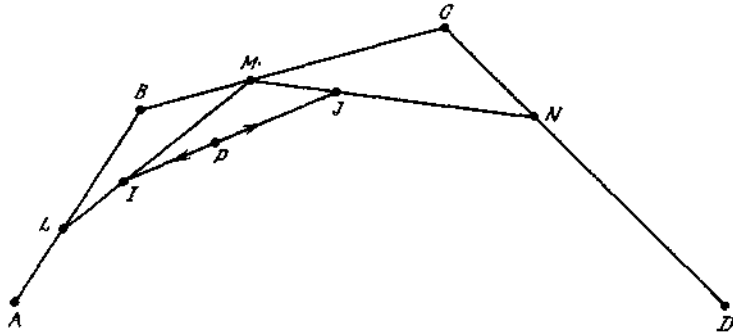


Рис. 5.6. Схема включения полюсов для рис. 5.5.

Отсюда следует

$$P_{in} = p^3 A + 3p^2 q B + 3pq^2 C + q^3 D.$$

Коэффициенты при полюсах соответствуют коэффициентам разложения $(p + q)^n$. Таблица разностей на рис. 5.7 дает алгебраические коэффициенты разложения относительно точки *A* (аналогично вычисляются коэффициенты разложения относительно точки *D*):

$$P = A + 3(B - A)t + 3(C - 2B + A)t^2 + (D - 3C + 3B - A)t^3.$$

A			
B	B-A		
C	C-B	C-2B+A	
D	D-C	D-2C+B	D-3C+3B-A

Рис. 5.7. Таблица разностей для разложения относительно точки *A*.

Точки *A, L, I, P* являются подполюсами дуги *AP*, а точки *P, J, N, D* - подполюсами дуги *PD*. Увеличение степени параметрического уравнения осуществляется путем умножения уравнения на $1 = p + q$:

$$P = p^4 a + 4p^3 qb + 6p^2 q^2 c + 4p q^3 d + q^4 e,$$

где

$$a = A, 4b = A + 3B, 6c = 3B + 3C, 4d = 3C + D, e = D.$$

Для выполнения обратной операции необходимо потребовать выполнения равенства $a - 4b + 6c - 4d + e = 0$.

3.5.7. Представление поверхностей с помощью полюсов

3.5.7.1. Треугольные элементы и зависимые переменные

В этом представлении используются барицентрические координаты точки поверхности

$$M = pA + qB + rC, \quad p + q + r = 1.$$

При этом параметрическое уравнение для точки поверхности имеет вид

$$P = \sum \frac{n!}{i!j!k!} p^i q^j r^k W_{ijk}, \quad i + j + k = n,$$

где W_{ijk} - полюсы поверхности. Основой барицентрических координат являются треугольники в плоскости параметров p, q, r . Построение подполюсов, приводящее к последовательным изменениям основных треугольников, показано на рис. 5.8.

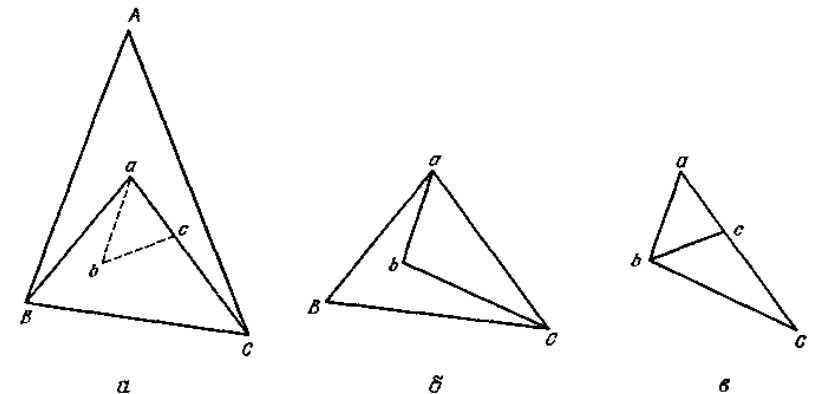


Рис. 5.8. Построение подполюсов в барицентрических координатах. *a*-1-й этап: *abc*; *б*-2-й этап: *abc*; *в*-3-й этап: *abc*.

Увеличение степени достигается умножением на $1 = p + q + r$.

3.5.7.2. Прямоугольные элементы и независимые переменные

Рассмотрим две пары связанных параметров: p, q ($p + q = 1$) и P, Q ($P + Q = 1$), которые определяют разбиение плоскости параметров на клетки. Координаты точки поверхности при этом задаются уравнениями

$$P = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} \left(\sum_{I=0}^{I=N} \frac{N!}{I!(N-I)!} P^I Q^{N-I} W_{iI} \right),$$

$$Q = \sum_{I=0}^{I=N} \frac{N!}{I!(N-I)!} P^I Q^{N-I} \left(\sum_{i=0}^{i=n} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} W_{iI} \right).$$

Такие операции, как построение подполлюсов или увеличение степени, задаются отдельно по двум группам параметров.

Треугольный элемент ни в коем случае не может рассматриваться как полюсная клетка с совмещенными вершинами, это в корне неверно!

Применение полюсов к поверхностям аналогично их применению к кривым. Также существует полная симметрия параметров и отсутствие среди них упорядоченности. В применении к поверхностям по тем же правилам можно ввести обобщенные и прогрессивные полюсы для каждой группы параметров вследствие независимости групп.

Обозначение полюса в этом случае должно содержать индексы двух групп параметров: (t_1, t_2, \dots, t_n) и (u_1, u_2, \dots, u_p) , например

$$P_i(22334)_u(456).$$

Выбор степени и другие операции с параметрами производятся независимо. Однако затем надо сгруппировать все возможные значения t_n со значениями u_p . Если такая таблица окажется неполной, необходимо ее либо дополнить, либо смириться с потерей клетки, в которой недостает одного или нескольких полюсов.

3.5.8. Пример применения теории полюсов

Для того чтобы продемонстрировать гибкость концепции полюсов, решим небольшую задачу, заимствованную из механики. Параметром t в данном случае будет время. Для приведенной ниже дуги AD (с помощью простых полюсов записываем сначала траекторию движения точки, а затем выводим и другие характеристики движения) (рис. 5.9)

$$P = p^3 A + 3p^2 q B + 3pq^2 C + q^3 D \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

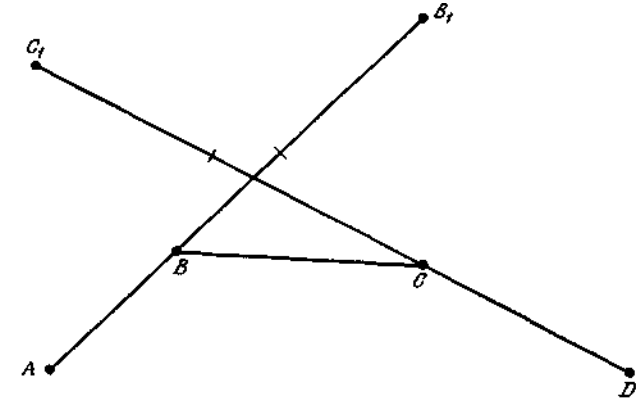


Рис. 5.9. Пример на движение точки.

Скорость движения

$$V = \frac{dP}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial P}{\partial q} \frac{dq}{dt} \right),$$

$$V = \frac{3}{t_1 - t_0} (p^2 AB + 2pqBC + q^2 CD),$$

$$V_A = \frac{3AB}{t_1 - t_0}, \quad B_1 = A + V_A(t_1 - t_0) = A + 3AB,$$

$$V_D = \frac{3CD}{t_1 - t_0}, \quad C_1 = D - 3CD.$$

Рис. 5.9 поясняет, что если бы тело в момент времени t_0 начало двигаться из точки A прямолинейно и равномерно, оно достигло бы точки B_1 в момент времени t_1 . Также, если в момент времени t_1 тело прибывает в точку D , то при условии равномерного и прямолинейного движения оно начало бы движение из точки C_1 в момент времени t_0 . Таким образом, полюсная кривая дает криволинейную аппроксимацию траектории, если даны оба конца дуги и скорости.

Для ускорения имеем

$$\Gamma = \frac{dV}{dt} = \frac{6}{(t_1 - t_0)^2} [(C - 2B + A)p + (D - 2C + B)q].$$

В начальной точке A

$$\Gamma_A = \frac{6}{(t_1 - t_0)^2} (C - 2B + A)$$

и в конечной точке D

$$\Gamma_D = \frac{6}{(t_1 - t_0)^2} (D - 2C + B).$$

Кажущееся ускорение, которое заставляет «падать» движущуюся точку из точки B_1 в точку D , записывается в виде

$$\frac{2B_1 D}{(t_1 - t_0)^2} = \frac{2}{(t_1 - t_0)^2} (D - 3B + 2A) = \frac{1}{3} (2\Gamma_A + \Gamma_D).$$

В этом уравнении отсутствуют значения величины ускорения в промежуточных точках.

Если известна сила i , следовательно, Γ_A и Γ_D , а также начальная точка A и начальная скорость (т. е. точка B_1), то точка D является единственной неизвестной (которая присутствует также в Γ_D). Решение последнего уравнения дает конечную точку D , затем, используя $\frac{1}{3}(\Gamma_A + \Gamma_D)$, определяют C и конечную скорость.

Положение точки определяется независимо от скорости. Для уменьшения ошибки метода можно использовать уравнение более высокой степени. Преимущество полюсов по сравнению с разложением в ряд заключается в возможности произвольного задания порядка непрерывности в точках сшивки.

3.6. Полярная форма интерполяционных полиномов Лагранжа

3.6.1. Увеличение степени интерполяционного полинома

Напомним формулу интерполяционного полинома Лагранжа степени n , принимающего значения y_i в точках x_i (i -целое число, изменяющееся в пределах от 0 до n):

$$L_{01 \dots n}(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} y_i.$$

Легко видеть, что этот полином действительно является интерполяционным, так как в точке x_i все члены, содержащие $(x - x_i)$, равны нулю, а коэффициент при y_i равен 1.

Если известны полиномы Лагранжа $L_{01 \dots n}(x)$ и $L_{12 \dots (n+1)}(x)$, то из них легко получить полином более высокой степени $L_{012 \dots (n+1)}(x)$. Действительно, во всех трех случаях коэффициент при y_i содержит общую часть, кроме которой остаются соответственно члены

$$\frac{x - x_0}{x_i - x_0}, \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}}, \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}}.$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$\frac{(x_{n+1} - x)(x - x_0)}{x_{n+1} - x_0} \left[\frac{1}{x_i - x_0} + \frac{1}{x_{n+1} - x_i} \right] = \frac{(x_{n+1} - x)(x - x_0)}{(x_{n+1} - x)(x_i - x_0)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

из которого следует

$$L_{01 \dots (n+1)}(x) = \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_0} L_{01 \dots n}(x) + \frac{x - x_0}{x_{n+1} - x_0} L_{12 \dots (n+1)}(x).$$

Полученное соотношение внешне похоже на формулу включения индекса (формула (7)), но относится к полиномам, зависящим от x . Из него можно вывести рекуррентную формулу для интерполяционных полиномов Лагранжа, а также формулу для вычисления коэффициента интерполяционной формулы более высокого порядка

$$a_{n+1} = \frac{a_n(12 \dots (n+1)) - a_n(01 \dots n)}{x_{n+1} - x_0}.$$

Это не что иное, как разделенная разность порядка $n + 1$. Начальными значениями для подстановки в рекуррентную формулу являются полиномы нулевой степени $L_0 = y_0$ и $L_1 = y_1$.

3.6.2. Другие формы представления интерполяционных полиномов Лагранжа

Интерполяционная формула Лагранжа может быть записана также с помощью определителя

$$\begin{vmatrix} y & y_0 & - & y_1 & y_n \\ 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ x & x_0 & - & x_1 & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & k & - & k & k \\ x & x_0 & - & x_1 & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & - & n & n \\ x & x_0 & - & x_1 & x_n \end{vmatrix} = 0.$$

Легко убедиться, что при подстановке $x = x_i$ и $y = y_i$ определитель действительно равен нулю, так как содержит два одинаковых столбца.

Разложение определителя по первой строке позволяет получить коэффициенты при y_i (коэффициент при y также отличен от 1). Путем последовательного вычитания столбцов, начиная с последнего, определитель приводится к виду

$$\begin{vmatrix} y & y_0 & \Delta_1 & \Delta_k & \dots & \Delta_n \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^k & x_0^k & E_{k1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & x_0^n & E_{n1} & E_{nk} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь Δ_k - разделенные разности k -го порядка, которые образуют первую строку. В свою очередь этот определитель можно привести к виду

$$\begin{vmatrix} y & y_0 & \delta_1 & \delta_n (= \Delta_n) \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & x_0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^k & x_0^k & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^n & x_0^n & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(где $\delta_{k-1} = \Delta_{k-1} - x_{k-1}^k \Delta_k$), из которого с очевидностью следует формула для интерполяции с помощью разностей δ_k в окрестности точки y_0
 $y = y_0 + \delta_1 x + \dots + \delta_k x^k + \dots + \delta_n x^n.$

Подобный метод двухэтапного преобразования определителя к простому виду можно также применить для вывода интерполяционной формулы с использованием полюсов. В первом столбце при этом будут находиться $\frac{P_{t_1, \dots, t_n}}{n}$ и элементы $C_n^k t^k$, в следующих столбцах-обобщенные полюсы и соответствующие симметрические полиномы.

3.6.3. Степень восстановления

Рассмотрим пример вычислений по приведенным выше формулам. Пусть даны $r + 1$ различных точек алгебраической кривой, по которым можно построить интерполяционный полином степени r (определяющий эту кривую). Параметр r называется степенью восстановления полинома. Соответствующую степень восстановления можно получить с помощью полюсов, используя интерполяцию Лагранжа.

Для нахождения прогрессивных полюсов решают следующее уравнение:

$$D_{t_1 t_2} = \begin{vmatrix} P_{t_1 t_1} & P_{000} & P_{111} & P_{222} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3t & 3t_0 & 3t_1 & 3t_2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3t & 3t_0 & 3t_1 & 3t_2 \end{vmatrix} = 0,$$

полярная форма которого имеет вид

$$D_{012} = \begin{vmatrix} P_{012} & P_{000} & P_{111} & P_{222} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_0+t_1+t_2 & 3t_0 & 3t_1 & 3t_2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ t_0 t_1 + t_1 t_2 + t_2 t_0 & 3t_0 & 3t_1 & 3t_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Видно, что ожидаемая степень восстановления равна 2. Решением этого уравнения является выражение

$$3P_{012} = -\frac{(t_2 - t_1)^2}{(t_2 - t_0)(t_1 - t_0)} P_{000} + \frac{(t_2 - t_0)^2}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_1)} P_{111} - \frac{(t_1 - t_0)^2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} P_{222}.$$

Рассмотрим определитель Вандермонда

$$D_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t & t_0 & t_1 & t_2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ t & t_0 & t_1 & t_2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ t & t_0 & t_1 & t_2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (t_2-t_1)(t_2-t_0)(t_1-t_0) \\ [(t_2-t)(t_1-t)(t_0-t)] \end{matrix}$$

Выражение в квадратных скобках можно представить в виде $[S_3 - S_2 t + S_1 t^2 - t^3]$.

Умножим строки определителя на соответствующие коэффициенты C_n^k , а первый столбец заменим симметрическими полиномами $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ переменных u_0, u_1, u_2

$$D_{t,u} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ u_0+u_1+u_2 & 3t_0 & 3t_1 & 3t_2 \\ u_0u_1+u_1u_2+u_2u_0 & 2t_0 & 2t_1 & 2t_2 \\ u_0u_1u_2 & t_0 & t_1 & t_2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 3(t_2-t_1)(t_2-t_0)(t_1-t_0) \times \\ \times \{3S_3 - S_2 \Sigma_1 + S_1 \Sigma_2 - 3 \Sigma_3\} . \end{matrix}$$

(Тем самым вводятся различные обозначения для точек интерполяции t_0, t_1, t_2 и для параметров полярной формы u_0, u_1, u_2 , которые в принципе могут не совпадать.)

Выражение в квадратных скобках равно нулю в том случае, если $u_0 = t_0, u_1 = t_1, u_2 = t_2$, следовательно, последняя строка определителя при этих значениях переменных является линейной комбинацией трех других и может быть добавлена к определителю D_{012} для получения ранга матрицы, равного 3. Таким образом, можно увеличить до 3 степень восстановления кривой.

3.6.4. Связь полюсов с нечетными B-сплайнами

Также можно определить и полюсы более высоких степеней:

$$105P_{0123456} = \sum_{j=0}^{j=6} \frac{120s_6 - 20s_5s_1 + 8s_4s_2 - 3s_3^2}{\prod_{i \neq j} (t_i - t_j)} P_{j \dots j}^7,$$

$$10P_{01234} = \sum_{j=0}^{j=4} \frac{12s_4 - 3s_3s_1 + s_2^2}{\prod_{i \neq j} (t_i - t_j)} P_{j \dots j}^5,$$

$$252P_{012345678} = \sum_{j=0}^{j=8} \frac{250s_8 - 35s_7s_1 + 10s_6s_2 - 5s_5s_3 + 2s_4^2}{\prod_{i \neq j} (t_i - t_j)} P_{j \dots j}^9.$$

Для этого достаточно по известной формуле (2) перейти к симметрическим полиномам более высокого порядка и подставить их в первый столбец определителя, а для всех нечетных степеней увеличение степени на единицу можно осуществить указанным выше способом.

Дает ли какие-либо преимущества выбор различных значений для t_i и u_i ? Покажем, что для четных n преимущества отсутствуют. Начиная с $n = 2$, имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_0 + u_1 & 2t_0 & 2t_1 \\ u_0 u_1 & t_0^2 & t_1^2 \end{vmatrix} = (t_1 - t_0)[2t_0 t_1 - (u_0 + u_1)(t_0 + t_1) + 2u_0 u_1].$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю, если величины $u_0 u_1$ и $t_0 t_1$ находятся в гармоническом отношении. Если u_0 находится посередине между t_0 и t_1 , необходимо, чтобы u_1 находилось на бесконечности. В общем случае задача нахождения двух последовательностей $t_0 t_1 \dots t_n$ и $u_0 u_1 \dots u_n$, обращающих в нуль выражение в квадратных скобках, представляется весьма трудоемкой. Другими словами, выбор значений u_i отличных от t_i приводит лишь к усложнению задачи и не влияет на порядок непрерывности и качество восстановления. Для четного и при $u_i = t_i$ выражение в квадратных скобках никогда не равно нулю.

3.7. Характеристики восстановленных кривых

3.7.1. Полярная форма интерполяционной формулы Лагранжа

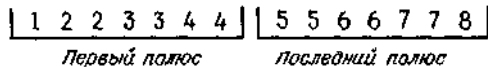
Эрмит обобщил интерполяционную формулу Лагранжа на случай заданных производных в последовательных точках. Покажем, как можно получить аналогичный результат с использованием полюсов.

На точки x_i кривой и параметры полярной формы t_k не налагается никаких ограничений, необходимо лишь правильно записать соответствующие выражения. Использование полюсов существенно упрощает вычисления, но при этом требуется правильный выбор параметров. Если взять t_k отличными от x_i , возникают дополнительные трудности, если же все t_k равны друг другу, вычисления становятся более простыми и эффективными, однако зависящими от выбранной степени.

Будем характеризовать интерполяцию тройкой чисел n, c, r , где n число индексов и максимальная степень параметра, c - порядок непрерывности, связанный с числом повторений индекса, и r - степень восстановления, равная максимальной степени интерполяционного полинома Лагранжа

Отметим, что для каждой дуги, ограниченной двумя точками, следует взять определенное число точек справа и слева, сохраняя симметрию и выбирая общее число точек четным. (См. приведенный ниже пример для дуги $t_4 t_5$, где справа и слева от дуги взято по 7 точек.) При последовательной интерполяции по формуле Лагранжа нужно от точек $0, 1, 2, \dots, r$ перейти к $1, 2, \dots, (r+1)$ сохраняя неизменными число точек интерполяции $r+1$ и степень восстановления r . Можно также проводить интерполяцию попеременно по $r+1$ и $r+2$ точкам. Полюсы кривой вычисляются из каждого интерполяционного полинома и обеспечивают конечную степень восстановления r . Существует много вариантов возможных решений.

Рассмотрим наглядный пример: $n = 7, c = 5$ (число повторений индекса $p = 2$), $r = 6$ Возьмем 8 полюсов, определяющих дугу $t_4 t_5$ в следующей последовательности:



Интерполяционные полиномы Лагранжа проводятся по 7 точкам $(r + 1)$ и каждый из них будет служить базой для вычисления полюсов (рис. 7.1). (L определяется по формуле, аналогичной $D_{012} = 0$ из разд. 3.6.3. Чтобы получить значение полюса, на место параметров t_i подставляются значения параметров, указанных в индексах полюса.)

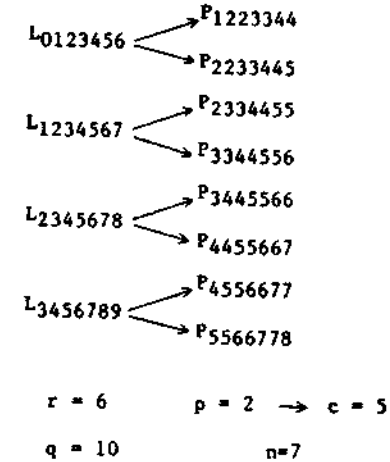


Рис. 7.1. Получение полюсов из интерполяционных полиномов Лагранжа.

Таким образом, имеются $m = n + 1$ полюсов для определения дуги, а общее число точек кривой q определяется по формуле

$$q = r + \frac{m}{p},$$

поскольку каждый интерполяционный полином дает p полюсов, т. е. в данном случае для определения дуги требуется 10 точек. Надо учесть также увеличение на единицу степени восстановления для четного m (нечетного n). Подобная схема вычислений справедлива для любых значений параметров, если m делится на p и m, q - четные.

3.7.2. Вычисление обобщенных полюсов дуги

Нам уже известно, как получить полярную форму от параметров t_1, t_2, \dots, t_n , используя интерполяционные полиномы $L_{0123456}$ и т.д. Для определения обобщенных полюсов на точках t_0, \dots, t_9 удобно воспользоваться матричным уравнением

$$P = G \cdot M,$$

где P -вектор-столбец искомых полюсов, M -вектор-столбец исходных данных:

$$M = \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_9 \end{pmatrix},$$

а матрица G для равномерно расположенных параметров имеет вид

$$G = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} 103 & -816 & 2541 & 17248 & -4935 & 1104 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 1104 & -4935 & 17248 & 2541 & -816 & 103 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 103 & -816 & 2541 & 17248 & -4935 & 1104 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 1104 & -4935 & 17248 & 2541 & -816 & 103 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 103 & -816 & 2541 & 17248 & -4935 & 1104 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 1104 & -4935 & 17248 & 2541 & -816 & 103 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 103 & -816 & 2541 & 17248 & -4935 & 1104 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 1104 & -4935 & 17248 & 2541 & -816 & 103 \end{bmatrix},$$

где $z = 15120$. Для более удобного вычисления матрицы G , элементы которой являются коэффициентами при y_i в выражении для интерполяционного полинома Лагранжа, следует разместить точки симметрично относительно нуля:

$$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

Тогда числители можно представить в виде выражения

$$t(t^2 - 1)(t^2 - 4)(t^2 - 9) = t^7 - 14t^5 + 49t^3 - 36t,$$

деленного на соответствующий член

$$(t - t_i), \text{ т. е. } t + 3, t + 2, t + 1, t, t - 1, t - 2, t - 3.$$

Затем находят симметрические полиномы от значения параметра $-2, -1, -1, 0, 0, 1, 1$ и $-1, -1, 0, 0, 1, 1, 2$. Для первого ряда значений исходное уравнение имеет вид

$$(x^2 - 1)^2 x^2 (x + 2) = x^7 + 2x^6 - 2x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2,$$

для второго ряда меняются знаки всех t_i , а следовательно, и s_i при нечетном i . В результате имеем

$$s_1 = -2, s_2 = -2, s_3 = 4, s_4 = 1, s_5 = -2, s_6 = 0, s_7 = 0$$

и выражение

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 \quad (h = 0)$$

вписывается в полярной форме

$$a + b \frac{s_1}{7} + c \frac{s_2}{21} + d \frac{s_3}{35} + e \frac{s_4}{35} + f \frac{s_5}{21} + g \frac{s_6}{7},$$

или

$$\frac{1}{105}(105a - 30b - 10c + 12d + 3e - 10f).$$

Окончательно получаем

$$P_{-2-1-10011} = \frac{1}{z}(103P_{-3} - 816P_{-2} + 2541P_{-1} + 17248P_0 - 4935P_1 + 1104P_2 - 125P_3)$$

после сокращения на 5 знаменателя 720×105 .

Таким образом, после довольно простых вычислений определена матрица G , обеспечивающая степень восстановления $r = 6$. Для произвольных значений параметров нетрудно получить соответствующие алгебраические выражения.

3.7.3. Определение простых полюсов дуги

Определим теперь простые полюсы той же дуги. Для этого нужно осуществить ввод индекса по пять раз на каждом конце дуги. Каждое включение описывается матрицей очень простого вида, строки которой являются коэффициентами, определенными по формуле (7), и на равномерно расположенных значениях параметра дают знаменатели небольшой величины. Включение всех пяти индексов описывается матрицей, элементы которой представляют собой произведения соответствующих коэффициентов ввода каждого индекса:

$$\begin{bmatrix} P_{4444444} \\ P_{4444445} \\ P_{4444455} \\ P_{4444555} \\ P_{4445555} \\ P_{4455555} \\ P_{4555555} \\ P_{5555555} \end{bmatrix} = \frac{1}{432} \begin{bmatrix} 3 & 37 & 176 & 176 & 37 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 144 & 208 & 62 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96 & 224 & 100 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 208 & 152 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 152 & 208 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 100 & 224 & 96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 62 & 208 & 144 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 37 & 176 & 176 & 37 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{1223344} \\ P_{2233445} \\ P_{2334455} \\ P_{3344556} \\ P_{3445566} \\ P_{4455667} \\ P_{4556677} \\ P_{5566778} \end{bmatrix},$$

или $S = K \cdot P$.

Такой способ вычисления более предпочтителен, чем прямые вычисления с помощью симметрических полиномов.

полюсы. Свойства полюсов позволяют сразу же получить связанные с ними полиномы (для этого следует умножить соответствующие разности Δ_k на C_7^k)

$$S_0 = \frac{1}{432}(3x^7),$$

$$S_1 = \frac{1}{432}(3 + 21x + 63x^2 + 105x^3 + 105x^4 + 63x^5 - 315x^6 + 131x^7),$$

$$S_2 = \frac{1}{432}(176 + 224x - 336x^2 - 560x^3 + 280x^4 + 924x^5 - 910x^6 + 239x^7),$$

$$S_3 = \frac{1}{432}(37 - 175x + 273x^2 - 35x^3 - 385x^4 + 483x^5 - 245x^6 + 47x^7).$$

Та же зависимость, но вычисленная в обратном порядке, дает 4 последовательные дуги

$$S'_0 = \frac{1}{432}(84x^6 + 47x^7),$$

$$S'_1 = \frac{1}{432}(37 - 175x + 273x^2 - 35x^3 - 385x^4 + 483x^5 + 763x^6 + 239x^7),$$

$$S'_2 = \frac{1}{432}(176 + 224x - 336x^2 - 560x^3 + 280x^4 + 924x^5 + 602x^6 + 131x^7),$$

$$S'_3 = \frac{1}{432}(3 + 21x + 63x^2 + 105x^3 + 105x^4 + 63x^5 + 21x^6 + 3x^7).$$

Эти полиномы однако не представляют практического интереса. Таблица разностей полюсов является намного более полезной. Из нее видно, что расчет, выполненный даже для седьмой степени (для случая, намного более трудного ($p = 2$)), занимает всего несколько строк, хотя вывод подобных полиномов меньших степеней традиционными методами занимает десятки страниц.

3.7.4. Вычисления простых полюсов дуги

Из предыдущего следует, что матрицу S можно определить выражением

$$S = H \cdot M,$$

где $H = K \cdot G$. После необходимых преобразований получаем

$$H = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} 079 & 8632 & -30212 & 60424 & 1557430 & 60424 & -30212 & 8632 & -1079 & 0 \\ 375 & 520 & 14636 & -124392 & 1557430 & 245240 & -75060 & 16744 & -1783 & 0 \\ 0 & -4528 & 44440 & -232464 & 1428560 & 506800 & -134952 & 27920 & -2816 & 0 \\ 0 & -5264 & 50780 & -250512 & 1170820 & 831824 & -201468 & 40912 & -4132 & 0 \\ 0 & -4132 & 40912 & -201468 & 831824 & 1170820 & -250512 & 50780 & -5264 & 0 \\ 0 & -2816 & 27920 & -134952 & 506800 & 1428560 & -232464 & 44440 & -4528 & 0 \\ 0 & -1783 & 16744 & -75060 & 245240 & 1557430 & -124392 & 14636 & 520 & -375 \\ 0 & -1079 & 8632 & -30212 & 60424 & 1557430 & 60424 & -30212 & 8632 & -1079 \end{bmatrix},$$

где $z = 1632960$.

Сглаживание. Рассмотрим первую и последнюю строки матрицы, связывающие исходные значения с соответствующими полюсами. Нетрудно видеть, что значение полюса не совпадает с исходными данными и определяется строкой матрицы

$$+ \frac{1079}{z} [-1, +8, -28, +56, -70, +56, -28, +8, -1].$$

Это означает, что имеет место очень плавное сглаживание. При этом не используется понятие минимума, т.е. сглаживание носит чисто алгебраический характер, что присуще только для метода полюсов. Сглаживание с помощью метода наименьших квадратов и Δ_8 дало бы $\Delta_8/2^8 = \Delta_8/256$, таким образом, оно в 6 раз слабее, чем сглаживание с помощью полюсов. Этот эффект вполне объясним, так как сглаживание с использованием минимума осуществляется однократно из условия оптимума некоторого выражения, в то время как алгебраическое сглаживание осуществляется небольшими шагами, которые могут быть повторены много раз.

3.8. Интерполяция со сглаживанием

3.8.1. Проверка степени восстановления

Рассмотрим функцию x^k и для последовательности точек $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ определим ее полюсы с помощью матрицы H для случая $K = 4$. Для дуги $0,1$ (наиболее простой случай) все разности равны нулю, кроме $\Delta_4 = 1$. Таблица разностей (рис 8.1) заполняется, как обычно и для данного случая представляет собой наклонно расположенный арифметический треугольник.

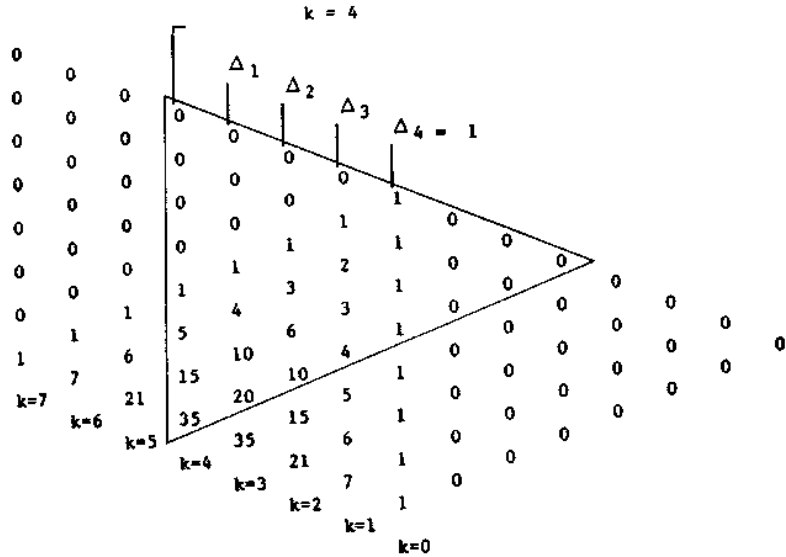


Рис. 8.1. Таблица разностей для K = 4.

Треугольником выделена таблица разностей для дуги 0,1 зависимости x_4 .

Напомним, что в общем случае для зависимости x^k при $0 \leq x \leq 1$ значения полюсов равны

$$C_0^k, C_1^k, C_2^k, \dots, C_n^k$$

(с учетом соглашения, что $C_p^p = 0$ для $p > n$). Поэтому все элементы таблицы следует разделить на C_n^k .

Для проверки степени восстановления достаточно умножить матрицу H (см. разд. 3.7.4) на матрицу X , составленную из вектор-столбцов таблицы разностей для x^k :

$$HX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2260/2835 \\ 2/7 & 1/21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4520/2835 \\ 3/7 & 3/21 & 1/35 & 0 & 0 & 0 & 3616/2835 \\ 4/7 & 6/21 & 4/35 & 1/35 & 0 & 0 & -3616/2835 \\ 5/7 & 10/21 & 10/35 & 5/35 & 1/21 & 0 & -4520/2835 \\ 6/7 & 15/21 & 20/35 & 15/35 & 6/21 & 1/7 & -2260/2835 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

k = 0 1 2 3 4 5 6 || 7
 <---- условия восстановления выполнены ----> || не выполнены

Результаты подтверждают, что $r = 6$. Они получены с помощью умножения матриц, наибольшая из которых имеет 10 столбцов (q) и 8 строк ($m = n + 1$). Для проверки степени восстановления потребовалось всего лишь $m(r + 1) = 56$ элементов. Прямая же алгебраическая проверка потребовала бы решения 56 уравнений с $m \cdot q = 80$ неизвестными.

3.8.2. Проверка непрерывности и отклик на единичный импульс

Для проверки непрерывности достаточно построить таблицу разностей полюсов на следующих точках интерполяции:

$$0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0.$$

m раз m раз

На рис. 8.2а показан, а на рис. 8.2б приведена таблица разностей полюсов.

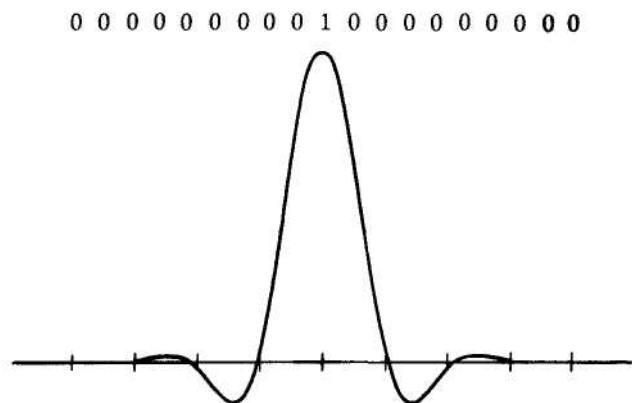


Рис. 8.2а. Единичный импульс: график функции

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-375	-704	-329	46	421	796	1171	1546												
-1079	-704																		
-1703	-1033	-329	46	421	796	1171	1546												
-2016	-1316	-203	467	1217	796														
-4132	-1132	104	1684	1217	-457	-1253	-2742												
-5264	736	1868	2444	760	-4452	-3995													
-4528	5048	4312	-3692																
528	8112	3064	-1248																
8632	8112																		
16744	3064	-1248																	
27920	11176	1816	-3692	-4452															
40912	12992	-3124	-4940	-8144	10424	-22740													
50700	9868	-16200	-13004	13972	-4124														
44440	-6340	-17256	-17256	5828	9848														
14636	-24004	-15044	8420	15676															
-30212	-44048																		
-75060	-15044	-15044	8420	15676	9848	-62060	104740												
-134952	-59092	-6624	24096	25524	-52212	42680													
-201468	-66516	17412	49620	49620	-26488	42680													
-250512	-49044	67092	22932	-26488	-9524														
-232464	18048	90024	-13280	-36212															
-124392	108072	76744																	
60424	184816																		
245240	184816	76744																	
506800	261560	-13280	-36212																
831824	325024	63404	-49492	-9524	102074	-196224													
1170820	338996	13972	-95228	-45136	93350														
1420560	257740	-81256	-47614	47614	0														
1557430	128870	-128870	-47614	47614															
1557430	0	-128870	0																

Рис. 8.2б. Единичный импульс: таблица разностей

1557430									
1557430	0								
1428560	-120870	-120870	0						
1170820	-253740	-120870	47614	47614					
831820	-338996	-81256	95228	47614					
506800	-325824	13972	49492	-45736	-93350				
245240	-261560	63964	13280	-36212	9524	182074			
60424	-184816	76744							
-124392	-184816	76744							
-232464	-10000	90824	13280	-36212					
-250512	49044	67892	-22932	-26688	9524	42688			
-201468	66516	13472	-49620	-25524	52212	-62860			
-134952	59892	-6624	-24896	15676	-984				
-75060	44848	-15044	-8420						
-30212	44898								
14636	29804	-15044	-8420						
44440	6390	-23464	15676						
50780	-9068	-16288	7256	5828	-984				
40912	-12992	-3124	13084	-8144	-13972	-4124			
27920	-11176	1816	4940	-3692	4452	18424			22580
16744	-8112	3064	4248						
8632	-8112								
520	-5048	3064	1248	-3692					
-4528	-736	4312	-2444	768	4452				
-5264	1132	1868	-1684	1217	457	-3995			
-4132	1316	184	-467	421	-796	-1253			2792
-2816	1033	-283	-46						
-1783	704	-329							
-1079	784								
-375	375	-329	-46						
0	0	-375	421	-796					
0	0	0	375	-375					
0	0	0	0	375	1173				-1586
0	0	0	0	0	-375				
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0					

Рис. 8.26. Продолжение.

3.8.3. Число удовлетворенных условий непрерывности

Рассмотрим сначала нулевой порядок непрерывности, которому соответствует равенство первой и последней строк матрицы в точке перехода. Это равенство должно соблюдаться до разностей порядка

$c = n - p$ (в данном случае 6). Всего имеется q (в данном случае 10) ненулевых дуг, следовательно, 11 точек сшивки и $(c + 1)(q + 1) = 6 \times 11 = 66$ удовлетворенных условий непрерывности.

Зададимся вопросом, а почему бы вместо матрицы полюсов не использовать матрицу алгебраических коэффициентов или разностей? Оказывается, что только простые полюсы обладают полной симметрией вычислений между точками 0 и 1 и, следовательно, условия непрерывности удовлетворяются гораздо быстрее. В рассмотренном выше примере имеются $56 + 66 = 122$ алгебраических условия для 80 коэффициентов матрицы. Такое число условий позволяет получить оптимальную матрицу.

В общем случае матрица содержит $m \cdot q$ элементов и можно найти несколько матриц, обеспечивающих различные степени восстановления вплоть до максимальной величины r . Для различных значений c все матрицы имеют одинаковое число элементов $m \cdot q$, но оптимальной является матрица, учитывающая максимальное число условий. Существуют и другие матрицы, дающие приближенные решения. Однако только алгебраические методы позволяют получить наилучшие оптимальные решения.

Полное число удовлетворенных условий равно $(c + 1)(q + 1)$ условий непрерывности плюс $m(r + 1)$ условий восстановления. С учетом того, что $c = n - p$, $c + 1 = m - p$, $r = q - \frac{m}{p} + 1$ (единица добавляется для четного m и $p = 1$), окончательно получаем

$$(m - p)(q + 1) + m \left(q - \frac{m}{p} + b \right) = 2m(q + 1) - p(q + 1) - \frac{m^2}{p} - (b - 1)m,$$

где $b = 2$, если m четно и $p=1$, $b=1$ в остальных случаях. Вычитаемый член $p(q + 1) + \frac{m^2}{p}(b = 1)$ минимален, если $p = m / \sqrt{q + 1}$, и является величиной заметной, хотя и меньшей, чем $V_m(q \geq m)$.

3.8.4. Сравнение со сплайнами

Если для решений примера, приведенного выше, применить сплайны, то легко видеть, что при $p = 1$ степень восстановления равна $r = 3$. При этом, несмотря на упрощения, необходимо было бы учесть 109 условий: 77 условий непрерывности и 32 условия восстановления.

Для более высоких степеней это различие возрастает даже по относительной величине. Например, для случая $n = 19, m = 20, q = 24, p = 4, c = 15, r = 19$ имеется $400 + 400 = 800$ условий, а для $n = 19, m = 20, q = 24, p = 1, c = 18, r = 5$ нужно учесть $475 + 120 = 595$ условий. Более того, для построения сплайнов иногда используются не лучшие с алгебраической точки зрения результаты анализа. Даже *B*-сплайны, обладающие наилучшими свойствами, не дают оптимального решения, исследование которого представляет определенный интерес. При аппроксимации единичного импульса в случае $m \rightarrow \infty$, возможно, получилась бы новая функция, гораздо быстрее затухающая, чем $(\sin x)/x$ Валле-Пуссена и больше похожая на $e^{-x^2}(\sin x)/x$.

3.8.5. Примеры различных функциональных зависимостей

3.8.5.1. Единичная ступенька и пилообразная зависимость

При аппроксимации этих функций методом полюсов, как и в других методах, присутствует явление Гиббса, но колебания затухают гораздо быстрее. Для единичной ступеньки (рис. 8.3) последовательность индексов имеет вид (рис. 8.4)

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_q, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_q$$

а для пилообразной зависимости (рис. 8.5) последовательность индексов имеет вид (рис. 8.6)

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_q, \underbrace{1, 2, 3, 4, \dots}_q$$

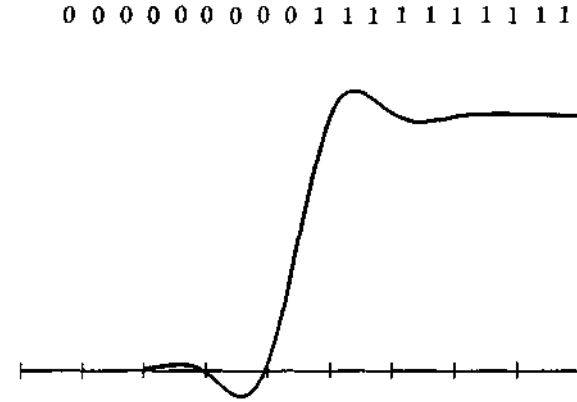


Рис. 8.3. Единичная ступенька. График функции.

0	0	0	0	0	0	-375	1986
0	0	0	0	0	-375	796	
0	0	0	-375	421			
0	-375	-329	46				
-375	-704	-704					
-1079	-704	-329	46	421	796	-1628	-1196
-1783	-1033	-203	467	1217	-832	-2824	
-2816	-1316	104	1684	305	-3656		
-4132	-1132	1868	2869	-3271			
-5264	736	3937	-1202				
-4528	4673	2735					
145	7408						
1553	7408	2735	-1202	-3271	-3656	16796	-23744
14961	10143	1533	-4473	-6927	13140	-6948	
25104	11676	-2940	-11400	6213	6192		
36780	8736	-14740	-5187	12405			
45516	-5604	-19527	7218				
39912	-25133	-12309					
14781	-37440						
-22659	-37440	-12309	7218	12405	6192	-45264	81004
-60099	-49749	-5091	19623	10597	-39072	35740	
-109848	-54840	14532	38220	-20475	-3332		
-164688	-40308	52752	17745	-23007			
-204996	12444	70497	-6062				
-192552	82941	64475					
-109611	147376						
37765							

Рис. 8.4. Единичная ступенька. Таблица разностей.

37765	147376									
185141	211811	64435	-6062	-23807						
396952	270184	58373	-29869	-21139	-3332					
667136	298688	28504	-57008	27139	54278	57610	-115220			
965824	270184	-28504	-29869	27139	-3332	-57610				
1236800	211811	-58373	-6062	23807						
1447819	147376	-64435								
1595195	147376									
1742571	147376	-64435	-6062	-23807						
1825512	82941	-70497	-6062	23807						
1837956	12444	-52752	17745	-3332						
1797646	-40308	-14532	38228	20475	-39072	-35740	11004			
1742808	-54840	-14532	19623	-18597	6192	45264				
1693859	-49749	5091	1218	-12405						
1655619	-37440	12309								
1618179	-37440									
1593840	-25131	19527	7218	-12405	6192					
1587444	-5604	14340	-5187	-6213	13140	6948	-23744			
1596180	8736	2940	-11400	-6213	13140	6948	-23744			
1607856	11676	2940	-4473	6927	-3656	-16796				
1617999	10143	-1533	-1202	3271						
1625407	7400	-2135								
1632815	7400									
1637488	4673	-2735	-1202	3271	-3656					
1638224	736	-3937	2869	-385	2824	-1196				
1638224	-1132	-1868	1604	-385	-832	1628	-1196			
1637092	-1314	-184	467	-1217	796					
1635776	-1033	283	46	-421						
1634743	-704	329								
1634039	-704									
1633335	-375	329	46	-421	796					
1632960	-375	375	-375	375	-1171	1546				
1632960	0	0	-375	375	-375	375				
1632960	0	0	0	0	0					
1632960	0	0	0	0	0					
1632960	0	0	0	0	0					
1632960	0	0	0	0	0					

Рис. 8.4. Продолжение.

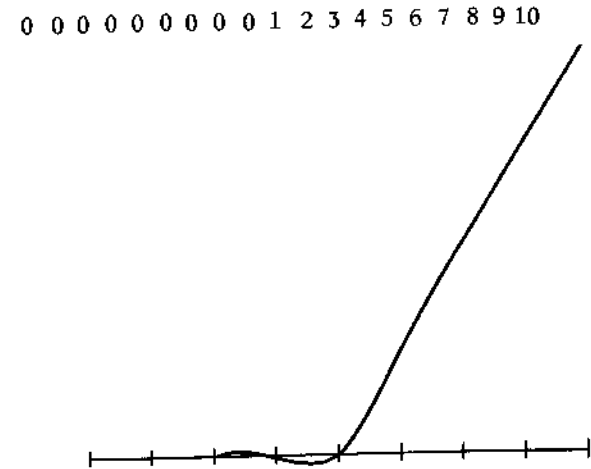


Рис. 8.5. Пилообразная зависимость. График функции

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-375	1546				
0	0	0	0	0	375	796	1171						
0	375	-375	46	421									
-375	-796	329											
-1079	-796												
-1783	-1033	-329	46	421									
-2816	-1316	283	467	1217	796	-2003							
-4132	1132	184	1684	10	-1207	-1653			350				
-5264	736	1868	1694	10	-2860								
-4520	4298	3562	1156										
-230	6704	2406											
6474	6704												
13178	9110	2406	-1156	-2850	-2860								
22280	10360	1250	-4086	-5710	-2860	14793	-23394						
32648	7604	-2756	-9716	-5710	11933	-8680							
40252	-4068	-12432	-3493	6223	3332								
35304	-4068	-15985	-3493	9555									
14551	-20833	-9903	6062										
-16185	-30736												
-46921	-30736	-9903											
87560	-40639	-3041	6062	9555	3332	-30471	57618						
132010	-44480	11776	15617	12887	-27139	27139							
-164744	-32704	40240	28504	-14252									
-157168	7576	54532	14252	-14252									
-95060	62108		0										
21580	116640												

Рис. 8.6. Пилообразная зависимость. Таблица разностей.

21580	116640	54532											
138220	171172		0	-14252									
309392	225704	54532		-14252									
535096	265984	40280	-14252	-14252							27139		
801080	277760	11776	-28504	12887							27139		-57618
1078040	277760		-15617	12887							-30471		
1352759	273919	-3841	-15617	9555							-3332		
1616775	264016	-9903	-6062										
1880791	264016												
2134904	254113	-9903	-6062										
2373052	238148	-15965	3493	9555									
2598728	225676	-12472	6223	6223	-3332						-8601		
2821648	222920	-2756	9716	-5710	-11933						14793		23394
3045818	224170	1250	4006	-5710	2860								
3272394	226576	2406	1156	-2850									
3498970	226576												
3727952	228982	2406	1156	-2850									
3960496	232544	3562	-1694	-2850									
4194908	234412	1868	10	2860									
4429504	234596	1868	-1684	10	2860								
4663817	234313	1868	-1684	10	2860								
4897801	233984	-283	-467	1217	-1207								
5131785	233984	-283	-46	421	-796								
5365440	233655	-375	-46	421	-796								
5598720	233280	0	375	421	1171								
5832000	233280	0	0	-375	375								-1546
6065280	233280	0	0	0	0								
6298560	233280	0	0	0	0								
6531840	233280	0	0	0	0								

Рис. 8.6. Продолжение.

Для случая пилообразной зависимости можно рассмотреть два вида последовательностей: $1^k, 2^k, \dots, q^k$ или C_{k+1}^k , для $1 \leq i \leq q$. В таблице

на рис. 8.1 представлены наименьшие целые арифметические значения k -й степени ($\Delta_k = 1$), являющиеся полюсами x^k для достаточно большой степени, практический интерес к которым невелик.

3.8.5.2. Простая периодическая функция

Приведем пример близкой к синусоидальной периодической зависимости, которая описывается последовательностью полюсов

$$-2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad \dots$$

Результат, полученный для степени восстановления $r = 6$ и порядка непрерывности $c = 5$, очень близок к хорошо сходящимся рядам функций $\sin x$ и $\cos x$. Если взять последовательность полюсов, соответствующую более мелкому разбиению периода синусоиды, например

$$-2 \quad -\sqrt{3} \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad \sqrt{3} \quad 2 \quad \sqrt{3} \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -\sqrt{3},$$

можно получить в 200 раз большую точность. Разность Δ_8 в этом случае в точке 2 будет равна

$$\Delta_8 = 2(97 - 56\sqrt{3}) = \frac{2}{97 + 56\sqrt{3}} \approx \frac{1}{97},$$

а не 2 для предыдущего случая.

На рис. 8.7 показано решение, а на рис. 8.8 - таблица разности для этого случая.

$$-1 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

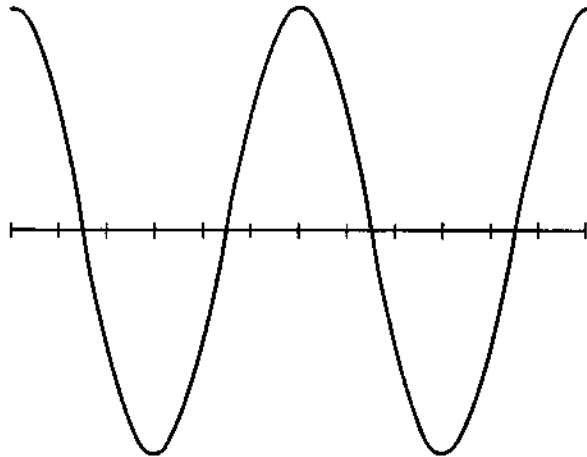


Рис. 8.7. Периодическая зависимость. График функции.

1631881	-422016	-42881	19718	2689	1916	-9626	19252
1209005	-404897	-28163	17907	21512	-1105	-8210	9626
794960	-193060	-10756	17907	21512	-1105	-8210	9626
251900	-503816	10756	17907	21512	-1105	-8210	9626
-251900	-493060	28163	17907	21512	-1105	-8210	9626
-794960	-404897	42881	19718	2689	1916	-9626	19252
-1209005	-422016	42881	19718	2689	1916	-9626	19252
-1631881	-422016	42881	19718	2689	1916	-9626	19252
-2053097	-379135	51599	19718	2689	1916	-9626	19252
-2433032	-321536	60628	12829	-1273	-1105	-5521	9626
-2759540	-251900	80309	10756	-5378	0	9105	9626
-3000976	-171529	85762	5378	-5378	0	0	0
-3178000	85762	85762	0	-5378	0	9105	-9626
-3263762	0	85762	0	-5378	0	9105	-9626
-3263762	85762	85762	-5378	-5378	0	9105	-9626
-3178000	171529	80309	-10756	-5378	0	9105	-9626
-3000976	251900	60628	-12829	-2689	-1916	-5521	9626
-2759540	321536	51599	12829	2689	1916	-5521	9626
-2433032	379135	42881	-19718	-2689	-1916	-5521	9626
-2053097	422016	42881	-19718	-2689	-1916	-5521	9626
-1631881	422016	42881	-19718	-2689	-1916	-5521	9626
-1209005	404897	28163	-17907	2689	-1916	9626	-19252
-794960	193060	10756	-17907	2689	-1916	9626	-19252
-251900	503816	-10756	-17907	2689	-1916	9626	-19252
251900	-193060	-28163	-19718	2689	-1916	9626	-19252
794960	-404897	-42881	-19718	2689	-1916	9626	-19252
1209005	-422016	-42881	-19718	2689	-1916	9626	-19252
1631881	-422016	-42881	-19718	2689	-1916	9626	-19252
2053097	-379135	-51599	-19718	2689	-1916	9626	-19252
2433032	-321536	-60628	-12829	2689	-1916	9626	-19252
2759540	-251900	-80309	-10756	5378	0	9105	-9626
3000976	-171529	-85762	-5378	5378	0	0	0
3178000	85762	-85762	0	5378	0	9105	-9626
3263762	0	-85762	0	5378	0	9105	-9626
3263762	85762	85762	0	5378	0	9105	-9626
3178000	-171529	-80309	10756	1273	-1105	-5521	9626
3000976	-251900	-60628	12829	2689	1916	-5521	9626
2759540	-321536	-51599	19718	2689	1916	-5521	9626
2433032	-379135	-42881	19718	2689	1916	-5521	9626
2053097	-422016	-42881	19718	2689	1916	-5521	9626
1631881	-422016	-42881	19718	2689	1916	-5521	9626
1209005	-404897	-28163	17907	21512	-1105	-8210	9626
794960	-193060	-10756	17907	21512	-1105	-8210	9626
251900	-503816	10756	17907	21512	-1105	-8210	9626
-251900	-493060	28163	17907	21512	-1105	-8210	9626
-794960	-404897	42881	19718	2689	1916	-9626	19252
-1209005	-422016	42881	19718	2689	1916	-9626	19252
-1631881	-422016	42881	19718	2689	1916	-9626	19252

Рис. 8.8. Периодическая зависимость. Таблица разностей.

3.8.6. Пример других характеристик интерполяции

На последовательности из 10 точек можно получить лучшие результаты, если взять число повторений равным 3. В этом случае полином Лагранжа L_{012} служит для получения полюсов $P_{22333444}$ $P_{23334445}$

$P_{33344455}$ и т. д. и имеем $n = 8$, $c = 5$ и $r = 7$. При этом выполняются 66 условий непрерывности и 72 условия восстановления для 90 параметров, что является максимальным для $q = 10$. Действительно, в этом случае отношение числа удовлетворенных условий (138) к числу параметров (90) равно $\frac{138}{90} = \frac{23}{15} = \frac{184}{120}$, что несколько больше соответствующего отношения, полученного в разд. 3.8.3:

$$\frac{122}{80} = \frac{61}{40} = \frac{183}{120}$$

Провести сравнение со сплайнами в данном случае более трудно, так как обобщенные полюсы имеют различную природу ($P_{23334445} = 1$ и $P_{22333444} = 1$) и не дают одинакового отклика на единичный импульс. Поэтому делимость $m = n + 1$ на p является предпочтительной.

Матрица перехода от обобщенных к простым полюсам, являющаяся произведением двух матриц, имеет следующий вид:

$$\frac{1}{144} \begin{bmatrix} 2 & 17 & 53 & 53 & 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 39 & 67 & 28 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 74 & 44 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 64 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 80 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 64 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 44 & 74 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 28 & 67 & 39 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & 53 & 53 & 17 & 2 \end{bmatrix}$$

Она обеспечивает 5-й порядок непрерывности для обоих полюсов $P_{22333444} = 1$ и $P_{23334445} = 1$, что проверяется по элементам каждого третьего столбца, начиная с конца. При этом последний импульс является обратным изображением первого.

Правая матрица произведения получается из полярной формы интерполяционной формулы Лагранжа; ее первые 3 строки имеют вид (после сокращения на 35)

$$\frac{1}{40320} \begin{bmatrix} -85 & 908 & -5409 & 42644 & 3689 & -1836 & 461 & -52 & -52 & 0 & 0 \\ -154 & 1490 & -7146 & 25970 & 25970 & -7146 & 1490 & 1490 & -154 & 0 & 0 \\ -52 & 461 & -1836 & 3689 & 42644 & -5409 & 908 & 908 & -85 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Три следующие строки смещены на одну позицию вправо, а три последние - на две позиции. Результирующая матрица имеет вид

$$\frac{1}{80640} \begin{bmatrix} -77 & 616 & -2156 & 4312 & 75250 & 4312 & -2156 & 616 & -77 & 0 \\ -41 & 232 & -140 & -3752 & 75250 & 12376 & -4172 & 1000 & -113 & 0 \\ -13 & -72 & 1436 & -9208 & 70770 & 23048 & -6628 & 1464 & -157 & 0 \\ 0 & -224 & 2234 & -11568 & 61810 & 35848 & -9186 & 1936 & -202 & 0 \\ 0 & -232 & 2264 & -11160 & 49448 & 49448 & -11160 & 2264 & -232 & 0 \\ 0 & -202 & 1936 & -9186 & 35848 & 61810 & -11568 & 2234 & -224 & 0 \\ 0 & -157 & 1464 & -6628 & 23048 & 70770 & -9208 & 1464 & -157 & -13 \\ 0 & -113 & 1000 & -4172 & 12376 & 75250 & -3752 & -140 & 232 & -41 \\ 0 & -77 & 616 & -2156 & 4312 & 75250 & 4312 & -2156 & 616 & -77 \end{bmatrix}$$

На рис. 8.9 приведен отклик на единичный импульс, а на рис 8.10 приведена таблица разностей для рассматриваемого случая. Отметим, что сглаживание характеризуется величиной $\Delta_8 / 1047,27$ и является более резким, но используемые числа после сокращений получаются меньшими, а следовательно, упрощаются арифметические вычисления. Затухание немного сильнее (~ 10%).

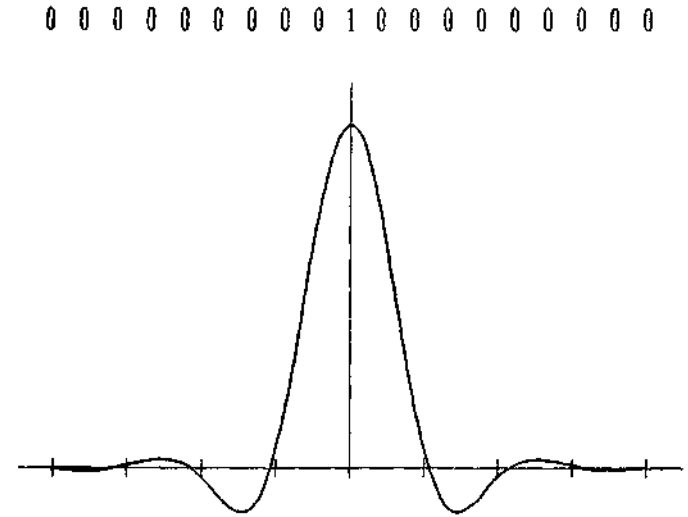


Рис. 8.9. Отклик на единичный импульс.

0	0								
0	0	0							
0	0	0	0						
0	0	0	0	0	-13	-13	50	-113	
0	0	0	-13	-13	24	37	-63		
0	-13	-13	-2	9	2	-26			
-13	-26	-8	7						
-41	-36								
-77	-36								
-113	-44	-8							
-157	-44	-1	9						
-202	-45	16	7	-2					
-232	-30	15	23	76	70	-335	791		
-232	8	30	106	183	-181	-257	456		
-224	8	144	8	-98	18	199			
-12	152	152		-80					
232	304	60							
616	304								
1000	304	00							
1404	464	8	-12	-80					
1936	472	8	152	18					
2264	328	-144	-62	-134	-152		802	-2260	
2234	-30	-358	-214	-196	730		-1370		
1436	-790	-760	-410	400	596	-640			
-140	-1576	-178	-10	-52					
-2156	-440								
-4172	-2016								
-6620	-2456	-440	330						
-9186	-2550	-182	348	-52					
-11160	-1974	504	806	296	-24		-994	3104	
-11540	-400	1566	982	220	-76	-1048	2170		
-9200	2360	1282	874	-1094	1152				
-3752	8064	2680	328	50					
4312	8064		-400						
12376	10672	2080							
23040	12792	2120	-488	-016	50				
35040	13600	016	-1304	-750	606	-90			
49440	12362	-1246	-2062	-94	664	500	-1582		
61810	8960	-3402	-2156	1172	1172	-1680			
70770	4400	-1076	1076	0					
75250	0	0	1076						
75250	0	-4480							

Рис. 8.10. Таблица разностей для функции на рис. 8.9.

3.9. Применение теорий полюсов

3.9.1. Вычисление оптимальной характеристики

В теории полюсов поиск оптимальных и максимальных решений становится рутинным делом. Рассмотрим пример с числом индексов,

равным 11 (т.е. $m = 12$ является числом, обладающим большим числом делителей), и построим таблицу (рис. 9.1), в клетках которой разместим числа удовлетворяемых условий для достижения соответствующих порядка непрерывности и степени восстановления и проведем сравнение с полным числом коэффициентов. Стрелки в пустых клетках указывают соседние, проще реализуемые случаи.

11-я степень

	$c=10$	$c=9$	$c=8$	$c=7$	$c=6$	$c=5$
44 коэффициентов $q=12$	$r=4$ 143+24=167	$r=6$ 130+84=214	$r=8$ 117+108=225	$r=9$ 104+120=224	$r=9$ ←	$r=10$ 78+132=210
168 коэффициентов $q=14$	$r=3$ 165+48=213	$r=8$ 150+108=258	$r=10$ 135+132=267	$r=11$ 120+144=264	←	
192 коэффициентов $q=16$	$r=5$ 187+72=259	$r=10$ 170+132=302	$r=10$ 155+144=299	↑		
216 коэффициентов $q=18$	$r=7$ 209+96=305	$r=11$ 190+144=334	↑			
240 коэффициентов $q=20$	$r=9$ 231+120=351	↑				
264 коэффициента $q=22$	$r=11$ 253+144=397					

Сплайны

По методу Рябенского

Рис. 9.1. Сравнение результатов для различного числа точек (q) и порядков непрерывности (c).

Видно, что интерполяция сплайнами и по методу Рябенского охватывает только небольшую часть случаев. Наилучший результат соответствует клетке с $q = 14, c = 8, r = 10$. Само собой разумеется, что в каждом случае можно получить несколько степеней восстановления, например для $q = 14, c = 9, r = 8$ можно также получить $r = 6$. При алгебраическом методе решения имеется риск не заметить это свойство. В то же время традиционные методы не обязательно дают наилучшее из возможных решений.

Метод Рябенского вытекает из теории полюсов. Сначала надо построить полюсы с помощью интерполяции Лагранжа по 11 точкам с центром в начале дуги, затем еще столько же полюсов по 11 точкам с центром на конце дуги. Это обеспечивает степень непрерывности 5 без сглаживания для любой нечетной степени $n = 2p + 1$ и с параметрами

$$c = p, q = 2p + 2, r = 2p.$$

Отметим, что в работах по теории *B*-сплайнов не используется понятие степени восстановления.

Алгебраическое сглаживание оказывается зависящим от числа отрезков интерполяции по методу Лагранжа, укладываемых от начала до конца дуги, или, другими словами, от числа $n - p$ введенных недостающих индексов.

3.9.2. Математическое напряжение

При проведении операции сглаживания удобно воспользоваться понятием **математического напряжения**, которое связано с отклонением интерполирующей кривой от точек исходной кривой и необходимостью удовлетворения условий непрерывности и восстановления. Математическое напряжение описывается вектором, направление которого указывает отклонение от исходных точек, а его величина зависит от характеристики интерполяционной кривой (u, c и r). В практике автомобилестроения почти всегда используют кривые с $n \leq 4-5$ и $c = 0$ (непрерывность кривой), $c = 1$ (непрерывность первой производной) или $c = 2$ (непрерывность второй производной). Таким образом, n, c и r представляют собой небольшие числа (не более 7, 4 и 6 соответственно). Кроме того, можно не использовать полиномы более высоких степеней, а работать с более короткими дугами.

Обычно использование рядов или полиномов Чебышева не позволяет получить подобных результатов. Тот факт, что теория полюсов обеспечивает высокие порядки непрерывности и степени восстановления, дает основание применять ее при решении многих физических проблем, в частности в небесной механике. Кроме того, эта теория полезна в методе конечных элементов, а также для изучения процессов, описываемых с помощью таблиц с одним или несколькими входами.

3.9.3. Кубическая интерполяция с равномерным разбиением

Рассмотрим три варианта кубической интерполяции и приведем соответствующие им матрицы для вычислений. Первый из них обес-

печивает интерполяцию с параметрами $n = 3, c = 2, r = 1, q = 4$, сглаживание $Z_0 = Z + \Delta_2/6$ и описывает, кроме того, переход от прогрессивных полюсов к простым:

$$\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ A \\ B \end{bmatrix}.$$

Второй вариант (значения параметров $n = 3, c = 2, r = 3, q = 6$, сглаживание $z_0 = z - \Delta_4/36$) соответствует интерполяции сплайнами ($c = n-1$):

$$\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 30 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 30 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & 30 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 30 & 4 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Третий вариант (с параметрами $n = 3, c = 1, r = 2, q = 4$, без сглаживания) соответствует интерполяции по методу Рябенского:

$$\begin{bmatrix} Z \\ Z_1 \\ A_2 \\ A \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ A \\ B \end{bmatrix}.$$

Порядок непрерывности и степень восстановления отыскиваются без труда.

3.9.4. Кубическая интерполяция с неравномерным разбиением

Для неэквидистантных точек вид матрицы в рассмотренных выше трех случаях более сложен. Для упрощения записи этих матриц заменим разности параметров (например, $b - z$) на обозначения отрезков (zb), тогда матрицы приобретают вид

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ZA^2}{XA \cdot YA} + \frac{ZB \cdot YZ}{YB \cdot YA} + \frac{YZ^2}{YA \cdot YB} & 0 \\ 0 & \frac{ZB}{YB} & \frac{YZ}{YB} & 0 \\ 0 & \frac{AB}{YB} & \frac{YA}{YB} & 0 \\ 0 & \frac{AB^2}{YB \cdot ZB} + \frac{YA \cdot AB}{YB \cdot ZB} + \frac{ZA \cdot AC}{ZB \cdot ZC} - \frac{ZA^2}{ZB \cdot ZC} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ A \\ B \end{bmatrix},$$

$n = 3, \quad c = 2, \quad r = 1, \quad q = 4;$

$$\begin{bmatrix} z \\ z_1 \\ A_2 \\ A \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -\frac{ZA^2}{YZ \cdot YA} & \frac{YZ+YA}{YZ} & \frac{YZ}{YA} & 0 \\ 0 & \frac{AB}{ZB} & \frac{ZB+AB}{AB} & -\frac{ZA^2}{ZB \cdot AB} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ A \\ B \end{bmatrix},$$

$n = 3, \quad c = 1, \quad r = 2, \quad q = 4;$

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{YZ^2 \cdot ZA^2}{XY \cdot XZ \cdot XA \cdot YA} - \frac{XB \cdot YZ \cdot ZA^2}{XY \cdot YA^2 \cdot YB} & 3 - \frac{XB \cdot YZ \cdot ZA}{XZ \cdot YA \cdot ZB} & \dots \\ 0 & -\frac{ZA^2 \cdot ZB}{YZ \cdot YA \cdot YB} & \frac{YA + AB}{YZ \cdot ZB} & \dots \\ 0 & -\frac{ZA^2 \cdot AB}{YZ \cdot YA \cdot YB} & \frac{YA \cdot AB}{YZ \cdot ZB} & \dots \\ 0 & -\frac{ZA^2 \cdot AB^2}{YZ \cdot YA \cdot YB \cdot ZB} & \frac{YC \cdot ZA \cdot AB^2}{YZ \cdot ZB^2 \cdot ZC} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ A \\ B \\ C \end{bmatrix},$$

$n = 3, \quad c = 2, \quad r = 3, \quad q = 6.$

3.9.5. Интерполяция полиномами четвертой степени

В этом случае алгебраическая интерполяция дает тот же результат, что и традиционные методы, и отличается от полиномов других степеней трудоемкими вычислениями. Преимущества теории полюсов не проявляются в достаточной степени, поскольку $m = n+1 = 5$ не делится ни на $p = 2$, ни на $p = 3$. Кроме того, полюсы P_{1122} и P_{1223} в определенном смысле симметричны по отношению к своим индексам (только в первом случае проявляются четные эффекты, а во втором-нечетные).

Ниже приведены две матрицы, вычисленные по методу сплайнов. Одна получена для случая $n = 4, \quad c = 3, \quad r = 1, \quad q = 6$ (сглаживание

$$\frac{1}{3} \Delta_2 + \frac{1}{48} \Delta_4):$$

$$\frac{1}{48} \begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 22 & 16 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 20 & 20 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 16 & 22 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 22 & 12 & 1 \end{bmatrix},$$

а другая для случая $n = 4, \quad c = 3, \quad r = 3, \quad q = 8$, (сглаживание $-\frac{13\Delta_4 + \Delta_6}{144}$):

$$\frac{1}{144} \begin{bmatrix} -1 & -7 & 37 & 86 & 37 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 18 & 86 & 56 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 76 & 76 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 56 & 86 & 18 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 37 & 86 & 37 & -7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица, связывающая простые полюсы с прогрессивными, должна содержать четное число столбцов. Этого можно добиться, если добавить слева или справа от дуги такое же число точек. Можно также применить метод, использующий разбиение дуги на две равные части, но мы его не будем здесь рассматривать.

Приведенные ниже матрицы вычислены по теории полюсов ($p = 2$) и обладают дополнительной степенью свободы – параметром u ($0 \leq u \leq 3$), который влияет на степень сглаживания. При $u=0$ сглаживание отсутствует, а при увеличении u от 1 до 3 сглаживание также увеличивается.

Матрица для случая $n = 4, c = 2, r = 4$ (сглаживание имеет $\frac{u\Delta_6}{192}$) вид

$$\frac{1}{1152} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1152 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 44 & -217 & 1152 & 217 & -44 & 5 & 0 \\ 0 & 20 & -156 & 712 & 712 & -156 & 20 & 0 \\ 0 & 5 & -44 & 217 & 1152 & -217 & 44 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1152 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \frac{6u}{1152} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

и для случая $n = 4, c = 2, r = 3$ (сглаживание – $\frac{u\Delta_4}{48}$)

$$\frac{1}{48} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 48 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 28 & 28 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 48 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \frac{u}{48} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Алгебраическая проверка степеней непрерывности и восстановления подтверждает эти результаты.

3.9.6. Интерполяция полиномами пятой степени

В этом случае параметр $m = n + 1 = 6$ и делится на 2 и 3. Приведем шесть числовых матриц для различных условий интерполяции. Сначала 3 матрицы для $p=1$ (по методу сплайнов). Для случая $n = 5, c = 4, r = 1, q = 6$ (сглаживание $\Delta_2/4 + \Delta_4/120$):

$$\frac{1}{120} \begin{bmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 66 & 36 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 60 & 48 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 48 & 60 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 36 & 66 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{bmatrix},$$

$n = 5, c = 4, r = 3, q = 8$ (сглаживание $\frac{26\Delta_4 + \Delta_6}{480}$):

$$\frac{1}{480} \begin{bmatrix} -1 & -20 & 89 & 344 & 89 & -20 & -1 & 0 \\ 0 & -16 & 30 & 344 & 148 & -24 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & -12 & 304 & 224 & -24 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -24 & 224 & 304 & -12 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & -24 & 148 & 344 & 30 & -16 & 0 \\ 0 & -1 & -20 & 89 & 344 & 89 & -20 & -1 \end{bmatrix}.$$

$n = 5, c = 4, r = 5, q = 10$ (сглаживание $\frac{330\Delta_6 + 13\Delta_8}{28800}$) (переход от прогрессивных к простым полюсам):

$$\frac{1}{28800} \begin{bmatrix} 13 & 226 & -1616 & 4222 & 23110 & 4222 & -1616 & 226 & 13 & 0 \\ 0 & 208 & -934 & 84 & 23110 & 8360 & -2298 & 244 & 26 & 0 \\ 0 & 104 & -116 & -2592 & 20060 & 13960 & -2844 & 176 & 52 & 0 \\ 0 & 52 & 176 & -2844 & 13960 & 20060 & -2592 & -116 & 104 & 0 \\ 0 & 26 & 244 & -2298 & 8360 & 23110 & 84 & -934 & 208 & 0 \\ 0 & 13 & 226 & -1616 & 4222 & 23110 & 4222 & -1616 & 226 & 13 \end{bmatrix}$$

Следующие матрицы для $p = 2, n = 5, c = 3, r = 3, q = 6$ (сглаживание $-\frac{7\Delta_4}{240}$):

$$\frac{1}{240} \begin{bmatrix} -7 & 28 & 198 & 28 & -7 & 0 \\ -3 & -4 & 198 & 60 & -11 & 0 \\ 0 & -20 & 168 & 108 & -16 & 0 \\ 0 & -16 & 108 & 168 & -20 & 0 \\ 0 & -11 & 60 & 198 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & 28 & 198 & 28 & -7 \end{bmatrix},$$

$n = 5, c = 3, r = 5, q = 8$ (сглаживание $\frac{29\Delta_6}{4800}$):

$$\frac{1}{4800} \begin{bmatrix} 29 & -174 & 435 & 4220 & 435 & -174 & 29 & 0 \\ 13 & -30 & -285 & 4220 & 1155 & -318 & 45 & 0 \\ 0 & 76 & -640 & 3560 & 2240 & -500 & 64 & 0 \\ 0 & 64 & -500 & 2240 & 3560 & -640 & 76 & 0 \\ 0 & 45 & -318 & 1155 & 4220 & -285 & -30 & 13 \\ 0 & 29 & -174 & 435 & 4220 & 435 & -174 & 29 \end{bmatrix},$$

$n = 5, c = 2, r = 4, q = 6$ (без сглаживания по методу Рябенского):

$$\frac{1}{240} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 240 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -32 & 240 & 32 & -4 & 0 \\ 7 & -48 & 210 & 80 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & 80 & 210 & -48 & 7 \\ 0 & -4 & 32 & 240 & -32 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 240 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.9.7. Замечания о характеристиках восстановленных кривых

Напомним, что можно использовать любые значения n, c, r . Последовательность действий при этом такова: сначала производится интерполяция полиномами Лагранжа степени r , затем определяются степень n и число повторений индекса p , связанное с порядком непрерывности $c = n - p$ ($p \leq n$). Во всех случаях основой для вычислений является матрица размером $m \cdot q$ ($m = n + 1$), причем среди всех возможных матриц отбирают такую, которая соответствует максимальному значению r для данной величины c . Таким образом удается избавиться от части неоптимальных решений. Оптимальным же решением для данных m и q является то, которое удовлетворяет максимальному числу условий непрерывности и восстановления. В необходимых случаях можно увеличить степень n , сохраняя неизменным произведение $m \cdot q$, что приближает матрицу к квадратному виду. При этом m и q становятся близкими к p^2 , а оптимальное решение зависит от арифметических условий (делимости m на p , числа делителей произведения $m \cdot q$). Минимальная величина общего знаменателя элементов матрицы достигается при постоянном шаге интерполяции. В противном случае формулы для определения параметров будут более сложными. Для интерполяции поверхностей необходимо заранее продумать наиболее приемлемое разбиение.

Применение полюсов делает очень наглядным смысл сглаживания, которое определяется «математическим напряжением» в каждой точке шивки, представленным в виде вектора. Критерием сглаживания могла бы служить минимизация суммы квадратов этих векторов, но его применение выходит за рамки алгебраических методов. Для алгебраически оптимального выбора параметров следует позаботиться о том,

чтобы вектор «математического напряжения» не был бы касательным к кривой. Его направление выбирают по нормали (или близким к этому). Без труда можно также осуществить и учет краевых эффектов. Можно, например, закончить обработку простым полюсом в краевой точке (n -кратное повторение индекса) или же уменьшить степень интерполяции r до нуля. **Следует также иметь в виду, что графическое решение всегда остается лучше всяких расчетов.**

3.9.8. Сглаживание, определенное с помощью метода наименьших квадратов

За основу характеристики сглаживания возьмем степень восстановления r . Предположим, что на идеальное значение исходных данных y_i накладывается случайная погрешность ε_i . В отсутствие погрешности $\Delta_{r+1} = 0$, а при ее наличии $\Delta_{r+1}(y_i + \varepsilon_i) = \Delta_{r+1}(\varepsilon_i)$.

Представим реальные значения Y_i через идеальное y_i с учетом разностей Δ четных порядков, превышающих r ,

$$Y_i = y_i + \alpha \Delta_{2k}(\varepsilon_i) + \beta \Delta_{2k+2}(\varepsilon_i) + \dots$$

Разность $\Delta_{2k}(Y_i)$ будет зависеть от всех значений ε_i . Для определения числовых коэффициентов α , β и т. д. следует выполнить минимизацию квадратичной формы.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда реальные данные отличаются от идеальных только одним членом.

$$Y_i = y_i + \alpha \Delta_4(y_i).$$

Тогда

$$\Delta_4(Y_i) = \Delta_4(\varepsilon_i) + \alpha \Delta_8(\varepsilon_i) = \alpha(\varepsilon_8 + \varepsilon_0) - 8\alpha(\varepsilon_7 + \varepsilon_1) + (28\alpha + 1)(\varepsilon_6 + \varepsilon_2) - (56\alpha + 4)(\varepsilon_5 + \varepsilon_3) + (70\alpha + 6)\varepsilon_4.$$

Из условия минимальности суммы квадратов коэффициентов при разностях ε_i следует минимальность выражения

$$C_{16}^8 \alpha^2 + 2C_{12}^2 \alpha + C_8^4,$$

откуда

$$-\alpha = \frac{C_{12}^2}{C_{16}^8} = \frac{14}{195} \approx \frac{1}{14},$$

т. е. имеет место коррекция на $-\frac{\Delta_4}{14}$. Для Δ_6 аналогично определяется

величина $\approx \Delta_6/55,6$

3.9.9. Сравнение методов сглаживания

Алгебраическое сглаживание всегда слабее, чем квадратичное. Если применить оба метода к единичному импульсу (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), то при алгебраическом сглаживании получим $\frac{1}{36}(0, -1, 4, 30, 4, -1, 0)$,

а при квадратичном - $\frac{1}{14}(0, -1, 4, 8, 4, -1, 0)$. Для квадратичного сглаживания амплитуда уменьшается примерно вдвое, в то время как для алгебраического - на $\frac{1}{6}$.

Если ошибка исходных данных является переменной (+1, -1 и т. д.), то $\Delta_4/14$ даже меняет знаки ($-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}$ т. д.), подавляет $\Delta_4/16$ все скачки,

а алгебраическое сглаживание $\Delta_4/36$ дает ($\frac{5}{9}, -\frac{5}{9}$ и т. д.). Отсюда видны недостатки квадратичного сглаживания; его ошибка теряет случайный характер!

3.9.10. Интерполяция поверхностей с помощью обобщенных полюсов

Все, что было сказано относительно применения полюсов для обработки кривых, применимо и для обработки поверхностей. В этом случае обозначение полюса имеет вид $P_{\substack{i_1 i_2 \\ n_1 n_2}}^{\substack{i_1 i_2 \\ n_1 n_2}}$ и зависит от двух (и

более) семейств параметров, причем каждое семейство не зависит от остальных. Таким образом определяется разбиение поверхности на клетки, и его можно изменять с помощью операции построения подполюсов. Ввод новых индексов в оба семейства не зависит от порядка операций.

Непрерывно перемещая полюсы из заштрихованной области (рис 10.1) к границам, можно получить отклик на двумерную ступенчатую функцию - поверхность, искривленную по определенному контуру

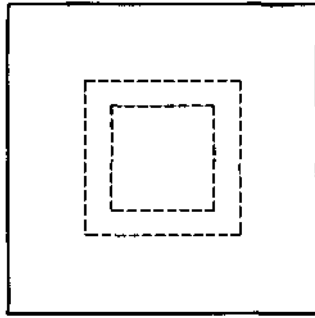


Рис. 10.1.

Высокие степени в двумерном случае приводят к сложным формулам сглаживания, например для 7-й степени $c=6, p=1$ сглаживание по методу сплайнов составляет

$$\frac{1}{5040}(1680\Delta_2 + 126\Delta_4 + \Delta_6) \text{ при } r=1, -\frac{1}{15120}(1302\Delta_4 + 123\Delta_6 + \Delta_8)$$

при $r=3, \frac{1}{1814400}(37320\Delta_6 + 3786\Delta_8 + 31\Delta_{10})$ при $r=5$ и

$$-\frac{1}{76204800}(363468\Delta_8 + 37844\Delta_{10} + 311\Delta_{12}) \text{ при } r=7.$$

Рассмотренные выше примеры с $p=2, n=7$ и $p=3, n=8$ являются наиболее простыми, но сложность вычислений быстро нарастает. Рассмотрению доступны еще случаи $p=4$ для 15-й степени и $p=5$ для 24-й, но следует иметь в виду, что при этом возрастает время вычислений и разрядность чисел в ЭВМ для достижения необходимой точности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория полюсов долгое время развивалась в представлении декартовых координат. Параметрическому представлению не уделялось достаточного внимания. Предлагаемый в данной работе подход основан как раз на таком представлении и этим отличается от других способов решения задачи интерполяции. В пользу такого подхода можно привести два аргумента.

Во-первых, все вычисления вручную или на ЭВМ используют четыре арифметические операции конечное число раз, и поэтому любой результат вычислений носит алгебраический характер. Понятие «трансцендентный», означающее «неалгебраический», связано с предельным переходом, т. е. предполагает бесконечное число операций, и таким образом оно нереализуемо на практике

Во-вторых, описание в декартовых координатах и параметрическое представление нельзя считать полностью эквивалентными, так как не всегда возможно исключение параметров при переходе к описанию в декартовых координатах. Особенности декартового и параметрического описания поверхностей различны. Отсутствие касательной плоскости для первого трактуется как наличие конической точки, а для второго - как наличие двух коллинеарных касательных.

Оба представления можно согласовать следующим образом. Достаточно заметить, что особые точки поверхностей $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ являются проекциями особых точек в пространстве E_5 на E_3 , если рассматривать функции пяти переменных $f(x, y, z, u, v), g(\dots), h(\dots)$. В декартовом представлении это является наиболее общим выражением параметрической зависимости. Проекция пятимерного объекта на $E_3(x, y, z)$ дает зависимость в декартовых координатах $\varphi(x, y, z)$. Однако можно получить и другие проекции $-p(x, u, v), q(y, u, v), r(z, u, v)$, из которых получаются параметрические представления $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$. Начиная с Гаусса, теория поверхностей опирается на параметрическое представление. Можно ли утверждать, что оно справедливо для неункурсального декартового разложения? Пока это не доказано.

Алгебраический путь решения поставленной задачи позволяет устранить эти трудности. Он оказался весьма плодотворным, возможности его применения в различных областях еще не исчерпаны. Теория полюсов может найти применение в описании кривых и поверхностей и при решении дифференциальных уравнений. В методе конечных элементов есть возможность так преобразовать исходные уравнения, чтобы получить соотношения между полюсами. В этих направлениях уже есть обнадеживающие результаты. Реализация характеристик восстановленных кривых позволит применять теорию полюсов для построения математических или физических таблиц вместо используемых сейчас сплайнов. При этом достигается не только непрерывность первой производной, но и обеспечивается возможность разложения в локальные ряды. Таким способом можно избежать использования полиномов Чебышева для аппроксимации. **Областями применения теории полюсов могут быть также баллистика, небесная механика, для многомерных приложений - физика сплошных сред, аэродинамика.** Разумный выбор характеристик восстановленных кривых всегда позволит при исследовании физических закономерностей найти правильный компромисс между восстановлением общей картины явления и его локальным поведением.

Первые попытки описания с помощью полюсов кривых и поверхностей вполне удовлетворительны. Возьмем, например, точки, описание которых традиционными методами весьма сложно; тройные стыки, которые для своего изображения могут потребовать до 300 элементарных поверхностей. С помощью обобщенных полюсов их удастся уменьшить до небольшого числа, причем непрерывность в точках сшивки получается автоматически. Обобщенные полюсы незаменимы в тех случаях, когда требуется осуществить плавную деформацию кривых и поверхностей, при этом описание внутренних областей, складок, выступов не составляет принципиальных и технических трудностей. Заметим также, что обобщенные полюсы вполне естественно распространить на область применения сплайнов, что можно сделать быстро и легко.

4. Введение в аналоговое моделирование

Введение

Аналоговое моделирование может быть как физическим, так и математическим. Далее рассматриваются основы построения аналогов и аналоговых моделей, а сейчас кратко остановимся на физических и математических моделях. Аналоговое моделирование может заключаться в изучении физических систем с помощью аналогов, поведение которых достаточно хорошо аппроксимирует поведение реальной системы при исследовании частных явлений. При этом используются три формы физического моделирования: масштабные модели, модели-аналоги и испытания частей систем.

Аналоговое моделирование успешно выполняется и с помощью аналоговых вычислительных машин (АВМ), каждая из которых предназначена (в данном конкретном комплекте устройств) для решения определенного типа задач.

Аналоговое моделирование - это замещение оригинала аналогичной моделью, обладающей сходством с оригиналом, достаточным для экстраполяции ее свойств и отношений в свойства и отношения оригинала на основании умозаключения по аналогии. Такое

моделирование используется обычно при слабой изученности оригинала, когда имеющиеся сведения о нем носят качественный характер.

Например, аналоговое моделирование предстает широкие возможности для научных прогнозов подъема уровня грунтовых вод на застраиваемых территориях. Оно позволяет с достаточной полнотой учесть сложные контуры внешних и внутренних границ водоносного горизонта, неоднородность его фильтрационных свойств и колебания мощности, многообразие условий питания и разгрузки грунтовых вод, включая их изменение во времени, обосновать путем решения обратных и инверсных задач правильность выбранной расчетной схемы, обеспечивающей достаточную точность выполнения инженерных расчетов.

Аналоговое моделирование успешно выполняется с помощью аналоговых вычислительных машин (АВМ), каждая из которых предназначена (в данном конкретном комплекте устройств) для решения определенного типа задач.

Аналоговое моделирование основано на аналогии уравнений, описывающих явления различной физической природы.

Примером аналогового моделирования может служить логарифмическая линейка или электрическая схема. Установив конец движка линейки на деление, равное k , мы получим модель, в которой любому значению x на движке будет соответствовать определенное значение y на неподвижной шкале. Здесь точность зависит от точности измерения отрезков на линейке, и исходные параметры задаются длиной отрезка, которая может плавно меняться, переходя от одной величины к другой.

Развитием аналогового моделирования является переход от сплошных к сеточным моделям, основу которых при электрическом моделировании составляет сетка электрических сопротивлений. Для обоснования сеточных моделей предварительно составляется сеточная фильтрационная схема, получаемая разбивкой потока на отдельные блоки, относящиеся к узловым точкам (узлам сетки), задаваемым в области потока по определенной сетке. Фундаментальным понятием сеточной фильтрационной схемы является фильтрационное сопротивление Φ участка потока между узлами сетки.

В результате аналогового моделирования получают кривые переходных процессов в системе регулирования при нескольких параметрах настройки регулятора.

Обеспечивают гибкость аналогового моделирования благодаря использованию памяти и логики ЭЦВМ.

В практике *аналогового моделирования* распространено визуальное сопоставление данных, представленных в графической форме, с помощью двухкоординатного регистрирующего прибора. В этом случае опытные данные фактически в машину не вводятся и сопоставление кривых осуществляет оператор. К этому приему приходится прибегать, когда экспериментальные данные представляют собой ряд точек, а не сплошную кривую. Несмотря на простоту приема, результаты моделирования оказываются обычно достаточно точными.

Преимущественное использование аналогового моделирования было связано прежде всего с простотой реализации геофильтрационных моделей, быстродействием, возможностью оперативного перебора вариантов при решении обратных и инверсных задач в условиях диалогового режима, возможностью непосредственного контроля результатов решения.

Физическое моделирование можно рассматривать как частный случай аналогового моделирования, когда явления однородные.

Одним из важнейших видов представления динамики процессов наряду с дискретным является аналоговое моделирование. Особенно важен этот метод при исследовании биологических объектов. Нейман пришел к выводу, что мозг человека и животных работает скорее как аналоговое, а не цифровое устройство.

Наиболее эффективный аппарат для определения параметров из исходного уравнения дает численное или аналоговое моделирование, которое позволяет, в частности, гибко учитывать требования физического правдоподобия модели при введении в нее контрольной информации о напорах и расходах потока.

Имитационное моделирование (от англ. simulation) - это распространенная разновидность *аналогового моделирования*, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих посредством процессов-аналогов провести целенаправленное исследование структуры и функций реального сложного процесса в памяти компьютера в режиме имитации, выполнить оптимизацию некоторых его параметров.

Сущность (объект, процесс, явление) может исследоваться и путём опытного изучения каких-либо явления иной физической природы, но такого, что оно описывается теми же математическими соотношениями, что и моделируемое явление. Например, механические и электрические колебания описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями; поэтому с помощью механических колебаний можно моделировать электрические и наоборот. Такое «предметно-математическое» моделирование широко применяется для замены изучения одних явлений изучением других явлений, более удобных для лабораторного исследования, в частности потому, что они допускают измерение неизвестных величин. Так, электрическое моделирование позволяет изучать на электрических моделях механических, гидродинамических, акустических и другие явления. Электрическое моделирование лежит в основе т. н. *аналоговых вычислительных машин*.

Аналоговое моделирование один из видов *моделирования*, основанный на *аналогии* (в более точных терминах - *изоморфизме*) явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими (дифференциальными, алгебраическими или какими-либо другими) уравнениями.

Простой пример - две системы, первая из которых имеющая механическую природу, состоит из оси, передающей вращение через пружину и маховик, погруженный частично в вязкую тормозящую жидкость, вала, жестко связанному с маховиком. Вторая система - электрическая - состоит из источника электродвижущей силы, соединённого через катушку индуктивности, конденсатор и активное сопротивление со счётчиком электрической энергии. Если подобрать значения индуктивности, ёмкости и сопротивления так, чтобы они определённым образом соответствовали упругости пружины, инерции маховика и трению жидкости, то эти системы обнаружат структурное и функциональное сходство (даже тождество), выражаемое, в частности,

в том, что они будут описываться одним и тем же дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + cz = \omega$$

Это уравнение может служить «теоретической моделью» обеих систем, любая же из них - «экспериментальной моделью» этого уравнения и «аналоговой моделью» друг друга. Эта аналогия лежит в основе электрического моделирования механических систем: электрические модели гораздо более удобны для экспериментального исследования, нежели моделируемые механические. Другой традиционной областью применения аналогового моделирования является исследование процессов *теплопроводности*, основанное на электротепловой и гидротепловой аналогиях (в первой из них аналогами температурного поля в твёрдом теле и теплоёмкости служат соответственно поле электрического потенциала в электропроводной среде и ёмкости некоторых конденсаторов, во второй - температура моделируется уровнем воды в вертикальных стеклянных сосудах, образующих гидравлическую модель, теплоёмкость элементарного объёма - площадью поперечного сечения этих сосудов, а тепловое сопротивление - гидравлическим сопротивлением соединяющих сосудов трубок). Для исследования лучистого (радиационного) переноса тепла часто применяют метод светового моделирования, при котором потоки теплового излучения заменяют подобными им потоками излучения светового. Таким путём определяют угловые коэффициенты излучения, а если оптические свойства (степень черноты и поглощательные способности) соответствующих поверхностей у модели и природы тождественны, то и распределение тепловых потоков по поверхностям, входящим в систему лучистого теплообмена.

До создания цифровых электронных вычислительных машин в конце 1940-х гг. аналоговое моделирование было основным способом «предметно-математического моделирования» многих процессов, связанных с распространением электромагнитных и звуковых волн, диффузии газов и жидкостей, движения и фильтрации жидкостей в пористых средах, кручения стержней и др. (в связи с чем его часто называли тогда просто «математическим моделированием»), причём для каждой конкретной задачи моделирования строилась своя «сеточная» модель (основными её элементами служили соединённые в плоскую сеточную схему электрические сопротивления различных

видов), а *аналоговые вычислительные машины* позволяли проводить аналоговое моделирование целых классов однородных задач. В настоящее время значение аналогового моделирования значительно уменьшилось, поскольку моделирование на ЭВМ имеет большие преимущества перед ним в отношении точности моделирования и универсальности. В достаточно фиксированных и специальных задачах свои преимущества (простота, а тем самым и дешевизна технического выполнения) имеет и аналоговое моделирование. Употребительно также и совместное использование обоих методов.

Аналоговое моделирование осуществляют на аналоговой вычислительной машине

Аналоговая вычислительная машина (АВМ), вычислительная машина, в которой каждому мгновенному значению переменной величины, участвующей в исходных соотношениях, ставится в соответствие мгновенное значение другой (машинной) величины, часто отличающейся от исходной физической природой и масштабным коэффициентом. Каждой элементарной математической операции над машинными величинами, как правило, соответствует некоторый физический закон, устанавливающий математические зависимости между физическими величинами на выходе и входе решающего элемента (например, законы Ома и Кирхгофа для электрических цепей, выражение для эффекта Холла, лоренцовой силы и т. д.).

Особенности представления исходных величин и построения отдельных решающих элементов в значительной мере определяют сравнительно большую скорость работы АВМ, простоту программирования и набора задач, ограничивая, однако, область применения и точность получаемого результата. АВМ отличается также малой универсальностью (алгоритмическая ограниченность) — при переходе от решения задач одного класса к другому требуется изменять структуру машины и число решающих элементов.

К первому аналоговому вычислительному устройству относят обычно логарифмическую линейку, появившуюся около 1600 г. Графики и номограммы — следующая разновидность аналоговых вычислительных устройств — для определения функций нескольких переменных; впервые встречаются в руководствах по навигации в 1791 г. В 1814 г. английский учёный Дж. Герман разработал аналоговый прибор — планиметр, предназначенный для определения площади, ограниченной замкнутой кривой на плоскости. Планиметр был усовершенствован в 1854 г. немецким учёным А. Амслером. Его интегрирующий прибор с катящимся колесом привёл позднее к изобретению английским физиком Дж. Томсоном фрикционного интегратора. В 1876 г. другой английский физик У. Томсон применил

фрикционный интегратор в проекте гармонического анализатора для анализа и предсказания высоты приливов в различных портах. Он показал в принципе возможность решения дифференциальных уравнений путём соединения нескольких интеграторов, однако из-за низкого уровня техники того времени идея не была реализована.

Первая механическая вычислительная машина для решения дифференциальных уравнений при проектировании кораблей была построена А. Н. Крыловым в 1904 г. В основу её была положена идея интегратора — аналогового интегрирующего прибора, разработанного польским математиком Абданк-Абакановичем (1878) для получения интеграла произвольной функции, вычерченной на плоском графике.

Дальнейшее развитие механических интегрирующих машин связано с работами американского учёного В. Буша, под руководством которого была создана чисто механическая интегрирующая машина (1931), а затем её электромеханический вариант (1942). В 1936 г. русский инженер Н. Минорский предложил идею электродинамического аналога. Толчок развитию современных АВМ постоянного тока дала разработка Б. Расселом (1942—44 г.г., США) решающего усилителя.

Большое значение имели работы математика С. А. Гершгорина (1927), заложившие основы построения сеточных моделей. В 1936 в СССР под руководством И. С. Брука были построены механический интегратор и электрический расчётный стол для определения стационарных режимов энергетических систем. В 40-х гг. была начата разработка электромеханического ПУАЗО на переменном токе и первых электронных ламповых интеграторов (Л. И. Гутенмахер). Работы, проведённые под руководством Гутенмахера (1945—46 г.г.), привели к созданию первых электронных аналоговых машин с повторением решения. В 1949 в СССР под руководством В. Б. Ушакова, В. А. Трапезникова, В. А. Котельникова, С. А. Лебедева был построен ряд АВМ на постоянном токе. Эти работы положили начало развитию аналоговой вычислительной техники в СССР.

АВМ в основном применяется при решении следующих задач. **Контроль и управление.** В системах автоматического управления АВМ пользуются, как правило, для определения или формирования закона управления, для вычисления сводных параметров процесса (кпд, мощность, производительность и др.). Если задано математическое выражение, определяющее связь сводного параметра или управляющего воздействия с координатами объекта, АВМ служат для решения соответствующего уравнения. Результат вычислений поступает либо на исполнительный механизм (замкнутая система), либо к оператору. В последнем случае АВМ работает как информационное устройство. Например, АВМ широко распространены

для оценки экономической эффективности энергетических систем, и те же АВМ могут управлять исполнительными механизмами, т. е. служить автоматическими регуляторами. Когда закон управления заранее не определён, а заданы лишь некоторый критерий оптимальности и граничные условия, АВМ применяются в системах поиска оптимального управления и служат математической моделью объекта.

Опережающий анализ, основанный на быстродействии. Многократно решая систему уравнений, описывающих управляемый процесс, учитывая его текущие характеристики, АВМ за короткое время «просматривает» большое число вариантов решений, отличающихся значениями параметров, подлежащих изменению при управлении процессом. Намного опережая ход процесса, АВМ прогнозирует сигналы управления, которые могут обеспечить необходимое качество протекания процесса. Найденные машиной значения передаются на регулирующие устройства, например в виде положений их уставок, после чего поиск наилучшего варианта продолжается. В режиме опережающего анализа АВМ выполняют функции либо машин-советчиков, когда оператор пользуется результатами полученных на машине расчётов для ручного или полуавтоматического управления, либо управляющих машин, автоматически учитывающих текущие характеристики процесса и управляющих им по оптимальным показателям. Выбор наилучшего режима технологического процесса осуществляется также самонастраивающимися математическими машинами в режиме опережающего анализа.

Экспериментальное исследование поведения системы с аппаратурой управления или регулирования в лабораторных условиях. С помощью АВМ воспроизводится та часть системы, которая по каким-либо причинам не может быть воспроизведена в лабораторных условиях. Связь АВМ с аппаратурой управления или регулирования в основном осуществляется преобразующими устройствами, в которых машинные переменные изменяются по масштабу и форме представления.

Анализ динамики систем управления или регулирования. Заданные уравнения объекта решаются в выбранном масштабе времени с целью нахождения основных параметров, обеспечивающих требуемое протекание процесса. Особо важны быстродействующие АВМ, с помощью которых в ускоренном масштабе времени можно решать некоторые итеративные задачи, задачи оптимизации, а также реализовать *Монте-Карло метод*, требующий многократного решения стохастических дифференциальных уравнений. Здесь АВМ резко

сокращает время проведения расчётов и делает наглядными результаты.

Решение задач синтеза систем управления и регулирования сводится к подбору по заданным техническим условиям структуры изменяемой части системы, функциональных зависимостей требуемого вида и значений основных параметров. Окончательный результат получается многократным повторением решения и сопоставлением его с принятым критерием близости. Задачи этого типа часто сводятся к отысканию экстремума некоторого функционала.

Решение задач по определению возмущений или полезных сигналов, действующих на систему. В этом случае по дифференциальным уравнениям, описывающим динамическую систему, по значениям начальных условий, известному из эксперимента характеру изменения выходной координаты и статистическим характеристикам шумов в измеряемом сигнале определяется значение возмущения или полезного сигнала на входе.

АВМ может также служить для построения приборов, автоматически регистрирующих возмущения и вырабатывающих сигнал управления в зависимости от характера и размера возмущений.

АВМ состоят из некоторого числа решающих элементов, которые по характеру выполняемых математических операций делятся на линейные, нелинейные и логические. Линейные решающие элементы выполняют операции суммирования, интегрирования, перемены знака, умножения на постоянную величину и др. Нелинейные (функциональные преобразователи) воспроизводят нелинейные зависимости. Различают решающие элементы, предназначенные для воспроизведения заданной функции от одного, двух и большего числа аргументов. Из этого класса обычно выделяют устройства для воспроизведения разрывных функций одного аргумента (типичные нелинейности) и множительно-делительные устройства. К логическим решающим элементам относятся устройства непрерывной логики, например предназначенные для выделения наибольшей или наименьшей из нескольких величин, а также устройства дискретной логики, релейные переключающие схемы и некоторые др. специальные блоки. Для связи устройств непрерывной и дискретной логики широко пользуются гибридными логическими устройствами (например, компараторами). Все логические устройства обычно объединяются в одном, получившем название **устройства параллельной логики**. Оно снабжается своим наборным полем для соединения отдельных логических устройств между собой и с остальными решающими элементами АВМ.

В зависимости от физической природы машинных величин

различают механические, пневматические, гидравлические, электромеханические и электронные АВМ. Наиболее распространены электронные АВМ, отличающиеся значительно более широкой полосой пропускания, удобством сопряжения нескольких машин между собой и с элементами аппаратуры управления. Эти машины собираются из готовых радиотехнических узлов и полуфабрикатов. Решающие элементы АВМ строятся в основном на базе многокаскадных электронных усилителей постоянного тока с большим коэффициентом усиления в разомкнутом состоянии и глубокой отрицательной обратной связью. В зависимости от структуры и характера входной цепи и цепи обратной связи операционный усилитель выполняет линейную или нелинейную математическую операцию или комбинацию этих операций.

Вследствие неидеальности работы отдельных решающих элементов, неточности установки их коэффициентов передачи и начальных условий, решение, найденное с помощью АВМ, имеет погрешности. Результирующая погрешность зависит не только от перечисленных первичных источников, но и от характера и особенностей решаемой задачи. Как правило, погрешность увеличивается с ростом числа решающих (особенно нелинейных) элементов, включенных последовательно. Практически можно считать, что погрешность при исследовании устойчивых нелинейных систем автоматического управления не превышает нескольких %, если порядок набираемой системы дифференциальных уравнений не выше 10-го.

По структуре различают АВМ с ручным и с автоматическим программным управлением. В первом случае решающие элементы перед началом решения соединяются между собой в соответствии с последовательностью выполнения математических операций, задаваемых исходной задачей. В машинах с программным управлением последовательность выполнения отдельных математических операций меняется в процессе решения задачи в соответствии с заданным алгоритмом решения. Изменение в ходе решения порядка выполнения отдельных операций обуславливает прерывистый характер работы машины: период решения сменяется периодом останова (для выполнения требуемых коммутаций). При таком режиме АВМ должна снабжаться аналоговым запоминающим устройством.

Наличие памяти и дискретность характера работы машины дают возможность организовать многократное использование отдельных решающих элементов и тем сократить их число, не ограничивая класса решаемых задач, правда, за счёт снижения быстродействия.

Значительный интерес представляют машины с большой частотой

повторения решения (30—1000 *гц*) в связи с созданием систем автоматического управления, а также с необходимостью организации поиска оптимальных в некотором смысле структур и параметров систем управления.

Повышение эффективности АВМ связано с внедрением в аналоговую технику цифровых методов, в частности *цифровых дифференциальных анализаторов*, у которых отдельные решающие элементы выполняют математические операции над приращениями переменных, представленных в одном из цифровых кодов, с передачей результатов от элемента к элементу по принципам АВМ. Применение цифровых дифференциальных анализаторов, особенно последовательных, для специальных АВМ, не требующих высокого быстродействия, снижает общий объем аппаратуры, хотя в остальных случаях они по всем техническим показателям и возможностям существенно уступают цифровым вычислительным машинам. Гораздо большими возможностями обладают *гибридные вычислительные системы*, у которых исходные величины представлены одновременно в цифровой и аналоговой форме.

4.1. Аналоговое моделирование на электронных моделях

4.1.1. Решающий усилитель модели и выполняемые им операции

Все основные операции электронной модели выполняются при помощи решающих усилителей.

На вход усилителя подается напряжение с переменной его знака, которое он усиливает. Отметим, что коэффициент усиления k весьма велик, порядка 50 000, а в некоторых типах усилителей может достигать значения 10^6 . Такой высокий коэффициент усиления приводит к тому, что при колебаниях характеристик элемента выходное напряжение может отклониться от нуля, при нулевом входном напряжении. Это явление принято называть дрейфом нуля. В значительной степени оно компенсируется балансной схемой.

Обозначим треугольником схему усилителя. Если на вход треугольника подается напряжение u_i , то на его выходе напряжение $u_b = -ku_i$, $k = 50\ 000$. Включим теперь в обратную связь усилителя сопротивление R_2 , на его вход — сопротивление R_1 . В точке A при-

ложим напряжение u_1 (рис. 1) и определим напряжение u_2 в точке B — на выходе усилителя.

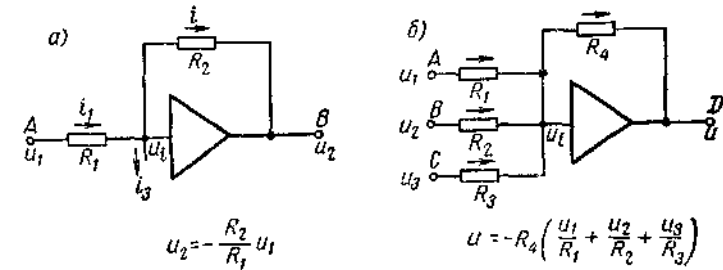


Рис. 1

Обозначим I_1, I_2, I_3 токи, текущие соответственно через сопротивление R_1, R_2 и сопротивление R_3 . Тогда можно составить следующие уравнения:

$$u_1 = u_i + I_1 R_1, \quad u_i = u_2 + I_2 R_2, \quad -I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad R_3 I_3 = u_i.$$

Решив эту систему с учетом $u_2 = -ku_i$, получим значение

$$u_i = \frac{\frac{R_2}{R_1} \cdot u_1}{\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} + k + 1}.$$

Сопротивления R_1, R_2, R_3 различаются максимум в 100 раз. Учитывая это, получаем

$$u_i = \frac{R_2}{kR_1} \cdot u_1 \quad \text{или} \quad u_2 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_1.$$

Отсюда делаем следующие выводы.

1. Обычно $u_1 \leq 100$ в, поэтому $u_i \leq \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{100}{k}$. Как правило, $\frac{R_2}{R_1} \leq 10$,

поэтому $u_i \leq \frac{1}{50}$ в — потенциал входа усилителя с достаточно большой точностью можно считать равным нулю.

2. Усилитель (рис. 1, а) умножает подаваемое напряжение на постоянный коэффициент $\frac{R_2}{R_1}$, одновременно изменяя знак этого напряжения.

Теперь составим схему согласно рис. 1, б. В точках А, В, С приложим напряжения u_1, u_2, u_3 . Учитывая, что $u_i \approx 0$, имеем

$$u_1 = I_1 R_1, \quad u_2 = I_2 R_2, \quad u_3 = I_3 R_3,$$

$$u + I_4 R_4 = 0, \quad I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0,$$

откуда

$$u = -R_4 \left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3} \right).$$

Усилитель складывает подаваемые на его вход напряжения с умножением каждого на постоянный коэффициент с переменной знака. Если в обратную связь включен конденсатор, на вход — сопротивление, так, как указано на рис. 2, то можно показать, что потенциал точки входа по-прежнему можно принимать равным нулю.

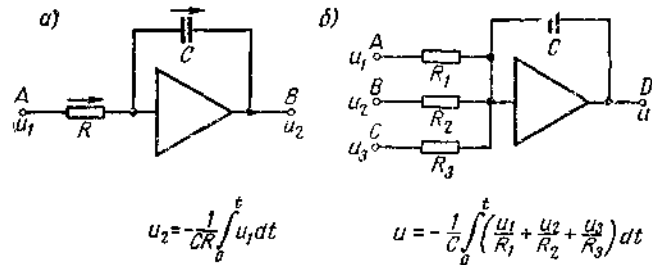


Рис. 2

Посмотрим, как свяжем в этом случае входное u_1 и выходное u_2 напряжения. После подключения в момент $t=0$ напряжения u_1 для тока I_1 через сопротивление R и тока I_2 через конденсатор c получаем $-I_1 + I_2 = 0$. Но $I_1 = \frac{u_1}{R}$, $I_2 = -c \cdot \frac{du_2}{dt}$

поэтому

$$\frac{u_1}{R} + c \cdot \frac{du_2}{dt} = 0, \quad u_2 = -\frac{1}{cR} \int_0^t u_1 dt.$$

Таким образом, усилитель (рис. 2, а) производит интегрирование подаваемого на вход напряжения с умножением его на постоянный коэффициент

$$\left(\frac{1}{cR} \right)$$

и с переменной знака.

Если к моменту включения на конденсаторе напряжение u_0 , то, замкнув ключ, получим

$$u_2(t) = u_0 - \frac{1}{cR} \int_0^t u_0 dt.$$

Отсюда видна возможность задания начальных условий, осуществляемая при помощи специальных реле и источников напряжения электронной модели.

Если на вход усилителя подать напряжения согласно рис. 2, б, то, совершенно аналогично случаю (см. рис. 1), можно показать, что

$$u = -\frac{1}{c} \int_0^t \left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3} \right) dt.$$

Этот усилитель интегрирует подаваемые на вход напряжения и суммирует их с умножением каждого на постоянный коэффициент и переменной знака.

Таким образом, очевидна возможность использования усилителей для суммирования и интегрирования необходимых величин: нужные числа в виде напряжений подаются на вход усилителя, подбираются необходимые сопротивления и емкости, и на входе усилителя при помощи вольтметра считывается ответ.

Усилители могут выполнять и ряд других операций. Комбинирование сопротивлений и емкостей для получения нужной операции удобно осуществлять, пользуясь операторным методом.

Приведем некоторые основные положения метода. Пусть дана некоторая функция времени $\varphi(t)$. Ее изображением является уравнение

$$\bar{\varphi} = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) \rightarrow \bar{\varphi}.$$

Изображение постоянной численно равно оригиналу и является также постоянной величиной.

Дифференцированию функции соответствует умножение ее изображения на p , $\frac{d\varphi}{dt} \rightarrow p\bar{\varphi}$; интегрированию — деление изображения на p , $\int_0^t \varphi dt \rightarrow \frac{1}{p} \bar{\varphi}$.

Учитывая, что проводимость конденсатора c равна $y = cp$, для схемы (рис. 2, а):

$$-\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 0, \quad \bar{u}_1 \cdot \frac{1}{R} + \bar{u}_2 y = 0, \quad \frac{\bar{u}_1}{R} = -\bar{u}_2 \cdot cp,$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{1}{cRp} \cdot \bar{u}_1, \quad u_2 = -\frac{1}{cR} \int_0^t u_1 dt.$$

Для схемы (рис. 3, а):

$$\bar{u}_1 y + \frac{\bar{u}_2}{R} = 0, \quad \bar{u}_2 = -cR\bar{u}_1, \quad u_2 = -cR \frac{du_1}{dt}.$$

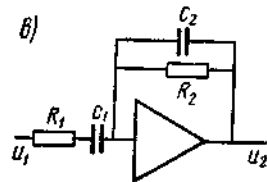
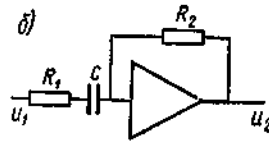
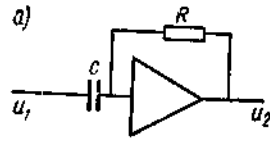


Рис. 3

Усилитель в данном случае производит дифференцирование подаваемого на вход напряжения.

Если на вход усилителя (рис. 3, б) подать напряжение u_1 , то на выходе

$$\bar{u}_2 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{p}{p + \frac{1}{cR_1}} \cdot \bar{u}_1;$$

при $u_1 = \text{const}$

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_1 e^{-\frac{t}{cR_1}}.$$

Для усилителя (рис. 3, в):

$$-\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 0, \quad \bar{u}_1 \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{cR}} + \bar{u}_2 \left(cR + \frac{1}{R} \right) = 0,$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{p\bar{u}_1}{\left(p + \frac{1}{cR} \right)^2};$$

при $u_1 = \text{const}$

$$u_2 = -te^{-\frac{t}{cR}} u_1.$$

В заключение отметим следующее:

1. При подсчете коэффициентов в операциях суммирования или интегрирования значения $R=1$ Ом и $c=1$ мкФ принимаются за единицу.
2. При решении практических задач нужно учитывать, что интегрирование усилителем производится в реальном (астрономическом) времени.

4.1.2. Примеры решения простейших уравнений

Пусть требуется решить уравнение свободных колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x,$$

т. е. найти $x = x(t)$ при заданных начальных условиях: $t=0, v=v_0, x=x_0$.

Решение находится двумя интегрированиями:

$$1) \frac{dx}{dt} = \int \frac{d^2x}{dt^2} dt + c_1;$$

$$2) x = \int \frac{dx}{dt} dt + c_1 t + c_2,$$

где $c_1 = v_0, c_2 = x_0$.

Соответственно с этим решением составляется схема моделирования (рис.4).

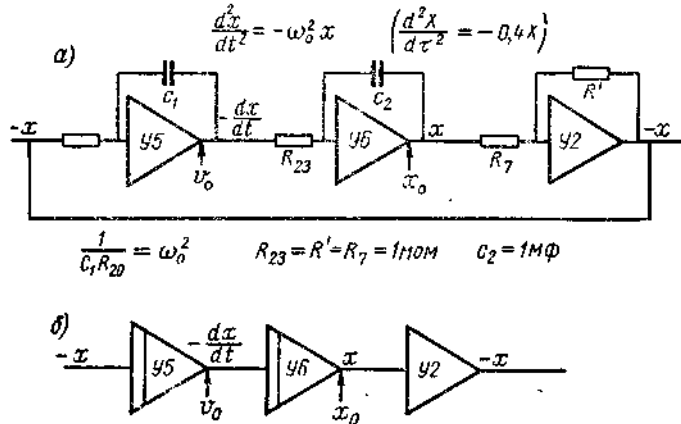


Рис. 4.

1. При помощи специального устройства подаем на усилители U5 и U6 начальные условия — соответственно v_0 и x_0 .

2. Предполагается, что величина $\frac{d^2x}{dt^2}$ известна и что можно подать соответствующее напряжение на вход усилителя U5. Тогда на выходе этого усилителя имеем

$$-\frac{dx}{dt}$$

Напряжение

$$-\frac{dx}{dt}$$

подаем на вход усилителя U6, на его выходе получаем напряжение x . И, наконец, подаем напряжение x на вход усилителя U2, чтобы на его выходе иметь $-x$. Но величина

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

которая предполагается известной, равна $-\omega_0^2 x$. Поэтому остается подать на вход усилителя U5 напряжение выхода усилителя U2 умножением его на коэффициент ω_0^2 .

3. Процесс интегрирования уравнения начинается с момента включения кнопки пуск модели. Именно с этого момента на выходе усилителя U6 имеем $u = x(t)$ ($u(0) = x_0$). Моменту нажатия кнопки соответствует начальный момент интегрирования.

Сопротивления и емкости схемы (рис. 4, а) выбираем следующим образом:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_1 R_{20}}, \quad R_{23} = 1, \quad C_2 = 1, \quad R_7 = R' = 1.$$

В случае громоздких уравнений обилие второстепенных деталей не дает возможности сразу увидеть главное. Поэтому схему набора задачи часто записывают без указания на ней сопротивлений и конденсаторов так, как показано на рис. 4, б (упрощенное изображение схемы набора). Поперечная черта в треугольнике означает, что усилитель интегрирующий. Над схемой записывается уравнение, в точках входа и выхода усилителей — входящие или выходящие величины.

Рассмотрим следующий пример. Дано уравнение вынужденных колебаний при нулевых начальных условиях с силой сопротивления движению, пропорциональной скорости:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t.$$

Схема набора задачи дана на рис. 5.

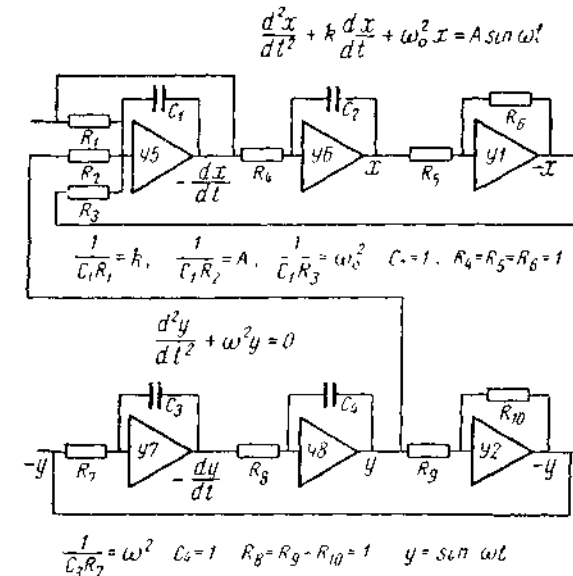


Рис. 5. Схема набора уравнения гармонических колебаний

Функция $\sin \omega t$ получается путем решения соответствующего уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$, схема набора которого представлена на этом же рисунке.

4.1.3. Переход от реальных переменных к машинным переменным

Как было отмечено, числам на модели соответствуют напряжения. Однако числа могут быть любыми, а напряжения ограничены. Например, в большинстве электронных моделей наибольшее допустимое напряжение равняется 100 в. Поэтому входящие в задачу числа и переменные величины путем выбора соответствующего масштаба изменяют таким образом, чтобы напряжения на входе и выходе любого усилителя не превышали 100 в. Напряжение, равное 100 в, принимается за единицу (машинная единица).

Порядок перехода к машинным переменным рассмотрим сначала на конкретном примере. Пусть в уравнении свободных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

числовые значения таковы: $\omega_0 = 314$, $x_0 = 0,5$ см, $v_0 = 0$. Обозначим машинные значения, т. е. значения в машинных единицах (м. е.) для времени t , координаты x и скорости v соответственно: τ , X , V . Связь между машинными и реальными переменными устанавливаем при помощи масштабных коэффициентов

$$\tau = t_c \cdot t, \quad X = x_c \cdot x.$$

Поскольку $v = \frac{dx}{dt}$, масштаб для скорости является функцией t_c и x_c :

$$v_c = \frac{x_c}{t_c}.$$

Если, как кажется, проще, принять $t_c = X_c = 1$, то при $x_0 = 0,5$ см, $X_0 = 0,5$ м. е. = 50 в. Однако известно, что решение уравнения суть

$$x = x_0 \cos \omega_0 t = 0,5 \cos \omega_0 t.$$

Поэтому скорость $v = -0,5\omega_0 \sin \omega_0 t = -157 \sin \omega_0 t$;

$$V_{\max} = v_c v_{\max} = 157 = 15700 \text{ в.}$$

Следовательно, машинное значение скорости значительно превышает 100 в. Частота колебаний, равная 50 гц, настолько велика, что процесс на модели наблюдать невозможно, к тому же модель и не

может работать на таких частотах. Поэтому масштаб необходимо выбирать таким образом, чтобы:

- 1) частота изображения процесса на модели обеспечивала удобство его наблюдения;
- 2) подлежащие измерению величины не выходили за пределы машинной единицы, и в то же время не были слишком малыми, ибо с уменьшением величины увеличивается относительная погрешность ее измерения;
- 3) напряжения входов и выходов всех усилителей не превышали машинной единицы.

Можно заметить, что этим условиям удовлетворяют

$$t_c = 500, \quad x_c = 1.$$

Тогда

$$V = \frac{v}{500}, \quad V_{\max} = \frac{157}{500} = 0,32 \text{ м. е.}$$

На основании этого примера можно вывести общие положения по выбору масштабных коэффициентов.

Уравнение, подлежащее набору на модели, решается приближенно с тем, чтобы выяснить максимальные значения переменных. Затем выясняется, каких пределов достигают отдельные члены уравнения и подлежащие измерению величины. Выбирается желаемая частота изменения процесса на модели или желаемая скорость его протекания, что дает масштаб времени. После выбираются остальные масштабные коэффициенты. Уравнение записывается в машинных переменных, составляется схема набора (например, приведенное выше уравнение запишется так: $\frac{d^2X}{d\tau^2} = -0,4X$).

Для решения задачи выбора масштабных коэффициентов можно использовать методы теории подобия. Действительно, схема набора уравнений на вычислительной машине по существу является электронной моделью исследуемого явления. Модель и явление подобны, критерии подобия у них одинаковы, или, что то же самое, индикаторы подобия равны единице.

Так, для рассмотренного примера

$$\Pi = \frac{x\omega}{v} = \text{idem},$$

или

$$\Lambda = \frac{x_c \omega_c}{v_c} = \frac{x_c}{t_c v_c} = 1,$$

откуда ~

$$v_c = \frac{x_c}{t_c}$$

Произвольно выбирается столько масштабных коэффициентов, сколько имеется в системе уравнений величин с независимыми размерностями. Остальные масштабные коэффициенты должны удовлетворять условиям, накладываемым на них индикаторами подобия.

Сделанный выбор масштабов не является окончательным. После пробных запусков модели их можно подгонять, устраняя просчеты, добиваясь, чтобы измеряемые величины не были очень малыми, не наблюдалось захода напряжений за 100 в. Четкость в решении этой части задачи в основном определяется навыком решающего.

4.1.4. Набор на модели функциональных зависимостей

Функциональные зависимости, входящие в дифференциальные уравнения, подлежащие решению на модели, моделируются при помощи блоков нелинейности модели. На вход блока нелинейности подается напряжение (аргумент) X . На выходе получается аппроксимированная отрезками прямых функция $f(X)$.

На рис. 6 изображена одна из ячеек блока нелинейности модели. К ячейке подводятся опорное напряжение $u_{оп}$ и входное напряжение

$$u_{вх}, u_{вх} = \pm X \text{ или } u_{вх} = -X.$$

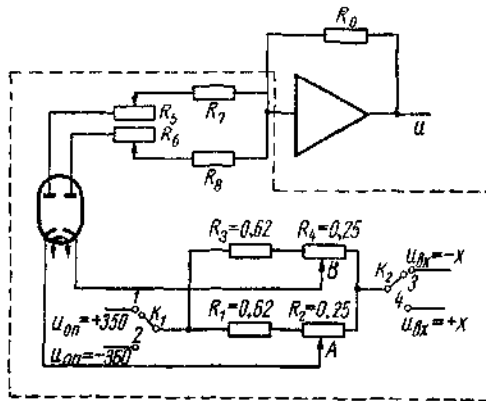


Рис. 6. Схема ячейки функционального преобразователя

Для указанного на рис. 6 положения лампы при положениях 1 и 3 ключей K_1 и K_2 каждая полулампа в отдельности позволяет

получить на выходе усилителя функцию $f(X)$, соответствующую изображенному на рис. 7, в графику.

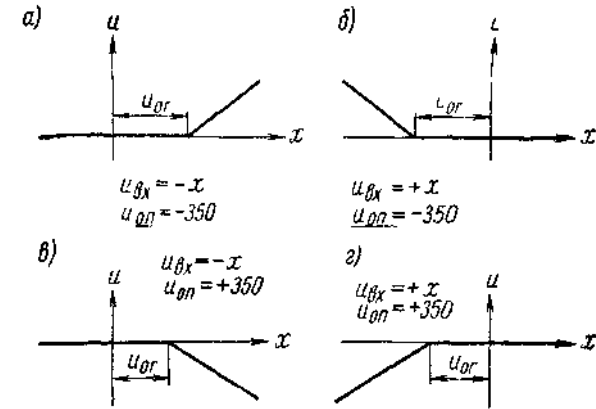


Рис. 7. Функции, образуемые ячейкой функционального преобразователя

Напряжение ограничения $u_{ог}$ определяется положением движка А (или В для правой полулампы, рис. 6). Наклон отрезка функции задается при помощи потенциометров R_5 и R_6 . Пусть, например, левая полулампа заперта. Очевидно, для этого достаточно поставить движок А потенциометра в крайнее левое положение, поскольку

$$|u_{вх}| \leq 100в < |u_{оп}| = 350в, R_1 = 0,62, R_2 = 0,25.$$

Движок В потенциометра R_4 цепи правой полулампы поставим в такое положение, чтобы полулампа открывалась при некотором определенном значении входного напряжения $u_{ог}$, $0 < u_{ог} < 100 в$. При $X < u_{ог}$ потенциал катода положительный, лампа заперта; при $X = u_{ог}$ потенциал катода становится равным нулю; при $X > u_{ог}$ лампа начинает пропускать ток, напряжение на выходе усилителя растет при этом пропорционально увеличению X , в целом, напряжение выхода усилителя соответствует рис. 7, в.

Аналогичную зависимость можно получить и при помощи левой полулампы; в случае, если работают обе части лампы, на выходе усилителя создается сумма функций, образованных обеими частями.

Если теперь ключи K_1 и K_2 поставить в положения 1 и 4, рис. 6, то при $X > 0$, потенциал катода становится положительным для любого положения движка В, лампа будет заперта. Для отрицательных же значений X можно выбрать при помощи потенциометра В такое

значение $X = u_{ог}$, при котором лампа откроется. На выходе усилителя получается функция, изображенная на рис. 7, з.

Если у лампы поменять местами катод и анод (соответствующие переключатели на рис. 6 не указаны), то для положений 2 и 3 ключей K_1 и K_2 на выходе усилителя будет функция рис. 7, б, для положения 2 и 4 — функция рис. 7, а. Таким образом, один диодный элемент способен воспроизвести одну из четырех зависимостей (рис. 7). Совокупность таких элементов, включаемых по рис. 8, позволяет аппроксимировать нужную функцию отрезками прямых, каждый диодный элемент воспроизводит один аппроксимирующий отрезок.

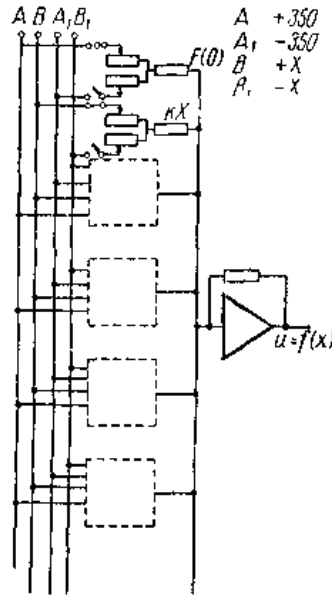


Рис. 8. Схема функционального преобразователя

Кроме диодов, в схему (рис. 8) включаются потенциометры, позволяющие получить значение функции при $X = 0$, $F(0)$, и первый аппроксимирующий отрезок по формуле kX . Пример аппроксимации показан на рис. 9.

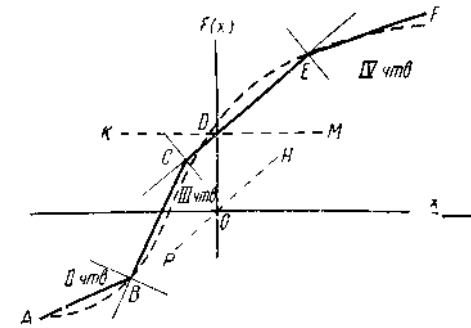


Рис. 9. Аппроксимируемая отрезками прямых функциональная зависимость

К постоянному напряжению $F(0)$ (прямая KM) добавляется напряжение kX (прямая PH), результирующее их напряжение изображено отрезком CE . В точках C и E начинают действовать диодные элементы, напряжения ограничения которых соответственно $(u_{ог})_c$ и $(u_{ог})_e$. В результате наложения создаваемых ими напряжений напряжение выхода усилителя от точек C и E изображается прямыми CB и EF . В точке B начинает действовать следующий диодный элемент, напряжение ограничения которого $(u_{ог})_b$. Результирующее напряжение идет по отрезку BA . Точность аппроксимации определяется видом функции (ее крутизной, числом точек перегиба) и количеством аппроксимирующих отрезков. У рассматриваемой модели блок нелинейности содержит 11 таких отрезков.

Моделирование произведений двух переменных $X(t) \cdot Y(t)$ осуществляется при помощи блока перемножения модели. На вход блока подаются напряжения $+X(t)$, $Y(t)$, $-X$, $-Y$, из них группируются две суммы — $+(X-Y)$, $-(X+Y)$. Обе суммы по отдельности при помощи двух наборов диодных элементов возводятся в квадрат, давая, соответственно, выражения $+(X-Y)^2$ и $-(X+Y)^2$. Эти выражения складываются и в результате имеем искомое произведение XY . Кроме описанного способа перемножения двух переменных, используются и некоторые другие. Так, для получения выражений $(X-Y)^2$ и $-(X+Y)^2$ применяются нелинейные полупроводниковые сопротивления, вольтамперная характеристика которых близка к квадратичной. Так, например, осуществляется перемножение в наборе нелинейных блоков, используемом в качестве приставки для расширения возможностей ряда моделей.

На примере рассматриваемой модели можно отметить и еще некоторые нелинейные операции, выполняемые моделями. У рассматриваемой имеются схемы с диодами, позволяющие моделировать люфт, некоторые виды трения и другие функции такого же характера. Рассматриваемая модель имеет схему программного режима, в определенные заданные моменты совершающую переключения контактов реле. Этим можно воспользоваться при моделировании удара, выпрямленного тока, для совершения различных переключений в схеме набора в процессе интегрирования уравнения.

4.1.5. Моделирование удара

В состав электронной модели входят блоки, позволяющие моделировать различные нелинейные зависимости, например удар. Задача моделирования удара рассматривается, в частности, при исследовании некоторых видов колебательных систем с ограничителем (например, машины ударного действия). В этом случае оказывается удачным использование реле для переключения конденсаторов в обратной связи усилителя, на выходе которого имеется величина скорости. Так, в обратную связь усилителя рассмотренной выше задачи, выходное напряжение которого соответствует скорости колеблющегося груза, включаются два конденсатора емкости c_1 и c_2 (рис. 10, а).

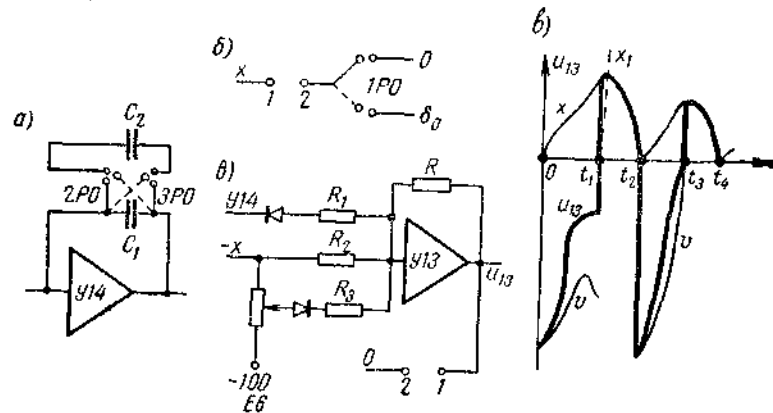


Рис. 10. Моделирование отскока

В момент удара срабатывает реле модели, и его контакты изменяют относительное расположение пластин конденсаторов, так что

задаваемое конденсаторами на выходе усилителя напряжение резко изменяется. Коэффициент отскока задается выражением

$$\eta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} = \frac{v_2}{v_1},$$

где v_1 и v_2 — соответственно скорости до удара и после него.

Рассмотрим некоторые возможности моделирования момента удара, т. е. момента срабатывания реле. Будем считать, что $0 \ll x \ll \delta_0$, т. е. колеблющееся тело помещено между двумя ограничителями, так что при $x = 0$ и $x = \delta_0$ имеет место удар.

1. Клемму программного режима 1 (рассматриваемая модель) соединяем с выходом усилителя, дающим координату колеблющегося тела. На клемму 2 подаем попеременно напряжение 0 или δ_0 (рис. 10, б). Пусть x уменьшается, а на клемме 2 стоит 0. Когда x достигнет нуля, реле срабатывает, при этом меняются местами контакты конденсаторов (скачком изменяется скорость), на клемму 2 подается напряжение δ_0 . Теперь x увеличивается, и когда x достигнет δ_0 , процесс повторяется. Недостатком этой схемы является то, что подобное моделирование возможно лишь при установившемся режиме работы, с переменным чередованием ударов сверху и снизу.

2. Второй способ, как и предыдущий, определяется особенностями реле *po* модели: реле срабатывает при сравнении напряжений клемм 1 и 2, причем это сравнение происходит каждый раз с другой стороны, т. е. разность напряжений клемм при замыкании и размыкании реле имеет различные знаки.

На клемме 2 теперь постоянно стоит напряжение 0. Клемма 1 соединяется с выходом усилителя 13 (рис. 10, в). На вход усилителя $V13$ подаются напряжения, соответствующие: положительному значению скорости; уменьшенному перемещению x ; перемещению x , значительно увеличенному при помощи сопротивления R_3 , это напряжение при помощи специальной схемы появляется только при $x = \delta_0$.

Сопротивления R_1, R_2, R_3 подбираются так, чтобы напряжение на выходе усилителя $V13$ u_{13} при возрастании x (в это время выпрямитель пропускает напряжение от усилителя $V14$), при $0 \ll x \ll \delta_0$ было меньше нуля вплоть до значений v , отличающихся от нуля как угодно мало, и чтобы при достижении $x = \delta_0$ это напряжение с нужной быстротой перешло через нуль.

На рис. 10 дан график напряжения u_{13} (жирная линия). Здесь же показаны графики напряжения на выходе усилителя $V13$, соответствующие скорости (линия v), перемещению (линия x) и напряжению x_1 (линия x_1).

Из рис. 10 видно, что вначале (промежуток времени $O - t_1$) основной вклад в u_{13} дает скорость v и незначительный — перемещение x (на рисунке линия x дана в увеличенном масштабе). В момент t_1 , когда $x = \delta_0$, схема с источником E_6 резко увеличивает напряжение u_{13} ; u_{13} переходит через нуль, реле срабатывает, моделируется отскок. В период $t_1 - t_2$ на выходе усилителя $V13$ имеется только уменьшенное напряжение x . Когда x достигает нуля, реле вновь срабатывает, так как нуль достигнут уже с другой стороны относительно напряжения сравнения клеммы 2 и моделируется отскок.

Скорость при этом изменяет знак, и на выходе усилителя $V13$ появляется напряжение v , которое складывается с уменьшенным напряжением x . Теперь пусть x не достигает δ_0 . Но при стремлении v к нулю при некотором, достаточно малом значении v (относительная малость определяется сопротивлениями R_1, R_2), напряжения v и x компенсируют друг друга, $u_{13} = 0$, реле срабатывает, тем самым подготовившись к очередному срабатыванию в момент t_4 (которое не происходит без срабатывания в момент t_3).

Практически, как показывает работа на модели, эта схема не вносит погрешности; отскок совершается точно при $x = 0$ и $x = \delta_0$, а переключение в момент t_3 , ввиду того, что $v \approx 0$, не дает разрыва на осциллограмме скорости. Необходимо лишь наилучшим образом подобрать сопротивления R_1, R_2, R_3 . Наряду с возможностью моделирования отскока при ударе как сверху, так и снизу, эта схема обладает тем преимуществом, что позволяет моделировать силу трения (знак которой определяется знакам скорости). Эта возможность появляется благодаря срабатыванию реле при каждом изменении направления движения.

4.2. Метод структурного математического моделирования

4.2.1. Описание метода

Математическое моделирование является способом отражения внутреннего содержания исследуемого объекта или характеристик изучаемого явления, основанным на использовании математического описания (математической модели) происходящих реальных физических процессов. Цель математического моделирования состоит в определении количественных соотношений между отдельными параметрами реального объекта путем изучения функциональных зависимостей, содержащихся в математической модели.

Математическое моделирование может быть произведено численным методом, с помощью автоматической цифровой вычислительной машины или посредством аналоговой вычислительной машины — моделирующей установки (АВМ). Преимуществами моделирования на аналоговых машинах являются сравнительно меньшая сложность оборудования, большая скорость решения, возможность подключения реальной аппаратуры, простота в обслуживании и наглядность процессов. Однако эффективность применения АВМ в значительной степени зависит от того, насколько эти установки целесообразно используются, в частности от того, насколько совершенна методика, которая применяется при подготовке задачи для ее решения на АВМ. Ниже освещаются различные методы такой подготовки

Следует указать на возможность двух различных подходов к решению задач. В первом случае АВМ используется для чисто математического моделирования исследуемой системы дифференциальных уравнений без отражения в модели реальной структуры объекта. Во втором случае АВМ используется для построения структурной модели, представляющей собой аналог, решающие элементы которого соединены между собой в соответствии со структурной схемой исследуемой системы.

При использовании структурного метода модель системы представляется в виде блоков, имитирующих работу отдельных физических узлов (электрических машин, усилителей, стабилизирующих устройств и т. д.), причем каждый блок выполняется из моделей типовых динамических звеньев. Таким образом, структурное моделирование предполагает воспроизведение структуры объекта и его элементов, которые представляются комбинацией элементарных звеньев.

Теория автоматического регулирования различает следующие типовые элементарные звенья: усилительное, дифференцирующее, интегрирующее, апериодическое, колебательное, запаздывающее. Свойства и особенности каждого из перечисленных элементарных звеньев детально изучены и широко освещены в литературе по автоматическому управлению.

Целесообразность применения структурных моделей связана с тем, что при исследовании на АВМ сохраняется структура исследуемого объекта и поэтому на модели легко воспроизводится изменение отдельных параметров, способов включения различного рода стабилизирующих устройств, выбор обратных связей, необходимых для получения определенного качества переходного процесса системы.

При моделировании желательно, чтобы сохранялись основные внутренние и внешние связи и направления входных и выходных сигналов системы. Кроме того, весьма удобно, когда изменение параметра системы (коэффициента усиления, постоянной времени и др.) на модели осуществляется изменением коэффициента передачи не более чем одного-двух решающих устройств.

Для решения задачи на АВМ исходная система уравнений должна быть преобразована к виду, наиболее удобному для исследования на модели.

Произвольное решение исходной системы уравнений на АВМ не всегда приводит к получению электронной модели, удовлетворяющей указанным требованиям. При этом структура модели в общем случае может не соответствовать структуре изучаемого объекта.

Построение модели по структурной схеме дает возможность полностью воспроизвести связи, имеющиеся в реальной системе. Отметим некоторые дополнительные преимущества моделей, построенных на основе структурных схем: при наборе решающих элементов можно использовать стандартные схемы моделей элементов электропривода и других электромеханических устройств и моделей типовых динамических звеньев; удобна проверка правильности набора отдельных узлов модели, так как переходные характеристики каждого типового звена известны; имеется возможность замены части модели реальной аппаратурой; на структурной схеме наглядно видны значения параметров отдельных звеньев, что дает возможность упростить модель за счет исключения звеньев с малыми параметрами. Применение структурного метода требует наличия библиотеки стандартных схем отдельных электромеханических устройств, построенных на основе достаточно полного математического описания протекающих в них процессов.

Структурные схемы элементов должны быть универсальными с точки зрения применения в исследованиях различного типа электромеханических устройств и удобными для их соединения. Кроме того, в структурных схемах необходимо учитывать ряд специфических требований: сокращение числа решающих элементов модели, по возможности исключение дифференцирующих элементов, обеспечение устойчивой работы модели.

В качестве параметров структурной схемы используются постоянные времени и коэффициенты усиления, которые обычно легко определяются экспериментально. В этом случае все входные и выходные величины звеньев структурной схемы имеют одинаковую размерность или являются безразмерными.

Коэффициенты структурной схемы, полученные экспериментальным путем, имеют несомненное преимущество по сравнению с расчетными. Результаты решения задачи на электронной модели с экспериментальными коэффициентами значительно ближе отражают физические процессы реального объекта.

Это определяется прежде всего следующими факторами:

- а) неточностью расчетных формул (в особенности выражения для индуктивностей магнитно-связанных контуров);
- б) отклонениями параметров реальной машины или аппарата от расчетных данных, возникающими в процессе производства;
- в) различного рода допущениями, принятыми при составлении дифференциальных уравнений.

Второстепенные факторы, имеющие место в каждом реальном элементе системы автоматического управления, не учтенные с целью сокращения решающих усилителей, все же вносят дополнительные ошибки при моделировании. Коэффициенты уравнений, полученные экспериментальным путем, являются усредненными и в определенном диапазоне частот позволяют уменьшать ошибки. Более подробные рекомендации по составлению структурных схем и их преобразованиям, а также некоторые другие вопросы, связанные с подготовкой задач для моделирования, излагаются в последующих разделах.

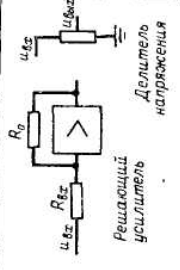
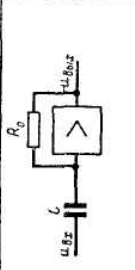
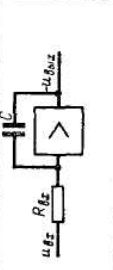
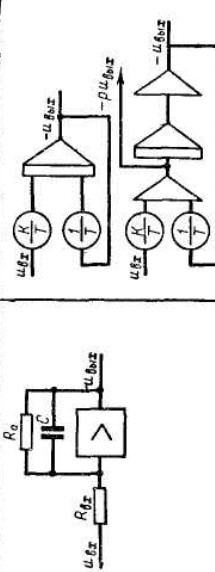
4.2.2. Схемы элементарных моделей основных типовых звеньев

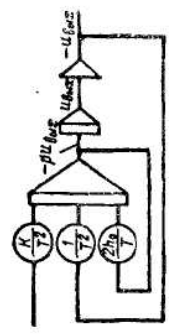
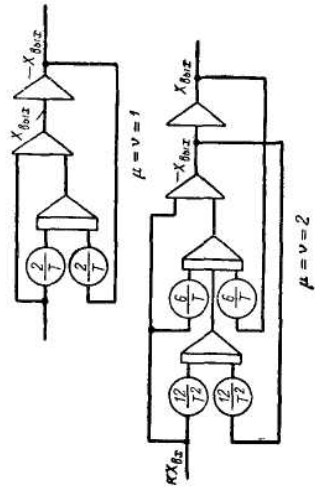
Элементарное звено описывается уравнением связи входного и выходного сигналов. Из-за однотипности дифференциальных уравнений связи различных по конструктивному исполнению и принципу действия элементов число типовых звеньев также является ограниченным.

Каждое элементарное типовое звено обладает следующими свойствами: 1) оно является однонаправленным, т. е. управляющий сигнал проходит в одном направлении от входа к выходу; 2) подключение к выходу элементарного звена последующих звеньев не изменяет его передаточной функции; 3) дифференциальное уравнение связи, характеризующее данное элементарное звено, имеет порядок не выше второго.

Ниже рассматриваются основные типовые звенья, а соответствующие им схемы электронных моделей сведены в табл. 1.

Таблица 1

№ п/п.	Наименование звена	Передающая функция	Схемное изображение
1	Усилительное	K	 <p>Решающий усилитель</p> <p>Делитель напряжения</p> <p>Схемное изображение</p> <p>Делитель напряжения</p> <p>Линейный блок</p> <p>БН</p> <p>Делитель напряжения усилитель нелинейности</p>
2	Дифференцирующее	Tp	 <p>Дифференцирующий усилитель</p>
3	Интегрирующее	$\frac{1}{Tp}$	 <p>Интегрирующий усилитель</p>
4	Аперiodическое	$\frac{K}{1+Tp}$	

5	Колебательное	$\frac{K}{1 + 2h_0Tp + T^2p^2}$	
6	Запаздывающее	$Ke^{-pT} \approx K \frac{1 - 0,5pT}{1 + 0,5pT} \approx$ $\frac{1}{1 - 0,5pT + \frac{1}{12}pT^2}$ $\approx k \frac{1}{1 + 0,5pT + \frac{1}{12}p^2T^2}$	 <p>$\mu = \nu = 1$</p> <p>$\mu = \nu = 2$</p>

Усилительное звено. Связь двух величин между собой, выраженная алгебраическим уравнением, представляет усилительное звено.

Передаточная функция имеет вид:

$$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = K, \quad (1)$$

где $X_{\text{вх}}$, $X_{\text{вых}}$ — входной и выходной сигналы; K — коэффициент усиления звена. Усилительное звено не является частотно-зависимым. Выходной сигнал по фазе совпадает с входным сигналом, а по модулю в K раз больше входного во всем спектре частот:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{вых}} &= \varphi_{\text{вх}}; \\ M_{\text{вых}} &= KM_{\text{вх}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где φ , M — фаза и модуль сигнала.

Коэффициент усиления K в общем виде представляет нелинейную функцию.

На электронной модели усилительное звено с постоянным коэффициентом усиления воспроизводится решающим усилителем с активным сопротивлением на входе и в цепи обратной связи :

$$K = \frac{R_0}{R_{\text{вх}}},$$

где R_0 — сопротивление цепи обратной связи; $R_{\text{вх}}$ — входное сопротивление.

В случае нелинейной функции K в модели используются специальные блоки нелинейности.

Дифференцирующее звено. Звенья, выходная величина которых определяется скоростью изменения входной, называются дифференцирующими.

В системах автоматического управления подобные звенья часто встречаются в виде гибких обратных связей.

Уравнение дифференцирующего звена:

$$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = Tp, \quad (3)$$

где T — постоянная времени;

$p=d/dt$ — символ дифференцирования;

Выражения для фазы и модуля имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\text{вых}} &= \varphi_{\text{вх}} + \frac{\pi}{2}; \\ M_{\text{вых}} &= T\Omega M_{\text{вх}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Электронная модель дифференцирующего звена представляет собой решающий усилитель с конденсатором C во входной цепи и активным сопротивлением R_0 в цепи обратной связи, определяющим постоянную времени $T = R_0 C$.

Работа такого усилителя недостаточно устойчива из-за существенного влияния высокочастотных помех. В комплект аналоговых вычислительных машин иногда включаются специальные блоки дифференцирования. Однако в практических задачах операция дифференцирования используется весьма редко, а формирование сигналов, содержащих производную, осуществляется схемным решением без введения блоков дифференцирования.

Интегрирующее звено. Выходная величина интегрирующего звена определяется интегралом от входной величины:

$$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{1}{Tp}. \quad (5)$$

Выражение для фазы и модуля имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{вых}} &= \varphi_{\text{вх}} - \frac{\pi}{2}; \\ M_{\text{вых}} &= M_{\text{вх}} \cdot \frac{1}{T\Omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрирующее звено на электронной модели выполняется в виде решающего усилителя, в цепи обратной связи которого включается конденсатор емкостью C , а на входе — активное сопротивление $R_{\text{вх}}$.

Постоянная времени

$$T = R_{\text{вх}} C.$$

Апериодическое (инерционное) звено. Для апериодического звена форма уравнения связи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} TpX_{\text{вых}} + X_{\text{вых}} &= KX_{\text{вх}}; \\ \frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} &= \frac{K}{1 + Tp}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Фаза и модуль определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\text{вых}} &= \varphi_{\text{вх}} - \arctg \Omega T; \\ M_{\text{вых}} &= M_{\text{вх}} \frac{K}{\sqrt{1 + (T\Omega)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Кривые зависимости фазы и модуля от частоты приведены на рис. 1.

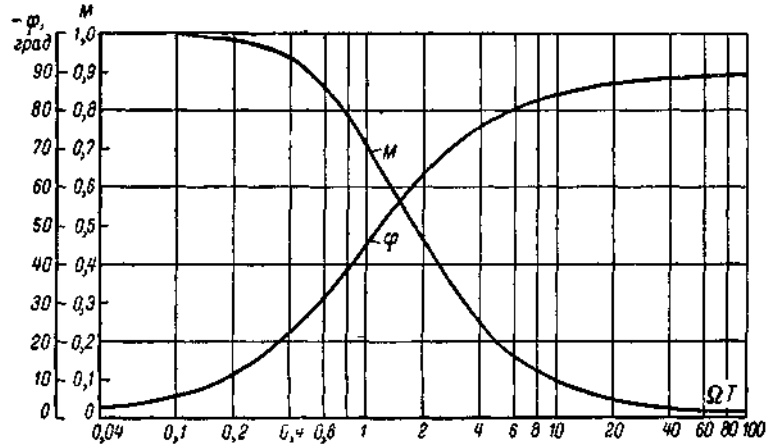


Рис. 1. Частотные характеристики аperiodического звена.

Аperiodическое звено можно осуществить на решающем усилителе с активным сопротивлением на входе $R_{вх}$, в котором цепь обратной связи представляет собой параллельное соединение конденсатора C и активного сопротивления — R_0 .

$$K = \frac{R_0}{R_{вх}}; \quad R_0 C = T.$$

Такое представление аperiodического звена обычно связано с применением интегрирующего усилителя, охваченного жесткой отрицательной связью.

Для воспроизведения аperiodического звена на электронной модели достаточно одного решающего усилителя. Однако иногда в структурной схеме требуется иметь не только выходную величину, но и ее тервую производную для формирования сигнала гибкой обратной связи. В этом случае аperiodическое звено набирается на трех решающих усилителях. На входе первого суммирующего усилителя снимается сигнал производной выходной величины. Таким образом удастся избежать применения специальных дифференцирующих блоков.

Звено запаздывания. Сигнал на выходе запаздывающего звена повторяет входной, но с запаздыванием по времени на величину T_3 с одновременным изменением масштаба процесса в K раз.

Уравнение связи для запаздывающего звена:

$$X_{вых} = K X_{вх}(t - T_3), \tag{9}$$

или в операторной форме записи

$$X_{вых} = K e^{-pT_3} X_{вх}. \tag{10}$$

Выражения для фазы и модуля запаздывающего звена имеют вид:

$$\varphi_{вых} = \varphi_{вх} - \Omega T_3, \tag{11}$$

$$M_{вых} = K M_{вх}.$$

Существует ряд способов воспроизведения запаздывающего звена на модели. Ниже приводится метод, основанный на применении активных цепей. Выражение (10) раскладывается в дробный ряд Пада :

$$e^x = \lim_{(\mu + \nu) \rightarrow \infty} \frac{F_{\mu, \nu}(x)}{G_{\mu, \nu}(x)}, \tag{12}$$

где

$$F_{\mu, \nu} = 1 + \frac{\nu x}{(\mu + \nu) 1!} + \frac{\nu(\nu - 1)x^2}{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1) 2!} + \dots + \frac{\nu(\nu - 1) \dots 2 \cdot 1 x^\nu}{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1) \dots (\mu + 1) \nu!},$$

$$G_{\mu, \nu} = 1 - \frac{\mu x}{(\mu + \nu) 1!} + \frac{\mu(\mu - 1)x^2}{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1) 2!} - \dots + \frac{(-1)^\mu \mu(\mu - 1) \dots 2 \cdot 1 x^\mu}{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1) \dots (\nu + 1) \mu!}.$$

В зависимости от величины T_3 и требуемой точности воспроизведения запаздывающего звена осуществляется выбор количества членов разложения.

Так, например, для $\mu = \nu = 1$ получим:

$$e^{-pT} = \frac{1 - 0,5pT}{1 + 0,5pT},$$

для $\mu = \nu = 2$

$$e^{-pT} = \frac{1 - 0,5pT + \frac{1}{12} T^2 p^2}{1 + 0,5pT + \frac{1}{12} T^2 p^2}$$

и т. д.

Точность воспроизведения запаздывающего звена дробным рядом Пада оценивают по частотным характеристикам. Модуль запаздывающего звена, вычисленный по формулам разложения, не зависит от частоты возмущающего сигнала, т. е. определяется выражением (11), а зависимость фазы от частоты носит нелинейный характер. Кривые погрешностей фазовой характеристики для различного количества членов разложения $\mu = \nu = n$ представлены на рис. 2.

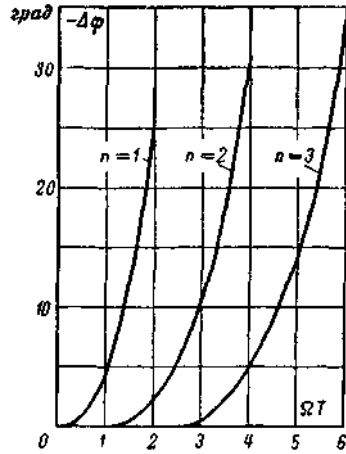


Рис. 2. Кривые погрешностей фазовой приближенной записи запаздывающего звена.

Колебательное звено. Передаточная функция колебательного звена имеет вид:

$$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{K}{T^2 p^2 + 2h_0 T p + 1}, \quad (13)$$

где T — условная постоянная времени;

h_0 — относительный коэффициент затухания.

Частный случай выражения (13) соответствует относительному коэффициенту затухания $h_0 = 0$ и характеризует процесс без затухания колебаний.

Звено с передаточной функцией

$$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{K}{T^2 p^2 + 1} \quad (14)$$

называют консервативным или резонансным звеном.

В этом случае величина

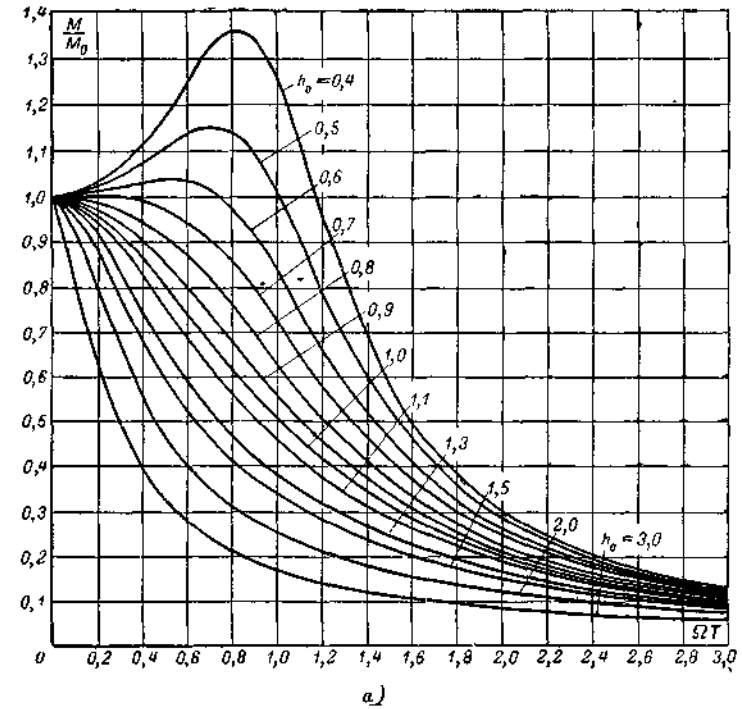
$$T = \frac{1}{\Omega_0},$$

где Ω_0 — частота незатухающих колебаний.

Запишем выражения для фазы и модуля колебательного звена:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\text{вых}} &= \varphi_{\text{вх}} - \arctg \frac{2h_0 T \Omega}{1 - T^2 \Omega^2}; \\ M_{\text{вых}} &= M_{\text{вх}} \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \Omega^2)^2 + (2h_0 T \Omega)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Частотные характеристики колебательного звена для различных коэффициентов затухания показаны на рис. 3.



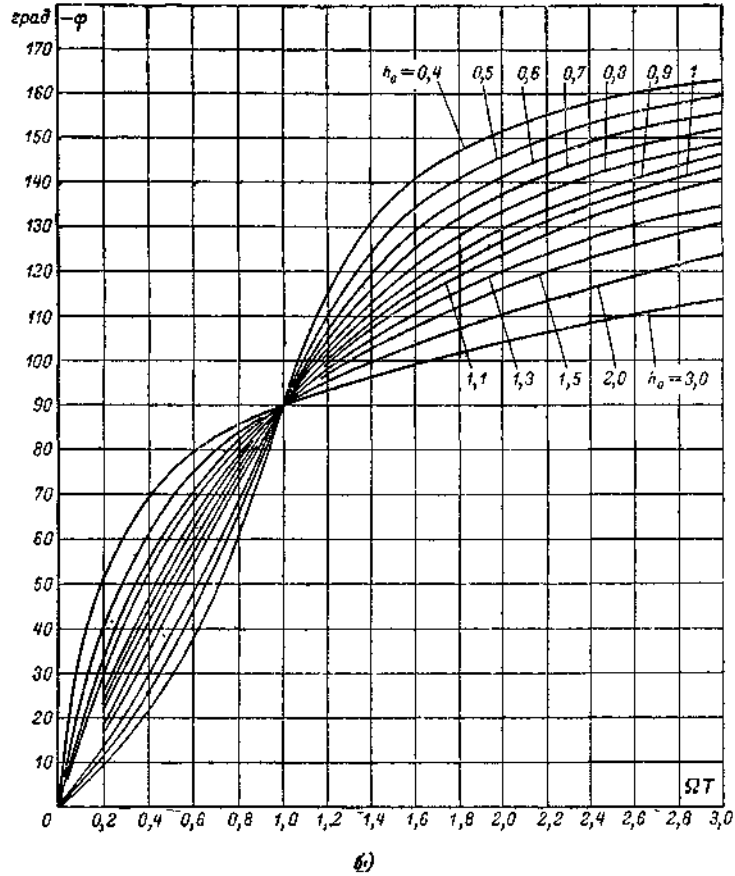


Рис 3. Частотные характеристики идеального колебательного звена.
а — амплитудные; б — фазовые.

Для воспроизведения колебательного звена на электронной модели требуются три решающих усилителя. Блок-схема приведена в табл. 1.

При снятии частотных характеристик электронной модели исследуемого объекта на его вход подают синусоидальное напряжение консервативного звена.

Для установки определенной частоты колебаний можно воспользоваться расчетными данными, приведенными в табл. 2.

Таблица 2

K_D	0,00253	0,00395	0,0158	0,0632	0,142	0,253
f	0,008	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08

Продолжение табл. 1-2

K_D	0,395	0,89	1,58	6,32	14,2	25,3	39,5
f	0,1	0,15	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

Величина коэффициента усиления разомкнутого звена

$$K_D = K_1 K_2 K_3 K_4$$

определяет частоту колебаний $f = \frac{\sqrt{K_D}}{2\pi}$.

В случае, если частота колебаний консервативного звена является функцией некоторого управляющего воздействия, в процессе решения задачи может быть использована блок-схема решающих элементов, приведенная на рис. 4.

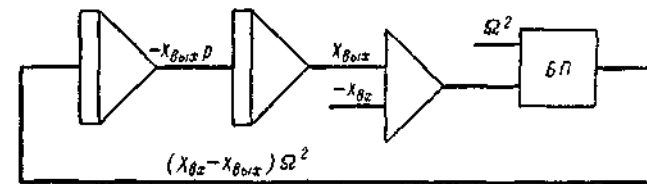


Рис. 4. Схема электронной модели консервативного звена с управляемой частотой колебаний.

В табл. 1 приводятся схемные изображения решающих усилителей с пассивными элементами для получения распространенных передаточных функций.

4.2.3. Преобразования структурных схем

Построение структурной схемы элементов электромеханической системы можно осуществить по математическим уравнениям, приведенным к указанной ниже форме записи. В этой преобразованной системе уравнений сокращено количество переменных, а постоянные коэффициенты сведены к коэффициентам усиления и постоянным времени.

В ряде случаев такой путь решения задачи — от исходной системы уравнений к преобразованной и далее к структурной схеме является неудобным. Если количество уравнений, описывающих физические процессы в элементе электропривода, достаточно велико, то произвести нужные преобразования весьма затруднительно. Во-первых, не ясно, какие переменные могут быть изъяты из системы уравнений без ущерба для наглядной модели; во-вторых, порядок исключения переменных должен быть вполне определенный. Поэтому иногда используется другой метод построения структурной схемы. По исходной системе уравнений составляется первоначальная структурная схема элемента с учетом направления основного сигнала и с сохранением физической сущности процесса. Так, например, для магнитно-связанных контуров очередность формирования переменных следующая: приложенное напряжение обуславливает возникновение тока в контуре; ток создает н. с., сумма всех н. с. образует магнитный поток, определяющий появление э. д. с. В дальнейшем полученная структурная схема приводится к более удобной компактной форме, а её параметры сводятся к реальным коэффициентам усиления и постоянным времени. При этом все преобразования производятся структурным методом без обращения к первоначальным математическим уравнениям. Правила преобразования структурных схем подробно рассмотрены А. С. Шаталовым. Ниже мы ознакомимся с некоторыми необходимыми для практической работы схемами и способами их преобразования.

Согласно-параллельная схема. Звенья, которые имеют общий вход, а их выходные сигналы суммируются, образуют согласно-параллельную схему включения. На рис. 5,а изображена трехконтурная согласно-параллельная схема.

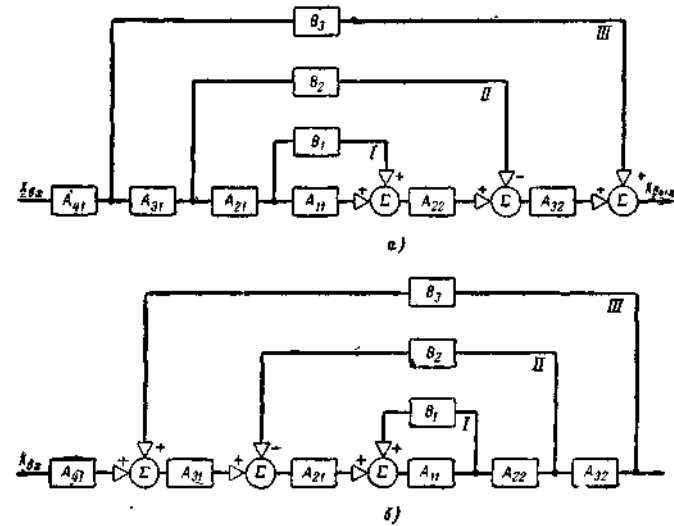


Рис. 5. Схемы включения элементов.
а — согласно-параллельная; б — встречно-параллельная.

Для перехода от нескольких звеньев к одному эквивалентному пользуются выражением общей передаточной функции:

$$W = \frac{X_{вых}}{X_{вх}} = A_{41} \{ B_3 + A_{31} A_{32} [-B_2 + A_{21} A_{22} (B_1 + A_{11})] \}, \quad (16)$$

где A, B — передаточные функции соответствующих звеньев схемы.

Встречно-параллельная схема обычно называется схемой обратной связи. Она часто используется для представления систем автоматического регулирования.

На рис. 5,б изображена трехконтурная встречно-параллельная схема. При свертывании схемы в одно сложное звено с передаточной функцией W можно использовать выражение

$$\frac{1}{W} = \frac{X_{вх}}{X_{вых}} = \frac{1}{A_{41}} \left\{ -B_3 + \frac{1}{A_{31} A_{32}} \left[B_2 + \frac{1}{A_{21} A_{22}} \left(-B_1 + \frac{1}{A_{11}} \right) \right] \right\}. \quad (17)$$

В качестве примера влияния жестких и гибких обратных связей на параметры типовых звеньев в табл. 3 приводятся соотношения, полученные на основании выражения (17).

Таблица 3

Передаточная функция звена обратной связи	0	$-K_{o,c}$
Передаточная функция усилительного звена, охваченного обратной связью	K_y	$\frac{K_y}{1 + K_y K_{o,c}}$
Передаточная функция апериодического звена, охваченного обратной связью	$\frac{K_a}{1 + T_a p}$	$\frac{K_a}{1 + \frac{T_a}{1 + K_a K_{o,c}} p}$
Передаточная функция колебательного звена, охваченного обратной связью	$\frac{K_k}{1 + 2h_0 T p + T^2 p^2}$	$\frac{K_k}{1 + \frac{2h_0 T}{1 + K_k K_{o,c}} p + \frac{T^2 p^2}{1 + K_k K_{o,c}}}$
Передаточная функция дифференцирующего звена, охваченного обратной связью	$T_d p$	$\frac{T_d p}{1 + T_d K_{o,c} p}$
Передаточная функция интегрирующего звена, охваченного обратной связью	$\frac{1}{T_i p}$	$\frac{1}{K_{o,c} + \frac{T_i}{K_{o,c}} p}$

$+K_{o,c}$	$-T_{o,c} p$	$+T_{o,c} p$
$\frac{K_y}{1 - K_y K_{o,c}}$	$\frac{K_y}{1 + K_y T_{o,c} p}$	$\frac{K_y}{1 - K_y T_{o,c} p}$
$\frac{K_a}{1 - K_a K_{o,c}}$ $1 + \frac{T_a}{1 - K_a K_{o,c}} p$	$\frac{K_a}{1 + (T_a + K_a T_{o,c}) p}$	$\frac{K_a}{1 + (T_a - K_a T_{o,c}) p}$
$\frac{K_k}{1 - K_k K_{o,c}}$ $1 + \frac{2h_0 T}{1 - K_k K_{o,c}} p + \frac{T^2 p^2}{1 - K_k K_{o,c}}$	$\frac{K_k}{1 + (2h_0 T + K_k T_{o,c}) p + T^2 p^2}$	$\frac{K_k}{1 + (2h_0 T - K_k T_{o,c}) p + T^2 p^2}$
$\frac{T_d p}{1 - T_d K_{o,c} p}$	$\frac{T_d p}{1 + T_d T_{o,c} p^2}$	$\frac{T_d p}{1 - T_d T_{o,c} p^2}$
$\frac{1}{K_{o,c}}$ $1 - \frac{T_i}{K_{o,c}} p$	$\frac{1}{(T_i + T_{o,c}) p}$	$\frac{1}{(T_i - T_{o,c}) p}$

Правила преобразования структурных схем. Необходимым условием различных преобразований структурной схемы считается неизменность выходной величины. При этом отдельные участки тракта прохождения сигналов до и после преобразования могут быть неэквивалентными. Перестановки сумматоров и узловых точек структурной схемы основываются на свойстве неизменности суммы при перемене места слагаемых. Сущность преобразований легко проследить на примере. На рис. 6,а показана взаимная перестановка сумматоров.

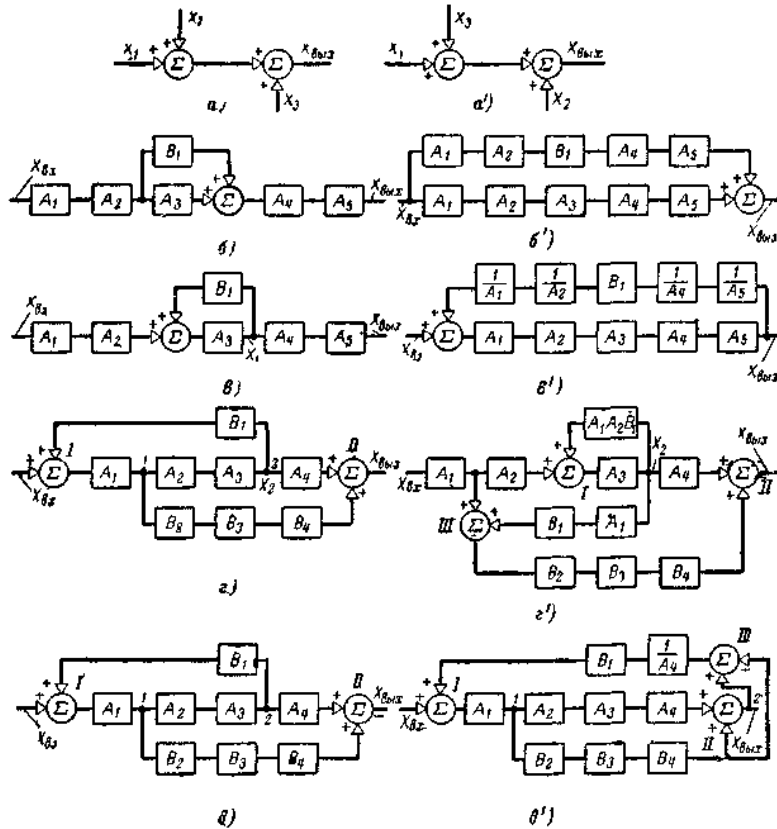


Рис. 6. Различные преобразования структурных схем.

Условия переноса сумматоров и узловых точек через линейные звенья для согласно-параллельной и встречно-параллельной схем иллюстрируются схемами, изображенными на рис. 6, б, в. В справедливости проделанных операций легко убедиться по выражению для выходного сигнала

$$X_{\text{ВЫХ}} = A_1 A_2 (B_1 + A_3) A_4 A_5 X_{\text{ВХ}} \text{ для схемы б;}$$

$$X_{\text{ВЫХ}} = (A_1 A_2 B_1 A_4 A_5 + A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) X_{\text{ВХ}} \text{ для схемы б'.$$

Аналогично для встречно-параллельной схемы

$$X_{\text{ВЫХ}} = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 X_{\text{ВХ}} + B_1 A_3 A_4 A_5 X_1 \text{ для схемы в;}$$

$$X_{\text{ВЫХ}} = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 X_{\text{ВХ}} + \frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} B_1 \frac{1}{A_4} \times \\ \times \frac{1}{A_5} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 X_{\text{ВЫХ}} \text{ для схемы в',}$$

где

$$X_1 = \frac{1}{A_3} \frac{1}{A_1} X_{\text{ВЫХ}}.$$

Перенос сумматора через узловую точку и узловой точки через сумматор показан на рис. 6, з, д (перенос рассматривается в направлении основного сигнала).

На основании вышеизложенного можно сформулировать следующие правила:

1. В согласно-параллельных и встречно-параллельных схемах при переносе сумматора через звенья основного тракта сигнала в цепи параллельных связей вводятся передаточные функции этих звеньев (если перенесение сумматора происходило по направлению основного сигнала) и обратные передаточные функции (если перенесение сумматора было в противоположном направлении основного сигнала).
2. В согласно-параллельных и встречно-параллельных схемах при переносе узловой точки через звенья основного тракта сигнала в цепи параллельных связей вводятся передаточные функции этих звеньев (если перенесение узловой точки было противоположным направлению основного сигнала) и обратные передаточные функции (если перенесение узловой точки было по направлению основного сигнала).
3. При переносе сумматора через узловую точку во все ветви, сходящиеся в узловой точке, вводятся сигналы параллельных цепей сумматора с тем же знаком и добавлением в эти цепи передаточных функций звеньев, разделяющих сумматор и узловую точку
4. При переносе узловой точки через сумматор во все переносимые ветви узловой точки вводятся сигналы параллельных цепей сумматора с противоположным знаком.

Разберем на примере перенос сумматора I через узловую точку I и два звена A_1 и A_2 (рис. 6, з).

В цепь обратной связи, охватывающей звено A_3 , добавляются передаточные функции звеньев A_1 и A_2 , поскольку сдвиг сумматора осуществляется в направлении основного сигнала.

В ветвь, отходящую от узловой точки I со звеньями B_2, B_3, B_4 , вводится сигнал на сумматор III от обратной связи сумматора I с

сохранением знака и добавлением передаточной функции A_1 звена, находящегося между сумматором I и узловой точкой I .

При переносе узловой точки 2 через звено A_4 и сумматор II (схема d) в цепь обратной связи добавляется обратная передаточная функция $1/A_1$ так как перенос осуществляется по направлению основного сигнала. В переносимую ветвь узловой точки 2 вводится сигнал параллельной цепи сумматора II с обратным знаком (отрицательный сигнал, поступающий на сумматор III).

В качестве примера практического использования описанных правил преобразования разберем случай, часто встречающийся в задачах с магнитно-связанными контурами.

Предположим, что передаточная функция, выражающая связь между напряжением на входе усилителя и э. д. с. на его выходе, представлена апериодическим звеном (рис. 7,а).

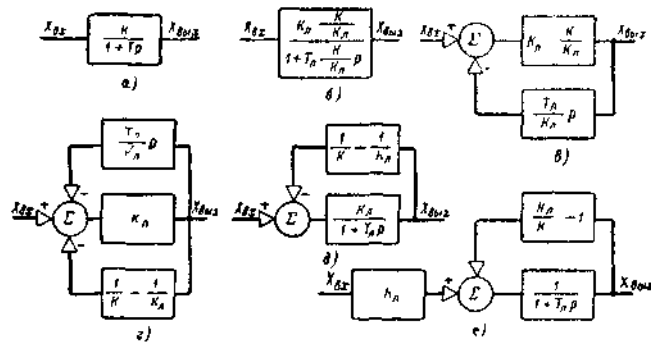


Рис. 7. Пример структурного преобразования апериодического звена.

а—е — схемы различных преобразований звена

Коэффициент усиления K и постоянная времени T нелинейны и зависят от степени насыщения магнитопровода. В нашем изображении K и T являются функцией $X_{\text{вых}}$.

Математическое описание рассматриваемого звена приводится подробно в последующих параграфах. Известны экспериментальные данные: кривая намагничивания и постоянная времени, соответствующая линейному участку кривой. Для получения простой и удобной электронной модели можно преобразовать апериодическое звено, пользуясь данными табл. 1. Вводя понятия коэффициента усиления и постоянной времени на линейном участке кривой намагничивания ($K_{\text{л}}$, $T_{\text{л}}$), перейдем к схеме б. Далее заменим апериодическое звено усилительным, охваченным отрицательной

гибкой связью (рис. 7,б). В схеме z для основной цепи прохождения сигнала мы получим постоянный коэффициент усиления $K_{\text{л}}$, а нелинейный характер процессов учтен жесткой отрицательной связью. Окончательная схема e является более удобной по сравнению с первоначальной. Нелинейным является один параметр — коэффициент обратной связи, который легко пересчитывается по кривой намагничивания. Электронная модель по схеме e позволяет исследовать переходные процессы в усилителе с учетом или без учета насыщения, простым включением или отключением цепи обратной связи.

Для простоты изложения разобран случай преобразований с элементарным звеном. В действительности в сложных схемах эффект структурных преобразований значительно больший.

4.2.4. Составление блок-схемы электронной модели

Для решения системы уравнений на моделирующей установке необходимо совершить ряд подготовительных операций, заключающихся в составлении блок-схемы электронной модели, выборе масштабных коэффициентов переменных и времени, установке начальных условий и возмущающих сигналов.

Существует ряд способов составления блок-схемы электронной модели. Остановимся на важнейших из них.

Составление блок-схемы по дифференциальным уравнениям. Пусть исследуемые переходные процессы описываются системой дифференциальных уравнений четвертого порядка. Набор задачи осуществляется методом понижения порядка производной. Для этой цели уравнения разрешаются относительно старшей производной искомой функции. Например,

$$a_4 \frac{d^4 x}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = y; \quad (18)$$

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = -\frac{a_3}{a_4} \frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{a_2}{a_4} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{a_1}{a_4} \frac{dx}{dt} - \frac{a_0}{a_4} x + \frac{y}{a_4}. \quad (19)$$

Предположив, что правая часть уравнения (19) нам известна, производим последовательное интегрирование и сложение компонент, входящих в старшую производную. Очевидно, количество операций интегрирования должно соответствовать порядку дифференциального уравнения. При указанном методе решения задачи используются интегрирующие блоки электронной модели, что позволяет уменьшить влияние помех и способствует устойчивой работе электронной модели.

Блок-схема модели для выражения (18) приведена на рис. 8.

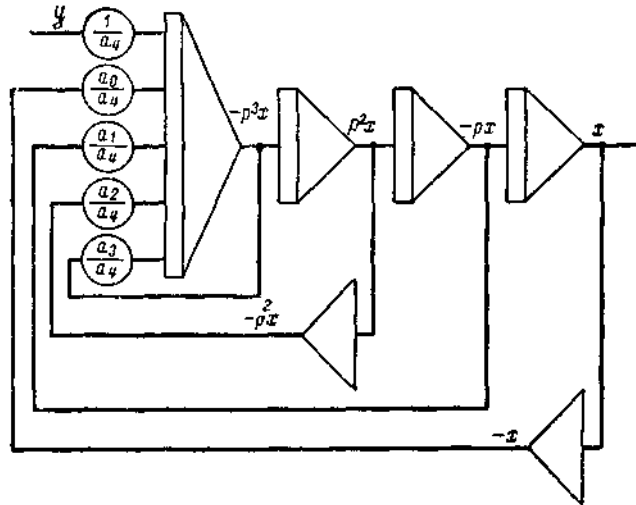


Рис. 8. Блок-схема электронной модели.

Метод графов. При составлении блок-схемы электронной модели актуальным всегда является вопрос сокращения необходимого оборудования для решения задачи. Предлагаемый метод, основанный на применении графов распространения сигналов, позволяет в достаточно простой форме получить удобную блок-схему с минимальным количеством решающих усилителей. Метод графов можно использовать при составлении блок-схемы электронной модели как непосредственно по дифференциальным уравнениям, так и по передаточным функциям.

Порядок построения графов определяется правилами, сформулированными Беккером.

Рассмотрим построение графа распространения сигналов по заданной передаточной функции. В качестве примера возьмем передаточную функцию запаздывающего звена:

$$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{1 - 0,5pT + \frac{1}{12} p^2 T^2}{1 + 0,5pT + \frac{1}{12} p^2 T^2};$$

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}} \left(1 + 0,5pT + \frac{1}{12} p^2 T^2 \right) &= \\ &= \left(1 - 0,5pT + \frac{1}{12} p^2 T^2 \right) X_{\text{вх}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Перепишем (20) таким образом, чтобы исключить дифференцирование входного сигнала:

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{0,5T}{p} + \frac{T^2}{12} \right) &= \\ &= X_{\text{вх}} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{0,5T}{p} + \frac{T^2}{12} \right). \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение и разрешим его относительно $X_{\text{вых}}$:

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}} &= X_{\text{вх}} + \frac{1}{p} \left[\left(-\frac{6}{T} X_{\text{вх}} - \frac{6}{T} X_{\text{вых}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p} \left(\frac{12}{T^2} X_{\text{вх}} - \frac{12}{T^2} X_{\text{вых}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

По выражению (21) строится граф распространения сигналов (рис. 9,а).

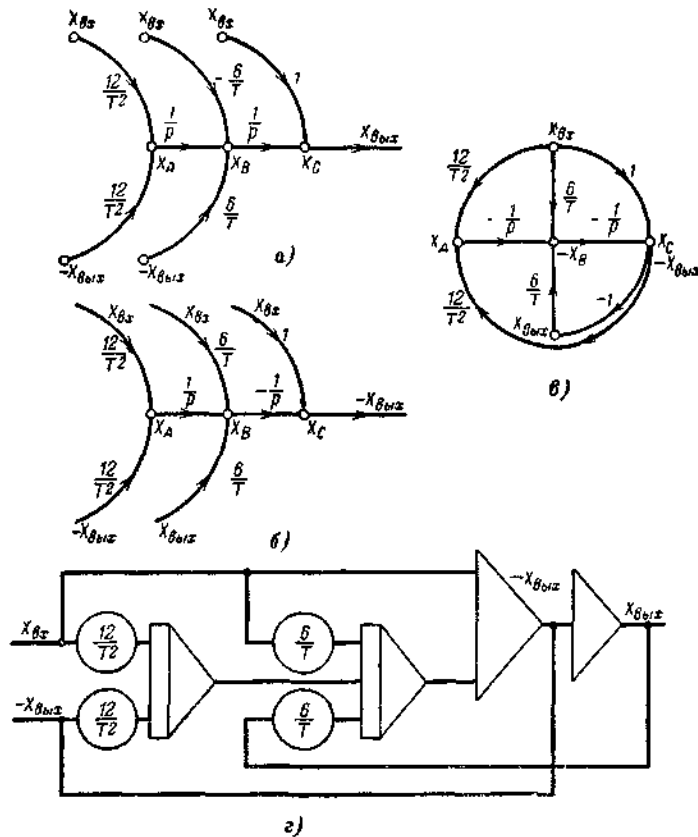


Рис. 9 Графы распространения потока сигналов.

Суммы сигналов, сходящихся в узловых точках (входы решающего усилителя), обозначим через X_A, X_B, X_C .

В дальнейшем строится граф распространения сигналов с учетом инвертирования знака переменной на выходе решающих усилителей (рис. 9,б). После первого интегрирования происходит инвертирование сигнала на входе второго интегратора X_B , сигнал на входе сумматора сохраняет свой знак $+X_C$, а на выходе получаем инвертированный сигнал $-X_{\text{вых}}$.

Объединив однотипные полюсы, получаем граф распространения сигнала (рис. 9,в), по которому производится построение блок-схемы электронной модели. Она состоит из четырех делителей напряжения и

четырёх решающих усилителей, охваченных отрицательными обратными связями (рис. 9,г).

Структурный метод. Составление блок-схемы электронной модели по структурной схеме системы автоматического управления не вызывает особых затруднений. Это связано с тем, что структурная схема представляет собой комбинацию типовых элементарных звеньев, охваченных обратными связями. Схемы электронных моделей основных типовых звеньев рассмотрены в 4.2.2 и сведены в табл. 1. На основании данных табл. 1 можно непосредственно по структурной схеме объекта перейти к составлению электронной модели.

4.2.5. Выбор масштабных коэффициентов

Перед набором задачи на электронной модели производится выбор масштабов каждой из переменных системы уравнений. Смысл преобразований заключается в следующем: максимальные значения переменных электронной модели в течение переходного процесса должны быть такими, чтобы решающие усилители работали в линейной зоне. Значения машинных переменных связываются с физическими переменными масштабными коэффициентами:

$$\bar{x}_i = m_i x_i,$$

где \bar{x}_i — значение машинной переменной;

m_i — масштабный коэффициент.

Величина масштабного коэффициента определяется:

$$m_i = \frac{(\bar{x}_i)_{\text{макс}}}{(x_i)_{\text{макс}}} = \frac{\bar{1}}{(x_i)_{\text{макс}}},$$

где $\bar{1}$ — машинная единица, для большинства математических машин непрерывного действия $\bar{1} = 100$ в.

Для получения желаемой длительности переходного процесса выбирается масштаб времени решения задачи:

$$t = m_i \bar{t}.$$

При этом получаются:

$m_i > 1$ — ускоренный процесс решения;

$m_i = 1$ — процесс решения в натуральном масштабе времени;

$m_i < 1$ — замедленный процесс решения.

Рассмотрим пример записи уравнения первого порядка в машинных переменных. Пусть дано уравнение

$$T_i \frac{dx_i}{dt} + x_i = K X_{\text{вх}}; \tag{22}$$

выбираем значения масштабных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= m_i x_i; \\ \bar{x}_{вх} &= m_{вх} X_{вх}; \\ t &= m_t \bar{t}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив выражение (23) в (22), получим:

$$\left(\frac{T_i}{m_t}\right) \frac{d\bar{x}_i}{d\bar{t}} + \bar{x}_i = K \left(\frac{m_i}{m_{вх}}\right) \bar{X}_{вх}$$

или

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\bar{t}} + \left(\frac{m_t}{T_i}\right) \bar{x}_i = K \left(\frac{m_i}{m_{вх}}\right) \left(\frac{m_t}{T_i}\right) \bar{X}_{вх}. \quad (24)$$

Как видно из полученного выражения (24), масштаб по времени приводит к изменению физических постоянных времени: при ускоренном процессе решения постоянные времени уменьшаются, при замедленном — увеличиваются.

Масштабы переменных можно изменять непосредственно на структурной схеме исследуемой системы.

Рассмотрим этот способ на примере системы, которая представлена двумя апериодическими звеньями, охваченными жесткой и гибкой отрицательной связью (рис. 10,а).

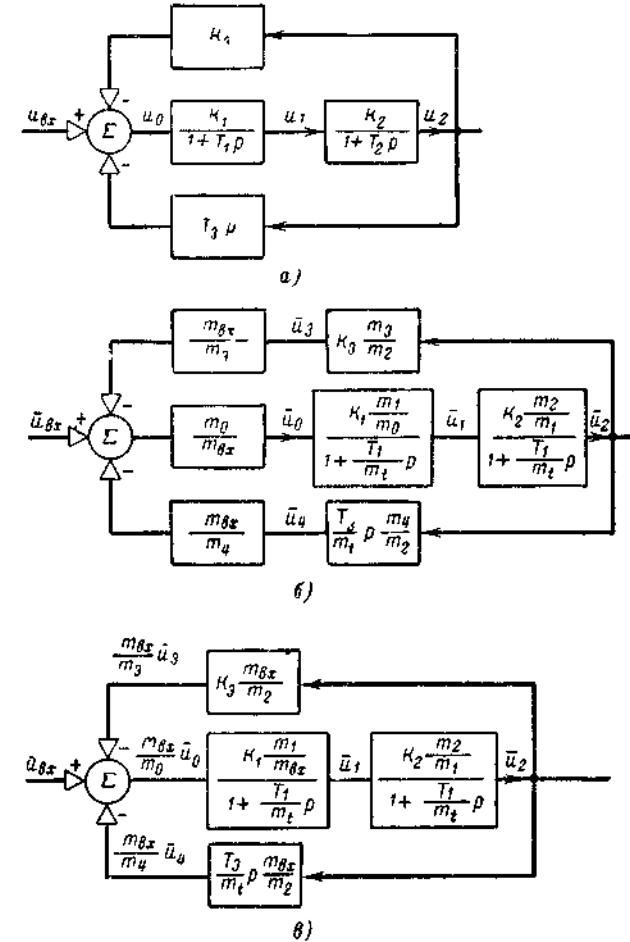


Рис 10. Выбор масштабных коэффициентов на базе структурной схемы.

Указанная система характеризуется значениями переменных $u_{вх}, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$. Так как на электронной модели эти переменные представляются как $\bar{u}_{вх}, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$, то в структурную схему должны быть введены масштабные коэффициенты (рис. 10,б).

Нетрудно заметить особенности составления структурной схемы с учетом выбранных масштабов:

1. Постоянные времени должны быть разделены на масштаб по времени.

2 Коэффициенты усиления и коэффициенты обратных связей умножаются на масштаб выходной величины и делятся на масштаб входной величины.

3. Суммирование сигналов всегда производится в одном масштабе (на структурной схеме сигналы гибкой и жесткой обратной связи приведены к масштабу входного сигнала). Для каждой переменной можно произвольно выбрать масштабный коэффициент, но число степеней свободы должны быть меньше количества переменных на величину сигналов, приходящих к суммирующей точке.

При выборе масштабных коэффициентов и коэффициентов передач учитываются также особенности работы и свойства конкретных блоков аналоговых машин.

Поясним вышесказанное конкретным примером (рис. 10,б). Предположим, что рассматриваемая система выполнена без параллельных ветвей (отсутствуют гибкая и жесткая обратные связи). Тогда, выбрав значения масштабных коэффициентов $m_{вх}, m_0, m_1, m_2, m_3$, получим изменение соответствующих машинных переменных в желаемом диапазоне.

В системе с параллельными ветвями после расчета необходимых значений масштабных коэффициентов можно задать определенные

пределы изменения переменных $\bar{u}_{вх}, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$. Однако сигналы обратных связей, приходящие к сумматору, и результирующий сигнал на его выходе получаются произвольными. Преобразуя рассматриваемую структурную схему (рис. 10,б), можно заметить, что в ней отсутствуют масштабные коэффициенты m_0, m_3, m_4 . Из выбранных шести масштабных коэффициентов независимыми являются лишь три: $m_{вх}, m_1, m_2$. Следовательно, ограничение величины шести машинных переменных можно осуществить только тремя масштабными коэффициентами

Для уменьшения количества блоков делителей напряжения при выборе масштабных коэффициентов стремятся, чтобы величины вида

$$K_1 \frac{m_1}{m_0} \frac{m_4}{T_1}, \quad K_2 \frac{m_2}{m_1} \frac{m_4}{T_2}$$

представляли собой одно из возможных соотношений $R_0/R_{вх}$ решающих усилителей.

4.3. Моделирование магнитно-связанных контуров

4.3.1. Моделирование магнитно-связанных контуров с учетом рассеяния

Магнитно-связанные контуры являются элементом, который весьма часто встречается в современных аппаратах, машинах и различных средствах автоматического управления. Так, например, магнитно-связанными контурами являются обмотки возбуждения машин постоянного тока, обмотки управления электромашинных усилителей продольного и поперечного поля, обмотки управления магнитных усилителей и т. п.

Учет вихревых токов, возникающих в магнитопроводах различных аппаратов, в ряде случаев может быть произведен с помощью эквивалентных магнитно-связанных контуров.

Рассмотрим вначале задачу, которая часто встречается в инженерных расчетах. Пусть на ферромагнитном сердечнике расположены n контуров (обмоток), каждый из которых связан с общим (полезным) потоком и собственным потоком рассеяния (рис. 1).

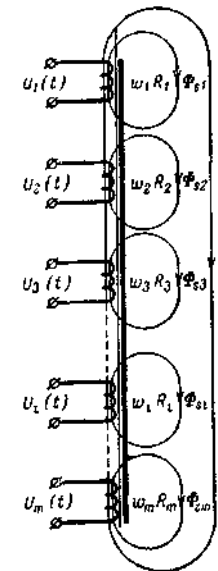


Рис. 1. Магнитно-связанные контуры.

В цепи каждого из контуров действует приложенное извне напряжение и э. д. с., наведенная при изменении связанных с этим контуром потоков. Частные случаи, когда, например, часть приложенных извне напряжений $U_2, U_3, \dots, U_n = 0$, легко могут быть получены из принятой выше общей постановки задачи.

Нелинейность кривой намагничивания материала учитывается только при вычислении главного потока, т. е. влиянием насыщения на проводимость рассеяния пренебрегается.

В соответствии с принятыми выше допущениями и схемой, приведенной на рис. 1, запишем уравнения для m магнитно-связанных «контуров в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= I_1 R_1 + \omega_1 p (\Phi + \Phi_{s1}); \\ U_2 &= I_2 R_2 + \omega_2 p (\Phi + \Phi_{s2}); \\ &\dots \dots \dots \\ U_i &= I_i R_i + \omega_i p (\Phi + \Phi_{si}); \\ &\dots \dots \dots \\ U_m &= I_m R_m + \omega_m p (\Phi + \Phi_{sm}); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$F_\Sigma = \sum_{i=1}^m I_i \omega_i; \quad (2)$$

$$\Phi = \varphi(F_\Sigma) \text{ или } F_\Sigma = \varphi_1(\Phi); \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{s1} &= \lambda_{s1} I_1 \omega_1; \\ \Phi_{s2} &= \lambda_{s2} I_2 \omega_2; \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi_{si} &= \lambda_{si} I_i \omega_i; \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi_{sm} &= \lambda_{sm} I_m \omega_m. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В приведенных выше уравнениях обозначено:
 $U_1, U_2, \dots, U_i, \dots, U_m$ — напряжения, приложенные извне к контурам 1, 2, ..., i , ..., m ;
 $I_1, I_2, \dots, I_i, \dots, I_m$ — токи в контурах 1, 2, ..., i , ..., m ;
 $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_m$ и $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_m$ — сопротивления в цепи контуров 1, 2, ..., i , ..., m и числа витков соответствующих обмоток;
 $\lambda, \lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \dots, \lambda_{si}, \dots, \lambda_{sm}$ — магнитные проводимости путей главного потока и потоков рассеяния, связанных с контурами 1, 2, ..., i , ..., m соответственно;
 p — символ дифференцирования.

Заметим, что в уравнениях (1) не используются индуктивности и взаимные индуктивности. Практика показала, что для решения на моделирующих установках форма записи, приведенная выше, является более удобной.

На основании уравнений (1) — (4) схема модели может быть получена несколькими различными методами. Возможно, например, построение модели по исходным уравнениям без их совместного аналитического преобразования, исключения отдельных переменных и т. д. В этом случае уравнения (1) решаются относительно производных и модель будет состоять из ряда интеграторов, соединенных прямыми и перекрестными обратными связями. Нетрудно убедиться, что построенная таким образом модель будет сравнительно сложной и недостаточно наглядной.

Целесообразнее исходные уравнения преобразовать так, чтобы в них в качестве параметров использовались постоянные времени и другие физические величины, достаточно наглядные и поддающиеся непосредственным измерениям. Удобнее всего предварительно составить структурную схему, отдельные звенья которой имели бы самостоятельный физический смысл, а их характеристики и передаточные функции могли быть сопоставлены с характеристиками реальных звеньев машин, аппаратов или систем, которые имитируются на модели. **Модель, построенную из звеньев, имеющих самостоятельный физический смысл, называют структурной моделью, а методы построения таких моделей — структурными методами моделирования.**

В настоящем разделе методы структурного моделирования будут широко использоваться.

Воспользуемся этим методом в данном случае. Исключив из уравнений (1) — (4) потоки рассеяния, после несложных преобразований находим выражения для н. с. каждого из контуров;

$$\begin{cases}
 I_1 \omega_1 = \frac{U_1}{1 + pT_{s1}} \frac{\omega_1}{R_1} - \frac{\omega_1^2}{R_1} \frac{p\Phi}{1 + pT_{s1}}; \\
 I_2 \omega_2 = \frac{U_2}{1 + pT_{s2}} \frac{\omega_2}{R_2} - \frac{\omega_2^2}{R_2} \frac{p\Phi}{1 + pT_{s2}}; \\
 \dots \\
 I_i \omega_i = \frac{U_i}{1 + pT_{si}} \frac{\omega_i}{R_i} - \frac{\omega_i^2}{R_i} \frac{p\Phi}{1 + pT_{si}}; \\
 \dots \\
 I_m \omega_m = \frac{U_m}{1 + pT_{sm}} \frac{\omega_m}{R_m} - \frac{\omega_m^2}{R_m} \frac{p\Phi}{1 + pT_{sm}},
 \end{cases} \quad (5)$$

через $T_{s1}, T_{s2}, \dots, T_{si}, \dots, T_{sm}$ обозначены постоянные времени контуров, связанных с потоками рассеяния:

$$\begin{aligned}
 T_{s1} &= \lambda_{s1} \frac{\omega_1^2}{R_1}; \quad T_{s2} = \lambda_{s2} \frac{\omega_2^2}{R_2}; \quad \dots; \quad T_{si} = \\
 &= \lambda_{si} \frac{\omega_i^2}{R_i}; \quad \dots; \quad T_{sm} = \lambda_{sm} \frac{\omega_m^2}{R_m}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

По уравнениям (2), (3) и (5) построена структурная схема, приведенная на рис. 2,а.

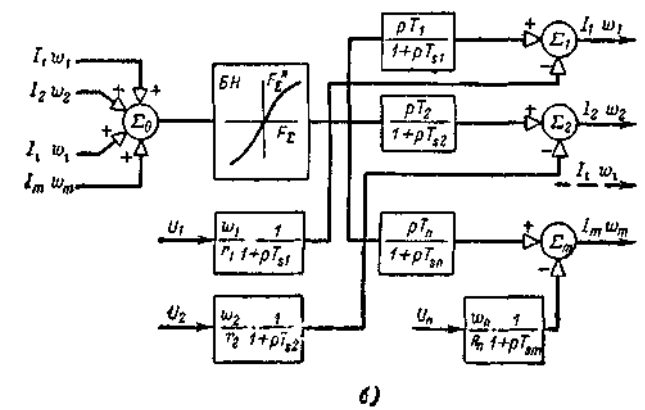
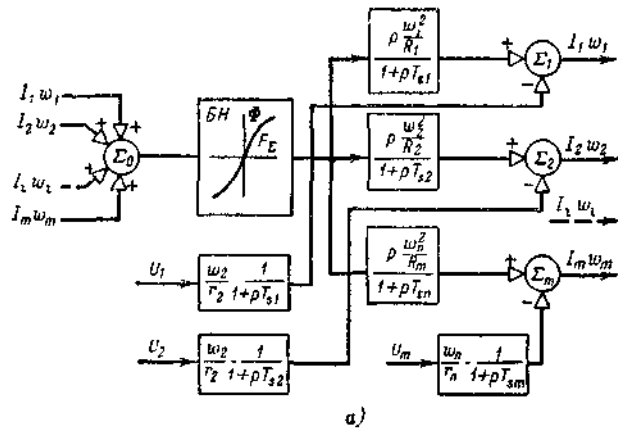


Рис. 2. Структурные схемы магнитно связанных контуров с разными выходными величинами блока нелинейностей

В этой схеме символами $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_i, \dots, \Sigma_n$ обозначены сумматоры; БН — блок нелинейностей, на котором набирается кривая намагничивания. Входными величинами на схеме рис. 2 являются напряжения U_1, U_2 и т. д., выходными — н. с. $I_1\omega_1, I_2\omega_2, \dots$, магнитный поток Φ и др. Структурную схему, изображенную на рис.2,а, целесообразно преобразовать таким образом, чтобы в передаточные функции отдельных звеньев входили постоянные времени отдельных контуров, вычисленные для линейных участков кривой намагничивания. Для этого уравнение (3) перепишем в виде

$$\Phi = \lambda_0 k F_x, \quad (3a)$$

где λ_0 — магнитная проводимость для главного потока, соответствующая линейной части кривой намагничивания; $k \leq 1$ — коэффициент, учитывающий нелинейность кривой намагничивания, т. е

$$k = \frac{\lambda}{\lambda_0}. \quad (7)$$

Заменив на схеме замещения поток Φ через его значение согласно (3a) и принимая во внимание, что

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 \frac{\omega_1^2}{R_1} &= T_1; \\ \lambda_0 \frac{\omega_2^2}{R_2} &= T_2; \\ \dots &\dots \\ \lambda_0 \frac{\omega_i^2}{R_i} &= T_i; \\ \dots &\dots \\ \lambda_0 \frac{\omega_m^2}{R_m} &= T_m, \end{aligned} \right\} j \quad (8)$$

где $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n$ — постоянные времени отдельных контуров, вычисленные для линейной части кривой намагничивания, структурную схему магнитно-связанных контуров можно представить в виде, показанном на рис. 2,б. Заметим, что в схеме, представленной на рис. 2,б, одной из выходных величин блока нелинейности является величина, пропорциональная полезному потоку

$$F^* = \frac{\Phi}{\lambda_0}, \quad (9)$$

но имеющая размерность н. с.

Структурная схема, изображенная на рис. 3,б, построена из элементов с передаточными функциями типа инерционного звена $\frac{1}{1+pT_{s_i}}$ и производной с ограничением по высоким частотам $\frac{pT_i}{1+pT_{s_i}}$.

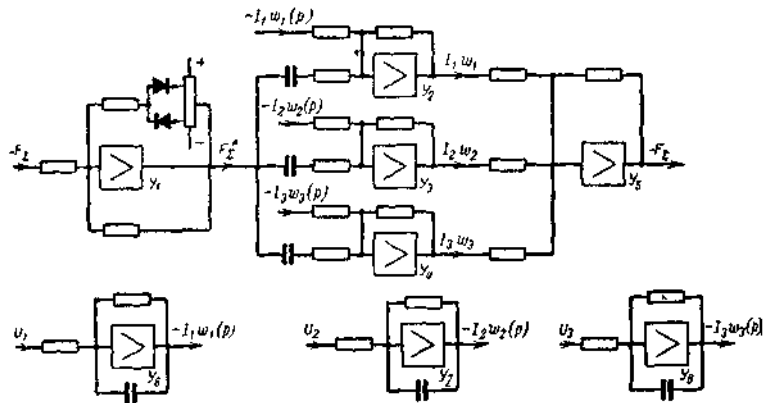


Рис. 3. Схема набора модели магнитно-связанных контуров.

Звенья с указанными передаточными функциями удобны для их реализации на модели и стабильны в работе. Напомним, что использование звена с передаточной функцией в виде чистой производной является нежелательным, в особенности при включении этого звена после блока нелинейностей.

На рис. 3 показана схема набора электронной модели, выполненная для трех магнитно-связанных контуров в соответствии с уравнениями (1)–(4) и структурной схемой, представленной на рис. 2,б. На схеме, приведенной на рис. 3, нелинейная функция $F^*_z = f(F_z)$ аппроксимирована кусочно-линейной (усилитель U1). Если необходимо кривую намагничивания представить более детально, то следует воспользоваться специальными блоками нелинейностей, имеющимися в комплекте моделирующих установок. Усилители U2, U3 и U4 выполняют операции дифференцирования и суммирования в соответствии с уравнениями (5), т. е. соответствуют звеньям вида $\frac{pT_i}{1+pT_{s_i}}$ и сумматорам Σ_i в структурной схеме, приведенной на рис. 2,б.

Усилитель U5 используется как инвертор, необходимый для получения правильных знаков переменных в модели.

Усилители U6, U7 и U8 воспринимают входные сигналы U_1, U_2 и U_3 и вырабатывают на выходе промежуточные переменные, равные:

$$I_1 \omega_1(p) = \frac{\omega_1}{R_1} \frac{U_1}{1+pT_{s1}};$$

$$I_2 \omega_2(p) = \frac{\omega_2}{R_2} \frac{U_2}{1+pT_{s2}};$$

$$I_3 \omega_3(p) = \frac{\omega_3}{R_3} \frac{U_3}{1+pT_{s3}}.$$

В случае, если часть контуров замкнута коротко и, следовательно, приложенные к ним извне напряжения равны нулю, схема модели может быть упрощена. Так, например, при $U_2 = U_3 = 0$ (рис. 4) из схемы исключаются усилители U7 и U8 и сопротивления на входе усилителей U2 и U3, к которым приложены промежуточные переменные $i_2 \omega_2(p)$ и $i_3 \omega_3(p)$.

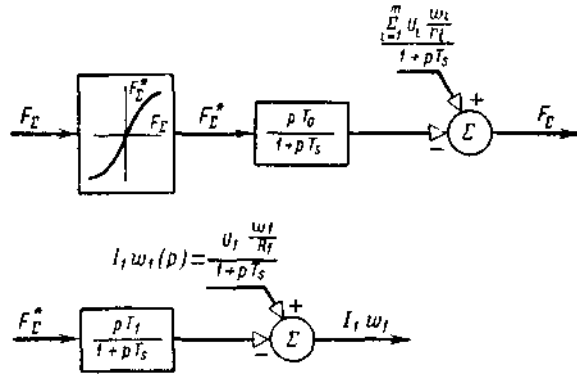


Рис. 4. Структурная схема магнитно-связанных контуров с приближенным учетом потоков рассеяния.

$$T_0 = \sum_{i=1}^m T_i; \quad T_* = \frac{\sum_{i=1}^m T_{*i}}{m};$$

$$F_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m I_i w_i; \quad F_{\Sigma}^* = \frac{\Phi_0}{\chi_0}.$$

Схема модели также упрощается, если при исследованиях нет необходимости в записи токов или пропорциональных им н. с. $i_1 w_1(p)$, $i_2 w_2(p)$, $i_3 w_3(p)$. В этом случае усилители У2, У3 и У4 могут быть заменены одним усилителем. Аналогичная схема используется в 4.3.3 при рассмотрении модели процессов возбуждения с учетом вихревых токов.

4.3.2. Моделирование магнитно-связанных контуров с приближенным учетом рассеяния

Как видно из описанных выше схем, моделирование магнитно-связанных контуров требует применения значительного количества усилителей и осуществляется сравнительно сложными схемами. Между тем в большинстве практических случаев рассеяние невелико и поэтому его влияние можно учитывать приближенно.

Ниже будет рассмотрено два метода составления структурных схем, в которых рассеяние учитывается приближенно.

Первый из этих методов исходит из предположения, что постоянные времени рассеяния для всех контуров равны некоторой усредненной

величине. Второй метод предполагает, что все магнитно-связанные контуры образуют общий поток рассеяния.

Переходим к составлению модели по первому методу.

Усредненное значение постоянной времени рассеяния можно принять равным:

$$T_s = \frac{T_{s1} + T_{s2} + \dots + T_{si} + \dots + T_{sm}}{m}. \quad (10)$$

В связи с тем, что в большинстве случаев постоянные времени рассеяния значительно меньше постоянных времени главного потока, ошибки по абсолютному значению будут невелики, а качественный характер процессов при использовании уравнения (10) будет передан правильно.

Заменяв в структурной схеме, приведенной на рис. 2, б,

$T_{s1}, T_{s2}, \dots, T_{si}, \dots, T_{sm}$ на T_s , можно все блоки с передаточными функциями типа $\frac{p T_i}{1 + p T_{si}}$ объединить в один блок с передаточной функцией

$$\frac{p(T_1 + T_2 + \dots + T_i + \dots + T_m)}{1 + p T_s} = \frac{p T_0}{1 + p T_s}, \quad (11)$$

где

$$T_0 = \sum_{i=1}^m T_i$$

— сумма постоянных времени всех контуров.

Аналогично могут быть объединены и блоки сумматоров $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m$ в один сумматор, на вход которого действует сигнал, равный:

$$X_{вх} = \frac{\sum_{i=1}^m U_i \frac{w_i}{R_i}}{1 + p T_s}. \quad (12)$$

Структурная схема, построенная с учетом указанных преобразований, показана на рис. 4, а соответствующая ей схема модели приведена на рис. 5.

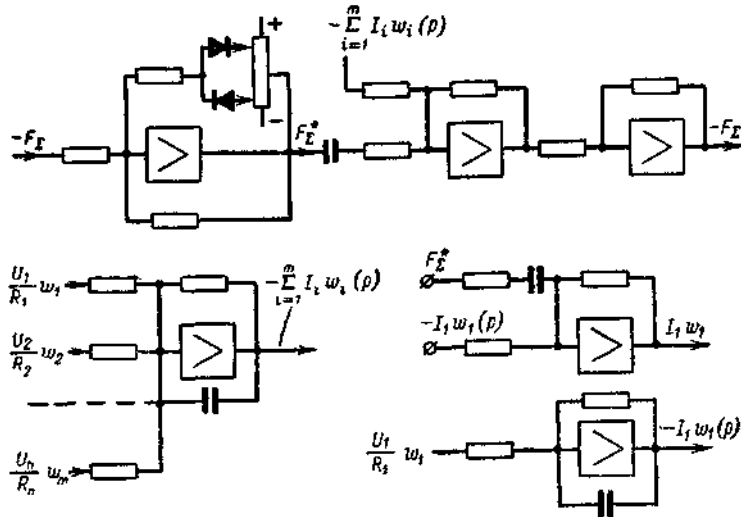


Рис. 5. Схема набора модели магнитно-связанных контуров с приближенным учетом потоков рассеяния.

Указанные схемы аналогичны схемам, представленным на рис. 2 и 3, и особых пояснений не требуют.

Заметим, что во всех схемах, рассмотренных выше, для учета нелинейности используется последовательное включение блока нелинейности. В некоторых случаях возможно применение схем, в которых блок нелинейности включен в цепь обратной связи. Рассмотрим построение модели с блоком нелинейности в цепи обратной связи.

Для структурной схемы, приведенной на рис. 4, может быть написано следующее очевидное уравнение:

$$-F_{\Sigma}^* \frac{pT_0}{1+pT_s} + \sum_{i=1}^m U_i \frac{w_i}{R_i} = F_{\Sigma}^*$$

или, учитывая соотношения (3а) и (9),

$$-F_{\Sigma}^* \frac{pT_0}{1+pT_s} + \sum_{i=1}^m U_i \frac{w_i}{r_i} = \frac{F_{\Sigma}^*}{k}$$

Последнее выражение удобнее всего преобразовать, добавив к правой и левой части по F^* .

После несложных преобразований находим:

$$F_{\Sigma}^* [1 + p(T_s + T_0)] = \sum_{i=1}^m U_i \frac{w_i}{R_i} - F_{\Sigma}^* \frac{1-k}{k} (1 + pT_s). \quad (12a)$$

На рис. 6 показана структурная схема, составленная в соответствии с уравнением (12).

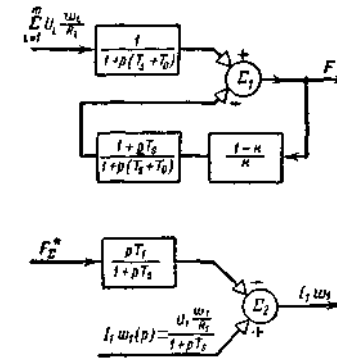


Рис. 6. Структурная схема магнитно-связанных контуров с нелинейностью в цепи обратной связи.

Для того чтобы не использовать звенья с передаточной функцией в виде чистой производной, в схеме, представленной на рис. 6, введен сумматор Σ_1 на вход которого подан сигнал обратной связи через звено с передаточной функцией $\frac{1+pT_s}{1+p(T_s+T_0)}$.

В случае определения на модели потока можно без большой погрешности пренебречь членом pT_s в числителе выражения $\frac{1+pT_s}{1+p(T_s+T_0)}$ (рис. 6). В этом случае структурная схема существенно упрощается: она может быть изображена инерционным звеном, охваченным отрицательной обратной связью через звено $\frac{1}{K} - 1$.

Переходим к составлению структурной схемы по второму методу. Уравнения (1) — (4) для этого случая могут быть переписаны в виде

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= I_1 R_1 + \omega_1 p (\Phi + \Phi_s); \\ U_2 &= I_2 R_2 + \omega_2 p (\Phi + \Phi_s); \\ \dots & \dots \dots \dots \\ U_i &= I_i R_i + \omega_i p (\Phi + \Phi_s); \\ \dots & \dots \dots \dots \\ U_n &= I_n R_n + \omega_n p (\Phi + \Phi_s); \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

$$F_\Sigma = \sum_{i=1}^n I_i \omega_i; \quad (2-2a)$$

$$\Phi = \lambda_0 k F_\Sigma; \quad (3a)$$

$$\Phi_s = \lambda_s F_\Sigma. \quad (4a)$$

Умножив каждое из уравнений (1a) на ω_i/R_i и сложив их почленно, найдем:

$$\sum_{i=1}^n U_i \frac{\omega_i}{R_i} = \sum_{i=1}^n I_i \omega_i + \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{R_i} p (\Phi + \Phi_s)$$

или в соответствии с (3a) и (4a)

$$\lambda_0 \sum_{i=1}^n U_i \frac{\omega_i}{R_i} = \frac{\Phi}{k} + \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{R_i} p \Phi + \frac{\lambda_s}{k} \sum_{i=1}^n p \Phi.$$

Обозначив $\lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{R_i} = T_0$ (постоянная времени главного потока на

линейном участке) и $\lambda_s \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{R_i} = T_s$ (то же для потоков рассеяния),

перепишем приведенное выше уравнение в виде

$$\lambda_0 \sum_{i=1}^n U_i \frac{\omega_i}{R_i} = \frac{\Phi}{k} + \frac{T_0}{k} p \Phi + T_0 p \Phi.$$

Прибавив к правой и левой частям последнего уравнения выражение $\Phi(1 + pT_s)$, после несложных преобразований получим уравнение, совпадающее с (11) и, следовательно, соответствующее структурной схеме, изображенной на рис. 6.

Таким образом, оба рассмотренных метода приводят к модели одной и той же структуры.

С количественной стороны модели, построенные по первому и второму методам, могут отличаться за счет разных значений постоянной времени T_s . Последняя должна быть определена для конкретных

объектов либо экспериментально, либо расчетным путем, на основе анализа картины распределения потоков рассеяния.

Характер нелинейности, которая используется в схеме, представленной на рис. 6, иллюстрируется кривыми, изображенными на рис. 7.

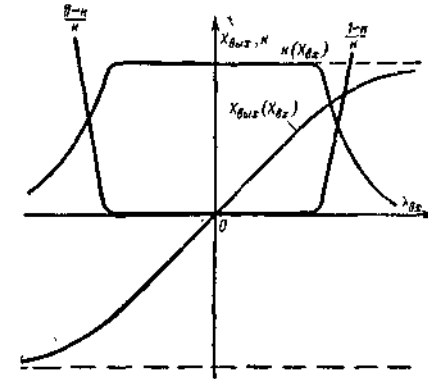


Рис. 7. Характеристики блока нелинейности.

Схема, приведенная на рис. 2-6, интересна тем, что она наглядно показывает влияние на структуру модели таких факторов, как нелинейность и наличие рассеяния.

4.3.3. Моделирование процессов возбуждения с учетом вихревых токов

Вихревые токи, возникающие в массивных частях магнитопровода, оказывают существенное влияние на переходные процессы в электрических машинах и аппаратах.

Решение дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводится рассматриваемая задача, представляет значительные трудности даже для случая, когда рассматриваются процессы в двух измерениях.

При изучении электромеханических переходных процессов задача исследования обычно ограничивается определением зависимости общего потока от времени, а не детальной картины распределения этого потока по поперечному сечению сердечника. В этом случае расчеты переходных процессов могут быть выполнены на неспециализированных аналоговых моделирующих установках. Детальное сравнение различных методов учета вихревых токов изложено литературе.

Для составления схемы модели удобнее всего использовать известные уравнения. Эти уравнения дают результаты, хорошо совпадающие с опытом и удобные для применения, так как необходимые для расчетов коэффициенты определяются достаточно просто при помощи несложных расчетов и семейства кривых. Рассмотрим переходные процессы в цепи, состоящей из обмотки, расложенной на магнитопроводе прямоугольного сечения. Магнитопровод состоит из двух частей — массивной 1 и шихтованной 2, разделенных воздушным зазором (рис. 8).



Рис. 8. Схема магнитопровода

1 — массивный участок магнитопровода; 2 — то же шихтованной; δ — воздушный зазор.

Процесс установления потока с учетом влияния вихревых токов описывается уравнением

$$\Phi = \Phi_0 - (\Phi_0 - \Phi_{нач}) \sum_{v=1}^{\infty} C_v e^{-\gamma_v \frac{t}{T}} \quad (13)$$

В уравнении (13) обозначено:

Φ_0 — установившееся значение потока,

$$\Phi_0 = \lambda_0 \frac{\omega}{R} U,$$

где U — напряжение, приложенное к обмотке;

ω , R — число витков и сопротивление обмотки соответственно;

λ_0 — проводимость магнитной цепи для главного потока;

$\Phi_{нач}$ — значение потока при $t=0$;

T — постоянная времени общего потока,

$$T = \sigma \lambda_0 \frac{\omega^2}{R},$$

где σ — коэффициент рассеяния ($\sigma \geq 1$);

C_v, γ_v — коэффициенты, зависящие от формы магнито-провода и его геометрических размеров, удельного электрического сопротивления материала сердечника, числа витков обмотки и других данных.

Коэффициенты C_v, γ_v являются функцией параметра α , причем

$$\alpha = \frac{l_m R}{2\omega^2 \rho \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}, \quad (14)$$

где l_m — средняя длина линии магнитной индукции в массивной части магнитопровода, см;

ρ — удельное сопротивление материала массивной части магнитопровода $\frac{\text{ОМ} \cdot \text{СМ}^2}{\text{СМ}}$ (для сталей, применяемых в

электротехнических изделиях, $\rho = (2 \div 5) 10^{-4} \frac{\text{ОМ} \cdot \text{СМ}^2}{\text{СМ}}$);

a, b — размеры поперечного сечения сердечника, см.

Для многополюсных электрических машин параметр α рассчитывается на пару полюсов.

На рис. 9 приведена зависимость $C_v, \gamma_v = f(\alpha)$ при коэффициентах рассеяния $\sigma = 1,2$ и $\sigma = 1,0$.

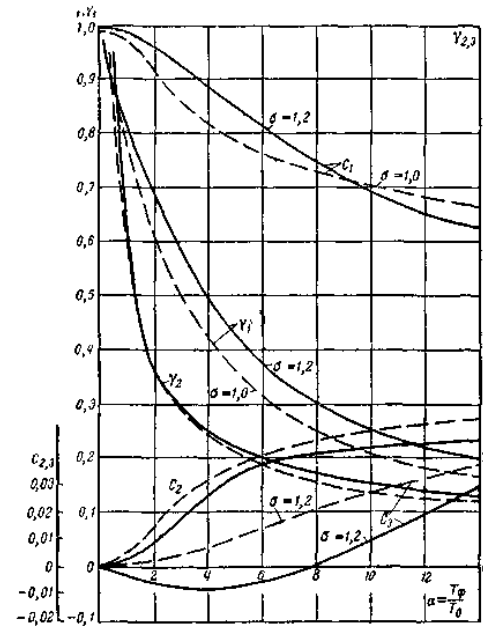


Рис. 9. Кривые для определения коэффициентов C_v, γ_v .

При других коэффициентах рассеяния значения C_v и γ_v могут быть найдены по следующим формулам:

$$C_v = \alpha^2 \frac{1 - (\sigma - 1) \frac{q_v^2}{\alpha}}{q_v^3 \left[q_v (\sigma - 1) + \frac{q_v - (1 - \cos q_v) \sin q_v}{\cos^2 q_v} \right]}, \quad (15)$$

$$\gamma_v = q_v^2 \frac{\sigma}{\alpha}, \quad (16)$$

где q_v — корни трансцендентного уравнения:

$$(\sigma - 1) q_v^2 + 2 \frac{q_v \sin q_v + \cos q_v - 1}{\cos q_v} = \alpha. \quad (17)$$

В большинстве практических случаев $\sigma = 1,1 \div 1,2$ и поэтому кривыми рис. 9 можно пользоваться, не проводя дополнительных расчетов. Известны также методы экспериментального определения коэффициентов C_v и γ_v .

Переходим к построению схемы модели. Заметим, что члены типа $C_v e^{-\gamma_v \frac{t}{T}}$, входящие в уравнение (13), могут быть представлены на модели звеньями с передаточной функцией, равной:

$$\frac{p \frac{C_v}{\gamma_v} T}{1 + p \frac{T}{\gamma_v}}$$

Следовательно, процессы в цепи с массивным сердечником (рис. 8) могут быть исследованы при помощи структурной схемы, показанной на рис. 10,а.

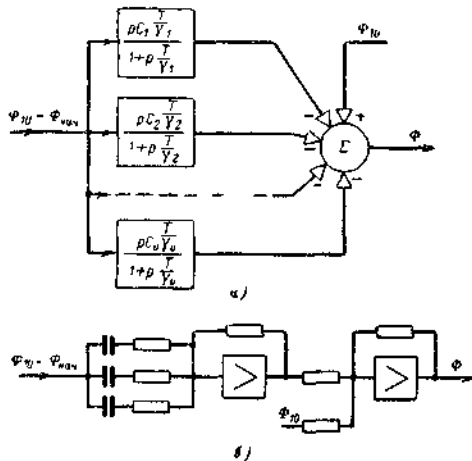


Рис. 10. Схемы для моделирования магнитно-связанных контуров с учетом вихревых токов.
а — структурная схема; б — схема модели.

Схема математической модели, соответствующая структурной схеме, представленной на рис. 10,а, приведена на рис. 10,б для случая, когда

учитываются три контура. Составление схемы для большого количества контуров не представляет затруднений, так как сводится к увеличению числа контуров на входе усилителя. Однако учитывать более трех составляющих нецелесообразно, так как коэффициент C_3 не превышает 10% от C_1 , а коэффициенты с номером $v > 3$ имеют еще меньшую величину (рис. 9). Необходимо заметить, что при $0 < \alpha < 7,9$ коэффициент C_3 меньше нуля (рис. 9). При указанном значении коэффициента C_3 схему модели (рис. 10, б) необходимо изменить, так как сигнал, проходящий через звено с передаточной функцией $\frac{p \frac{C_3}{\gamma_3} T}{1 + p \frac{T}{\gamma_3}}$, имеет обратный знак (по отношению к другим сигналам на

входе сумматора Σ). В этом случае в цепь с передаточной функцией $\frac{p \frac{C_3}{\gamma_3} T}{1 + p \frac{T}{\gamma_3}}$ включается еще один усилитель, выполняющий роль инвертора.

Укажем еще один метод построения этой модели.

Учитывая, что $\sum_{v=1}^{\infty} C_v = 1$, преобразуем уравнения (13)

$$\Phi - \Phi_{нач} = (\Phi_{10} - \Phi_{нач}) \sum_{v=1}^m C_v \left(1 - e^{-\gamma_v \frac{t}{T}}\right). \quad (13a)$$

Нетрудно показать, что уравнению (13а) соответствует структурная схема, изображенная на рис. 11,а, и схема набора модели, показанная на рис. 11,б.

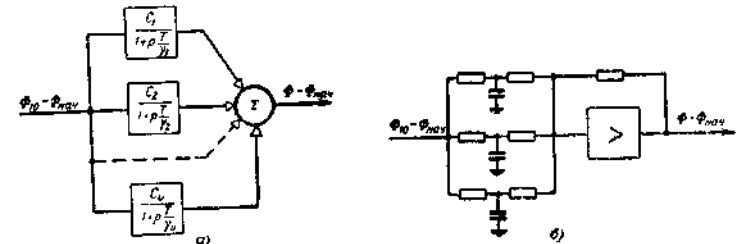


Рис. 11. Схемы для моделирования магнитно-связанных контуров с учетом вихревых токов (II-й вариант).
а — структурная схема; б — схема модели.

Выбор между моделями по схемам, приведенным на рис. 10 или 11, производится с учетом конкретных данных задачи и характеристик моделирующей установки.

Схемы моделей, аналогичные приведенным на рис. 10 и 11, могут быть также применены и для моделирования ряда других процессов в системах с распределенными постоянными (процессы в длинных линиях, процессы распространения тепла и т. п.).

4.4. Моделирование электрических машин постоянного тока

4.4.1. Общие сведения

В настоящем разделе приведены структурные схемы для математического моделирования двигателей и генераторов постоянного тока, состоящие из типовых звеньев, параметрами которых являются коэффициенты усиления и постоянные времени.

В отличие от известных схем, полученные структурные схемы являются более общими.

В них учитываются различные варианты включения обмоток возбуждения машины, нелинейность кривой намагничивания, размагничивающее действие реакции якоря, влияние ограничения мощности источников питания, потоки рассеяния обмоток возбуждения. Для удобства моделирования переменные структурных схем выражены в относительных единицах.

4.4.2. Структурная схема генератора постоянного тока

Рассмотрим электромеханические процессы, протекающие в генераторе, работающем с индуктивной нагрузкой.

Схема включения генератора изображена на рис. 1.

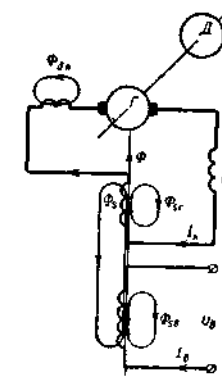


Рис. 1. Схема включения генератора постоянного тока.

Уравнения напряжений и э. д. с. в цепи якоря и обмоток возбуждения имеют следующий вид:

$$E_{\Gamma} = I_{\text{H}} R_{\text{H}} + L_{\text{H}} p I_{\text{H}} + I_{\text{H}} (R_{\text{C}} + R_{\text{д.п}} + R_{\text{Я}}) + \omega_{\text{C}} p (\Phi + \Phi_{\text{сC}} + \Phi_{\text{S}}) + \omega_{\text{д.п}} p \Phi_{\text{д.п}} + \omega'_{\text{Я}} p \Phi_{\text{Я}}; \quad (1)$$

$$U_{\text{B}} = I_{\text{B}} R_{\text{B}} + \omega_{\text{B}} p (\Phi + \Phi_{\text{сB}} + \Phi_{\text{S}}). \quad (2)$$

Уравнения потоков и н. с.:

$$\Phi = \lambda (I_{\text{B}} \omega_{\text{B}} + I_{\text{H}} \omega_{\text{C}} - I_{\text{H}} \omega'_{\text{Я}}); \quad (3)$$

$$\Phi_{\text{S}} = \lambda_{\text{S}} (I_{\text{B}} \omega_{\text{B}} + I_{\text{H}} \omega_{\text{C}}); \quad (4)$$

$$\Phi_{\text{сC}} = \lambda_{\text{сC}} I_{\text{H}} \omega_{\text{C}}; \quad (5)$$

$$\Phi_{\text{сB}} = \lambda_{\text{сB}} I_{\text{B}} \omega_{\text{B}}; \quad (6)$$

$$\Phi_{\text{д.п}} = \lambda_{\text{д.п}} I_{\text{H}} \omega_{\text{д.п}}; \quad (7)$$

$$\Phi = \lambda_{\text{сЯ}} I_{\text{H}} \omega'_{\text{Я}}. \quad (8)$$

Уравнение моментов приводного двигателя:

$$M_{\text{д}} - M_{\Gamma} = (J_{\text{д}} + J_{\Gamma}) p \Omega, \quad (9)$$

где E — электродвижущая сила;

I — ток;

Φ — магнитный поток;

U — напряжение;

R — активное сопротивление;

L — индуктивность;

ω — число витков;

λ — проводимость магнитного потока;

M — вращающий момент;
 J — момент инерции;
 Ω — частота вращения приводного двигателя;
 w_a — приведенное число витков реакции якоря.
 Индексы имеют следующие значения:

д — двигатель;
 г — генератор;
 н — нагрузка;
 с — последовательная обмотка возбуждения;
 д.п. — дополнительные полюсы;
 в — возбуждение;
 я — якорь;
 s — рассеяние;
 0 — номинальный режим;
 и — источник питания.

В приведенных уравнениях

$$E = k_e \Omega \Phi; \quad M_{\Gamma} = k_M \Phi I_{\Gamma}, \quad (10)$$

где k_e, k_M — постоянные коэффициенты.
 Обозначим:

$$\begin{aligned} R_{\Gamma,я\Sigma} &= R_{я} + R_{д.п} + R_c; \\ L_{\Gamma,я\Sigma} &= L_{sя} + L_{д.п} + L_{sc} + L_{sя.с}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} L_{sн} &= \lambda_{sя} \omega'^2_{я}, \quad L_{д.п} = \lambda_{д.п} \omega'^2_{д.п}, \quad L_{sc} = \\ &= \lambda_{sc} \omega_c^2, \quad L_{sя.с} = \lambda_{sя} \omega'_{я} \omega_c. \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразуем уравнение (1) с учетом (3) — (8), (11), (12) к следующему виду:

$$\begin{aligned} E_{\Gamma} &= I_{\Gamma} (R_{\Gamma} + R_{\Gamma,я\Sigma}) + (L_{\Gamma} + L_{\Gamma,я\Sigma}) p I_{\Gamma} + \\ &+ \frac{T_c - T'_{sc}}{K_c} K_e \Omega_0 p \Phi, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$T'_{sc} = \lambda_{sc} \frac{\omega_c^2}{R_c};$$

$T_c = (\lambda + \lambda_{sc} + \lambda_s) \frac{\omega_c^2}{R_c}$ — постоянная времени обмотки по последовательному возбуждению;

$K_c = \lambda \frac{\omega_c}{R_c} K_e \Omega_0$ — коэффициент усиления обмотки последовательного возбуждения.

Решая совместно уравнения (2) — (6), получим:

$$\begin{aligned} U_{в} \frac{\lambda_{п}}{\lambda_0} &= \Phi \frac{R_{в}}{\lambda_0 \omega_{в}} (1 + T_{в} p) + \Phi \frac{R_{в}}{\lambda_0 \omega_{в}} \left(\frac{\lambda_{п} - \lambda}{\lambda} \right) (1 + T_{св} p) + \\ &+ \lambda_{п} I_{н} \omega'_{п} \frac{R_{в}}{\lambda_0 \omega_{в}} (1 + T_{св} p) - \lambda_{п} I_{н} \omega_c \frac{R_{в}}{\lambda_0 \omega_{в}} (1 + T'_{св} p), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$T_{в} = (\lambda_{п} + \lambda_{св} + \lambda_s) \frac{\omega_{в}^2}{R_{в}} \quad (15)$$

— постоянная времени обмотки возбуждения;

$$T_{св} = (\lambda_{сн} + \lambda_s) \frac{\omega_{в}^2}{R_{в}} \quad (16)$$

— постоянная времени рассеяния обмотки возбуждения;

$$T'_{св} = \lambda_{сн} \frac{\omega_{в}^2}{R_{в}}, \quad (17)$$

$\lambda_{п}$ — проводимость цепи рабочего потока машины на линейном участке кривой намагничивания;

$$\lambda_0 = \frac{\Phi_0}{F_0}.$$

Для того чтобы выходные и входные величины звеньев структурной схемы были связаны между собой лишь коэффициентами усиления и постоянными времени, запишем уравнения (9), (13), (14) в относительных единицах.

В качестве базисных величин переменных примем их номинальные значения:

$$\begin{aligned} U_{в0} &= U_{в0} = I_{н0} R_{в}; \quad \Phi_0 = \Phi_0; \quad I_{н0} = I_{н0}; \quad E_{г0} = \\ &= E_{г0}; \quad \Omega_0 = \Omega_0; \quad M_{г0} = M_{г0} = C_M \Phi_0 I_{н0}; \quad M_{д0} = M_{д0}. \end{aligned}$$

В соответствии с уравнениями (2), (3), (10) базисные величины связаны между собой следующими соотношениями:

$$\alpha_F U_{в0} = \alpha_F I_{н0} R_{в} = \frac{R_{в}}{\lambda_0 \omega_{в}} \Phi_0 = \frac{R_{в}}{\lambda_0 \omega_{в}} \frac{E_{г0}}{K_e \Omega_0}, \quad (18)$$

где

$$\alpha_F = F_{рез0} / F_{в0}$$

— отношение н. с. результирующей и обмотки возбуждения. В относительных единицах уравнение (18) имеет вид:

$$\alpha_p \frac{\lambda_L}{\lambda_0} u_B = \varphi (1 + T_{вp}) + \frac{\lambda_L - \lambda}{\lambda} \varphi (1 + T_{свp}) + K'_{я} i_H (1 + T_{свp}) - K'_{с} i_H (1 + T'_{свp}), \quad (19)$$

где

$$K'_{я} = \frac{R_b \omega'_b \lambda_L}{\omega_b \lambda_0} \frac{\lambda_0 \omega_b K_e \Omega_0}{R_H R_{Г0}} = \frac{\lambda_L \omega'_я K_e \Omega_0}{R_{Г0}}; \quad K'_{с} = \frac{R_b \omega_c \lambda_L}{\omega_b \lambda_0} \frac{\lambda_0 \omega_b K_e \Omega_0}{R_b R_{Г0}} = \frac{\lambda_L \omega_c K_e \Omega_0}{R_{Г0}}; \quad R_{Г0} = \frac{E_{Г0}}{I_{Г0}}. \quad (20)$$

Уравнение (13) в относительных единицах примет вид:

$$e_r = \frac{1}{\alpha_R} i_H (1 + T_{вp}) + \frac{R_{г.я\lambda}}{R_{Г0}} i_H + T_{г.я\lambda} p i_H + \frac{T_c - T'_{сc}}{K_c} p \varphi, \quad (21)$$

где

$$T_{г.я\lambda} = \frac{L_{г.я\lambda}}{R_{Г0}}; \quad \alpha_R = \frac{R_{Г0}}{R_H}.$$

Представим уравнение (9) в относительных единицах

$$p_d = \alpha_M \mu_{г} T_{м.р} \omega, \quad (22)$$

где $\alpha_M = M_{Г0}/M_{д0}$ — коэффициент нагрузки приводного двигателя;

$T_{м} = T_{м.д} + \alpha_M T_{м.г}$ — механическая постоянная времени, равная времени разгона роторов генератора и приводного двигателя под действием номинального момента двигателя до номинальной скорости вращения генератора,

$$T_{м.д} = \frac{J_{д} \omega_{Г0}}{M_{д0}}; \quad T_{м.г} = \frac{J_{г} \omega_{Г0}}{M_{Г0}},$$

$\omega = \Omega/\Omega_0$ — частота вращения в относительных единицах.

По уравнениям (19), (21), (22) может быть составлена структурная схема генератора (рис. 2).

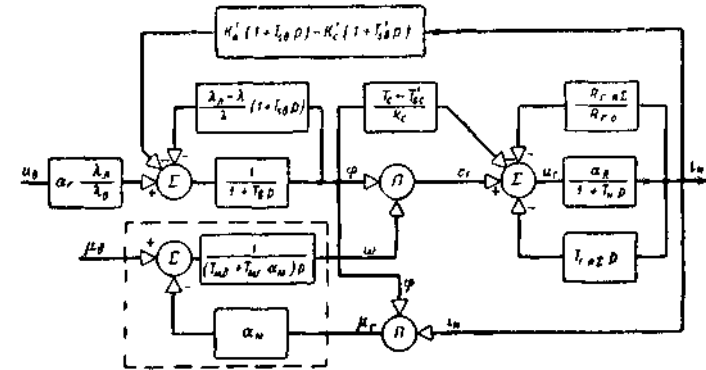


Рис. 2. Структурная схема генератора постоянного тока.

При этом необходимо учесть выражение, связывающее ток и магнитный поток генератора с его моментом, который определяет нагрузку приводного двигателя:

$$i_H \varphi = \mu_{г}, \quad (23)$$

а также записать в относительных единицах уравнение для э. д. с:

$$e = \omega \varphi. \quad (24)$$

На структурной схеме показаны внешние возмущающие сигналы для генератора: напряжение возбуждения u_B и момент приводного двигателя $\mu_{д}$.

Для машины с параллельным возбуждением $U_B = U_r$ или в относительных единицах:

$$u_B = u_r \frac{U_{Г0}}{U_{в0}}.$$

Действие внутренних обратных связей, отражающих влияние последовательно включенной обмотки и размагничивающей составляющей реакции якоря, учитывается составляющими в общей сумме эквивалентных напряжений, приложенных к обмотке возбуждения.

Влияние нелинейности кривой намагничивания учитывается отрицательной обратной связью с коэффициентом усиления $\frac{\lambda_L - \lambda}{\lambda}$, который на линейном участке кривой равен нулю.

Принятое изображение нелинейности магнитной цепи машины позволяет получить в основном канале инерционное звено с постоянной времени $T_{в}$, не зависящей от насыщения.

Звено $\frac{T_c - T'_{sc}}{K_c} p$ отображает трансформаторную связь между обмотками последовательного и независимого возбуждения.

Отрицательные обратные связи с коэффициентами $R_{г.я\Omega}/R_{г\Phi}$ и $T_{г.я\Omega}$ характеризуют падение напряжения в якоре.

В случае, когда генератор приводится во вращение двигателем конечной мощности, скорость которого может изменяться от нагрузки, необходимо пользоваться полной структурной схемой, в которую включен узел приводного устройства. На рис. 2, 3 такой узел условно изображен пунктиром.

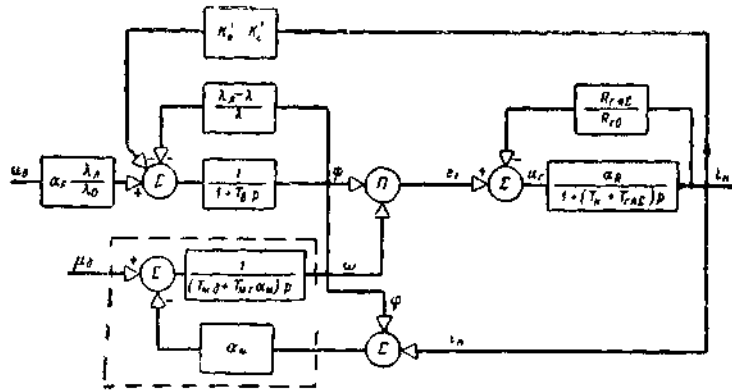


Рис. 3. Упрощенная структурная схема генератора постоянного тока.

Как видно из структурной схемы, с увеличением мощности приводного двигателя коэффициент α_m уменьшается, что соответствует меньшему влиянию электромагнитных процессов в генераторе на изменение его скорости.

Для машин общепромышленного применения величины постоянных времени

$$T'_{св}, T_{св}, \frac{T_c - T'_{sc}}{K_c},$$

как правило, малы, и структурная схема может быть упрощена (рис. 3) за счет пренебрежения соответствующими гибкими обратными связями.

4.4.3. Структурная схема двигателя постоянного тока

Схема включения двигателя приведена на рис. 4.

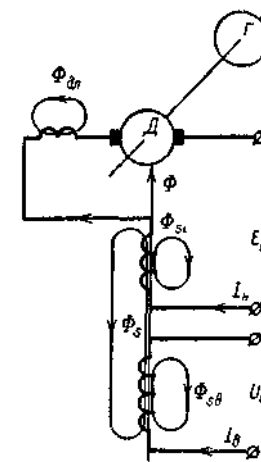


Рис.4. Схема включения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

Уравнения напряжений и э. д. с. для цепи якоря имеет вид:

$$E_{и} - E_{д} \omega_c p (\Phi + \Phi_{sc} + \Phi_s) + \omega_{д.п} p \Phi_{д.п} + \omega'_{я} p \Phi_{с\text{я}} + I_{д} R_{д.я\Omega} + I_{д} R_{и} + L_{и} p I_{д}, \quad (25)$$

где $R_{д.я\Omega}$ — определяется выражением (11) применительно к двигателю;

$E_{и}, R_{и}, L_{и}$ — напряжение, сопротивление и индуктивность источника питания.

Уравнения напряжений цепи возбуждения, а также уравнения потоков и н. с. идентичны приведенным выше уравнениям (2) — (8).

Уравнение моментов:

$$M_{д} - M_{и} = (J_{д} + J_{и}) p \Omega. \quad (26)$$

Приведем уравнение (25) с учетом (3) — (8), (10), (11), (12) к следующему виду:

$$E_{\text{н}} - E_{\text{ж}} = I_{\text{д}} (R_{\text{д.я}\Sigma} + R_{\text{н}}) + (L_{\text{д.я}\Sigma} + L_{\text{н}}) p I_{\text{д}} + \frac{T_{\text{с}} - T'_{\text{с}}}{K_{\text{с}}} K_{\text{с}} \Omega_0 p \Psi. \quad (27)$$

Индуктивность якорной цепи двигателя $L_{\text{д.я}\Sigma}$, определяется выражением (12).

Как и для генератора, в качестве базисных величин переменных принимаем их номинальные значения.

Уравнения (26), (27) в относительных единицах принимают вид:

$$\alpha_e e_{\text{н}} - e_{\text{д}} = \left(\frac{1}{\alpha_{\text{дR}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{нR}}} \right) i_{\text{д}} (1 + T_{\text{я}\Sigma} p) + \frac{T_{\text{с}} - T'_{\text{с}}}{K_{\text{с}}} p \varphi; \quad (28)$$

$$i_{\text{д}} - \alpha_{\text{М}} i_{\text{п}} = (T_{\text{м.д}} + \alpha_{\text{М}} T_{\text{М.п}}) p \omega, \quad (29)$$

где

$$R_{\text{д0}} = \frac{E_{\text{д0}}}{I_{\text{д0}}}, \quad \alpha_{\text{дR}} = R_{\text{д0}}/R_{\text{д.я}\Sigma}, \quad \alpha_{\text{нR}} = R_{\text{д0}}/R_{\text{н}},$$

$e_{\text{н}} = E_{\text{н}}/E_{\text{н0}}$ — э. д. с. источника питания в относительных единицах;

$\alpha_e = E_{\text{н0}}/E_{\text{д0}}$ — коэффициент приведения э. д. с. источника к э. д. с. двигателя;

$T_{\text{я}\Sigma} = \frac{L_{\text{н}} + L_{\text{д.я}\Sigma}}{R_{\text{н}} + R_{\text{д.я}\Sigma}} = \frac{T_{\text{д.я}\Sigma} + \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{д.я}\Sigma}} T_{\text{н}}}{1 + \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{д.я}\Sigma}}}$ — постоянная времени якорной цепи;

$\alpha_{\text{М}} = M_{\text{н0}}/M_{\text{д0}}$ — коэффициент приведения момента нагрузки к моменту двигателя;

$i_{\text{п}} = M_{\text{н}}/M_{\text{н0}}$ — момент нагрузки в относительных единицах;

$T_{\text{м.д}} = \frac{J_{\text{д}} \omega_{\text{д0}}}{M_{\text{д0}}}$ — механическая постоянная времени двигателя;

$$T_{\text{м.п}} = \frac{J_{\text{п}} \omega_{\text{д0}}}{M_{\text{н0}}}.$$

При структурном моделировании двигателя постоянного тока удобно пользоваться механической постоянной времени, представляющей собой время разгона двигателя до номинальной скорости под действием номинального вращающего момента.

В ряде случаев пользуются постоянной времени, равной времени пуска двигателя до номинальной скорости под действием пускового момента. По уравнениям (28), (29) и (19), (23), (24) может быть составлена структурная схема двигателя.

При пренебрежении постоянными времени в цепях обратных связей получаем структурную схему, представленную на рис. 5.

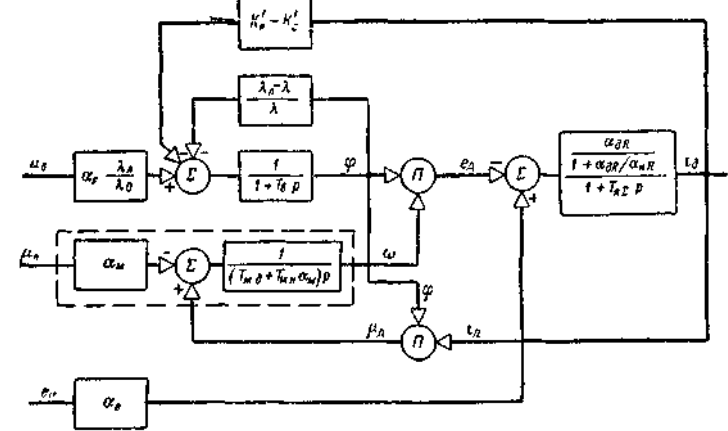


Рис. 5. Упрощенная структурная схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

В более простых случаях (не учитывается связь обмотки возбуждения с цепью главного тока и изменение потока возбуждения двигателя, скорость вращения генератора принимается постоянной и т. п.) структурные схемы могут быть получены либо из схем, приведенных в настоящем разделе в качестве частных случаев, либо на основании исходных уравнений, записанных с необходимыми упрощениями. Построение структурных схем двигателя постоянного тока по упрощенным уравнениям приведено в последующих разделах.

Параметры структурных схем легко могут быть определены экспериментально или на основании расчетного формуляра машины.

Рассмотрим структурную схему двигателя с последовательным возбуждением.

Двигатель последовательного возбуждения представляет собой разновидность машины постоянного тока с одной обмоткой возбуждения, следовательно, для составления структурной схемы можно воспользоваться полученными выше общими уравнениями (23), (24), (28), (29).

Связь между потоком и током в относительных единицах можно представить следующим образом:

$$\varphi = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{н}}} i; \quad (30)$$

с учетом (30) перепишем уравнение (28):

$$\alpha_c e_{\text{н}} - e_{\text{л}} = \left(\frac{1}{\alpha_{\text{лR}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{нR}}} \right) i_{\text{л}} (1 + T_{\text{ял}} p) + \frac{T_c - T'_{sc}}{K_c} p i_{\text{л}} + \frac{T_c - T'_{sc}}{K_c} \frac{\lambda - \lambda_{\text{л}}}{\lambda_{\text{л}}} p i_{\text{л}};$$

после преобразований окончательно получим:

$$\alpha_c e_{\text{н}} - e_{\text{л}} = \left(\frac{1}{\alpha_{\text{лR}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{нR}}} \right) i_{\text{л}} (1 + T_3 p) + \frac{T_c - T'_{sc}}{K_c} \frac{\lambda - \lambda_{\text{л}}}{\lambda_{\text{л}}} p i_{\text{л}}, \quad (31)$$

где T_3 —суммарная постоянная времени якорной цепи с учетом обмотки возбуждения, включенной последовательно с якорем, на линейном участке кривой намагничивания.

По уравнениям (23), (24), (29), (3-30), (31) составлена структурная схема двигателя с последовательным возбуждением, изображенная на рис. 6.

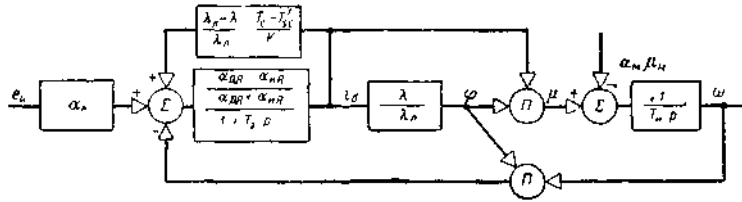


Рис. 6 Структурная схема двигателя постоянного тока с последовательным возбуждением.

Иногда с целью сокращения количества нелинейных элементов и получения более простой схемы пренебрегают

$$\text{членом } \frac{T_c - T'_{sc}}{K_c} \frac{\lambda - \lambda_{\text{л}}}{\lambda_{\text{л}}} p i_{\text{л}}.$$

Так как различные модификации машин (генератор, двигатель) одного и того же габарита имеют различные значения номинального потока $\Phi_{\text{г0}}$, то в структурной схеме введен коэффициент $\alpha_{\Phi} = \frac{\Phi_{\text{г0}}}{\Phi_0}$.

По структурным схемам, изображенным на рис. 3, 5 и 6, могут быть легко составлены схемы набора решающих элементов электронной модели. Узловые точки структурной схемы в модели представляются суммирующими элементами или блоками произведений.

Усилительные и инерционные звенья, входящие в структурную схему, при переходе к схемам модели заменяются делителями

напряжений, блоками нелинейности и типовой схемой модели инерционного звена.

4.5. Моделирование стабилизирующих устройств

4.5.1. Общие принципы моделирования стабилизирующих устройств

В системах электропривода выходные цепи стабилизирующего устройства обычно присоединяются ко входу электронного, магнитного или электромашинного усилителя. В зависимости от вида усилителя изменяется характер нагрузки стабилизирующего устройства. Однако в аналитических расчетах обычно используется передаточная функция стабилизирующего устройства, работающего на активную нагрузку, так как учет индуктивного характера нагрузки связан со значительным усложнением расчетов. В ряде случаев такое допущение приводит к неверным качественным результатам, поскольку не всегда можно считать, что стабилизирующее устройство состоит из детектирующих звеньев.

Для получения электронной модели стабилизирующего устройства необходима структурная схема, в которой постоянные коэффициенты зависят только от параметров этого устройства. В этом случае представляется возможным легко изменять коэффициенты передачи модели при отыскании параметров гибких обратных связей, обеспечивающих оптимальные процессы системы.

Взаимное влияние усилителя и стабилизирующего устройства, имеющее место вследствие наличия индуктивной связи, желательно учитывать в структурной схеме отдельным звеном; при этом сама схема должна оставаться неизменной независимо от вида усилителя и режима его работы.

Рассмотрим структурные схемы стабилизирующих устройств, работающих на индуктивную нагрузку, которые удовлетворяют указанным требованиям. Предложенные структурные схемы могут быть применены для построения электронных моделей. При этом стабилизирующее устройство используется для электромашинных усилителей поперечного поля и продольного поля, магнитный усилитель, генератор и т. д. В рассмотренных примерах в качестве усилителя принят ЭМУ поперечного поля.

4.5.2. Структурная схема и схема электронной модели стабилизирующего трансформатора напряжения

Для получения структурной схемы стабилизирующего трансформатора следует рассмотреть совместную систему уравнений трансформатора и усилительного элемента.

На рис. 1 представлена схема включения стабилизирующего трансформатора напряжения на одну из обмоток управления усилителя.

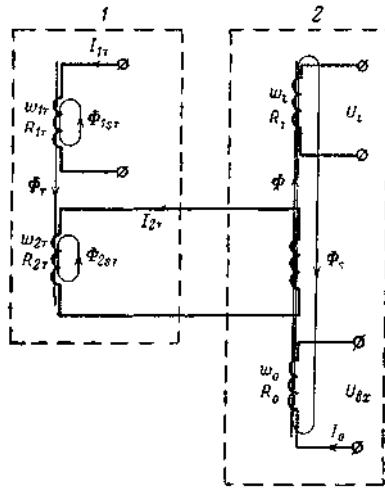


Рис. 1. Схема включения стабилизирующего трансформатора на одну из обмоток усилительного элемента.

- 1 — стабилизирующий трансформатор;
- 2 — обмотки управления усилительного элемента.

Физические процессы в рассматриваемой схеме описываются следующей системой уравнений. Уравнение цепи первичной обмотки стабилизирующего трансформатора можно выразить в виде

$$U_{1T} = I_{1T}R_{1T} + \omega_{1T}p(\Phi_T + \Phi_{1sT}), \quad (1)$$

- U_{1T} — напряжение, приложенное к обмотке;
- I_{1T} — ток в цепи первичной обмотки трансформатора;
- ω_{1T} — число витков первичной обмотки трансформатора;
- R_{1T} — активное сопротивление первичной цепи;

Φ_T, Φ_{1sT} — рабочий поток и поток рассеяния первичной обмотки.

В уравнение цепи вторичной обмотки стабилизирующего трансформатора входят следующие составляющие: падение напряжения в активных сопротивлениях вторичной обмотки R_{2T} и обмотки управления усилителя R_c , нагрузкой которой служит стабилизирующий трансформатор; э. д. с, возникающая при изменении потока Φ_T и потока рассеяния вторичной обмотки Φ_{2sT} ; э. д. с, возникающая в обмотке управления при изменении рабочего потока усилителя Φ и потока рассеяния обмоток управления Φ_s (коэффициент связи между обмотками управления принят равным единице).

Уравнение цепи вторичной обмотки стабилизирующего трансформатора имеет вид:

$$0 = I_{2T}(R_{2T} + R_c) + \omega_{2T}p(\Phi_T + \Phi_{2sT}) + \omega_cp(\Phi + \Phi_s), \quad (2)$$

где I_{2T} — ток в цепи вторичной обмотки трансформатора;

ω_{2T} — число витков вторичной обмотки трансформатора;

ω_c — число витков стабилизирующей обмотки усилителя.

Величины рабочего потока и потоков рассеяния трансформатора определяются н. с. обмоток и соответствующими проводимостями λ :

$$\Phi_T = \lambda_T(I_{1T}\omega_{1T} + I_{2T}\omega_{2T}); \quad (3)$$

$$\Phi_{1sT} = \lambda_{1sT}I_{1T}\omega_{1T}; \quad (4)$$

$$\Phi_{2sT} = \lambda_{2sT}I_{2T}\omega_{2T}. \quad (5)$$

Уравнения цепей основной (задающей) ω_0 и остальных обмоток управления усилителя имеют следующий вид:

$$U_{вх} = I_0R_0 + \omega_0p(\Phi + \Phi_s); \quad (6)$$

$$U_i = I_iR_i + \omega_ip(\Phi + \Phi_s), \quad (7)$$

где $U_{вх}$ и U_i — напряжения на задающей и i -й обмотках управления;

I_0, I_i, R_0, R_i — токи и сопротивления задающей и i -й обмоток управления.

Рабочий поток Φ определяется разностью потока Φ_1 , создаваемого н. с. обмоток управления, и размагничивающего потока Φ_2 , обусловленного действием внутренних обратных связей усилителя:

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (8)$$

Величина потока Φ_1 определяется суммой н. с. обмоток управления:

$$\Phi_1 = \lambda \left(I_0\omega_0 + I_{2T}\omega_c + \sum_1^n I_i\omega_i \right), \quad (9)$$

где λ — проводимость потока управления.

Поток Φ_2 также выражается через н. с, приведенную к задающей обмотке:

$$\Phi_2 = \lambda I_{0c} \omega_0, \quad (10)$$

где I_{0c} —эквивалентный ток, приведенный к задающей обмотке, создающий размагничивающий поток Φ_2 .

Исключив из уравнений (6), (7), (9) I_0 и I_i , получим:

$$U_{вх} + \sum_1^n U_i \frac{\omega_i R_0}{\omega_0 R_i} - I_{0c} R_0 + I_{2T} R_0 \frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{R_0}{\omega_0} p \Phi_s \left(\frac{\omega_0^2}{R_0} + \sum_1^n \frac{\omega_i^2}{R_i} \right) = \frac{R_0}{\lambda \omega_0} \Phi \left(1 + \lambda \sum_1^n \frac{\omega_i^2}{R_i} p + \lambda \frac{\omega_0^2}{R_0} p \right). \quad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$U_{вх} + \sum_1^n U_i \frac{\omega_i R_0}{\omega_0 R_i} - I_{0c} R_0 = U_0; \\ \lambda \frac{\omega_0^2}{R_0} = T_0; \quad \sum_1^n \tau_i + \tau_0 = T_0; \\ \frac{\omega_i R_0}{\omega_0 R_i} = \frac{K_i}{K_0}; \quad \lambda \sum_1^n \frac{\omega_i^2}{R_i} = \sum_1^n \tau_i;$$

где U_0 — напряжение на задающей (основной) обмотке с учетом действия внутренних и внешних обратных связей;

K_0, K_i — коэффициенты усиления усилителя по напряжению по цепям задающей и i -й обмоток;

τ_0, τ_i — постоянные времени задающей (основной) и i -й обмоток;

T_0 — суммарная постоянная времени обмоток управления усилителя (кроме стабилизирующей обмотки).

Тогда выражение (11) может быть представлено в следующем виде:

$$U_0 + I_{2T} R_0 \frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{R_0}{\lambda \omega_0} p \Phi_s T_0 = \frac{R_0}{\lambda \omega_0} \Phi (1 + T_0 p). \quad (12)$$

Исключим из уравнений (1), (3), (4) Φ_s и Φ_{1sT} :

$$U_{1T} = I_{1T} R_{1T} + (\lambda_T \omega_{1T}^2 + \lambda_{1sT} \omega_{1T}^2) p I_{1T} + \lambda_T \omega_{1T} \omega_{2T} p I_{2T},$$

или

$$U_{1T} = I_{1T} R_{1T} (1 + \tau_{1T} p) + \lambda_T \omega_{1T} \omega_{2T} p I_{2T}, \quad (13)$$

где

$$\tau_{1T} = \frac{\lambda_T + \lambda_{1sT}}{R_{1T}} \omega_{1T}^2$$

— постоянная времени первичной обмотки стабилизирующего трансформатора.

Исключим из уравнений (2), (3), (5) Φ_T и Φ_{2sT} :

$$0 = I_{2T} (R_{2T} + R_c) + (\lambda_T \omega_{2T}^2 + \lambda_{2sT} \omega_{2T}^2) p I_{2T} + \lambda_T \omega_{1T} \omega_{2T} p I_{1T} + \omega_c p (\Phi + \Phi_s), \quad (14)$$

или

$$0 = I_{2T} (R_{2T} + R_c) (1 + \tau'_{2T} p) + \lambda_T \omega_{1T} \omega_{2T} p I_{1T} + \omega_c p (\Phi + \Phi_s), \quad (15)$$

где

$$\tau_{2T} = \frac{\lambda_T + \lambda_{2sT}}{R_{2T}} \omega_{2T}^2$$

— постоянная времени вторичной обмотки стабилизирующего трансформатора;

$$\tau'_{2T} = \tau_{2T} \frac{R_{2T}}{R_{2T} + R_c}. \quad (16)$$

Из уравнений (13) и (15) исключаем I_{1T} :

$$U_{1T} = I_{2T} (R_{2T} + R_c) \left[\lambda_T \frac{\omega_{1T} \omega_{2T}}{R_{2T} + R_c} p - \frac{(1 + \tau_{1T} p)(1 + \tau'_{2T} p)}{\lambda_T \frac{\omega_{1T} \omega_{2T}}{R_{1T}} p} \right] - \omega_c (\Phi + \Phi_s) \frac{1 + \tau_{1T} p}{\lambda_T \frac{\omega_{1T} \omega_{2T}}{R_{1T}}}$$

Обозначим:

$$\delta_1 = \frac{\lambda_T}{\lambda_{1sT} + \lambda_T}; \quad \delta_2 = \frac{\lambda_T}{\lambda_{2sT} + \lambda_T}, \quad (18)$$

где δ_1 и δ_2 — коэффициенты связи между обмотками стабилизирующего трансформатора.

Из (14), (16) и (18) имеем:

$$\lambda_T \frac{\omega_{1T} \omega_{2T}}{R_{1T}} = \tau_{1T} \frac{\omega_{2T}}{\omega_{1T}} \delta_1;$$

$$\lambda_{\tau} \frac{\omega_{1\tau} \omega_{2\tau}}{R_{2\tau} + R_c} = \tau'_{2\tau} \frac{\omega_{1\tau}}{\omega_{2\tau}} \delta_2. \quad (19)$$

Принимаем во внимание, что

$$E_1 = K_0 \frac{R_0}{\lambda \omega_0} \Phi$$

и

$$\frac{1}{K_0} \frac{\lambda \omega_c \omega_0}{R_0} = \frac{1}{K_0} \frac{\lambda \omega_c}{R_c} \frac{R_c \omega_0}{R_0 \omega_c} = \tau_c \frac{1}{K_c},$$

где E_1 — э. д. с. на выходе первого каскада усилителя;

$\tau_c = \lambda \frac{\omega_c^2}{R_c}$ — постоянная времени стабилизирующей обмотки усилителя;

$$\frac{R_c \omega_0}{R_0 \omega_c} = \frac{K_0}{K_c};$$

K_c — коэффициент усиления усилителя по напряжению по цепи стабилизирующей обмотки.

Тогда уравнение (17) можно записать в следующем виде:

$$U_{1\tau} K_{\tau} + (E_1 + C_e \Phi_s) \frac{\tau_c (1 + \tau_{1\tau} p)}{K_c \tau_{1\tau}} = -I_{2\tau} R_0 \frac{\omega_c}{\omega_0} \frac{K_0}{K'_c} \left[\frac{1 + (\tau_{1\tau} + \tau'_{2\tau}) p}{\tau_{1\tau} p} + \frac{(1 - \delta_1 \delta_2) \tau_{1\tau} \tau'_{2\tau} p^2}{\tau_{1\tau} p} \right], \quad (20)$$

где

$$R_{2\tau} + R_c = R_0 \frac{\omega_c}{\omega_0} \frac{K_0}{K'_c};$$

$$K'_c = K_c \frac{R_c}{R_{2\tau} + R_c};$$

$$\frac{K_c \omega_c}{\tau_c} = C_e;$$

$K_{\tau} = \delta_1 \frac{\omega_{2\tau}}{\omega_{1\tau}}$ — коэффициент усиления по напряжению стабилизирующего трансформатора.

Используя уравнения (12) и (20), легко составить структурную схему узла усилитель — стабилизирующий трансформатор (рис. 2), а затем и схему набора решающих элементов электронной модели.

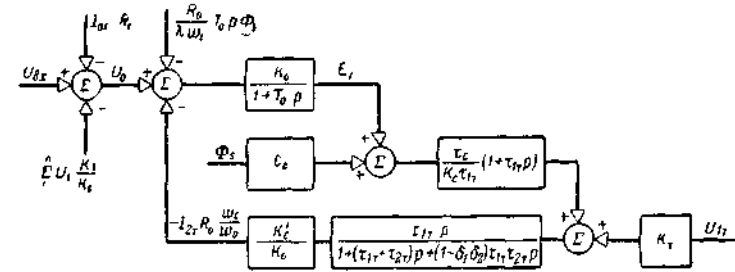


Рис. 2. Структурная схема узла усилитель — стабилизирующий трансформатор.

В структурной схеме (рис. 2) используется общепринятая передаточная функция стабилизирующего трансформатора с активной нагрузкой:

$$\omega_{\tau}(p) = \frac{K_{\tau} R_c}{R_{2\tau} + R_c} \frac{\tau_{1\tau} p}{1 + (\tau_{1\tau} + \tau_{2\tau}) p + (1 - \delta^2) \tau_{1\tau} \tau_{2\tau} p^2}. \quad (21)$$

Здесь принято

$$\delta_1 = \delta_2;$$

влияние индуктивного характера нагрузки учтено звеном

$$\frac{\tau_c}{\tau_{1\tau} K_c} (1 + \tau_{1\tau} p).$$

На схеме отражено, что индуктивность нагрузки трансформатора определяется суммой рабочего потока усилителя и потока рассеяния управляющих обмоток.

Из приведенной схемы следует, что передаточные функции звеньев стабилизирующего трансформатора не зависят как от параметров и числа звеньев основного канала системы, так и от нагрузки усилителя. Указанная структурная схема может быть применена для построения электронной модели в случае работы стабилизирующего трансформатора в системе с электромашинным усилителем поперечного поля и продольного поля, магнитным усилителем и т. п.

В том случае, когда потоком рассеяния Φ_s можно пренебречь (в магнитных усилителях), схема принимает более простой вид. В ЭМУ поперечного поля величину потока рассеяния считают пропорциональной току нагрузки. Структурная схема, изображенная на рис. 2, может быть использована также для общего случая, когда поток рассеяния Φ_s определяется суммой н. с. нескольких обмоток.

В качестве примера, иллюстрирующего влияние индуктивного характера нагрузки стабилизирующего трансформатора на переходный

процесс, рассмотрим совместную работу трансформатора с ЭМУ поперечного поля. Структурная схема узла ЭМУ поперечного поля — стабилизирующий трансформатор представлена на рис. 3.

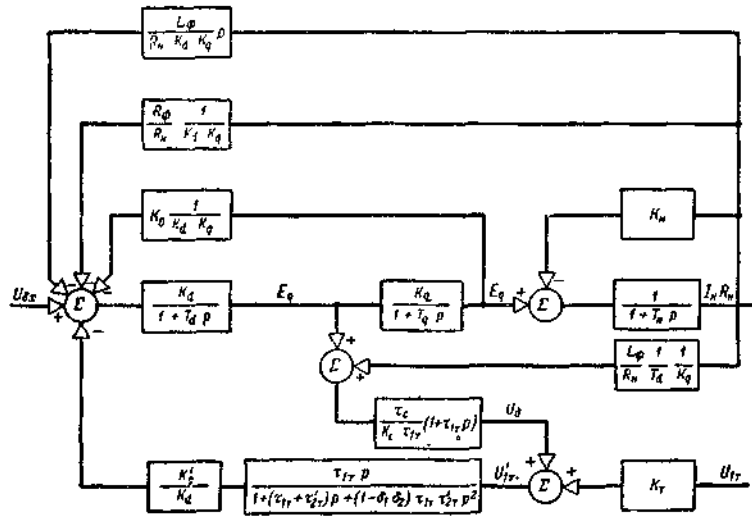


Рис. 3. Структурная схема узла ЭМУ поперечного поля — стабилизирующий трансформатор.

В соответствии с указанной структурной схемой была собрана электронная модель электромашиного усилителя типа ЭМУ, к выходным зажимам которого присоединен стабилизирующий трансформатор типа ТС.

Вторичная обмотка трансформатора подключалась на одну из обмоток управления ЭМУ.

Ниже приводятся параметры ЭМУ и стабилизирующего трансформатора:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0,005 \text{ сек}; K_0 = 0,291; \tau_n = 0,04 \text{ сек}; T_0 = \tau_0 + \tau_n = \\ &= 0,045 \text{ сек}; \tau_q = 0,49 \text{ сек}; K_q = 66; K_0 = 0,254; \tau_{1T} = \\ &= 0,19 \text{ сек}; \tau_{2T} = 0,283 \text{ сек}; \delta_1 = \delta_2 = 0,906; \tau_c = \\ &= 0,091 \text{ сек}; K_c' = 2,59; K_T = 0,682; \omega_{1T} = 2620; \omega_{2T} = \\ &= 1970; \text{рабочий воздушный зазор трансформатора } \delta_D = \\ &= 3 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Исследовалась работа ЭМУ в режиме холостого хода (рис. 5).

Для рассматриваемого случая система уравнений узла ЭМУ — стабилизирующий трансформатор имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{\text{рез}} &= U_{\text{вх}} - 0,254 E_a - U_{2T}; \\ 0,045 p E_q &= 0,291 U_{\text{рез}} - E_q; 0,49 p E_a = 66 E_q - E_a; \\ U_{\text{д}} &= 1,02 E_q + 0,314 p E_q; U'_{1T} = 6,1 E_a + U_{\text{д}}; \\ 0,00967 p^2 U_{2T} &= 0,19 p U'_{1T} - U_{2T} - 0,473 p U_{2T}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введя масштабные коэффициенты

$$E_a = 10 \bar{E}_a; U_{2T} = 5 \bar{U}_{2T}; U'_{1T} = 10 \bar{U}'_{1T}; t = 0,1 \bar{t}, \quad (23)$$

получим систему уравнений в машинных переменных, по которой составлена схема набора решающих элементов электронной модели (рис. 4).

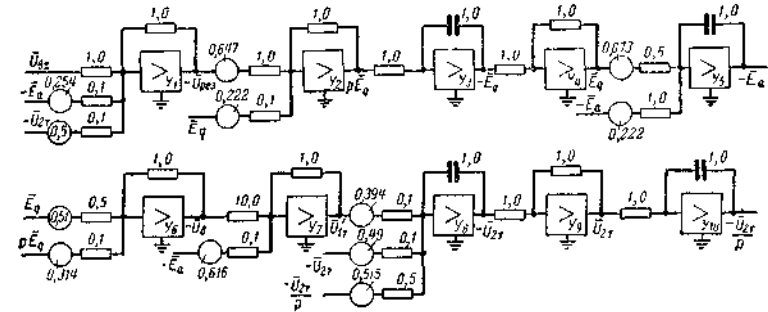


Рис. 4. Схема электронной модели узла ЭМУ-ПО — стабилизирующий трансформатор ТС.

На модели узла ЭМУ — стабилизирующий трансформатор были сняты частотные характеристики, которые сравнивались с аналогичными кривыми реальной системы. Как видно из рис. 5, эти кривые имеют достаточно близкое совпадение.

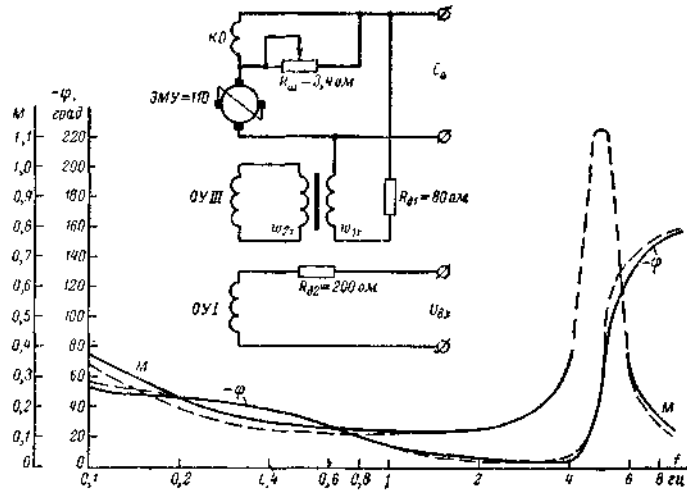


Рис. 5. Частотные характеристики узла ЭМУ—стабилизирующий трансформатор.

----- характеристики, полученные на модели;
 — экспериментальные характеристики;

ЭМУ; $\tau_0 = 0,005$ сек; $K_v = 0,291$; $\tau_n = 0,04$ сек;

$T_0 = \tau_0 + \tau_n = 0,045$ сек; $\tau_n = 0,49$ сек; $K_v = 66$; $K_n = 0,254$;

ТС; $\tau_{1T} = 0,19$ сек; $\tau_{2T} = 0,283$ сек; $b_1 = b_2 = 0,906$; $\tau_c = 0,091$ сек;

$K_c = 2,59$; $K_T = 0,682$; $\omega_{1T} = 2620$; $\omega_{2T} = 1970$; $\delta_p = 3$ мм.

Следует отметить, что в случае пренебрежения индуктивным характером нагрузки трансформатора, т. е. при $\tau_c = 0$ (на модели это имитировалось разрывом цепи (U_d), система оказывается неустойчивой (рис. 6).

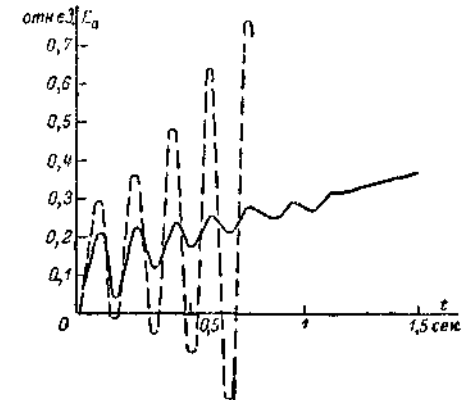


Рис. 6. Кривые переходного процесса.
 - - - - при $\tau_c = 0$; — — — при $\tau_c = 0,091$ сек.

Полученный результат позволяет сделать выводы о необходимости проверки в каждом конкретном случае возможности пренебрежения индуктивностью нагрузки стабилизирующего трансформатора. Отметим, что при решении задачи на моделирующей установке учет индуктивности нагрузки связан с весьма незначительным усложнением схемы модели: добавляется один суммирующий усилитель.

Когда индуктивность нагрузки трансформатора не учитывается, его передаточная функция может быть также представлена в виде трех звеньев — дифференцирующего и двух инерционных:

$$\omega_T = \frac{K_P}{(T_{11}p + 1)(T_{12}p + 1)} \quad (24)$$

Электронная модель, соответствующая уравнению (24), может быть получена путем применения способов моделирования дробно-рациональных передаточных функций.

Во многих схемах электропривода первичная обмотка стабилизирующего трансформатора присоединяется к якору электрической машины. В том случае, когда модель машины содержит переменную производную э. д. с. якоря, являющуюся входной переменной стабилизирующего трансформатора, модель последнего упрощается, так как отпадает необходимость в операции дифференцирования. Существенное упрощение схемы модели может быть получено за счет пренебрежения потоками рассеяния стабилизирующего трансформатора. Возможность такого допущения зависит как от величины потоков рассеяния (от величины зазора), так и от частотных характеристик звеньев основного канала системы,

которые охвачены гибкой обратной связью. Упрощенные схемы модели стабилизирующего трансформатора представлены на рис. 7.

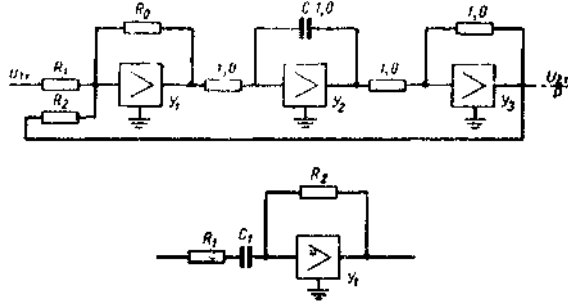


Рис 7. Схемы упрощенной электронной модели стабилизирующего трансформатора.

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\tau_{1T} \tau'_{2T}}{\tau_{1T} K_T \frac{K'_c}{K_0}};$$

$$\frac{R_2}{R_0} = \tau_{1T} + \tau'_{2T}; \quad R_2 C_1 = \tau_{1T} K_T \frac{K'_c}{K_0}; \quad R_1 C_1 = \tau_{1T} + \tau'_{2T}.$$

4.5.3. Структурная схема стабилизирующего трансформатора тока

Схема подключения стабилизирующего трансформатора тока к ЭМУ поперечного поля показана на рис. 8,а.

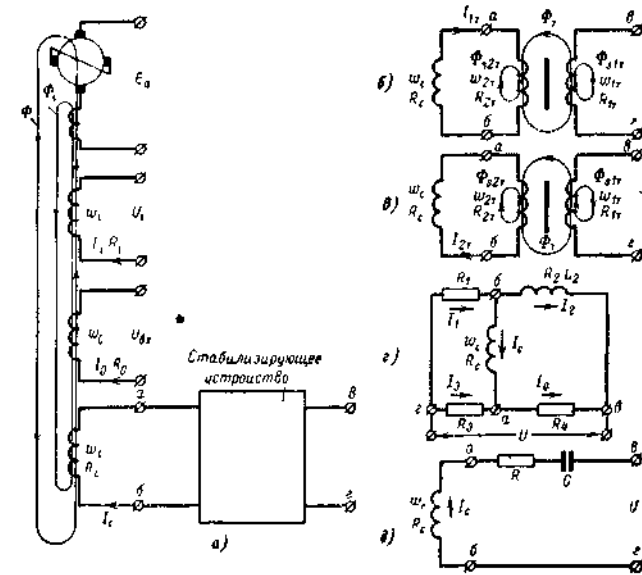


Рис. 8. Схемы подключения стабилизирующих устройств и ЭМУ поперечного поля.

а — общая схема включения стабилизирующего четырехполосника; б — стабилизирующий трансформатор напряжения; в — стабилизирующий трансформатор тока, г — мостовая схема стабилизации; д — схема включения дифференцирующего контура.

Ток I_n , производную которого необходимо получить, проходит по первичной обмотке трансформатора ω_{1T} . Его вторичная обмотка ω_{2T} присоединена к управляющей обмотке ЭМУ.

Процессы в рассматриваемом трансформаторе описываются уравнениями, аналогичными уравнениям стабилизирующего трансформатора напряжения:

$$0 = I_c (R_{2T} + R_c) + \omega_{2T} p (\Phi_T + \Phi_{2sT}) + \omega_c p (\Phi + \Phi_s); \quad (25)$$

$$\Phi_T = \lambda_T (I_n \omega_{1T} + I_c \omega_{2T}); \quad (26)$$

$$\Phi_{1sT} = \lambda_{1sT} I_n \omega_{1T}; \quad (27)$$

$$\Phi_{2sT} = \lambda_{2sT} I_c \omega_{2T}, \quad (28)$$

где I_c — ток в стабилизирующей обмотке ЭМУ (вторичный ток трансформатора);

I_n — ток нагрузки ЭМУ.

Обозначения остальных элементов и переменных аналогичны указанным в 4.5.1 и на рис. 8.

Исключив из уравнений (25), (26), (28) Φ_1 и $\Phi_{2\text{сТ}}$, получим:

$$\left[I_H R_{1\text{T}} K_T + \frac{\omega_c}{\tau_{1\text{T}}} (\Phi + \Phi_s) \right] \frac{\tau_{1\text{T}} p}{1 + \tau'_{2\text{T}} p} \frac{K'_c}{K_d} = -I_c R_o \frac{\omega_c}{\omega_o}, \quad (29)$$

где

$$K_T = \delta_1 \frac{\omega_{2\text{T}}}{\omega_{1\text{T}}}.$$

Так как э. д. с. поперечной цепи ЭМУ, наводимая потоком Φ , равна:

$$E_q = K_d \frac{R_o}{\lambda \omega_o} \Phi, \quad (30)$$

а поток рассеяния ЭМУ Φ_s зависит от тока нагрузки I_H :

$$\Phi_s = \lambda_s I_H \omega_K = \frac{L_\Phi}{K_q K_d} \frac{1}{\omega_o} I_H, \quad (31)$$

то уравнение усилителя (12) и уравнение трансформатора (29) можно представить в следующем виде:

$$\left(U_o + I_{2\text{T}} R_o \frac{\omega_c}{\omega_o} - \frac{L_\Phi}{K_d K_q R_H} I_H R_H \right) \frac{K_d}{1 + T_o p} = E_q; \quad (32)$$

$$\left[I_H R_{1\text{T}} K_T + \frac{\tau_c}{K_c \tau_{1\text{T}}} \left(E_q + \frac{L_\Phi}{K_q K_d R_H} \frac{K_d}{\tau_o} I_H R_H \right) \right] \times \\ \times \frac{\tau_{1\text{T}} p}{1 + \tau'_{2\text{T}} p} \frac{K'_c}{K_d} = -I_c R_o \frac{\omega_c}{\omega_o}. \quad (33)$$

В уравнении (33) индуктивный характер нагрузки стабилизирующего трансформатора характеризуется постоянной времени стабилизирующей обмотки ЭМУ:

$$\tau_c = \lambda \frac{\omega_c^2}{R_c}.$$

Уравнению (32) соответствует рассмотренная ранее структурная схема ЭМУ. По уравнению (33) составлена структурная схема, изображенная на рис. 9.

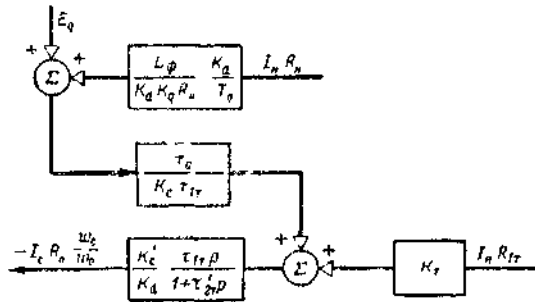


Рис. 9 Структурная схема стабилизирующего трансформатора тока, подключенного к обмотке усилителя.

Как и в предыдущем случае, в основу этой схемы положена передаточная функция стабилизирующего трансформатора тока, работающего на активную нагрузку. Она выражается произведением передаточных функций дифференцирующего и инерционных звеньев. Индуктивность нагрузки представлена звеном $\tau_c / K_c \tau_{1\text{T}}$.

4.5.4. Структурная схема стабилизирующего моста

Рассмотрим схему включения стабилизирующей обмотки усилителя в диагональ уравновешенного моста, показанную на рис. 8,2. Выходным сигналом мостовой схемы является напряжение U , входным — ток в стабилизирующей обмотке усилителя I_c . В плече моста, которым обычно служит обмотка возбуждения одной из машин системы электропривода, проходит ток I_2 , в остальных плечах — токи I_1, I_3, I_4 . Запишем исходную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_c; \\ I_3 &= -I_c + I_4; \\ U &= I_1 R_1 + I_2 R_2 (1 + T_2 p); \\ U &= I_3 R_3 + I_4 R_4; \\ U &= I_1 R_1 + \omega_c p (\Phi + \Phi_s) + I_c R_c + I_4 R_4, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где R_1, R_2, R_3, R_4 — сопротивления плеч моста;

$T_2 = L_2 / R_2$ — постоянная времени обмотки возбуждения машины.

Обозначения остальных элементов схемы и параметров аналогичны указанным в 4.5.1.

Из условия, что в установившемся режиме $I_c = 0$, следует:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} = \frac{1}{\rho}. \quad (35)$$

Исключая из уравнений (34) I_1, I_2, I_3, I_4 , получим:

$$W_c (\Phi + \Phi_s) \rho \frac{1 + T'_2 p}{T_2} + U = I_c (R_2 + R_4 + R_c \rho) \frac{1}{T'_2 p} \times \\ \times \left[1 + T'_2 p \left(1 + \frac{R_1}{R_2 + R_1 + R_c \rho} \right) \right], \quad (36)$$

где

$$T'_2 = T_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

— постоянная времени цепи обмотки возбуждения, включенной в плечо моста. Решая совместно уравнения (30), (31) и (36),

получим:

$$\left[\frac{\tau_c}{K_c} \left(E_q + \frac{L_\Phi}{K_q K_d R_n} \frac{K_d}{\tau_0} I_n R_n \right) \frac{1 + T'_2 p}{T'_2} \rho + U \right] \times \\ \times \frac{T'_2 p}{1 + T'_2 p \left(1 + \frac{R_1}{R_2 + R_4 + R_c \rho} \right)} \frac{K_c}{K_d} \frac{1}{\rho + \frac{1}{R_c}} = \\ = I_c R_0 \frac{\omega_c}{\omega_0}. \quad (37)$$

Уравнению (37) соответствует структурная схема, представленная на рис. 10. В полученной схеме влияние индуктивности стабилизирующей обмотки усилителя

на переходный процесс учитывается звеном $\frac{\tau_c}{K_c} \frac{1 + T'_2 p}{T'_2} \rho$.

Обычно $R_1, R_2 \ll R_3, R_4$, что позволяет упростить постоянные коэффициенты, входящие в уравнение (37).

Структурная схема ЭМУ, как и в предыдущем случае, остается неизменной.

В отличие от схем стабилизации с трансформаторами для получения отрицательной гибкой обратной связи полярность включения стабилизирующей обмотки усилителя по отношению к задающей обмотке должна быть противоположной.

4.5.5. Структурная схема дифференцирующего контура RC, подключенного к обмотке управления усилителя.

Во многих системах электропривода в качестве стабилизирующего элемента используется конденсатор, включенный в цепь одной из обмоток управления усилителя (рис. 8, д).

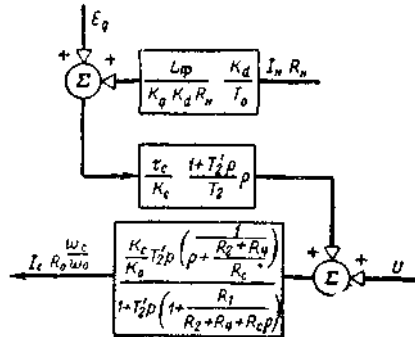


Рис 10. Структурная схема стабилизирующего моста, подключенного к обмотке управления усилителя.

Для этой цепи можно записать следующее уравнение:

$$[U - \omega_c p (\Phi + \Phi_s)] \frac{\tau_{RC} p}{1 + \tau_{RC} p} = I_c R, \quad (38)$$

где

$$\tau_{RC} = RC.$$

Из уравнений (38), (30) и (-31) получим:

$$\left[U - \frac{\tau_c}{K_c} p \left(E_q + \frac{L_\Phi}{K_q K_d R_n} \frac{K_d}{\tau_0} I_n R_n \right) \right] \times \\ \times \frac{\tau_{RC} p}{1 + \tau_{RC} p} \frac{K_c}{K_0} = I_c R_0 \frac{\omega_c}{\omega_0}. \quad (39)$$

По уравнению (39) составлена структурная схема, показанная на рис. 11.

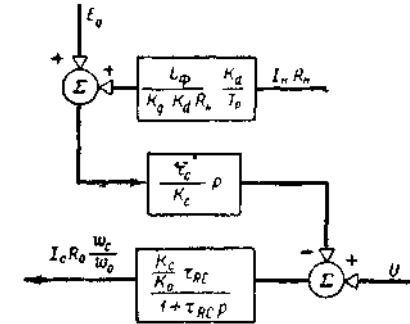


Рис. 11. Структурная схема стабилизирующего контура RC, подключенного к обмотке управления усилителя.

Для формирования управляющего сигнала иногда применяют гибкую обратную связь, полученную путем замыкания одной из обмоток управления ЭМУ или магнитного усилителя на конденсатор. Для этого случая структурная схема, изображенная на рис. 11, остается неизменной, причем сигнал на входе стабилизирующей цепи $U = 0$.

Рассмотренные структурные схемы стабилизирующего трансформатора напряжения, стабилизирующего трансформатора тока, мостовой схемы стабилизации, контура RC достаточно полно отображают работу указанных элементов в цепях обратных связей систем электропривода с электромашинными и магнитными усилителями.

По структурным схемам могут быть построены математические модели узла усилитель — стабилизирующее устройство. В случае необходимости сокращения числа решающих элементов модели

следует проверить возможность упрощения структурной схемы за счет пренебрежения индуктивностью стабилизирующей обмотки усилителя.

4.6. Моделирование синхронных машин

4.6.1. Общие принципы моделирования электрических машин переменного тока

Создание типовой модели машины переменного тока связано с рядом трудностей, возникающих при отображении реальных величин переменного тока в виде напряжений постоянного тока в моделирующей установке. Непосредственное решение первоначальных уравнений, описывающих переходные процессы в машине переменного тока, требует значительного количества электронных блоков. Наличие трех и более фаз исследуемой машины приводит также к дополнительному увеличению необходимого электронного оборудования.

Существует ряд методов решения рассматриваемой задачи. Например, синхронные машины наиболее часто моделируются на основе уравнений, записанных в осях, неподвижных относительно ротора данной машины (система d, q). Известны также другие системы записи уравнений (запись в синхронно вращающейся системе координат, в координатах, связанных со статором, и др.). Для отчетливого представления о преимуществах и недостатках отдельных вариантов изображения машины переменного тока целесообразно рассмотреть подробно различные формы записи физических процессов в синхронных машинах, представляющих собой наиболее общий случай машины переменного тока.

Синхронная машина будет рассматриваться как элемент системы автоматического регулирования.

Окончательной целью является получение структурной схемы, которая может быть положена в основу составления модели синхронной машины.

Применяемая методика пригодна для рассмотрения любых модификаций синхронных машин, но в каждом конкретном случае необходимо учитывать особенности конструктивного выполнения машины.

В качестве примера рассматривается явнополюсная трехфазная синхронная машина нормального исполнения. Обмотка якоря размещается на статоре, основное поле создается обмоткой возбуждения, расположенной на роторе. Магнитопровод машины

имеет две оси симметрии — продольную и поперечную. Ротор машины снабжен демпферной обмоткой.

4.6.2. Уравнения идеализированной синхронной машины

а) Общие сведения

При исследовании физических процессов в синхронной машине обычно отвлекаются от второстепенных явлений, оказывающих незначительное влияние на работу машины. Например, дифференциальные уравнения синхронной машины, впервые составленные Парком, описывают процессы в идеализированной машине.

Отметим основные допущения, относящиеся к распределению полей и характеру процессов в идеализированной машине.

1. Магнитное поле в воздушном зазоре. Трехмерное магнитное поле в воздушном зазоре рассматривается как плоскопараллельное. Возможность замены реального поля расчетным вытекает из того, что э. д. с. любого проводника якоря и электромагнитное усилие, действующее на проводник, определяются лишь интегральным значением поля вдоль машины.

2. Магнитное поле обмотки возбуждения. Якорь машины принимается гладким; при исследовании не учитывается искажение поля, обусловленное зубцами якоря. Кривая поля считается синусоидальной. Магнитная ось обмотки возбуждения совпадает с продольной осью машины.

3. Магнитное поле обмотки статора. Магнитные оси фазных обмоток статора сдвинуты друг относительно друга на 120 эл. град . Магнитная проводимость изменяется вдоль окружности статора вследствие переменного зазора с периодом 180 эл. град . Полями высших пространственных гармонических, обусловленных основной гармонической н. с, можно пренебречь, так как они дают небольшие потокосцепления. В синхронных машинах нормального исполнения обмоточные коэффициенты для ряда высших гармонических н. с. статора малы. Ввиду этого можно пренебречь асинхронными моментами, которые создают высшие пространственные гармонические поля. Магнитное поле, созданное токами обмоток статора, распределено в воздушном зазоре вдоль окружности статора и изменяется по синусоидальному закону с периодом, равным двойному полюсному делению машины.

$$\begin{aligned}
 \Psi_A &= L_A I_A + M_{AB} I_B + M_{AC} I_C + M_{Af} I_f + M_{A1d} I_{1d} + \\
 &+ M_{A2d} I_{2d} + \dots + M_{And} I_{nd} + M_{A1q} I_{1q} + \\
 &+ M_{A2q} I_{2q} + \dots + M_{Anq} I_{nq}; \\
 \Psi_B &= M_{BA} I_A + L_B I_B + M_{BC} I_C + M_{Bf} I_f + M_{B1d} I_{1d} + \\
 &+ M_{B2d} I_{2d} + \dots + M_{Bnd} I_{nd} + M_{B1q} I_{1q} + M_{B2q} I_{2q} + \dots \\
 &+ \dots + M_{Bnq} I_{nq}; \\
 \Psi_C &= M_{CA} I_A + M_{CB} I_B + L_C I_C + M_{Cf} I_f + M_{C1d} I_{1d} + \\
 &+ M_{C2d} I_{2d} + \dots + M_{Cnd} I_{nd} + M_{C1q} I_{1q} + M_{C2q} I_{2q} + \dots \\
 &+ \dots + M_{Cnq} I_{nq}; \\
 \Psi_f &= M_{fA} I_A + M_{fB} I_B + M_{fC} I_C + L_f I_f + M_{f1d} I_{1d} + \\
 &+ M_{f2d} I_{2d} + \dots + M_{fnd} I_{nd}; \\
 \Psi_{1d} &= M_{1dA} I_A + M_{1dB} I_B + M_{1dC} I_C + M_{1df} I_f + \\
 &+ L_{1d} I_{1d} + M_{12d} I_{2d} + \dots + M_{1nd} I_{nd}; \\
 \Psi_{2d} &= M_{2dA} I_A + M_{2dB} I_B + M_{2dC} I_C + M_{2df} I_f + \\
 &+ M_{21d} I_{1d} + L_{2d} I_{2d} + \dots + M_{2nd} I_{nd}; \\
 &\dots \\
 \Psi_{1q} &= M_{1qA} I_A + M_{1qB} I_B + M_{1qC} I_C + L_{1q} I_{1q} + \\
 &+ M_{12q} I_{2q} + \dots + M_{1nq} I_{nq}; \\
 \Psi_{2q} &= M_{2qA} I_A + M_{2qB} I_B + M_{2qC} I_C + M_{21q} I_{1q} + \\
 &+ L_{2q} I_{2q} + \dots + M_{2nq} I_{nq}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где буквами L и M обозначены коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции различных обмоток, причем

$$M_{AB} = M_{BA}; M_{fA} = M_{Af}; M_{1dA} = M_{A1d} \text{ и т. д.}, \quad (5)$$

поскольку рассматриваемая система линейна.

Индуктивности фазных обмоток являются периодическими функциями угла γ между осью фазы и продольной осью машины.

Пренебрегая высшими гармоническими, запишем:

$$\left. \begin{aligned}
 L_A &= l_0 + l_2 \cos 2\gamma; \\
 L_B &= l_0 + l_2 \cos (2\gamma + 120^\circ); \\
 L_C &= l_0 + l_2 \cos (2\gamma + 240^\circ).
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для взаимных индуктивностей статорных обмоток имеем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
 M_{AB} &= m_0 + l_2 \cos (2\gamma - 120^\circ); \\
 M_{AC} &= m_0 + l_2 \cos (2\gamma + 120^\circ); \\
 M_{BC} &= m_0 + l_2 \cos 2\gamma.
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Величина m_0 всегда отрицательная, поскольку магнитные оси фаз сдвинуты на угол, больший 90° .

$$l_0 + 2m_0 = L_s + 2M_s; \quad (8)$$

где L_s и M_s — индуктивность и взаимная индуктивность рассеяния, которые практически не зависят от γ .

Взаимные индуктивности между обмоткой возбуждения и фазными обмотками статора имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 M_{Af} &= M_{Afd} \cos \gamma; \\
 M_{Bf} &= M_{Afd} \cos (\gamma - 120^\circ); \\
 M_{Cf} &= M_{Afd} \cos (\gamma + 120^\circ),
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где M_{Afd} — взаимная индуктивность обмоток при совпадении их магнитных осей.

Для взаимных индуктивностей обмоток статора с демпферными контурами имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 M_{And} &= m_{And} \cos \gamma; \\
 M_{Bnd} &= m_{And} \cos (\gamma - 120^\circ); \\
 M_{Cnd} &= m_{And} \cos (\gamma + 120^\circ),
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где m_{And} — взаимная индуктивность фазной обмотки статора и n -го продольного демпферного контура при совпадении их магнитных осей;

$$\left. \begin{aligned}
 M_{Anq} &= m_{Anq} \cos (\gamma + 90^\circ) = -m_{Anq} \sin \gamma; \\
 M_{Bnq} &= -m_{Anq} \sin (\gamma - 120^\circ); \\
 M_{Cnq} &= -m_{Anq} \sin (\gamma + 120^\circ),
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где m_{Anq} — взаимная индуктивность фазной обмотки статора и n -го поперечного демпферного контура при совпадении их магнитных осей.

Уравнение цепи нагрузки:

$$U_H = I_H R_H + L_H p I_H. \quad (12)$$

Уравнения мощности:

$$\left. \begin{aligned} \text{полная } S &= \sqrt{3} I_{\text{H}} U_{\text{H}}; \\ \text{активная } P &= \sqrt{3} I_{\text{H}} U_{\text{H}} \cos \varphi; \\ \text{реактивная } Q &= \sqrt{3} I_{\text{H}} U_{\text{H}} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Уравнение момента, развиваемого двигателем:

$$M = \frac{\sqrt{3} I_{\text{H}} U_{\text{H}}}{\Omega}, \quad (14)$$

где Ω — частота вращения, рад/сек.

Решение системы уравнений (1) — (14) сопряжено с большими трудностями, так как выражения для коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции содержат тригонометрические функции углового положения ротора.

Поэтому при анализе уравнений синхронной машины оперируют не физическими токами, напряжениями, потокосцеплениями, а условными величинами, записанными в определенной системе координат. Окончательный результат решения уравнений вновь переводится в реальные величины.

в) Форма записи уравнений в преобразованной системе координат

Сущность преобразования переменных заключается в следующем: вместо переменных величин трех фаз A, B, C вводятся новые переменные, связанные со старыми линейными соотношениями. Так, например, для токов эти зависимости следующие:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= a_{xA} I_A + a_{xB} I_B + a_{xC} I_C; \\ I_y &= a_{yA} I_A + a_{yB} I_B + a_{yC} I_C; \\ I_z &= a_{zA} I_A + a_{zB} I_B + a_{zC} I_C, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где a — коэффициенты линейных преобразований; I_x, I_y, I_z — токи в новой системе координат.

Для обеспечения однозначного соответствия между старыми и новыми переменными необходимо условие

$$\begin{vmatrix} a_{xA} & a_{xB} & a_{xC} \\ a_{yA} & a_{yB} & a_{yC} \\ a_{zA} & a_{zB} & a_{zC} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (16)$$

Если при этом коэффициенты линейных преобразований являются функциями времени, то необходимо, чтобы определитель системы не обращался в нуль в любой момент времени.

При работе машины на симметричную нагрузку, что является наиболее частым случаем, справедливо соотношение

$$I_A + I_B + I_C = 0. \quad (17)$$

В этом случае достаточно введения двух новых переменных вместо трех.

В теории электрических машин применяются три системы координат.

1. При анализе несимметричных режимов синхронных машин, а также переходных процессов асинхронных машин обычно применяется система, неподвижная в пространстве и именуемая системой координат α — β . Ось α направлена по оси фазы A , а ось β повернута на 90° в направлении вращения ротора.

2. Симметричные переходные процессы в синхронной машине наиболее удобно рассматривать в системе координат, вращающихся вместе с ротором. Как уже упоминалось выше, такая система носит название системы координат d, q . Удобство такой системы заключается в том, что коэффициенты дифференциальных уравнений не содержат тригонометрических функций и являются постоянными величинами, так как синхронная машина симметрична в магнитном отношении по осям d, q .

3. При исследовании совместной работы группы машин иногда применяется система координат, вращающаяся с постоянной синхронной скоростью. Однако такая система записи уравнений исключает возможность построения наглядной структурной схемы. Для случая параллельной работы, как это будет показано ниже, удобнее записывать каждую машину относительно своих осей d, q , а специфику параллельной работы учитывать отдельным звеном, связывающим различные системы координат между собой.

Наиболее распространенной системой записи из всех применяемых является система координат d, q , имеющая фундаментальное значение в теории синхронных машин. Метод двух составляющих для анализа синхронных машин был впервые предложен Блонделем и разработан Парком. Наиболее удобен этот метод для синхронных машин с симметричной нагрузкой. Направление осей координат d, q совпадает с направлением двух осей симметрии ротора.

Продольная ось d направлена вдоль оси полюсов, а поперечная ось q повернута на 90° эл. град по отношению к продольной оси по направлению вращения ротора.

При составлении дифференциальных уравнений синхронной машины было принято:

1) положительное направление напряжений и потоков, совпадающее с положительными направлениями осей d и q ;

2) положительные направления токов обмоток возбуждения и демпферной обмотки, совпадающие с положительным направлением осей d и q ;

3) положительные направления якорных токов, противоположные положительным направлениям осей d и q .

Такой выбор направления для якорных токов сделан для того, чтобы положительные токи соответствовали перевозбужденному генератору. Указанное условие задания положительных направлений переменных наиболее широко распространено в американской технической литературе. Следует отметить, что существует и ряд других вариантов выбора положительных направлений переменных величин. В отечественной литературе обычно принимают положительные направления всех переменных совпадающими с положительными направлениями осей d , q .

Перепишав уравнения (1) — (14) в системе координат d , q , получим: Уравнения якорной цепи

$$\left. \begin{aligned} U_d &= -R_a I_d + p\Psi_d - \Psi_q \Omega, \\ U_q &= -R_a I_q + p\Psi_q + \Psi_d \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

уравнение цепи обмотки возбуждения

$$U_f = R_f I_f + p\Psi_f. \quad (19)$$

При анализе работы синхронной машины как элемента системы автоматического регулирования, когда не представляет интереса истинное значение токов в демпферной обмотке, последняя может быть представлена с достаточной степенью точности двумя эквивалентными контурами по продольной и поперечной осям, ширина которых равна полюсному делению:

$$\left. \begin{aligned} U_{kd} &= R_{kd} I_{kd} + p\Psi_{kd}, \\ U_{kq} &= R_{kq} I_{kq} + p\Psi_{kq}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Уравнения для потокосцеплений:

$$\Psi_d = (-L_{ad} I_d + M_{afd} I_f + M_{akd} I_{kd}) - L_{as} I_a; \quad (21)$$

$$\Psi_q = (M_{akq} I_{kq} - L_{aq} I_q) - L_{as} I_a; \quad (22)$$

$$\Psi_f = \left[-\frac{3}{2} M_{afd} I_d + M_{fkd} I_{kd} + (L_f - L_{fs}) I_f \right] + L_{fs} I_f; \quad (23)$$

$$\Psi_{kd} = \left[-\frac{3}{2} M_{akd} I_d + M_{fkd} I_f + (L_{kd} - L_{ks}) I_{kd} \right] + L_{ks} I_{kd}; \quad (24)$$

$$\Psi_{kq} = \left[-\frac{3}{2} M_{akq} I_q + (L_{kq} - L_{ks}) I_{kq} \right] + L_{ks} I_{kq}. \quad (25)$$

Уравнения цепи нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} U_d &= R_u I_d + \frac{X_u}{\Omega_0} p I_d - X_u I_q \frac{\Omega}{\Omega_0}; \\ U_q &= R_u I_q + \frac{X_u}{\Omega_0} p I_q + X_u I_d \frac{\Omega}{\Omega_0}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где $\Omega_0 = 2\pi f_0$ — синхронная угловая частота.

Уравнения связи записи по двум системам:

$$U_A^2 = U_d^2 + U_q^2; \quad I_A^2 = I_d^2 + I_q^2. \quad (27)$$

Уравнение активной мощности:

$$P = +U_d I_d + U_q I_q. \quad (28)$$

Уравнение реактивной мощности:

$$Q = -U_d I_q + U_q I_d. \quad (29)$$

Уравнение движения электропривода:

$$M = J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{3}{2} (\Psi_q I_d - \Psi_d I_q), \quad (30)$$

где J — суммарный момент инерции ротора и нагрузки.

4.6.3. Система относительных единиц

Полученные уравнения (18)—(30) содержат переменные с физической размерностью. В теории синхронных машин уравнения обычно записываются не в абсолютных значениях, а в относительных единицах.

Запись уравнений в относительных единицах имеет ряд преимуществ: уравнения приобретают более простой вид, что позволяет сравнивать различные синхронные машины.

Для перехода от физических величин к относительным необходимо задать базисными значениями переменных, в долях от которых определяются относительные величины.

К основным базисным величинам относятся следующие:

1) базисный ток статора, равный максимальному значению (амплитуде) номинального фазного тока,

$$I_a \sigma = I_{a0};$$

2) базисное напряжение статора, равное амплитуде номинального фазного напряжения,

$$U_a \sigma = U_{a0};$$

3) базисная частота, равная синхронной угловой частоте, $\Omega_\sigma = \Omega_0 = 2\pi f_0$;

4) базисное потокоцепление статора, наводящее в обмотке статора при базисной угловой частоте базисное напряжение,

$$\Psi_{a,б} = \Psi_{a0} = \frac{U_{a0}}{\Omega_{a0}};$$

5) базисное сопротивление статора, равное $Z_{a,б} = Z_{a0} = \frac{U_{a0}}{I_{a0}};$

6) базисная мощность статора, равная номинальной мощности синхронной машины.

$$P_б = P_0 = 3U_{н}I_{н} = \frac{3}{2} U_{a0}I_{a0};$$

7) базисный момент

$$M_б = M_0 = \frac{P_0}{\Omega_0} p^*,$$

где p^* — число пар «полусов синхронной машины (для ясности изложения в рассматриваемом случае принимается $p^* = 1$);

8) базисная индуктивность статора

$$L_{a,б} = L_{a0} = \frac{Z_{a0}}{\Omega_0};$$

9) базисное время, соответствующее повороту ротора синхронной машины на 1 эл. рад при базисной угловой частоте,

$$t_б = \frac{1}{\Omega_0} = \frac{1}{2\pi f_0}.$$

Для ротора отсутствует единая общепринятая система базисных величин. Существует система относительных единиц, введенная Парком, так называемые система X_{ad} , система НС и др..

Для структурного метода анализа синхронных машин наиболее удобной является такая система, которая дает возможность свести первоначальную машину к эквивалентной с обмотками, имеющими равное число витков.

Аналогичный способ используется в теории трансформаторов и вращающихся машин, когда число витков ротора приводится к статорным виткам.

С точки зрения физической наглядности, наиболее целесообразной следует считать такую базисную систему, при которой уравнения напряжения синхронной машины сохраняют форму уравнений трансформатора в физических величинах. В подобной системе относительных единиц существует определенная связь между базисными величинами.

С учетом вышеизложенного произведем преобразование уравнений синхронной машины (18) — (25):

$$\left. \begin{aligned} U_f &= (R_f + L_f p) I_f - \frac{3}{2} M_{afd} p I_d + 0 + \\ &\quad + 0 + M_{fhd} I_{hd} p; \\ U_d &= M_{afd} p I_f - (R_a + L_d p) I_d + \Omega L_q I_q + \\ &\quad + M_{ahq} \Omega I_{hq} + M_{ahd} I_{hd} p; \\ U_q &= M_{afd} \Omega I_f - \Omega L_d I_d - (R_a + L_q p) I_q + \\ &\quad + M_{ahq} p I_{hq} + \Omega M_{ahd} I_{hd}; \\ U_{hd} &= M_{fhd} p I_f - \frac{3}{2} M_{ahd} I_d p + 0 + 0 + \\ &\quad + (R_{hd} + L_{hd} p) I_{hd}; \\ U_{hq} &= 0 + 0 - \frac{3}{2} M_{ahq} I_q p + (R_{hq} + \\ &\quad + L_{hq} p) I_{hq} + 0; \\ M &= J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{3}{2} [(M_{ahq} I_{hq} - L_q I_q) I_d - \\ &\quad - (-L_d I_d + M_{afd} I_f + M_{ahd} I_{hd}) I_q]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Систему уравнений (31) представим в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\omega_a}{\omega_f} U_f &= \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_f} \right)^2 (R_f + L_f p) \right] \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_f}{\omega_a} I_f \right) - \\
 &- \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_f} M_{afd} \right) p I_d + 0 + 0 + p \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a^2}{\omega_f \omega_{kd}} M_{fkd} \right) \times \\
 &\quad \times \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kd}}{\omega_a} I_{kd} \right); \\
 U_d &= \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_f} M_{afd} \right) p \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_f}{\omega_a} I_f \right) - (R_a + L_d p) I_d + \\
 &+ \Omega L_q I_q + \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_{kq}} M_{akq} \right) \Omega \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kq}}{\omega_a} I_{kq} \right) + \\
 &+ \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_{kd}} M_{akd} \right) \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kd}}{\omega_a} I_{kd} \right) p; \\
 U_q &= \Omega \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_f} M_{afd} \right) \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_f}{\omega_a} I_f \right) - \Omega L_d I_d - \\
 &- (R_a + L_q p) I_q + \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_{kq}} M_{akq} \right) p \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kq}}{\omega_a} I_{kq} \right) + \\
 &+ \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_{kd}} M_{akd} \right) \Omega \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kd}}{\omega_a} I_{kd} \right); \\
 \frac{\omega_a}{\omega_{kd}} U_{kd} &= \left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a^2}{\omega_{kd} \omega_f} M_{fkd} \right) \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_f}{\omega_a} I_f \right) p - \\
 &- \left(\frac{3}{2} M_{akd} \frac{\omega_a}{\omega_{kd}} \right) p I_d + 0 + \\
 &+ 0 + \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_{kd}} \right)^2 (R_{kd} + L_{kd} p) \right] \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kd}}{\omega_a} I_{kd} \right); \\
 \frac{\omega_a}{\omega_{kq}} U_{kq} &= 0 + 0 - \left(\frac{3}{2} M_{akq} \frac{\omega_a}{\omega_{kq}} \right) p I_q + \\
 &+ \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_{kq}} \right)^2 (R_{kq} + L_{kq} p) \right] \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kq}}{\omega_a} I_{kq} \right) + 0; \\
 M &= \int \frac{d\Omega}{dt} + \frac{3}{2} \left\{ \left[\left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_{kq}} M_{akq} \right) \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kq}}{\omega_a} I_{kq} \right) - L_q I_q \right] I_d - \right. \\
 &\quad \left. - \left[\left(\frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_f} M_{afd} \right) \left(\frac{\omega_f}{\omega_a} \frac{2}{3} I_f \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{2}{3} M_{akd} \frac{\omega_a}{\omega_{kd}} \right) \left(\frac{2}{3} \frac{\omega_{kd}}{\omega_a} I_{kd} \right) - L_d I_d \right] I_q \right\}.
 \end{aligned} \right\} (32)$$

Введем систему относительных единиц для роторной цепи, в которой

$$\left. \begin{aligned}
 u_f &= \frac{\omega_a}{\omega_f} \frac{U_f}{U_{a0}}; \quad u_{kd} = \frac{\omega_a}{\omega_{kd}} \frac{U_{kd}}{U_{a0}}; \quad u_{kq} = \frac{\omega_a}{\omega_{kq}} \frac{U_{kq}}{U_{a0}}; \\
 i_f &= \frac{2}{3} \frac{\omega_f}{\omega_a} \frac{I_f}{I_{a0}}; \quad i_{kd} = \frac{2}{3} \frac{\omega_{kd}}{\omega_a} \frac{I_{kd}}{I_{a0}}; \quad i_{kq} = \frac{2}{3} \frac{\omega_{kq}}{\omega_a} \frac{I_{kq}}{I_{a0}}; \\
 x_{nd} &= \frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_f} \frac{\Omega_0 M_{afd}}{X_{a0}}; \quad r_a = \frac{R_a}{X_{a0}}; \quad r_f = \frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_f} \right)^2 \frac{R_f}{X_{a0}}; \\
 r_{kd} &= \frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_{kd}} \right)^2 \frac{R_{kd}}{X_{a0}}; \quad r_{kq} = \frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_{kq}} \right)^2 \frac{R_{kq}}{X_{a0}}; \\
 x_{fq} &= \frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_f} \right)^2 \frac{X_{fq}}{X_{a0}}. \\
 \Psi_0 &= \frac{I_{a0} X_{a0}}{\Omega_0}; \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}.
 \end{aligned} \right\} (33)$$

При этом следует иметь в виду, что

$$\left. \begin{aligned}
 x_{nd} &= \frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_f} \frac{\Omega_0 M_{afd}}{X_{a0}} = \frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_{kd}} \frac{\Omega_0 M_{akd}}{X_{a0}} = \\
 &= \frac{3}{2} \frac{\omega_a^2}{\omega_f \omega_{kd}} \frac{\Omega_0 M_{fkd}}{X_{a0}} = \frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_f} \right)^2 \frac{\Omega_0 (L_f - L_{fd})}{X_{a0}} = \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_{kd}} \right)^2 \frac{\Omega_0 (L_{kd} - L_{kd*})}{X_{a0}} = \frac{\Omega_0}{X_{a0}} L_{ad}; \\
 x_{mq} &= \frac{3}{2} \frac{\omega_a}{\omega_{kq}} \frac{\Omega_0 M_{akq}}{X_{a0}} = \frac{3}{2} \left(\frac{\omega_a}{\omega_{kq}} \right)^2 \frac{\Omega_0 (L_{kq} - L_{kqs})}{X_{a0}} = \frac{\Omega_0}{X_{a0}} L_{aq}.
 \end{aligned} \right\} (34)$$

С учетом вышеизложенного можно записать уравнения синхронной машины в относительных единицах:

$$\left. \begin{aligned}
 u_d &= -r_a i_d + p \psi_d \frac{1}{\Omega_0} - \psi_q \omega; \\
 u_q &= -r_a i_q + p \psi_q \frac{1}{\Omega_0} + \psi_d \omega; \\
 u_f &= r_f i_f + p \psi_f \frac{1}{\Omega_0}; \\
 u_{kd} &= r_{kd} i_{kd} + p \psi_{kd} \frac{1}{\Omega_0}; \\
 u_{kq} &= r_{kq} i_{kq} + p \psi_{kq} \frac{1}{\Omega_0}; \\
 \psi_d &= x_{nd} (-i_d + i_f + i_{kd}) - x_{a0} i_d,
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_q &= x_{mq}(-i_q + i_{kq}) - x_{as}i_q, \\
 \psi_f &= x_{md}(-i_d + i_f + i_{kd}) + x_{fs}i_f, \\
 \psi_{kd} &= x_{md}(-i_d + i_f + i_{kd}) + x_{kds}i_{kd}, \\
 \psi_{kq} &= x_{mq}(-i_q + i_{kq}) + x_{kqs}i_{kq}, \\
 u_d &= r_n i_d + \frac{x_n}{\Omega_0} p i_d - \frac{x_n}{\Omega_0} i_q \omega; \\
 u_q &= r_n i_q + \frac{x_n}{\Omega_0} p i_q + \frac{x_n}{\Omega_0} i_d \omega; \\
 u_a^2 &= u_d^2 + u_q^2; \\
 i_a^2 &= i_d^2 + i_q^2; \\
 p &= u_d i_d + u_q i_q; \\
 q &= -u_d i_q + u_q i_d; \\
 \mu &= \frac{J \Omega_0}{M_0} \frac{d\omega}{dt} + \psi_q i_d - \psi_d i_q,
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где

$$x_n = \frac{X_n}{X_{a0}}; \quad r_n = \frac{R_n}{X_{a0}}.$$

По уравнениям (35) может быть построена модель ненасыщенной синхронной машины

4.6.4. Учет насыщения синхронной машины

Насыщение весьма существенно влияет на характеристики синхронной машины. Несмотря на сложность исследования переходного процесса, учет насыщения должен быть включен в рассмотрение хотя бы в приближенной форме. Строго говоря, наличие нелинейности насыщения в машине делает непригодным применение метода разложения по двум осям, основанного на принципе суперпозиции. Тем не менее для получения результатов исследования на модели, наиболее близко совпадающих с реальными, необходимо включить в рассмотрение эффект насыщения. Точный учет насыщения машины представляет большую сложность. Насыщение по одной оси связано с насыщением по другой и наоборот.

Существует ряд способов учета насыщения в синхронной машине.

При моделировании синхронной машины задачу насыщения стремятся по возможности упростить. В рассмотрение обычно

принимают один насыщающий фактор, зависящий от полного потока. Учет насыщения удобно свести к сигналу обратной связи в виде нелинейной зависимости $\sigma = f(u_g)$, полученной на основании кривой холостого хода машины (рис. 3,а), где u_g — величина, пропорциональная полному потоку машины.

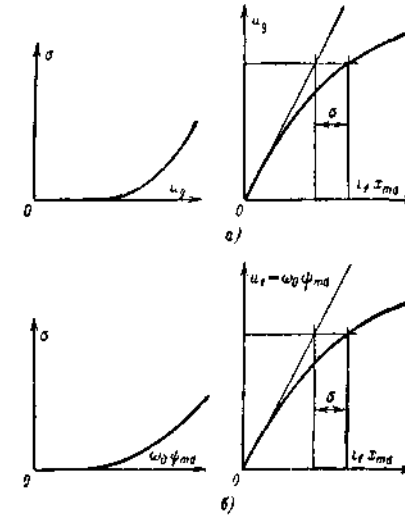


Рис. 3. Зависимости, полученные на основании кривой холостого хода синхронной машины.

$$\begin{aligned}
 a - \sigma &= f(u_g); \quad \omega_0 \psi_{md}; \quad b - u_g, \quad u_f = \\
 &= f(i_f x_{md}).
 \end{aligned}$$

Коэффициент отрицательной обратной связи σ вводится в структурную схему машины как дополнительная н. с., учитывающая эффект насыщения магнитного потока.

Для определения напряжения u_g на модели должны быть выделены переменные, соответствующие напряжениям по продольной и поперечной осям:

$$u_g = \sqrt{u_{gd}^2 + u_{gq}^2}, \quad (36)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 u_{gd} &= x_{md}(i_f - i_d + i_{kd}); \\
 u_{gq} &= x_{mq}(-i_q + i_{kq}).
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

При исследовании процессов в сложных схемах, где требуется большое количество электронного оборудования, например для случая параллельной работы синхронных машин, учет насыщения производится более грубым, но простым способом, сущность которого заключается в следующем.

Для генератора в режиме холостого хода с постоянной частотой вращения справедливо соотношение

$$u_t = u_q = \omega \Psi_{md} = x_{md} i_f. \quad (38)$$

Таким образом, используя кривую холостого хода (рис. 3,б), можно определить x_{md} с помощью нелинейной зависимости $\sigma = f(e_{x\tau})$, где $e_{x\tau}$ — напряжение холостого хода.

4.6.5. Структурная схема синхронного генератора

В основу построения структурной схемы синхронного генератора положена система уравнений (35). При составлении структурной схемы (рис. 4) принималось во внимание, что по ней будет выполнена схема набора решающих усилителей.

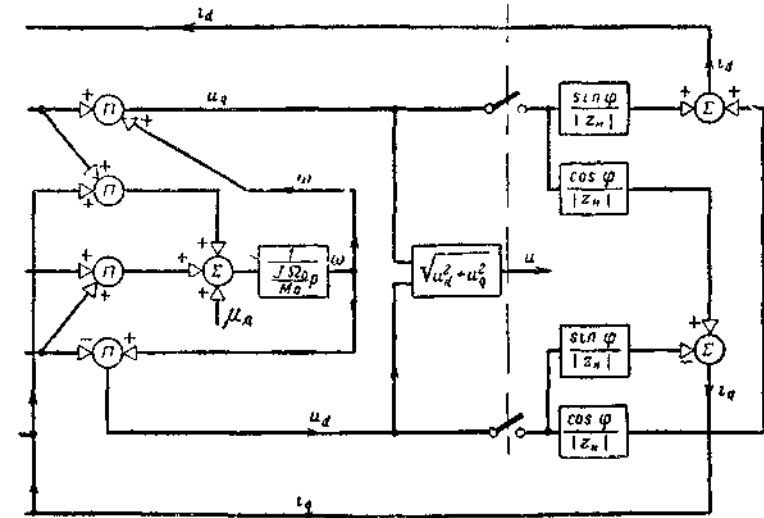
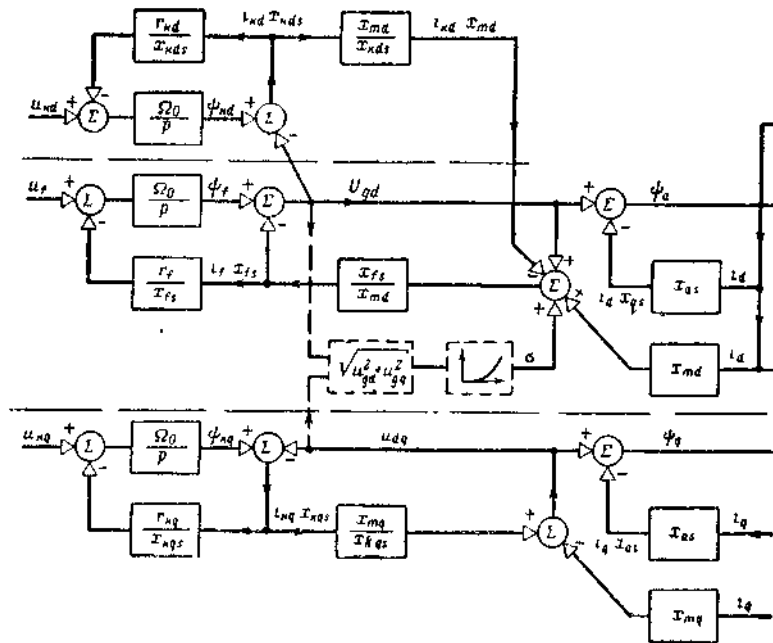


Рис. 4. Структурная схема синхронного генератора.

Вследствие этого при построении структурной схемы была принята методика, не требующая применения дифференцирующих звеньев, хотя такое представление синхронного генератора иногда не соответствует точному направлению протекающих в нем процессов.

Однако полученная структурная схема не утрачивает своей общей физической наглядности, обеспечивая устойчивое решение дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что при работе одного синхронного генератора на отдельную нагрузку целесообразно принять следующие допущения:

- 1) сопротивление якоря мало по сравнению с сопротивлением нагрузки $R_a \ll R_H$;
- 2) переходные процессы в якоря, обусловленные величинами $p\psi_d, p\psi_q, L_H p i_d, L_H p i_q$, несущественны и могут быть исключены из рассмотрения.

Влияние указанных величин при индуктивной нагрузке весьма мало, а при активной нагрузке проявляется в течение небольших интервалов времени, поэтому ими можно пренебречь.

Необходимо иметь в виду, что для других режимов работы синхронного генератора, в особенности для режима параллельной работы, такие допущения не могут быть сделаны.

Принимая во внимание указанные допущения, уравнения для цепи нагрузки наиболее удобно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} I_d &= \frac{\cos \varphi}{|Z_H|} U_d + \frac{\sin \varphi}{|Z_H|} U_q, \\ I_q &= -\frac{\sin \varphi}{|Z_H|} U_d + \frac{\cos \varphi}{|Z_H|} U_q, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где

$$Z_H = \sqrt{R_H^2 + X_H^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_H}{R_H}. \quad (40)$$

В относительных единицах уравнение (39) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} i_d &= \frac{\cos \varphi}{|z_H|} u_d + \frac{\sin \varphi}{|z_H|} u_q, \\ i_q &= -\frac{\sin \varphi}{|z_H|} u_d + \frac{\cos \varphi}{|z_H|} u_q, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где

$$z_H = \frac{Z_H}{Z_{a0}}.$$

Структурная схема синхронного генератора, работающего на отдельную нагрузку, представлена на (рис. 4). Указанная структурная схема является очень наглядной. Вертикальной штрих-пунктирной линией она разделяется на две части, изображающие генератор и нагрузку. Схема генератора распадается на три горизонтальные части, характеризующие процессы в контурах демпферной обмотки продольной, поперечной оси и обмотки возбуждения. Контур продольной и поперечной осей расположены соответственно в верхней и нижней частях рисунка

Звенья, связанные с насыщением, указаны пунктирными линиями.

Входными сигналами являются момент приводного двигателя μ , напряжение возбуждения u_f , а также напряжения u_{kd} и u_{kq} . В рассматриваемом варианте $u_{kd} = u_{kq} = 0$, однако в случае нескольких обмоток возбуждения, расположенных по двум осям, полученная структурная схема может быть использована. При этом под параметрами демпферных обмоток следует подразумевать параметры дополнительных обмоток возбуждения.

Выходной сигнал генератора u_i представляет собой огибающую фазного напряжения.

Мгновенные значения фазных напряжений определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} u_A &= u_d \cos \Omega t - u_q \sin \Omega t; \\ u_B &= u_d \cos \left(\Omega t - \frac{2\pi}{3} \right) - u_q \sin \left(\Omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \\ u_C &= u_d \cos \left(\Omega t + \frac{2\pi}{3} \right) - u_q \sin \left(\Omega t + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

В случае необходимости эти значения могут быть получены на модели.

4.6.6. Структурная схема синхронного двигателя

Уравнения синхронной машины (35) лежат в основе построения структурной схемы синхронного двигателя. Основное различие этой схемы от структурной схемы генератора заключается в том, что входными сигналами для двигателя являются напряжение возбуждения и напряжение якоря, а выходным — момент на валу двигателя.

При получении структурной схемы синхронного двигателя были исключены переменные, относящиеся к демпферным контурам (аналогичные операции можно выполнить и для синхронного генератора).

Принимая

$$u_{kd} = 0, \quad u_{kq} = 0,$$

что имеет место для двигателя с одной обмоткой возбуждения по продольной оси, имеем:

$$\left. \begin{aligned} r_{kd} i_{kd} + p \psi_{kd} \frac{1}{\Omega_0} &= 0; \\ r_{kq} i_{kq} + p \psi_{kq} \frac{1}{\Omega_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Решая (43) совместно с уравнениями для потокосцеплений демпферной обмотки по продольной и поперечной осям, получим:

$$\left. \begin{aligned} i_{kd} &= -(-i_d + i_f) \frac{\frac{x_{md}}{\Omega_0 r_{kd}} p}{1 + \frac{x_{md} + x_{kds}}{\Omega_0 r_{kd}}}; \\ i_{kq} &= -(-i_q) \frac{\frac{x_{mq}}{\Omega_0 r_{kq}} p}{1 + \frac{x_{mq} + x_{kqs}}{\Omega_0 r_{kq}}}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Совместное решение уравнений (37) и (44) дает окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} u_{gd} &= x_{md} (i_f - i_d) \frac{1 + \tau_{kds} p}{1 + \tau_{kd\sigma} p}, \\ u_{gq} &= x_{mq} (-i_q) \frac{1 + \tau_{kqs} p}{1 + \tau_{kq\sigma} p}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где

$$\tau_{kd\sigma} = \frac{x_{md} + x_{kds}}{\Omega_0 r_{hd}}$$

— постоянная времени демпферной обмотки по продольной оси;

$$\tau_{kq\sigma} = \frac{x_{mq} + x_{kqs}}{\Omega_0 r_{hq}}$$

— постоянная времени демпферной обмотки по поперечной оси;

$$\tau_{kds} = \frac{x_{kds}}{\Omega_0 r_{hd}}$$

— постоянная времени рассеяния демпферной обмотки по продольной оси;

$$\tau_{kqs} = \frac{x_{kqs}}{\Omega_0 r_{hq}}$$

— постоянная времени рассеяния демпферной обмотки по поперечной оси.

Поскольку уравнения для синхронного двигателя записаны в системе координат d, q , жестко связанной с ротором, а напряжение питания выражено в неподвижной системе координат, в схеме необходимо иметь звено, преобразующее входные сигналы из одной системы координат в другую.

Смысл преобразования заключается в следующем:

Пусть напряжение питания u_t (рис. 5) представляет собой вектор, вращающийся с угловой частотой Ω , а система координат d, q , связанная с ротором, вращается с угловой частотой ω .

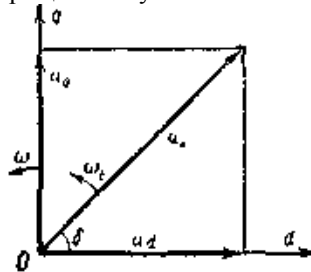


Рис. 5. Векторная диаграмма входных сигналов синхронного двигателя

Следовательно, в каждый данный момент времени будет иметь место зависимость

$$\left. \begin{aligned} u_d &= u_t \cos \delta; \\ u_q &= u_t \sin \delta, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где

$$\delta = \frac{1}{\Omega_0} \int_0^t (\Omega_t - \Omega) dt = \int_0^t (\omega_t - \omega) dt. \quad (46)$$

Уравнения (46) и (47) связывают между собой две координатные системы и система уравнений синхронного двигателя имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u_d &= -r_a i_d + p\psi_d \frac{1}{\Omega_0} - \psi_q \omega; \\ u_q &= -r_a i_q + p\psi_q \frac{1}{\Omega_0} + \psi_d \omega; \\ u_f &= r_f i_f + p\psi_f \frac{1}{\Omega_0}; \\ \psi_d &= u_{gd} - x_{as} i_d; \quad \psi_q = u_{gq} - x_{as} i_q; \\ \psi_f &= u_{gd} + x_{fs} i_f; \\ u_{gd} &= x_{md} (i_f - i_d) \frac{1 + \tau_{kds} p}{1 + \tau_{kd\sigma} p}; \\ u_{gq} &= x_{mq} (-i_q) \frac{1 + \tau_{kqs} p}{1 + \tau_{kq\sigma} p}; \\ 0 &= \psi_q i_d - \psi_d i_q - \tau_M p \omega - u_n, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где $\tau_M = \frac{J \Omega_0}{M_0}$ — механическая постоянная времени.

По уравнениям (46) — (48) составлена структурная схема синхронного двигателя (рис. 6). Штрих-пунктирными линиями схема разделяется на три горизонтальные части, соответствующие уравнениям продольной и поперечной осей и нелинейной зоны.

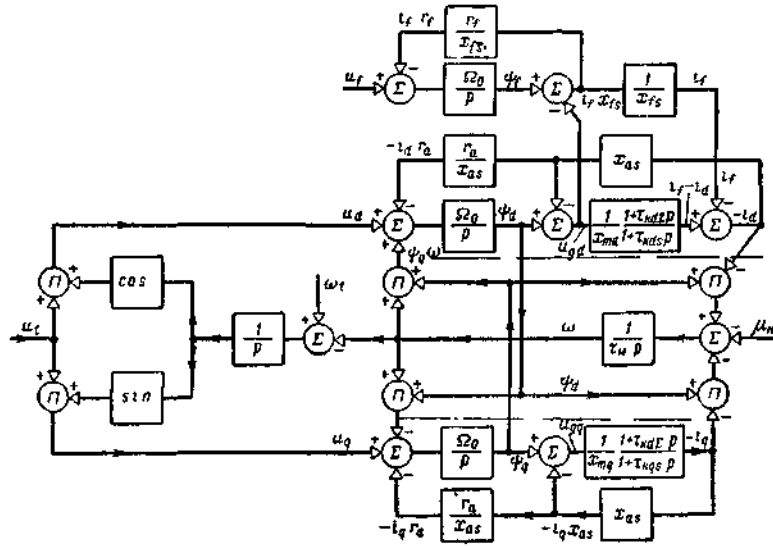


Рис. 6. Структурная схема синхронного двигателя.

Входными сигналами схемы являются напряжения u_f, u_i , выходным служит момент μ . Учет насыщения производится так же, как и в схеме синхронного генератора.

4.6.7. Структурная схема синхронного реактивного двигателя

Синхронный реактивный двигатель представляет собой синхронную машину без обмотки возбуждения.

Вращающий момент двигателя получается за счет разной проводимости по продольной и поперечной осям, поэтому магнитную цепь стараются выполнить ненасыщенной в основных режимах работы. При наличии демпферной обмотки синхронный реактивный двигатель может обладать необходимым пусковым моментом. Синхронный реактивный двигатель находит применение в приводах с широким регулированием частоты вращения от нуля до номинальной за счет изменения частоты питания. Основным преимуществом его по сравнению с обычным асинхронным двигателем является наличие момента на валу при питании постоянным током ($f=0$).

Для получения структурной схемы асинхронного реактивного двигателя преобразуем уравнения (48).

Уравнения для потокосцеплений:

$$\begin{aligned} \psi_d &= u_{gd} - x_{as} i_d = -x_{nd} \frac{1 + \tau_{kd}\Sigma p}{1 + \tau_{kd}\Sigma p} i_d - x_{as} i_d = \\ &= -\frac{x_{md} + x_{as}}{r_a} \frac{1 + \tau_{kd}\Sigma p}{1 + \tau_{kd}\Sigma p} i_d r_a; \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \psi_q &= u_{gq} - x_{as} i_q = -x_{mq} \frac{1 + \tau_{kq}\Sigma p}{1 + \tau_{kq}\Sigma p} i_q - x_{as} i_q = \\ &= -\frac{x_{mq} + x_{as}}{r_a} \frac{1 + \tau_{kq}\Sigma p}{1 + \tau_{kq}\Sigma p} i_q r_a, \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_d &= 1 - \frac{x_{md}'}{x_{md} + x_{as}} \frac{x_{md}}{x_{md} + x_{kds}}, \\ \alpha_q &= 1 - \frac{x_{mq}}{x_{mq} + x_{as}} \frac{x_{mq}}{x_{mq} + x_{kqs}}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Уравнения для якорной цепи:

$$\left. \begin{aligned} u_d &= -r_a i_d + \tau_{ad}\Sigma p \psi_d \frac{r_a}{x_{md} + x_{as}} - \psi_q \omega; \\ u_q &= -r_a i_q + \tau_{aq}\Sigma p \psi_q \frac{r_a}{x_{mq} + x_{as}} + \psi_d \omega, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

где $\tau_{ad\Sigma} = \frac{x_{md} + x_{as}}{\Omega_0 r_a}$ — постоянная времени якорной обмотки по продольной оси;

$$\tau_{aq\Sigma} = \frac{x_{mq} + x_{as}}{\Omega_0 r_a}$$

— постоянная времени якорной обмотки по поперечной оси.

По уравнениям (46), (47), (49), (51) с учетом уравнения движения из (48) может быть составлена структурная схема синхронного реактивного двигателя (рис. 7).

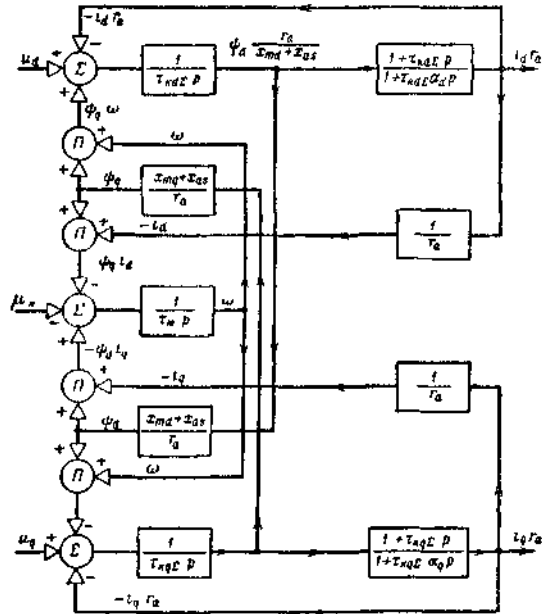


Рис. 7. Структурная схема синхронного реактивного двигателя.

Схема имеет простой вид и является частным случаем схемы синхронного двигателя.

4.6.8. Определение постоянных коэффициентов структурной схемы

Для большей точности результатов исследования желательно в структурную схему ввести значения постоянных коэффициентов, полученных из эксперимента.

Разберем на примере синхронного реактивного двигателя определение параметров структурной схемы.

а) Определение параметров статорной обмотки

Постоянные времени обмоток статора по продольной и поперечной осям определяются из соотношений

$$\tau_{ad\Delta} = \frac{x_d}{\Omega_0 r_a}; \quad \tau_{aq\Delta} = \frac{x_q}{\Omega_0 r_a}, \quad (52)$$

где x_d, x_q — индуктивные сопротивления обмотки статора по продольной и поперечной осям, указаны в паспортных данных машины.

В случае отсутствия этих данных они могут быть получены экспериментально. Один из распространенных способов определения следующий:

К обмотке статора подводится напряжение от постороннего источника, а ротор приводится во вращение с постоянной скоростью, мало отличной от синхронной (скорости вращения вектора внешних напряжений).

При наличии скольжения амплитуда тока статора будет колебаться с двойной частотой скольжения, причем максимумы и минимумы ее будут примерно соответствовать моментам совпадения потока статора с продольной и поперечной осями ротора. Измерив в эти моменты времени ток статора и подводимое к зажимам статора напряжение, можно определить индуктивные сопротивления x_d и x_q .

Скорость ротора следует выбрать возможно ближе к синхронной; при этом влияние демпферных контуров будет наименьшим.

Так как обычно источник внешней э. д. с. имеет конечную мощность, то питающее напряжение не остается постоянным, а колеблется одновременно с током статора, причем максимуму тока статора соответствует минимум напряжения на зажимах и наоборот. При этом x_d и x_q будут определяться из выражений

$$\left. \begin{aligned} x_d &= \frac{U_{\max}}{I_{\min}} \frac{I_{\sigma 0}}{U_{\sigma 0}}; \\ x_q &= \frac{U_{\min}}{I_{\max}} \frac{I_{\sigma 0}}{U_{\sigma 0}}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

б) Определение параметров демпферных обмоток

Расчетное определение параметров демпферных обмоток связано с большими трудностями, так как демпфирующий эффект производится не только самими обмотками, но и массивными частями ротора. Ниже приводится метод экспериментального определения данных эквивалентных демпферных обмоток, расположенных по продольной и поперечной осям, отображающим с достаточной степенью точности процессы в реальной демпферной обмотке и в массивных частях ротора. Метод основан на экспериментальном определении частотных характеристик. Перед началом эксперимента определяется положение геометрической оси одной из обмоток статора. Для этой цели в

исследуемую обмотку подается напряжение от источника постоянного тока. Для повышения точности определения оси обмотки ток, проходящий через обмотку, должен иметь наибольшее возможное значение для кратковременного режима. Ротор двигателя устанавливается по полю; положение его относительно статора фиксируется. После того как ротор двигателя закреплен в таком положении, что его продольная (поперечная) ось совпадает с осью одной из обмоток статора, снимаются частотные характеристики. Если обратиться к структурной схеме (рис. 7), то указанный режим работы отражается верхней (нижней) частью схемы. Следовательно, если имеется зависимость между потоком и током контура обмотки статора, то можно определить параметры эквивалентной демпферной обмотки по продольной (поперечной) оси

$$\tau_{kd\sigma} (\tau_{kq\sigma}) \text{ и } \alpha_d (\alpha_q).$$

Питая синусоидальным напряжением различной частоты указанную обмотку статора и измеряя э. д. с. $E_d(E_q)$ на другой обмотке с учетом соотношения $E_d = -p\Psi_d$ ($E_q = -p\Psi_q$), можно построить передаточную функцию потока $\Psi_d(\Psi_q)$ от тока $I_d(I_q)$. Схема включения изображена на рис. 8.

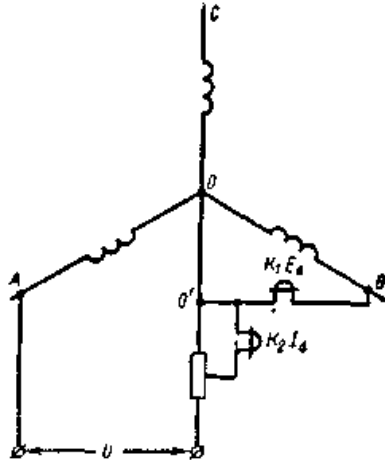


Рис. 8. Схема включения машины для снятия частотных характеристик.

Следует подчеркнуть особенности проведения эксперимента.

При снятии частотных характеристик в области низких частот $E_d(E_q)$ мало и сравнимо по величине с падением напряжения от тока нагрузки на участке $O-O'$ (сопротивление нулевого провода), которое искажает истинное значение сигнала. Поэтому, если есть возможность, то необходимо осциллографировать напряжение между точками OB . (В противном случае необходимо пересчитывать полученные на основании эксперимента величины, чтобы исключить влияние падения напряжения от тока нагрузки.)

Пересчет фазы и амплитуды $E_d(E_q)$, полученных из данных опыта, производится по формулам

$$E_{dн} = \sqrt{E_d^2 + (I_d R_{OO'})^2 + E_d (I_d R_{OO'}) \cos \varphi_1}; \quad (54)$$

$$\varphi_{н} = \text{arctg} \frac{E_d \sin \varphi}{E_d \cos \varphi_1 + (I_d R_{OO'})}, \quad (55)$$

где $E_{dн}$ — истинное значение э. д. с. в фазе;

E_d — значение э. д. с., полученное из опыта;

$I_d R_{OO'}$ — падение напряжения от тока нагрузки на участке $O-O'$;

φ_1 — угол между E_d и $(I_d R_{OO'})$;

$\varphi_{н}$ — угол между $E_{dн}$ и I_d .

По окончании расчета строится зависимость

$$\frac{R_a}{X_{md} + X_{as}} \frac{W_d}{I_d R_a} = f(\Omega). \quad (56)$$

Согласно структурной схеме (рис. 7) указанная зависимость имеет вид:

$$\frac{R_a}{X_{md} + X_{as}} \Psi_d = \frac{1 + \tau_{kd\sigma} \alpha_d p}{1 + \tau_{kd\sigma} p}. \quad (57)$$

Выражения для модуля и фазы из (57) имеют вид:

$$M = \sqrt{\frac{1 + (\tau_{kd\sigma} \alpha_d \Omega)^2}{1 + (\tau_{kd\sigma} \Omega)^2}}, \quad (58)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\Omega \tau_{kd\sigma} (1 - \alpha_d)}{1 + \alpha_d (\Omega \tau_{kd\sigma})^2}. \quad (59)$$

Для определения $\tau_{kd\sigma}$ и α_d по частотным характеристикам необходимо задаться двумя условиями. С точки зрения простоты расчетов такими условиями могут быть:

$$M_{\Omega \rightarrow \infty} = M_1; \tag{60}$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = 0. \tag{61}$$

Решая совместно (58) с (60) и (59) с (61), получаем:

$$M_1 = \alpha_d; \tag{62}$$

$$\tau_{kd\Omega} = \frac{1}{\Omega_3 \sqrt{\alpha_d}}, \tag{63}$$

где Ω_3 — значение частоты, при которой $d\varphi/d\Omega = 0$.

Однако в ряде случаев (это зависит от вида экспериментальных кривых) наложение условий (60), (61) не позволяет практически определить параметры с большой точностью.

Так, например, если потоки рассеяния невелики, то коэффициент α_d мал и ошибка при его измерении по кривой будет велика. Аналогично обстоит дело и с условием (61): если кривая $\varphi = f(\Omega)$ не имеет резко выраженного экстремума, то точное значение Ω_3 по ней определить трудно.

В этих случаях удобнее наложить два условия на фазовую характеристику. Выбираются две произвольные точки (желательно, сдвинутые на декаду) с координатами $\Omega_1\varphi_1$ и $\Omega_2\varphi_2$. Решая уравнение (59) относительно $\tau_{kd\Omega}$, получаем:

$$\tau_{kd\Omega}^2 (\Omega_1^2) \left[\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - \frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi_2} \right] + \tau_{kd\Omega} \text{tg } \varphi_1 \Omega_2 \left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - \frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi_2} \right) = 0. \tag{64}$$

Для определения параметров демферной обмотки по поперечной оси ротор закрепляется в таком положении, что его поперечная ось совпадает с осью обмотки статора, к которой подводилось напряжение генератора низкой частоты. Дальнейшее проведение эксперимента аналогично описанному выше.

4.6.9. Структурная схема параллельной работы синхронных машин

При исследовании параллельной работы синхронных машин на моделирующей установке схема набора решающих элементов имеет ряд особенностей.

Уравнения синхронной машины целесообразно свести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \psi_f &= \frac{\Omega_0}{p} (u_f - r_f i_f); \\ \psi_d &= \frac{\Omega_0}{p} (u_d + r_a i_d + \omega \psi_q); \\ \psi_q &= \frac{\Omega_0}{p} (u_q + r_a i_q - \omega \psi_d); \\ \psi_{kd} &= \frac{\Omega_0}{p} (-r_{kd} i_{kd}); \\ \psi_{kq} &= \frac{\Omega_0}{p} (-r_{kq} i_{kq}); \\ \psi_f &= \psi_{md} + x_{fs} i_f; \\ \psi_d &= \psi_{md} - x_{as} i_d; \\ \psi_q &= \psi_{mq} - x_{as} i_q; \\ \psi_{kd} &= \psi_{md} + x_{kd} i_{kd}; \\ \psi_{kq} &= \psi_{mq} + x_{kq} i_{kq}; \\ \psi_{md} &= x_{md} (i_f - i_d + i_{kd} - i_s); \\ \psi_{mq} &= x_{mq} (-i_q + i_{kq}); \\ \mu &= \tau_m p \omega + \psi_q i_d - \psi_d i_q, \end{aligned} \right\} \tag{65}$$

где i_s — величина, пропорциональная току и зависящая от насыщения магнитной цепи.

Такой грубый учет насыщения диктуется большим количеством необходимых решающих усилителей.

Окончательное изображение генератора как отдельного звена системы показано на рис. 9.

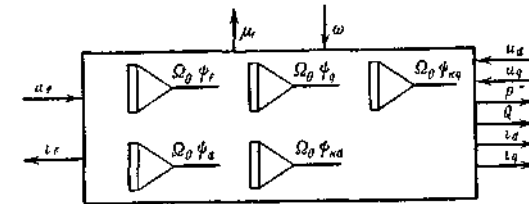


Рис. 9. Принципиальная структурная схема синхронного генератора.

Это звено отражает физические параметры обмотки возбуждения, вала, нагрузки и может быть сочленено с другими звеньями системы автоматического регулирования.

Переход к фазным величинам напряжений и токов производится аналогично рассмотренному выше.

Для выбранного направления прохождения сигналов (рис. 9), когда входным сигналом на нагрузку является ток, а выходным — напряжение, представление режима холостого хода на аналоговой вычислительной машине связано с трудностями. Имеется ряд компромиссных решений для изображения режима холостого хода, одно из которых заключается в следующем.

Выбирается наиболее подходящий масштаб времени для уменьшения эффективного коэффициента усиления в замкнутых контурах решающих усилителей.

Режим холостого хода рассматривается приближенно как режим работы на большое активное сопротивление. Тогда для цепи нагрузки получаем:

$$u_d = i_d r_{x,x}; \quad u_q = i_q r_{x,x}. \quad (66)$$

Например, при выборе $r_{x,x} = 25$ относительных единиц и соответствующем масштабе времени работа решающих усилителей становится устойчивой.

Дальнейшее улучшение может быть достигнуто, если рассматривать режим холостого хода как режим работы с высоким значением полного сопротивления, представляющего нагрузку ($R-C$), причем C может рассматриваться в модели как распределенная емкость генератора.

В этом случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} u_d &= \frac{\Omega_0}{p} \left(x_{x,x} i_d + u_q - u_d \frac{x_{x,x}}{r_{x,x}} \right), \\ u_q &= \frac{\Omega_0}{p} \left(x_{x,x} i_q - u_d - u_q \frac{x_{x,x}}{r_{x,x}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

где $x_{x,x}$ — индуктивное сопротивление холостого хода, отн. ед.; $r_{x,x}$ — условное сопротивление холостого хода, отн. ед.

Полученное внешнее соединение хотя и обладает высоким коэффициентом усиления, но представляет собой фильтр к высокочастотным помехам усилителей.

Если рассматривать приставку $r_{x,x} - c_{x,x}$ как постоянную часть генератора, то возможно сделать внешние соединения с входными сигналами — токами и выходными сигналами — напряжениями, что удобно при исследовании режима параллельной работы генераторов.

При решении на моделирующей установке могут быть приняты следующие значения постоянных параметров для масштаба времени 500:

$$r_{x,x} = 100 \text{ отн. ед.}; \quad x_{x,x} = 200 \text{ отн. ед.}$$

Получаемый уровень помех в этом случае незначителен. Оптимальное соотношение параметров холостого хода $x_{x,x} = 2r_{x,x}$.

На основании изложенного можно записать:

$$i_d = i'_d - i_{dx,x}; \quad i_q = i'_q - i_{qx,x}, \quad (68)$$

где i'_d, i'_q — условные токи контуров якоря.

Уравнения цепи нагрузки переписываются в виде

$$\left. \begin{aligned} i_d &= \frac{\Omega_0}{p} \left(\frac{u_d}{x_n} - i_d \frac{r_n}{x_n} + \omega i_q \right); \\ i_q &= \frac{\Omega_0}{p} \left(\frac{u_q}{x_n} - i_q \frac{r_n}{x_n} - \omega i_d \right). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Спецификой анализа параллельной работы синхронных генераторов является тот факт, что уравнения каждой машины записаны в системе координат d, q , которые связаны с положением собственного ротора. Если выбрать единую систему координат, например, оси d, q первого генератора, а уравнения остальных генераторов выразить относительно этих осей, то получится очень сложная система записи, лишенная всякого физического смысла. Целесообразнее пользоваться общепринятыми структурными схемами генераторов, а внешние сигналы этих схем u_d, u_q, i_d, i_q связывать между собой для отображения параллельной работы.

Для случая двух генераторов угол δ_{12} между положениями роторов будет составлять:

$$\delta_{12} = \frac{1}{p} (\Omega_2 - \Omega_1). \quad (70)$$

Уравнения связи между двумя генераторами имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u_{d12} &= u_{d1} \cos \delta_{12} + u_{q1} \sin \delta_{12}; \\ u_{q12} &= -u_{d1} \sin \delta_{12} + u_{q1} \cos \delta_{12}; \\ i_{d21} &= i_{d2} \cos \delta_{12} - i_{q2} \sin \delta_{12}; \\ i_{q21} &= i_{d2} \sin \delta_{12} + i_{q2} \cos \delta_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где u_{d12} — напряжение на обмотке якоря по продольной оси первого генератора в системе координат второго генератора;

i_{d21} — ток в обмотке якоря по продольной оси второго генератора в системе координат первого генератора и т. д.

Окончательная структурная схема, включающая нагрузку и параллельную работу двух генераторов, показана на рис. 10.

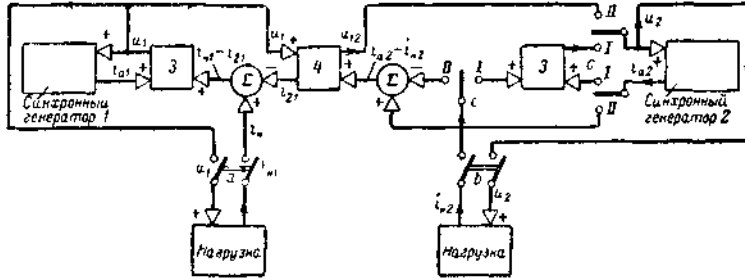


Рис. 10 Блок-схема параллельной работы синхронных генераторов.
 1, 2 — синхронные генераторы; 3 — шунт $r_{\text{X X}} - e_{\text{X X}}$;
 4 — преобразователь

Для простоты изображения показан только один сигнал вместо двух составляющих d и q .

В структурной схеме указаны три выключателя. В положении выключателя $C=I$ оба генератора изолируются друг от друга и $i_{21}=0$.

Включение и выключение нагрузки от генератора 1 производится выключателем a , от генератора 2 — выключателем b . В положении II выключателя C генераторы включаются параллельно.

Такой способ рассмотрения параллельной работы не ограничивается двумя машинами и может быть выполнен для любого их числа.

В этом случае система координат одной из машин принимается за основу; с ней связываются системы координат остальных машин. Если рассматривается только режим параллельной работы, то достаточно одной приставки $(r_{\text{X X}} - e_{\text{X X}})$ для основной машины.

4.6.10. Структурная схема шагового синхронного двигателя

Шаговые двигатели (ШД) представляют собой синхронную машину с постоянным потоком возбуждения. По конструктивному исполнению различаются индукторные двигатели с ферромагнитным зубчатым ротором и магнитоэлектрические двигатели с ротором в виде магнита-звездочки. В практических расчетах обычно пренебрегают разностью магнитных проводимостей по продольной и поперечной осям этих машин и демпфирующим действием массивных частей ротора, а зависимость электромагнитного момента от тока принимают линейной. С этими допущениями уравнения для шагового синхронного двигателя имеют вид (уравнения (72) справедливы только для шаговых двигате-

лей, которые имеют возбуждение от постоянных магнитов, расположенных на статоре или роторе (магнит-звездочка):

$$\left. \begin{aligned} -RI_d - LpI_d + LI_q\Omega &= U_d; \\ -RI_q - LpI_q - LI_d\Omega + \Psi_f\Omega &= U_q; \\ \frac{J}{p^*} p\Omega + M_H &= -\frac{M_{ст}}{I_{ст}} I_q, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где

$$L = L_d = L_q;$$

$M_{ст}$ — максимальный статический синхронизирующий момент при неподвижном роторе с током фазы $I_{ст} = U/R$;

U — амплитуда фазного напряжения, определяемая величиной напряжения сети постоянного тока U_0 и схемой управления ШД. Например, для двухфазного ШД при мостовой схеме питания обмоток

$$U = \sqrt{2} U_0;$$

M_H — момент нагрузки;

p^* — число пар полюсов;

J — общий момент инерции, приведенный к скорости вала двигателя ШД.

Положительные направления переменных относительно выбранных осей d, q сохраняются прежними.

Составляющие напряжения по осям d, q определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} U_d &= U \cos \delta; \\ U_q &= U \sin \delta, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

где δ — угол между пространственным вектором результирующего напряжения питания и продольной осью двигателя,

$$\delta = \int_0^t (\Omega_0 - \Omega) dt, \quad (74)$$

где Ω_0 — угловая скорость вектора результирующего напряжения. Введем следующие базовые значения переменных:

$$U_6 = U; \quad I_6 = \frac{U}{X_6};$$

$$M_6 = M_{ст}; \quad \Omega_6 = \sqrt{\frac{M_6 p^*}{J}}; \quad t_6 = 1/\Omega_6. \quad (75)$$

Запишем уравнения (72) — (74) в относительных единицах, учтя принятые базовые значения переменных:

$$\left. \begin{aligned} -i_d(p+r) + i_q \omega &= \cos \delta; \\ -i_q(p+r) - i_d \omega + e \omega &= \sin \delta; \\ p \omega &= -i_q r - \mu_H; \\ \delta &= \int_0^{\tau} (\omega_0 - \omega) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

где

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{X}; \quad e = \frac{\Psi_f \Omega_6}{U} = \frac{E_6}{U}; \\ i_d &= \frac{I_d}{I_6}; \quad i_q = \frac{I_q}{I_6}; \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_6}; \quad \omega_0 = \frac{\Omega_0}{\Omega_6}; \\ \mu_H &= \frac{M_H}{M_{c\tau}}; \quad \tau = \Omega_6 t; \quad p = \frac{d}{d\tau}. \end{aligned}$$

По выражению (76) составлена структурная схема синхронного ШД, изображенная на рис. 11,а.

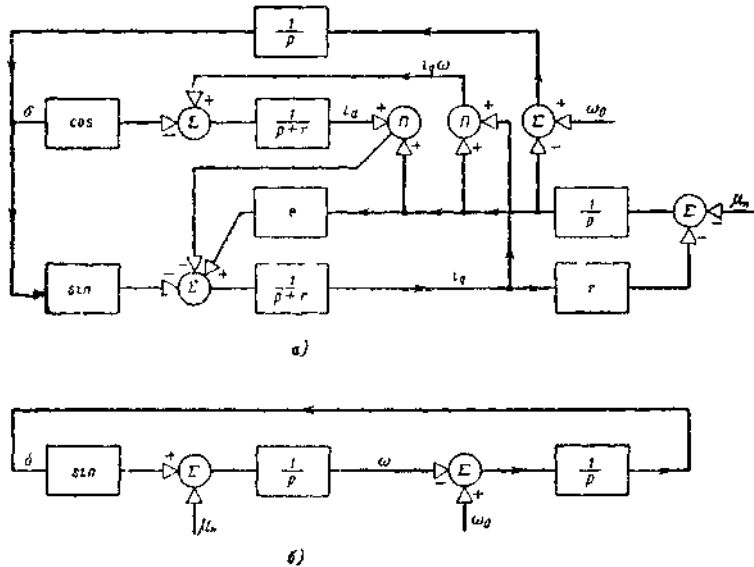


Рис. 11. Структурная схема синхронного шагового двигателя.
а — полная схема; б — упрощенная схема.

В ряде случаев, когда в цепи обмоток ШД включены большие форсировочные сопротивления, можно пренебречь величинами

индуктивности обмоток и э. д. с. Система уравнений ШД при этом получается более простой:

$$\left. \begin{aligned} p \omega &= \sin \delta - \mu_H, \\ \delta &= \int_0^{\tau} (\omega_0 - \omega) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Упрощенная структурная схема ШД по (77) представлена на рис. 11,б. Внешними возмущающими являются угловая скорость ω_0 и момент нагрузки μ_H (рис. 11).

Величина угловой скорости ω_0 определяется временем переключения напряжения на обмотках ШД. При каждом управляющем сигнале напряжение поворачивается на определенный угол θ_1 мгновенно. График изменения $\theta = f(\tau)$ носит ступенчатый характер (рис. 12).

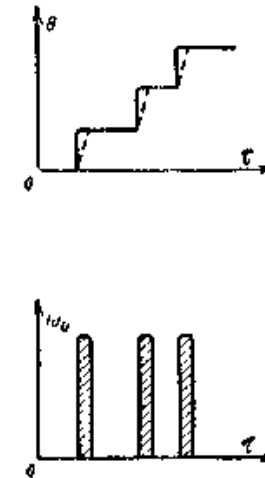


Рис. 12.

Производная угла $d\theta/d\tau = \omega_0$ принимает бесконечно большое значение. При моделировании время переключения напряжения принимают конечным, т. е. ступени зависимостей $\theta = f(\tau)$ имеют некоторый наклон (пунктирная линия на рис. 12,а). Зависимость $\omega_0 = f(\tau)$, соответствующая моделируемому процессу, имеет вид узких импульсов с конечной амплитудой. Принятое допущение несущественно сказывается на результатах расчета, если ширина этих

импульсов значительно меньше их периода. Входной сигнал $\bar{\omega}_0$ в модели формируется с помощью специальной электронной схемы (рис. 13).

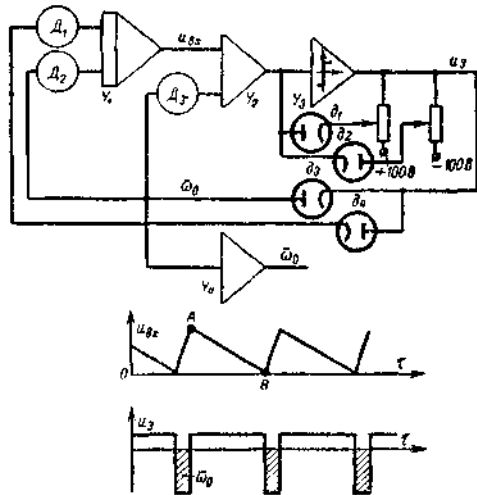


Рис. 13 Схема формирования задающей скорости.

Усилитель $U3$ воспроизводит релейную характеристику. Напряжение на его выходе u_3 имеет два уровня в зависимости от знака входного сигнала. Установка уровня u_3 осуществляется диодами ∂_1, ∂_2 в цепи обратной связи усилителя $U3$. Частота входного сигнала (наклон AB) устанавливается делителем $D1$. Чтобы не перегружать делитель $D2$, выходной сигнал снимается с усилителя $U4$, работающего в режиме инвертора.

Величина $\bar{\omega}_0 = 100$ в выбирается максимальной.

4.7. Моделирование асинхронных двигателей

4.7.1. Структурная схема двухфазного асинхронного двигателя

Методика составления уравнений в координатах d, q , рассмотренная выше применительно к синхронным машинам, может быть

использована также и для асинхронных двигателей. Полученная система уравнений (п.4.6. (35)) является общей для машин переменного тока. Такая запись уравнений является удобной при исследовании систем автоматического управления, включающей совместную работу синхронных и асинхронных машин.

Рассмотрим некоторые другие формы записи уравнений асинхронных двигателей, которыми целесообразно пользоваться при моделировании ряда приводов на переменном токе.

Для двухфазных электрических машин с симметричным ротором метод двух реакций позволяет получить наиболее простые уравнения, так как статорные обмотки сдвинуты друг относительно друга на угол 90 эл. град и их взаимное влияние отсутствует, что позволяет рассматривать каждую ось машины независимо от другой.

Запись уравнений осуществляется в системе координат α, β , жестко связанных со статором.

При составлении уравнений приняты следующие допущения:

- 1) магнитная цепь рассматривается ненасыщенной;
- 2) действие гистерезиса и вихревых токов не учитывается;
- 3) форма токов и напряжений считается синусоидальной;
- 4) намагничивающая сила в воздушном зазоре распределена по синусоидальному закону.

Для двухфазного асинхронного двигателя с двумя обмотками на статоре согласно принципиальной схеме (рис. 1) основные уравнения имеют вид:

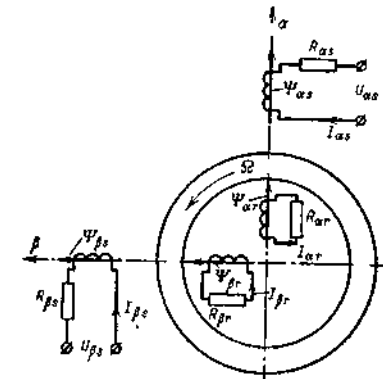


Рис. 1. Принципиальная схема двухфазного асинхронного двигателя.

Уравнения статорной цепи:

$$U_{\alpha s} = I_{\alpha s} R_{\alpha s} + p \Psi_{\alpha s}; \quad (1)$$

$$U_{\beta s} = I_{\beta s} R_{\beta s} + p \Psi_{\beta s}, \quad (2)$$

где

U, I, R, Ψ — напряжения, токи, сопротивления и потокосцепления статорных обмоток;

$p = d/dt$ — символ дифференцирования.

Принятые индексы имеют следующий смысл:

α, β символизируют соответствующие обмотки; s, r представляют собой параметры, относящиеся к статору и ротору.

Уравнения эквивалентной цепи ротора:

$$0 = I_{\alpha r} R_{\alpha r} + p \Psi_{\alpha r} + \Psi_{\beta r} \Omega; \quad (3)$$

$$0 = I_{\beta r} R_{\beta r} + p \Psi_{\beta r} - \Psi_{\alpha r} \Omega. \quad (4)$$

Уравнение электромагнитного момента

$$M_{\psi} = \Psi_{\beta r} I_{\alpha r} - \Psi_{\alpha r} I_{\beta r}. \quad (5)$$

Уравнение движения

$$M_{\psi} - M_H = J p \Omega, \quad (6)$$

где M_H — момент нагрузки;

J — момент инерции ротора и нагрузки.

Уравнения потокосцеплений:

$$\Psi_{\alpha s} = (\lambda + \lambda'_s) \omega_{\alpha s}^2 I_{\alpha s} + \lambda \omega_{\alpha s} \omega_{\alpha r} I_{\alpha r}; \quad (7)$$

$$\Psi_{\alpha r} = (\lambda + \lambda'_r) \omega_{\alpha r}^2 I_{\alpha r} + \lambda \omega_{\alpha s} \omega_{\alpha r} I_{\alpha s}; \quad (8)$$

$$\Psi_{\beta s} = (\lambda + \lambda'_s) \omega_{\beta s}^2 I_{\beta s} + \lambda \omega_{\beta s} \omega_{\beta r} I_{\beta r}; \quad (9)$$

$$\Psi_{\beta r} = (\lambda + \lambda'_r) \omega_{\beta r}^2 I_{\beta r} + \lambda \omega_{\beta s} \omega_{\beta r} I_{\beta s}, \quad (10)$$

где λ — проводимость пути основного потока;

λ' — проводимость рассеяния;

w — число витков обмотки.

Для построения структурной схемы асинхронного двигателя систему уравнений (1) — (10) целесообразно записать в относительных единицах.

В качестве базисных величин для оси α примем:

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha s} &= U_{\alpha s \beta}; \\ I_{\alpha s} &= I_{\alpha s \beta}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $U_{\alpha s \beta}$ — максимальное значение напряжения, приложенного к обмотке αs ;

$I_{\alpha s \beta}$ — максимальное значение тока обмотки αs при напряжении $U_{\alpha s \beta}$ и разомкнутых остальных обмотках.

Базисные величины связаны между собой следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha s \beta} &= I_{\alpha s \beta} X_{\alpha s \beta} = \Psi_{\alpha s \beta} \Omega_0; \\ X_{\alpha s \beta} &= (\lambda + \lambda'_s) \omega_{\alpha s}^2 \Omega_0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\Omega_0 = \Omega_0$ — синхронная угловая скорость.

Уравнения в относительных единицах для контуров, расположенных по оси α , имеют вид:

$$u_{\alpha s} = i_{\alpha s} r_{\alpha s} + \frac{p}{\Omega_0} \Psi_{\alpha s}; \quad (13)$$

$$\psi_{\alpha s} = x(i_{\alpha s} + i_{\alpha r}) + x_s i_{\alpha s}; \quad (14)$$

$$\psi_{\alpha r} = x(i_{\alpha s} + i_{\alpha r}) + x_r i_{\alpha r}, \quad (15)$$

где

$$r_{\alpha s} = \frac{R_{\alpha s}}{X_{\alpha s \beta}}; \quad x = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda'_s}; \quad x_s = \frac{\lambda'_s}{\lambda + \lambda'_s};$$

$$x_r = \frac{\lambda'_r}{\lambda + \lambda'_s}; \quad u_{\alpha s} = \frac{U_{\alpha s}}{U_{\alpha s \beta}}; \quad i_{\alpha s} = \frac{I_{\alpha s}}{I_{\alpha s \beta}};$$

$$i_{\alpha r} = \frac{\omega_{\alpha r}}{\omega_{\alpha s}} \frac{I_{\alpha r}}{I_{\alpha s \beta}}; \quad \psi_{\alpha s} = \frac{\Psi_{\alpha s}}{\Psi_{\alpha s \beta}}; \quad \psi_{\alpha r} = \frac{\omega_{\alpha s}}{\omega_{\alpha r}} \frac{\Psi_{\alpha r}}{\Psi_{\alpha s \beta}}.$$

Выберем базисные значения переменных для оси β :

$$U_{\alpha s \beta} = K_u U_{\beta s \beta},$$

где

$$U_{\beta s} = U_{\beta s \beta}$$

- максимальное значение напряжения, приложенного к обмотке βs ;

$$I_{\beta s} = I_{\beta s \beta}$$

- максимальное значение тока обмотки βs от напряжения $U_{\beta s \beta}$ при разомкнутых остальных обмотках,

$$U_{\beta s \beta} = I_{\beta s \beta} X_{\beta s \beta} = \Psi_{\beta s \beta} \Omega_0;$$

$$X_{\beta s \beta} = (\lambda + \lambda'_s) \omega_{\beta s}^2 \Omega_0.$$

Уравнения в относительных единицах для контуров, расположенных на оси β , имеют вид:

$$u_{\beta s} = i_{\beta s} r_{\beta s} + \frac{p}{\Omega_0} \psi_{\beta s}; \quad (16)$$

$$\psi_{\beta s} = x(i_{\beta s} + i_{\beta r}) + x_s i_{\beta s}; \quad (17)$$

$$\psi_{\beta r} = x(i_{\beta s} + i_{\beta r}) + x_r i_{\beta r}, \quad (18)$$

где

$$r_{\beta s} = \frac{R_{\beta s}}{X_{\beta s \sigma}}; \quad x = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda'_s}; \quad x_s = \frac{\lambda'_s}{\lambda + \lambda'_s};$$

$$x_r = \frac{\lambda'_r}{\lambda + \lambda'_s}; \quad u_{\beta s} = \frac{U_{\beta s}}{K_u U_{\beta s \sigma}}; \quad i_{\beta s} = \frac{I_{\beta s}}{K_u I_{\beta s \sigma}};$$

$$i_{\beta r} = \frac{\omega_{\beta r} I_{\beta r}}{\omega_{\beta s} K_u I_{\beta s \sigma}}; \quad \psi_{\beta s} = \frac{\Psi_{\beta s}}{K_u \Psi_{\beta s \sigma}}; \quad \psi_{\beta r} = \frac{\omega_{\beta s}}{\omega_{\beta r}} \frac{\Psi_{\beta r}}{K_u \Psi_{\beta s \sigma}}.$$

Уравнения в относительных единицах для роторных контуров имеют вид:

$$0 = i_{\alpha r} r_{\alpha r} + \frac{p}{\Omega_0} \psi_{\alpha r} + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \psi_{\beta r} \omega; \quad (19)$$

$$0 = i_{\beta r} r_{\beta r} + \frac{p}{\Omega_0} \psi_{\beta r} - \frac{K_{\alpha}}{K_{\beta}} \psi_{\alpha r} \omega, \quad (20)$$

где

$$r_{\alpha r} = \left(\frac{\omega_{\alpha s}}{\omega_{\alpha r}} \right)^2 \frac{R_{\alpha r}}{X_{\alpha s \sigma}}; \quad r_{\beta r} = \left(\frac{\omega_{\beta s}}{\omega_{\beta r}} \right)^2 \frac{R_{\beta r}}{K_u X_{\beta s \sigma}};$$

$$K_{\beta} = \frac{\omega_{\beta r}}{\omega_{\beta s}}; \quad K_{\alpha} = \frac{\omega_{\alpha r}}{\omega_{\alpha s}}; \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}.$$

Запишем уравнение для электромагнитного момента в относительных единицах:

$$\psi_{\beta r} i_{\alpha r} - \Psi_{\alpha r} i_{\beta r} K_r = \mu_{\psi}, \quad (21)$$

где

$$\mu_{\psi} = \frac{M_{\psi}}{M_{\sigma}}; \quad M_{\sigma} = \psi_{s\beta\sigma} I_{\alpha s \sigma} \frac{K_{\alpha}}{K_{\beta}}; \quad K_r = \frac{\omega_{\alpha r}}{\omega_{\beta r}}.$$

Уравнение движения в относительных единицах имеет вид:

$$\mu_{\psi} - \mu_H = T_M p \omega, \quad (22)$$

где

$$\mu_H = \frac{M_H}{M_{\sigma}};$$

$T_M = \frac{J \omega_0}{M_{\sigma}}$ — механическая постоянная времени.

По уравнениям (13) — (22) может быть составлена структурная схема двухфазного асинхронного двигателя.

В практических расчетах с целью упрощения уравнений двигателя обычно принимают ряд допущений, например пренебрегают потоками рассеяния. В этом случае система уравнений принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha s} &= i_{\alpha s} r_{\alpha s} + \frac{p}{\Omega_0} \psi_{\alpha}; \\ u_{\beta s} &= i_{\beta s} r_{\beta s} + \frac{p}{\Omega_0} \psi_{\beta}; \\ \psi_{\alpha} &= \psi_{\alpha s} = \psi_{\alpha r} = i_{\alpha s} + i_{\alpha r}; \\ \psi_{\beta} &= \psi_{\beta s} = \psi_{\beta r} = i_{\beta s} + i_{\beta r}; \\ 0 &= i_{\alpha r} r_{\alpha r} + \frac{p}{\Omega_0} \psi_{\alpha} + \frac{K_{\beta}}{K_{\alpha}} \psi_{\beta} \omega; \\ 0 &= i_{\beta r} r_{\beta r} + \frac{p}{\Omega_0} \psi_{\beta} - \frac{K_{\alpha}}{K_{\beta}} \psi_{\alpha} \omega; \\ \mu_{\psi} &= \psi_{\beta} i_{\alpha r} - \psi_{\alpha} i_{\beta r} K_r; \\ \mu_{\psi} &= \mu_H = T_M p \omega. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

На рис. 2 изображена структурная схема двигателя, составленная по системе уравнений (23).

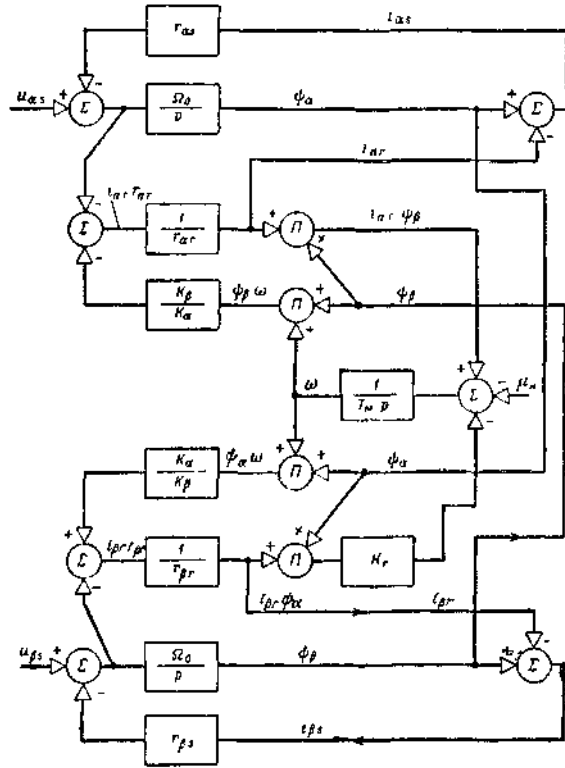


Рис. 2. Структурная схема двухфазного асинхронного двигателя.

4.7.2. Упрощенная структурная схема асинхронного двигателя, основанная на моделировании семейства механических характеристик

а) Упрощенные уравнения асинхронного двигателя

В ряде случаев с целью упрощения формы записи уравнений асинхронного двигателя пренебрегают электромагнитными процессами, протекающими в его обмотках. В такой интерпретации сохраняется одно дифференциальное уравнение — уравнение движения и статические зависимости электромагнитного момента в функции управляющего сигнала и скорости вращения двигателя.

Система уравнений асинхронного двигателя имеет вид:

$$\mu - \mu_H = T_M p \omega; \quad (24)$$

$$\mu = f(y, \omega), \quad (25)$$

где $\mu = M/M_0$ — электромагнитный момент двигателя в долях номинального момента;

$\mu_H = M_H/M_0$ — момент нагрузки в долях номинального момента двигателя;

$\omega = \Omega/\Omega_c$ — скорость вращения ротора в долях от синхронной скорости двигателя;

$T_M = J\omega_c/M_0$ — механическая постоянная времени;

y — управляющее воздействие.

Рассмотрим структурные схемы двигателя для управляющих воздействий, представляющих собой напряжение и частоту источника питания.

б) Структурная схема асинхронного двигателя при управлении напряжением источника питания

Зависимость вращающего момента двигателя от управляющего напряжения и скорости вращения отображает семейство механических характеристик (рис. 3).

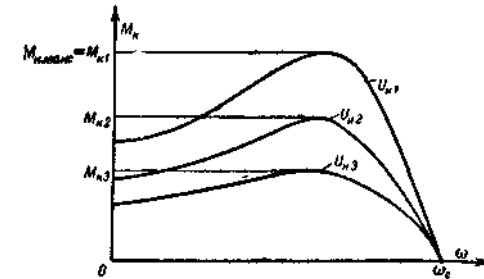


Рис. 3. Семейство механических характеристик при разных напряжениях источника питания.

Значение момента как функции двух переменных определяется по известной формуле

$$\mu = \mu_k(u_H) \frac{1}{\frac{1-\omega}{1-\omega_k(u_H)} + \frac{1-\omega_H(u_H)}{1-\omega}}, \quad (26)$$

где u_H — напряжение источника питания;

$\mu_k = M_k/M_0$ — критический момент в долях от номинального (функция напряжения источника питания);

$\omega_k = \Omega_k/\Omega_c$ — скорость вращения двигателя в долях от синхронной, соответствующая критическому моменту (функция напряжения источника питания).

Для получения более точных результатов при моделировании желательно воспользоваться экспериментальными характеристиками. При этом в соотношении (26) вводится поправочная функция $\alpha_{cp}(\omega)$, учитывающая расхождение экспериментальных данных с теоретической формулой

$$\mu = \mu_k(u_n) \frac{\alpha_{cp}(\omega)}{\frac{1-\omega}{1-\omega_k(u_n)} + \frac{1-\omega_k(u_n)}{1-\omega}} \quad (27)$$

Для каждой характеристики семейства определяется нелинейная зависимость $\alpha_i(\omega)$, исходя из формулы (27).

После расчета всех поправочных коэффициентов функций $\alpha_i(\omega)$ составляется усредненная функция $\alpha_{cp}(\omega)$.

Для решения практических задач обычно пользуются упрощенным выражением для момента двигателя:

$$\mu = \mu_k(u_n) \beta(\omega), \quad (28)$$

где

$$\beta(\omega) = \frac{\alpha_{cp}(\omega)}{\frac{1-\omega}{1-\omega_k} + \frac{1-\omega_k}{1-\omega}} \quad (29)$$

Следует отметить, что такое представление функции двух переменных в виде произведения двух функций $\mu_k(u_n)$ и $\beta(\omega)$ допустимо только в случае, когда ω_k не имеет резкого изменения в зависимости от напряжения источника.

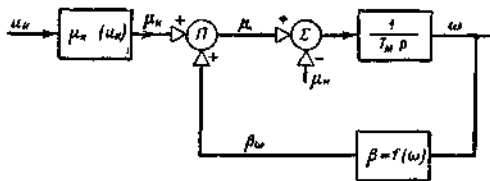


Рис. 4. Структурная схема асинхронного двигателя при управлении напряжением источника питания.

По выражениям (24), (28), (29) составлена структурная схема асинхронного двигателя, изображенная на рис. 4.

в) Структурная схема асинхронного двигателя для случая частотного регулирования скорости вращения

При моделировании семейства механических характеристик асинхронного двигателя для случая частотного регулирования (рис. 4) может быть применена аналогичная методика разделения функций двух переменных. Зависимость электромагнитного момента двигателя от частоты питания и скорости вращения выражается следующим образом:

$$\mu = \mu_k(f_n) \frac{\alpha_{cp}(\omega)}{\frac{1-\omega}{1-\omega_k(f_n)} + \frac{1-\omega_k(f_n)}{1-\omega}}, \quad (30)$$

где $\mu_k(f_n) = M_k/M_0$ — критический момент в долях от номинального (функция частоты питания);

$\omega_k(f_n) = \Omega_k/\Omega_c$ — скорость вращения двигателя в долях от синхронной, соответствующая критическому моменту (функция частоты питания);

$\omega = \Omega/\Omega_0$ — скорость вращения двигателя в относительных единицах.

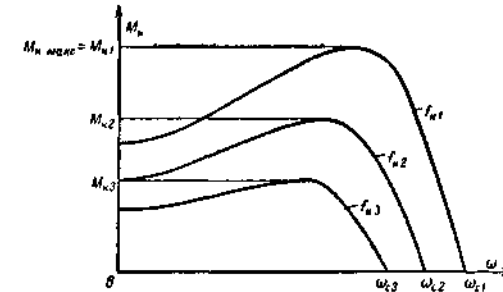


Рис. 5. Семейство механических характеристик асинхронного двигателя при разных значениях частоты источника питания.

Следует отметить, что каждой характеристике семейства (рис. 5) соответствует свое значение синхронной скорости Ω_{ci} .

При определении зависимости $\omega_k = \varphi(f_n)$ по экспериментальным данным величина Ω_{ki} каждой характеристики так же относится к соответствующей синхронной скорости Ω_{ci} .

Определение поправочной функции $\alpha_{cp}(\omega)$ производится аналогично описанному выше.

С целью упрощения задачи выражение для электромагнитного момента $\mu = \Phi(f_n \omega)$ представляется в виде произведения двух функций:

$$\mu = \mu_K(f_n) \beta(\omega) \quad (31)$$

Уравнение движения имеет вид:

$$\mu - \mu_B = T_M p \omega_1, \quad (32)$$

где $\mu_B = M_B / M_0$ — момент нагрузки;

$T_M = J \Omega_{c, \max} / M_0$ — механическая постоянная времени;

$\omega_1 = \Omega / \Omega_{c, \max}$ — угловая скорость двигателя в долях максимальной синхронной скорости,

$$\omega_1 \frac{f_{n, \max}}{f_n} = \omega, \quad (33)$$

$f_{n, \max}$ — максимальная частота источника питания.

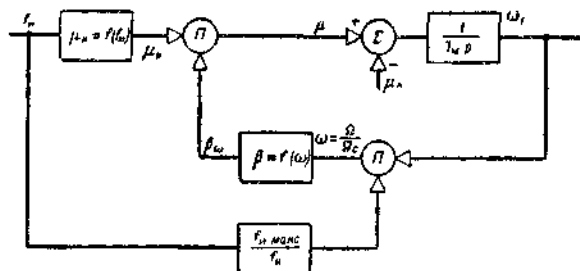


Рис. 6. Структурная схема асинхронного двигателя при управлении частотой источника питания.

По уравнениям (31) —(33) составлена структурная схема асинхронного двигателя, изображенная на рис. 6.

4.8. Моделирование следящих систем

4.8.1. Применение математического моделирования для исследования следящих систем

К следящим системам обычно относят многочисленные статические и астатические замкнутые системы автоматического регулирования, которые обрабатывают входные сигналы, изменяющиеся по произвольным законам. Входными сигналами для следящей системы

могут быть различные физические величины: угол, скорость, напряжение, температура, давление и др.

В следящих системах часто сочетается высокий порядок описывающих их дифференциальных уравнений с наличием существенных нелинейностей отдельных звеньев, а также с использованием отдельных элементов в импульсном режиме.

В связи с этим методами аналитического исследования трудно получить данные, способные удовлетворить запросы конструкторов, разрабатывающих следящие системы.

Одним из основных методов исследования следящих систем является математическое моделирование.

Необходимо отметить, что независимо от физической природы входных и выходных сигналов следящие системы с самыми различными технологическими функциями могут быть описаны идентичными уравнениями и структурными схемами. Способ управления следящей системой (непрерывное или дискретное управление), наоборот, оказывает весьма существенное влияние на математическое описание следящих систем и, следовательно, на методы их моделирования. С учетом изложенных выше положений моделирование следящих систем излагается применительно к следующим двум видам следящих систем:

1. Непрерывные следящие системы.

В качестве примера рассматривается моделирование широко распространенного следящего электропривода с двигателем постоянного тока. При этом также учитываются некоторые нелинейности, характерные для следящих систем (в том числе люфты в передачах).

2. Дискретные следящие системы.

Ниже рассматриваются главным образом методы набора дискретных элементов непосредственно на аналоговых моделях.

Совместное использование для моделирования дискретных систем аналоговых моделей и электронных вычислительных цифровых машин рассмотрено далее.

4.8.2. Моделирование следящей системы с двигателем постоянного тока и непрерывным управлением

Примерная схема следящей системы и соответствующая ей блок-схема показаны на рис. 1 и 2. Следящая система, приведенная на рис. 1, относится к скоростным следящим системам, т. е. к системам,

которые одновременно обрабатывают заданную координату (угол) и скорость ее изменения (такие системы часто называют системами с астатизмом первого порядка.)

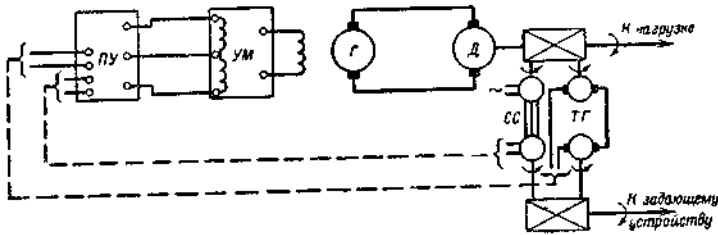


Рис 1. Схема включения следящей системы.

Следящая система (рис. 1) состоит из следующих основных элементов:

ПУ — промежуточный усилитель, усиливающий сигналы ошибки по углу и скорости (электронный усилитель с использованием электронных приборов);

УМ — усилитель мощности (магнитный, электромашинный поперечного поля и др.);

Г — генератор постоянного тока;

Д — электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением;

ИЭ — измерительный элемент, предназначенный для измерения ошибок углового положения и скорости вращения и преобразования их в соответствующие напряжения (U_θ , U_ω). Функции измерительного элемента в непрерывных следящих системах, обрабатывающих угловые координаты, выполняют вращающиеся трансформаторы или сельсины, включенные по трансформаторной схеме (U_θ), и встречно включенные тахогенераторы (U_ω).

Схема набора модели следящей системы может быть построена непосредственно по блок-схеме, представленной на рис. 2.

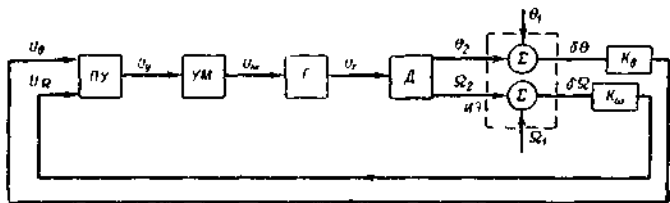


Рис. 2. Блок-схема следящей системы.

Однако при исследовании следящих систем скоростного типа, блок-схема, изображенная на рис. 2, в ряде случаев недостаточно удобна, так как на этой схеме в качестве одной из переменных используется угловая координата вала двигателя, которая при работе системы может изменяться в неограниченных пределах. Воспроизведение такой величины на модели встречает определенные трудности, так как выходные напряжения операционных усилителей ограничены и в связи с этим оказывается необходимым применение устройств для периодизации процессов, что усложняет построение модели и ее исследование.

Для устранения указанного недостатка схему, приведенную на рис. 2, целесообразно преобразовать таким образом, чтобы интегрирование скорости двигателя выполнялось после ее сравнения с заданной величиной скорости. С этой целью в блок-схему вводится интегратор И (рис. 3), выходной величиной которого является угловая ошибка, изменяющаяся в ограниченных пределах, а не абсолютное значение угла, обработанного системой.

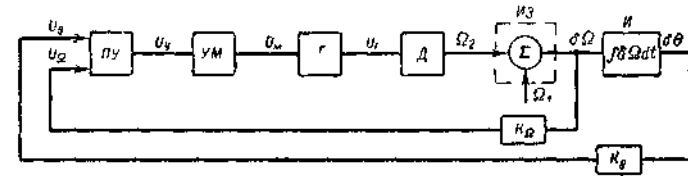


Рис. 3 Преобразованная блок-схема следящей системы.

Заметим, что построение модели в соответствии со схемой, показанной на рис. 3, не ограничивает возможности исследования системы, так как в случае необходимости возмущения по углу могут быть введены непосредственно на вход звена ПУ или учтены в качестве начальных условий на интеграторе И. Стабилизирующие цепи на рис. 1, 2 и 3 не показаны и учитываются при составлении схемы модели. Для блок-схемы, приведенной на рис. 3, могут быть записаны следующие уравнения:

напряжение на входе усилителя ПУ, зависящее от угловой ошибки,

$$U_\theta = K_\theta \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{p}; \tag{1}$$

напряжение на входе усилителя ПУ, зависящее от ошибки по скорости,

$$U_\omega = K_\omega (\Omega_1 - \Omega_2); \tag{2}$$

напряжение на выходе усилителя ПУ

$$U_y = K_{y1}U_\theta + K_{y2}U_\omega \leq U_{y0}; \quad (3)$$

напряжение на выходе усилителя мощности УМ

$$U_M = K_M \Phi_M(p) U_y; \quad (4)$$

напряжение на выходе генератора

$$U_G = K_{Г.л} K_G \frac{U_M}{1 + pT_G}; \quad (5)$$

уравнение движения привода

$$M - M_{ст} = Jp\Omega_2; \quad (6)$$

уравнение вращающего момента двигателя

$$M = C_M I_A; \quad (7)$$

уравнение баланса напряжений в цепи якоря

$$U_G = I_A R_\Sigma + C_e \Omega_2. \quad (8)$$

При записи приведенных выше уравнений принято, что величины всех вращающих моментов, моментов инерции, скоростей вращения и угловых координат приведены к скорости одного вала (например, вала двигателя). Поэтому в уравнениях (1) — (8) отсутствуют передаточные числа редукторов.

Обозначения принятые в уравнениях (1) — (8), приведены ниже:

K_θ — крутизна измерительного органа по каналу угловой ошибки, $в/рад$, в общем случае является переменной величиной, так как зависит от величины угловой ошибки.

K_ω — крутизна измерительного элемента по каналу ошибки по скорости, $в\cdotсек/рад$;

$K_{Г.л}$ — коэффициент усиления генератора по напряжению на линейной части характеристики холостого хода;

K_G — коэффициент, учитывающий при записи передаточной функции генератора нелинейность характеристики холостого хода.

Как было указано ранее, коэффициент $K_G = \lambda/\lambda_0$, где λ и λ_0 — значения проводимостей путей главного потока в данной точке характеристики и на ее линейной части;

K_{y1} , K_{y2} — коэффициенты усиления по напряжению усилителя ПУ по каналам угловой ошибки и ошибки по скорости соответственно;

K_M — коэффициент усиления по напряжению усилителя УМ;

$\Phi_M(p)$ — нормализованная передаточная функция усилителя мощности.

Выражение для $\Phi_M(p)$ может быть конкретизировано в соответствии с применением усилителя мощности того или иного типа; если, например, применяется электромашинный усилитель

поперечного поля, то звено с передаточной функцией $\Phi_M(p)$ может быть представлено на модели в соответствии с рис. 3*

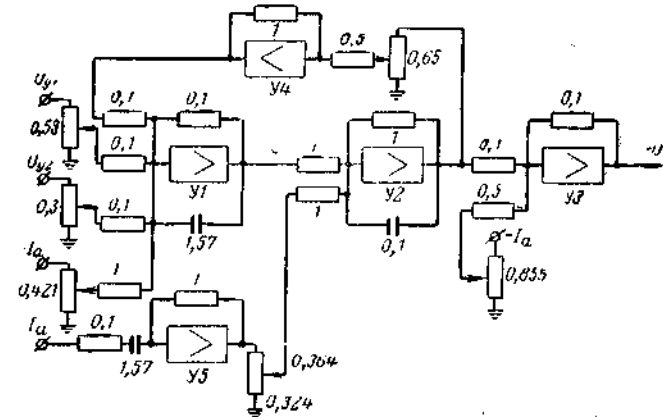


Рис. 3*. Схема набора модели ЭМУ поперечного поля.

которая составлена на основании структурной схемы ЭМУ поперечного поля при нагрузке (рис. 3**)

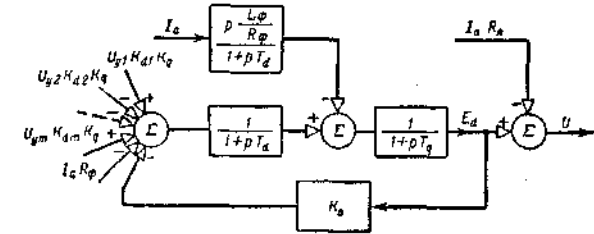


Рис. 3**. Структурная схема ЭМУ поперечного поля при нагрузке.

C_M , C_e — коэффициенты момента и э. д. с. двигателя соответственно; R_Σ — суммарное сопротивление цепи якорей генератора и двигателя;

J — приведенное значение суммарного момента инерции;

M — вращающий момент, развиваемый двигателем;

$M_{ст}$ — статический момент сопротивления;

Θ_1 , Ω_1 — угловая координата и скорость вращения вала задатчика;

Θ_2 , Ω_2 — угловая координата и скорость вращения вала двигателя;

U_{y0} — напряжение насыщения усилителя ПУ.

Необходимые для построения модели выражения для скорости вращения двигателя и тока якоря находим из уравнений (6) — (8):

$$I_{я} = \frac{U_{г} - E_{д}}{R} \quad (8a)$$

$$\Omega_{г} = \frac{U_{г} - \frac{M_{г} \tau R_{г}}{C_{м} C_{e}}}{1 + p T_{м}} \quad (9)$$

где $E_{д} = \frac{C_{e} \Omega_{г}}{j R_{г}}$ — противо-э. д. с. двигателя;
 $T_{м} = \frac{1}{C_{м} C_{e}}$ — электро-механическая постоянная времени.

Для представления на модели вращающего момента двигателя может быть использовано уравнение (7). Структурная схема следящей системы, построенная по приведенным выше уравнениям, изображена на рис. 4.

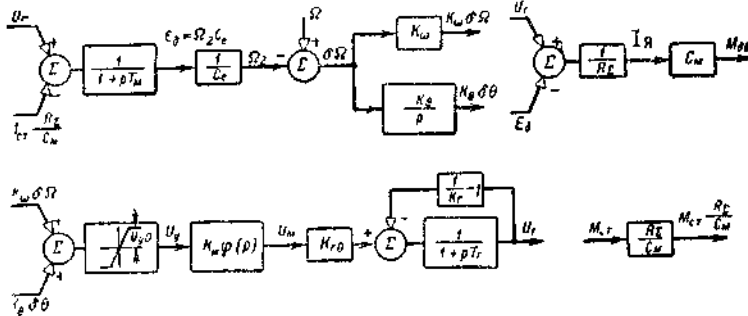


Рис. 4. Структурная схема следящей системы

Звенья структурной схемы, представленной на рис. 4, имитирующие двигатель постоянного тока, построены по уравнениям (6) — (8), которые удобны для анализа работы двигателя при постоянном потоке

Схема набора модели, выполненная в соответствии со структурной схемой, изображенной на рис. 4, представлена на рис. 5.

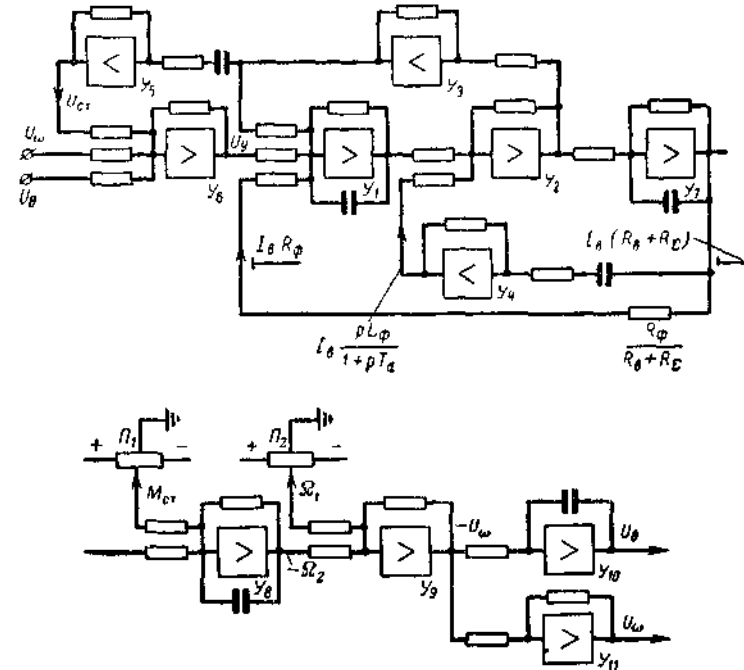


Рис. 5. Схема набора модели следящей системы.

Усилители 1, 2, 3 и 4 — ЭМУ поперечного поля; усилители: 5 — цепь возбуждения, 6 — суммирующий усилитель; 7 — генератор постоянного тока; 8 — исполнительный двигатель; 9 и 10 — измерительный орган; потенциометры Π_1 — задание возмущений по нагрузке; Π_2 — по скорости.

Схема, приведенная на рис. 5, составлена применительно к случаю, когда в качестве усилителя мощности УМ используется электромашинный усилитель поперечного поля. На схеме набора, представленной на рис. 5, учтены нелинейности двух видов:

- а) нелинейность характеристик усилителя ПУ, связанная с ограничением его выходного напряжения (U_{y0});
- б) нелинейность кривой намагничивания генератора.

Ограничение выходного напряжения ПУ выполнено с применением диодов, что дает достаточно точное приближение к характеристикам реальных усилителей. Нелинейность кривой намагничивания генератора моделируется при помощи блока нелинейностей. В зависимости от конкретных характеристик следящей

системы и задач, поставленных при ее исследовании на модели, может возникнуть необходимость в моделировании и других нелинейностей, в том числе нелинейностей усилителя УМ, измерительного органа и люфтов в передачах.

Моделирование нелинейностей усилителя УМ выполняется аналогично учету нелинейности кривой намагничивания генератора путем применения нелинейных элементов в цепи обратной связи. Данные по выбору параметров этой схемы приводятся при рассмотрении модели с того или другого усилителя. Необходимость в учете нелинейности характеристик измерительного органа обычно возникает в тех случаях, когда исследуется двухотсчетная система и имеется необходимость в воспроизведении процесса синхронизации. В этом случае коэффициент $K_{\theta} = f(\theta)$ не является постоянным, и для учета этого в схему модели необходимо ввести блок нелинейностей, который должен быть включен на выходе усилителя 10. Примерные характеристики блока нелинейностей для случая модели двухотсчетной следящей системы, имеющей измерительный орган с использованием сельсинов, включенных по трансформаторной схеме, показаны на рис. 6.

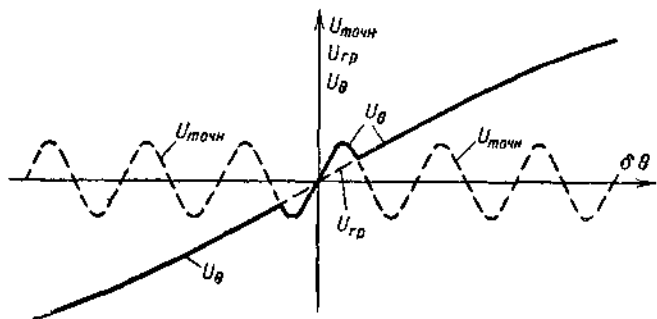


Рис. 6. Характеристика измерительного органа двухотсчетной следящей системы.

Для того чтобы воспроизвести на модели процесс синхронизации следящей системы, на интеграторе И (рис 3), вырабатывающем сигналы по угловой ошибке, должны быть также выставлены начальные условия, учитывающие значение угла $\Delta\theta$ в начале процесса синхронизации. Необходимо заметить, что при обычно применяемых на практике передачах между сельсинами точной и грубой синхронизации (например, 36: 1) процессы нормальной работы следящей системы и процессы ее синхронизации целесообразно исследовать при различных масштабах угла θ и, следовательно, при различных

параметрах схемы набора модели. В заключение сказанного о следящих системах с непрерывным управлением остановимся на основных задачах, которые решаются при исследовании таких систем на аналоговых моделирующих установках. Одной из основных задач указанного исследования является выбор средств, обеспечивающих устойчивость системы и удовлетворительное качество переходных процессов. Эти средства обычно состоят в применении стабилизирующих и корректирующих контуров, которые включаются последовательно в основной канал системы или формируют сигналы обратной связи. Использование математических моделей, однако, не дает возможности решить задачу синтеза, т. е. в зависимости от требований, поставленных к следящей системе, однозначно указать схему корректирующего контура и его параметры. Поэтому при исследовании следящей системы производят опробование модели при различных вариантах выполнения корректирующих контуров. Предварительно определяют область коэффициентов усиления, в которой система устойчива без специальных мер стабилизации. Для следящих систем значения коэффициентов, входящих в эту область, значительно (в 10—100 раз) ниже тех значений коэффициентов усиления, которые необходимы для обеспечения точности, требуемой по заданию.

Затем производят выбор типа стабилизации (последовательная или параллельная), схемы корректирующих устройств и точек системы, между которыми они должны быть включены. Выбор указанных выше данных может базироваться на опыте стабилизации аналогичных систем или на расчетах, произведенных любыми известными методами: частотных характеристик, при помощи анализа распределения корней, с использованием стандартных передаточных функций и т. д. Так как указанные расчеты носят предварительный характер и имеют целью только выяснить примерную структуру контура и порядок величин, характеризующих его параметры, то они могут быть выполнены приближенно. Так, например, при выполнении таких расчетов можно пренебречь некоторыми относительно малыми постоянными времени, не учитывать второстепенные связи и т. п. После того как принята схема корректирующего контура, последний набирается на модели и затем производится проверка работы системы. При проверке определяют зависимость между параметрами корректирующего контура (т. е. значениями постоянных времени и коэффициентов усиления контура) и показателями следящей системы, к которым относятся, например, предельный по устойчивости коэффициент усиления, число колебаний при реакции на единичное возмущение, максимальное перерегулирование, длительность

переходного процесса, статическая ошибка при гармоническом изменении скорости задающей оси и т.д. Полученные данные обычно представляют на плоскости в виде семейства кривых. Если вычисленные при этом показатели системы удовлетворяют требованиям, то выбирают окончательно значения параметров и испытания модели на этом заканчиваются. Если окажется, что показатели системы не являются удовлетворительными, то в схему и значения параметров вносят изменения и испытания повторяют.

При испытаниях модели могут быть также исследованы такие способы повышения качества системы, как введение корректирующих сигналов по возмущению, а также нелинейных гибких и жестких связей

Следует указать еще на одну характерную задачу, которая часто решается при исследовании на моделях как следящих, так и других замкнутых и разомкнутых систем. Эта задача заключается в исследовании на моделирующих установках аварийных режимов. К таким режимам относятся, например, обрывы и замыкания в цепи стабилизации, обрыв цепи возбуждения двигателей постоянного тока, нарушение баланса выходных цепей дифференциальных усилителей и т. п. Для характеристики указанных режимов необходимо, например, определить на модели величины скачков тока, провалов напряжения, изменения ошибки и др. показателей. При этом возможно также определить на модели необходимые значения уставов защитных аппаратов, применяемых в системе, изучаемой на модели. Подобные задачи решались в работе И. Р. Фрейдзона, в которой излагаются результаты исследования на модели аварийных режимов следящей системы рулевого управления судном.

Описанный выше объем испытаний, выполняемых на модели, позволяет получить исчерпывающее представление о свойствах системы. На практике не всегда имеется необходимость в столь подробных исследованиях и поэтому испытания можно проводить и в меньшем объеме, соответствующем конкретным требованиям, предъявляемым к исследуемой системе. Необходимо указать, что едва ли возможно создать универсальные рекомендации по определению оптимальных параметров следящих систем путем их исследования на аналоговых моделях. Однако по коррекции тех или других следящих систем имеется большой опыт, позволяющий достаточно обоснованно выбрать схему коррекции и затем уточнить ее при испытаниях на модели. Например, для рассмотренной выше системы (рис. 1) известно, что удовлетворительную стабилизацию можно получить путем применения обратной связи в виде интегрирующей цепи, охватывающей звенья УМ и ПУ.

В частном случае для следящей системы с ЭМУ поперечного поля (см. схему модели на рис. 5) оказалось достаточным применение в цепи обратной связи звена с передаточной функцией типа $K \frac{pT}{1+pT}$. Как показали испытания модели, представленной на рис. 5, при $T = 4 \text{ сек}$ возможно обеспечить удовлетворительную стабилизацию при коэффициенте усиления $300 \frac{1/\text{сек}}{\text{град}}$.

4.8.3. Моделирование следящих систем с учетом люфта в передачах и их упругих деформаций

На работу следящих систем, обрабатывающих угловые или линейные перемещения, большое влияние оказывают люфты в передачах (например, в редукторах) и их упругие деформации. Указанное влияние особенно существенно в случае, когда момент инерции вращающихся деталей, расположенных за люфтом, является значительным. Методику моделирования систем с люфтом и упругими связями для конкретности рассмотрим на примере модели привода с двигателем постоянного тока (рис 7).

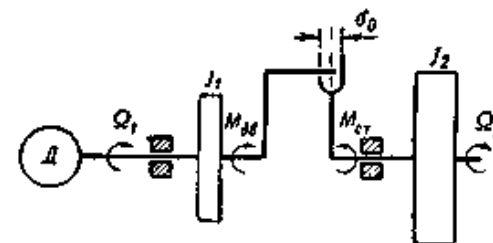


Рис 7. Схема электропривода с люфтом в передачах.

Основные соотношения, характеризующие передачу вращения при наличии люфта и упругих связей, выражаются следующими уравнениями.

$$M_{дв} - M_0 = J_1 p \Omega_1; \quad (10)$$

$$M_0 - M_{ст} = J_2 p \Omega_2; \quad (11)$$

$$M_0 = \begin{cases} \mu \left(\Delta\theta - \frac{\delta_0}{2} \right) & \text{при } |\Delta\theta| \geq \frac{\delta_0}{2} \text{ и } \Delta\theta > 0; \\ 0 & \text{при } |\Delta\theta| < \frac{\delta_0}{2}; \\ \mu \left(\Delta\theta + \frac{\delta_0}{2} \right) & \text{при } |\Delta\theta| \geq \frac{\delta_0}{2} \text{ и } \Delta\theta < 0. \end{cases} \quad (12)$$

В приведенных выше уравнениях через M_0 обозначен момент взаимной реакции элементов системы, разделенных люфтом. Этот момент в соответствии с уравнением (12) равен нулю, когда система расцеплена (т. е. находится в зоне люфта) и определяется упругими деформациями вне зоны люфта, т. е. при передаче вращения. Для составления схемы модели привода с люфтом к уравнениям (10) — (12) следует еще добавить уравнения, характеризующие работу двигателя:

$$U_r = I_n R_\Sigma + C_e \Omega_1; \quad (13)$$

$$M = C_M I_n; \quad (14)$$

$$M_{ст} = f(\Omega_2); \quad (15)$$

$$\Delta\theta = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{p}. \quad (16)$$

В уравнениях (10)-(16)

I_n — ток в цепи якоря двигателя;

R_Σ — суммарное сопротивление цепи якоря;

J_1 — момент инерции двигателя;

J_2 — момент инерции нагрузки, т. е. вращающихся частей, расположенных за люфтом;

Ω_1, Ω_2 — угловые скорости вращения двигателя и нагрузки соответственно;

$M_{ст}$ — момент статического сопротивления, зависящий от скорости;

$\Delta\theta$ — угол между осями двигателя и нагрузки;

δ_0 — суммарная величина люфта;

μ — коэффициент упругости.

Из уравнений (10), (13) и (14) находим:

$$\Omega_1 = \frac{U_r - \frac{M_0 R_\Sigma}{C_e}}{1 + p T_M}, \quad (17)$$

где T_M — электромеханическая постоянная времени двигателя;

$$T_M = \frac{J_1 R_\Sigma}{C_M C_e}.$$

По уравнениям (11), (12), (15) — (17) построена структурная схема модели (рис. 8).

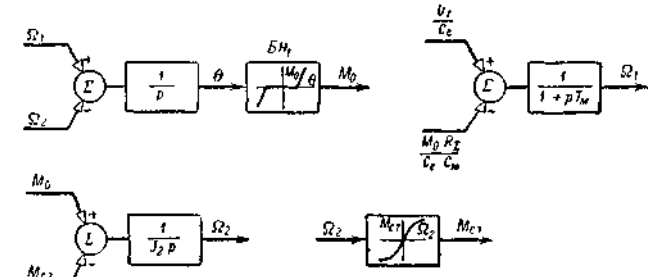


Рис. 8 Структурная схема электропривода с двигателем постоянного тока и люфтом в передачах.

Схема набора может быть легко выполнена в соответствии с структурной схемой, приведенной на рис. 8, и поэтому не рассматривается. Модель привода с люфтом, построенная в соответствии с рис. 8, может быть включена в общую схему модели следящей системы и позволяет исследовать последнюю при наличии люфтов. Необходимо отметить, что люфт оказывает большее или меньшее влияние на работу следящей системы в зависимости от величины расположенной за ним маховой массы и места подключения измерительного элемента (до люфта, т. е. при непосредственном соединении измерительного элемента с двигателем, или после люфта). Практика исследования следящих систем показала, что при подключении измерительного элемента до люфта последний не уменьшает запаса устойчивости системы. Влияние люфта в данном случае сводится к тому, что угловое положение деталей, расположенных за люфтом, фиксируется следящей системой менее точно, т. е. может произвольно изменяться в пределах, обусловленных люфтом. Для увеличения точности измерительный элемент в некоторых случаях подключают к валу нагрузки (после люфта). В этом случае динамические свойства следящей системы могут значительно ухудшиться и в некоторых случаях обеспечение устойчивости становится весьма сложным. Опыт исследования таких систем изложен, например Я. С. Бровманом. В работе Я. С. Бровмана, а также в работе Б. З. Зильбермана не учитывается упругость передач и используется приближенный метод учета люфта, основанный на том допущении, что система расцепляется только в момент изменения знака скорости. Методы моделирования, основанные на указанных допущениях, следует применять с осторожностью, так как они

способны дать достаточно точные результаты только в тех случаях, когда влияние упругих свойств передач незначительно, и момент сопротивления, приложенный к нагрузке имеет относительно большую величину, т. е. при снижении скорости вращения двигателя выдерживается условие

$$\left| \frac{M_H}{J_2} \right| > \left| \frac{M}{J_1} \right|.$$

4.8.4. Моделирование дискретных следящих систем

Дискретные системы могут быть разделены на непрерывную часть и собственно дискретную часть. Моделирование непрерывной части дискретных систем не имеет каких-либо особенностей и может быть выполнено методами, описанными выше.

Характерной особенностью дискретной части является квантование, т. е. операция преобразования непрерывных величин в дискретные [Н/Д]. **Различают квантование по времени, по уровню и комбинированное квантование (по времени и по уровню).**

В зависимости от вида квантования дискретные системы могут быть разделены на следующие группы:

- 1) релейные автоматические системы, в которых квантование происходит по уровню;
- 2) импульсные системы, в которых квантование осуществляется по времени;
- 3) цифровые системы, в которых применяется комбинированный метод квантования (по времени и по уровню)

Квантование по уровню является нелинейным преобразованием с конечным числом выходных уровней преобразованной величины. Типичная характеристика звена, осуществляющего квантование по уровню, представлена на рис. 9, а структурная схема этой операции изображена на рис. 10.

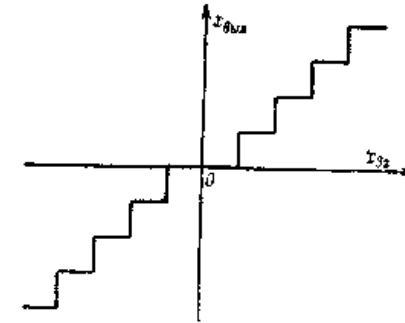


Рис. 9. Характеристика квантования по уровню

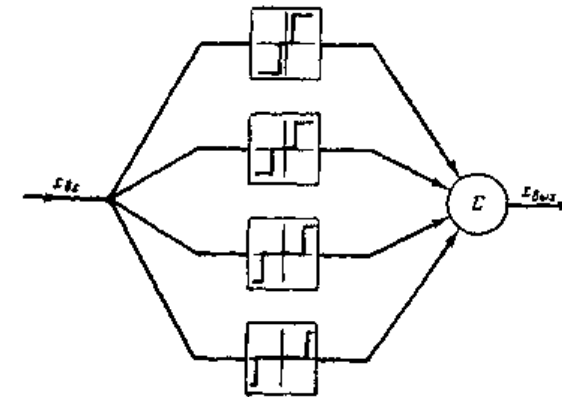


Рис 10 Структурная схема квантования по уровню

Как видно из рис. 10, для осуществления квантования по уровню используются звенья с зоной нечувствительности на входе и ограничением на выходе.

Квантование по времени является линейным преобразованием, которое в соответствии с характеристиками исследуемого на модели объекта может выполняться по различным законам. Так, например, различают амплитудно-импульсную, широтно-импульсную, фазоимпульсную модуляции и др.; наряду с упомянутым выше преобразованием Н/Д в дискретных системах обычно также используется обратное преобразование, т. е. преобразование дискретной величины в непрерывную (Д/Н). В системах, где применяется квантование по

времени, преобразование Д/Н является операцией демодуляции. Для демодуляции часто применяется преобразователь нулевого порядка, т. е. преобразователь, выходная величина которого не изменяется в промежутках между дискретными сигналами. В некоторых случаях в соответствии с программой, принятой в реальной системе, применяется преобразователь первого порядка. В таких преобразователях производная выходной величины сохраняется постоянной в промежутках между дискретными сигналами. При этом в конце и начале каждого интервала экстраполированная таким образом непрерывная функция совпадает с заранее заданными дискретными значениями входной величины.

Преобразователи первого порядка известны также в литературе под названием экстраполировов.

Как видно из описанного выше, для моделирования дискретных систем необходимо располагать специализированным оборудованием, позволяющими имитировать на аналоговых машинах ключи, осуществляющие квантование сигналов, модуляторы, экстраполирующие звенья, генераторы импульсов и другие элементы дискретных систем.

Известно несколько методов моделирования этих элементов. Так например, в ряде работ предложены схемы набора дискретных элементов непосредственно на моделирующих установках без применения дополнительной внешней аппаратуры. Описана специализированная приставка, позволяющая периодически измерять и преобразовывать непрерывную информацию в импульсы соответствующей амплитуды или длительности. Мы ограничимся описанием схем набора некоторых дискретных элементов непосредственно на моделирующих установках.

Генератор импульсов. Для преобразования непрерывно изменяющегося сигнала в последовательность импульсов необходим источник напряжения, управляющий ключами, модуляторами и другими элементами модели. В качестве генератора импульсов могут быть использованы, например, генератор НГПК, или схемы, набранные на аналоговой модели. Схема набора генератора импульсов показана на рис. 11

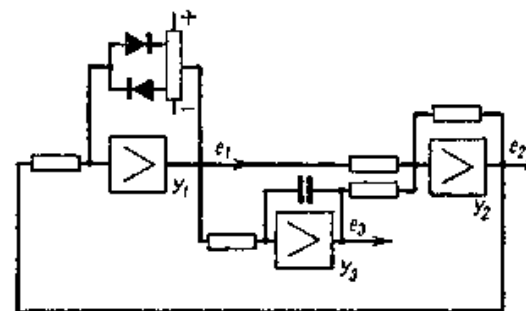


Рис 11. Схема набора генератора импульсов по модели.

Генератор является одновременно источником прямоугольных импульсов (e_1) и треугольных импульсов двух видов (e_2 и e_3). Примерные графики импульсов показаны на рис. 12.

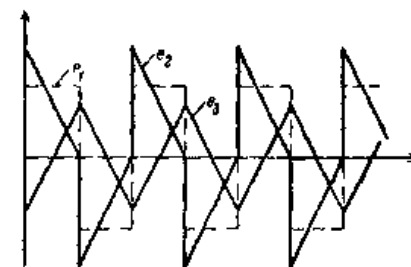


Рис. 12. График выходного напряжения генератора импульсов.

В схеме, представленной на рис. 11, в качестве переключающего элемента используется усилитель U_1 с ограничением при помощи диодов, включенных в цепь обратной связи. Интегратор набирается на усилителе U_3 . Величина опорного напряжения в цепи обратной связи усилителя U_1 определяет амплитуду колебаний.

Модулятор. В качестве модулятора обычно используют электронные ключи, при помощи которых осуществляется преобразование непрерывных сигналов в квантованные. На рис. 13,а показан замыкающий электронный ключ.

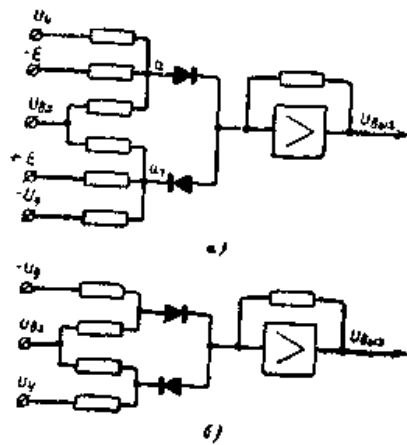


Рис. 13. Схемы набора электронных ключей на модели.
а-закрывающий ключ; *б*-размыкающий ключ

При отсутствии управляющих сигналов диоды заперты опорным напряжением E . Управляющее напряжение U_y периодически открывает диоды, замыкая при этом цепь для входного напряжения U_{BX} .

На рис. 13,б показана схема размыкающего ключа. Она построена на аналогичном принципе, но не требует опорного напряжения.

Схема амплитудно-импульсной модуляции. Амплитудно-импульсная модуляция может быть осуществлена либо по разомкнутой, либо по замкнутой схеме.

Структурные схемы обоих вариантов устройства для амплитудно-импульсной модуляции показаны на рис. 14,а, б.

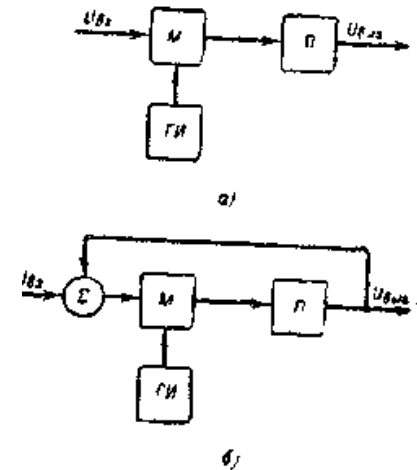


Рис. 14. Блок-схемы устройства для амплитудной модуляции.
а — разомкнутая схема; *б* — схема с обратной связью;
М — модулятор; *П* — память; *ГИ* — генератор импульсов.

Указанные схемы реализуются с применением одних и тех же элементов: генератора импульсов, модулятора и элемента памяти. В разомкнутой схеме входной сигнал при помощи модулятора квантуется на узкие полосы и подается на вход элемента памяти. На выходе устанавливаются напряжения, равные напряжению входного сигнала в момент прохождения данного узкого импульса и сохраняющиеся постоянными до появления следующего импульса. Схема включения модели для получения амплитудно-импульсной модуляции показана на рис 15,а. По ряду причин (наличие тока покоя диодов, наличие сеточного тока усилителя, тока утечки, обусловленного дефектами изоляции) в схеме, изображенной на рис. 15,а, происходит накопление погрешностей. Несколько лучшие характеристики имеют замкнутые схемы (рис. 15,б). При отсутствии управляющих импульсов напряжение на выходе схемы постоянно. Интегратор при этом работает в режиме памяти. При подаче управляющего импульса диоды открываются и система благодаря жесткой обратной связи переходит в режим аperiodического звена. При этом происходит сравнение выходного напряжения с входным, что обеспечивает компенсацию погрешностей, накапливающихся в течение периода.

Схема широтно-импульсной модуляции. При широтно-импульсной модуляции непрерывные сигналы преобразуются в импульсы

постоянной амплитуды, длительность которых пропорциональна величине входного сигнала в моменты времени, которые периодически фиксируются. Схема, позволяющая при помощи решающих усилителей осуществить широтно-импульсную модуляцию, показана на рис. 16.

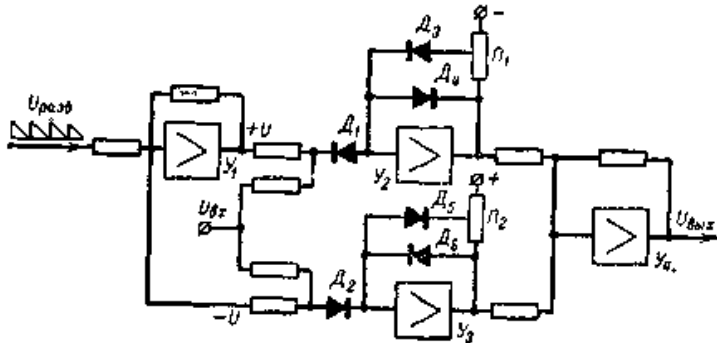


Рис 16. Схема набора на модели преобразователя для широтно-импульсной модуляции.

Усилители Y_1 и Y_3 работают в релейном режиме. В работе схемы принимает участие тот или другой усилитель в зависимости от знака напряжения U_{BX} . Ограничение в цепи обратной связи указанных усилителей выполнено с помощью двух диодов, один из которых (D_3 и D_5) включен последовательно с источником опорного напряжения, а другой (D_4 и D_6) присоединен непосредственно между входом и выходом усилителя. Такая схема включения обратной связи уменьшает нестабильность нулевого уровня на выходах усилителей Y_2 и Y_3 . На вход усилителя Y_1 подается напряжение от генератора развертки. Последний представляет собой генератор треугольных импульсов, напряжение на выходе которого пропорционально времени, отсчитываемому от некоторого фиксированного момента времени.

Входной сигнал U_{BX} и сигнал генератора развертки сравниваются на входах усилителей Y_2 и Y_3 (диоды D_1 и D_2) и в момент равенства напряжений этих сигналов происходит отключение соответствующего релейного усилителя, и импульс на выходе схемы исчезает. В результате этого длительность импульса на входе усилителя Y_4 оказывается прямо пропорциональной величине входного сигнала U_{BX} , а амплитуда определяется настройкой релейных усилителей Y_2 и Y_3 , т. е. выбранной уставкой потенциометров Π_1 и Π_2 и величиной опорного напряжения.

Схема комбинированной амплитудно-широтной модуляции. В данной схеме изменение выходных импульсов осуществляется по двум параметрам: по амплитуде импульсов и по их длительности. Схема изображена на рис. 17 и представляет собой комбинацию рассмотренных ранее схем, изображенных на рис. 15 и 16, и поэтому подробное описание этой схемы не приводится.

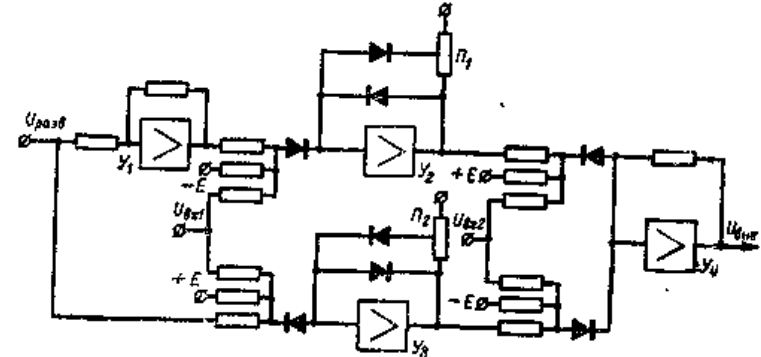


Рис. 17. Схема для набора на модели преобразователя для амплитудно-широтной импульсной модуляции.

Длительность импульсов определяется входным напряжением U_{BX1} , а амплитуда — напряжением U_{BX2} . На аналогичных принципах могут быть построены схемы, осуществляющие и другие преобразования: частотно-импульсную модуляцию, число-импульсную модуляцию преобразование кодов и т. п.

4.9. Моделирование манипуляционных систем на АВМ

При исследовании манипуляционных систем широко используются методы моделирования, основанные на применении аналоговых вычислительных машин (АВМ), цифровых вычислительных машин (ЦВМ) и гибридных вычислительных систем (ГВС), состоящих из АВМ, ЦВМ и средств сопряжения. Обычно АВМ используются для исследования динамических характеристик отдельных приводов манипулятора; ЦВМ — для исследования системы приводов и моделирования управляемого движения манипулятора; ГВС — для решения задачи комплексного моделирования сложного робототехнического комплекса.

4.9.1. Моделирование приводов манипуляторов на АВМ

Рассмотрим особенности моделирования на АВМ систем автоматического управления (САУ) отдельными степенями подвижности манипулятора. Для математического описания динамики привода удобно использовать аппарат структурных схем и передаточных функций, позволяющий при моделировании широко использовать методы теории автоматического управления.

На рис. 1 представлена структурная схема линейризованного привода с электрическим двигателем постоянного тока и абсолютно жесткой механической передачей.

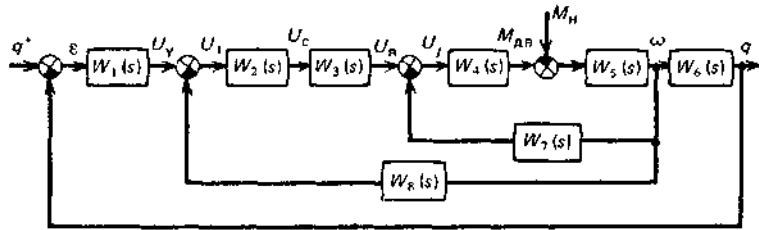


Рис. 1. Структурная схема линейризованного привода

На рисунке приняты следующие обозначения:
 q^* , q — программное и текущее значения обобщенной координаты отдельной степени подвижности манипулятора;
 ε — ошибка регулирования (разность между q^* и q);
 $W_1(s)$ — передаточная функция предварительного усилителя:
 $W_1(s) = k_y / (1 + sT_y)$;
 $W_2(s)$ и $W_3(s)$ — соответственно передаточные функции корректирующего устройства и усилителя мощности:
 $W_2(s) = k_c (1 + sT_c) / s$; $W_3(s) = k_n / (1 + sT_n)$;
 U_γ — напряжение на якоре двигателя постоянного тока;
 $W_4(s)$ — передаточная функция «электрической» части двигателя: $W_4(s) = k_m / [R_n (1 + sT_n)]$;
 $M_{дв}$ — вращающий момент двигателя;
 M_n — момент сопротивления нагрузки, приведенный к валу двигателя;
 $W_5(s)$ и $W_6(s)$ — передаточные функции «механической» части двигателя: $W_5(s) = 1 / (J_n s)$; $W_6(s) = 1 / (t s)$, при этом $J_n = J_{дв} + J_n$,
 $J_{дв}$ — момент инерции двигателя, J_n — момент инерции нагрузки,

приведенный к валу двигателя, i — коэффициент передачи редуктора; $W_7(s) = k_{\omega}$ — коэффициент против-ЭДС; $W_8(s) = k_{\omega c}$ — коэффициент стабилизирующей отрицательной обратной связи по угловой скорости.

Будем полагать, что параметры системы принимают следующие значения:

$$k_y = 5; T_y = 0,001 \text{ с}; k_c = 10; T_c = 0,02 \text{ с}; k_n = 10; T_n = 0,003 \text{ с}; R_n = 0,05 \text{ Ом}; k_m = 0,001 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{А}; T_n = 0,01 \text{ с}; J_{дв} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; J_n = J_{дв}; i = 70; k_{\omega} = 0,2 \text{ В} \cdot \text{с}/\text{рад}; k_{\omega c} = 0,07 \text{ В} \cdot \text{с}/\text{рад}.$$

Рассмотрим построение переходных процессов при различных значениях параметров системы и момента M_n . При построении переходных процессов на АВМ целесообразно воспользоваться методом структурного моделирования, при котором схемы моделирования составляются по структурной схеме системы регулирования, в состав которой входят **типовые динамические звенья**, имеющие порядок не выше второго.

При структурном моделировании удастся обеспечить топологическую эквивалентность схемы моделирования и исходной структурной схемы системы и, как следствие, более простую реализацию задания начальных условий по сравнению с методом составления схем моделирования по дифференциальным уравнениям системы.

Аналоговая модель исходной системы (см. рис. 1), составленная по методу структурного моделирования, представлена на рис. 2.

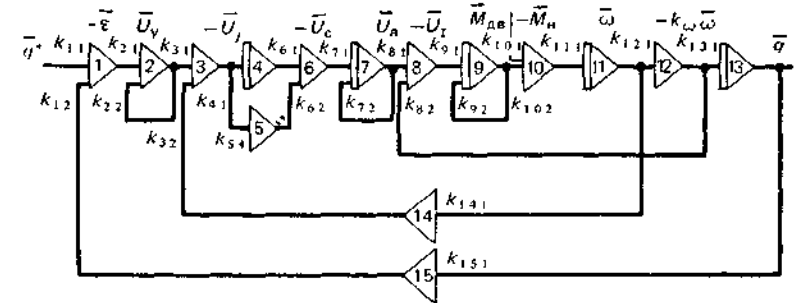


Рис. 2 Аналоговая модель линейризованного привода
Усилитель 2 — интегратор

В схеме использованы модели элементарных звеньев. Номера операционных усилителей помещены в соответствующие треугольники. Как известно, в АВМ исходным переменным ставятся в

соответствие электрические напряжения, называемые машинными переменными. Для обозначения машинных переменных используются обычные переменные с черточкой сверху, например \bar{q}^* (рис. 2).

Составив аналоговую схему, необходимо решить задачу выбора масштаба машинных переменных. Масштаб независимой переменной (времени) M_t выбирается в соответствии с выражением

$$M_t = t_m / t,$$

где t_m — машинное время; t — независимая переменная исходной задачи (время); M_t представляет собой безразмерную величину, причем при $M_t=1$ процесс моделирования протекает в реальном масштабе времени, при $M_t>1$ — в замедленном, при $M_t<1$ — в ускоренном масштабе времени.

Масштабы зависимых переменных определяются в соответствии с выражением

$$M_x = U_x / x,$$

где U_x — машинная переменная; x — зависимая переменная исходной задачи.

При выборе масштаба M_t обычно полагают, что машинное время (время моделирования) изменяется в пределах 15—30 с. Тогда, зная время протекания переходных процессов $t_{пр}$ в исходной системе, можно найти M_t . Предварительный анализ показал, что при $t_{пр}$ не менее 0,5 с значение

$$M_t = (15 \div 30) / 0,5 = 30 \div 60.$$

Выберем $M_t = 100$, т.е. исследование переходных процессов произведем в замедленном масштабе времени.

При определении масштабов зависимых переменных и коэффициентов передачи схемы, изображенной на рис. 2, будем пользоваться известными данными, позволяющими определить коэффициент передачи схемы набора по исходным коэффициентам передаточной функции типового элементарного звена и масштабам зависимых переменных и независимой переменной M_t . При этом запишем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{M_x}{M_q}; k_{12} = \frac{M_x}{M_q}; k_{21} = \frac{k_1 M_{t_1}}{M_c T_y M_t}; \\ k_{22} &= \frac{1}{M_t T_y}; k_{31} = \frac{M_U}{M_{U_y}}; k_{32} = \frac{M_U}{M_{k_{\omega c \omega}}}; \\ k_{41} k_{61} &= k_c T_c \frac{M_{U_c}}{M_U}; k_{51} k_{62} = k_c \frac{M_{U_c}}{M_U M_t}; k_{71} = \frac{k_1 M_{U_n}}{M_{U_c} T_n M_t}; \\ k_{72} &= \frac{1}{M_t T_n}; k_{81} = \frac{M_U}{M_{U_n}}; k_{82} = \frac{M_U}{M_{k_{\omega \omega}}}; \\ k_{91} &= \frac{k_m M_{M_{\omega n}}}{R_n M_U T_n M_t}; k_{92} = \frac{1}{T_n M_t}; k_{101} = k_{102} = 1; \\ k_{111} &= \frac{M_{\omega}}{J_n M_{M_{\omega n}} M_t}; k_{121} = \frac{k_{\omega} M_{\omega}}{M_{\omega}}; k_{131} = \frac{k_2 M_q}{M_{\omega} M_t}; \\ k_{141} &= \frac{M_{k_{\omega \omega}} k_{\omega c}}{M_{\omega}}; k_{151} = 1, \end{aligned} \right\} (1)$$

где $k_2 = 1 / (i k_{\omega})$.

При определении коэффициентов передачи схемы (рис. 2) необходимо знать масштабы всех зависимых переменных. При вычислении масштабов зависимых переменных требуется знать максимальные значения соответствующих зависимых переменных исходной структурной схемы, которые не всегда известны. Поэтому воспользуемся способом вычисления коэффициентов передачи, при котором полагается, что отношения масштабов зависимых переменных в выражении (1) равны единице, тогда коэффициенты равны:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1; k_{12} = 1; k_{21} = 50; k_{22} = 10; k_{31} = 1; k_{32} = 1; k_{41} k_{61} = \\ &= 0,2; k_{51} k_{62} = 0,1; k_{71} = 33,3; k_{72} = 3,33; k_{81} = 1; k_{82} = 1; \\ k_{91} &= 0,2; k_{92} = 1; k_{101} = 1; k_{102} = 1; k_{111} = 1; k_{121} = 0,2; \\ k_{131} &= 0,0007; k_{141} = 0,07; k_{151} = 1. \end{aligned}$$

Анализ приведенных данных показывает, что ряд коэффициентов ($k_{21}, k_{71}, k_{131}, k_{141}$) имеет значения, отличные от пределов 0,1 — 10, что обычно рекомендуется при настройке коэффициентов передачи на АВМ. Выполним поэтому перераспределение коэффициентов схемы набора исходя из правила постоянства передаточной функции замкнутого контура. В схеме, приведенной на рис. 2, выделим три замкнутых контура: контур *A* образуют операционные усилители 1—13, 15; контур *B* — усилители 3—11, 14; контур *B* — усилители 8—12.

Тогда коэффициенты передачи контуров *A*, *B* и *B* имеют вид:

$$k_{21}k_{31}(k_{41}k_{61} + k_{51}k_{62})k_{71}k_{81}k_{91}k_{102}k_{111}k_{121}k_{131}k_{151}k_{12};$$

$$(k_{41}k_{61} + k_{51}k_{62})k_{71}k_{81}k_{91}k_{102}k_{111}k_{141}k_{32};$$

$$k_{91}k_{102}k_{111}k_{121}k_{82}.$$

При распределении коэффициентов передачи замкнутых контуров следует учитывать следующие обстоятельства:

- 1) коэффициенты схемы набора должны изменяться в пределах 0,1 — 10;
- 2) возможно большее число коэффициентов набора должно равняться единице, что облегчает настройку схемы;
- 3) выходные напряжения всех ОУ не должны превышать пределы $\pm U_{\max}$: как правило, для различных АВМ эти значения имеют предел $\pm(10-100)V$.

Общий коэффициент передачи контура *A* не измениться, если принять новые значения коэффициентов: $k_{21}=5$; $k_{71}=0,333$; $k_{131}=0,7$. Тогда для постоянства общего коэффициента передачи контура *B* необходимо выбрать $k_{141} = 7$. Коэффициенты передачи контура *B* остаются прежними.

Окончательно коэффициенты передачи схемы, приведенной на рис. 2, принимают следующие значения:

$$k_{11}=1; k_{12}=1; k_{21}=5; k_{22}=10; k_{31}=1; k_{32}=1; k_{41}=1;$$

$$k_{51}=1; k_{61}=0,2; k_{62}=0,1; k_{71}=0,333; k_{72}=3,33; k_{81}=1;$$

$$k_{82}=1; k_{91}=2; k_{92}=1; k_{101}=1; k_{102}=1; k_{111}=1;$$

$$k_{121}=0,2; k_{131}=0,7; k_{141}=7; k_{151}=1.$$

На рис. 3 представлен полученный по результатам моделирования на АВМ график переходного процесса в системе (кривая 1), построенный в относительных единицах $q(t)/q(\infty)$.

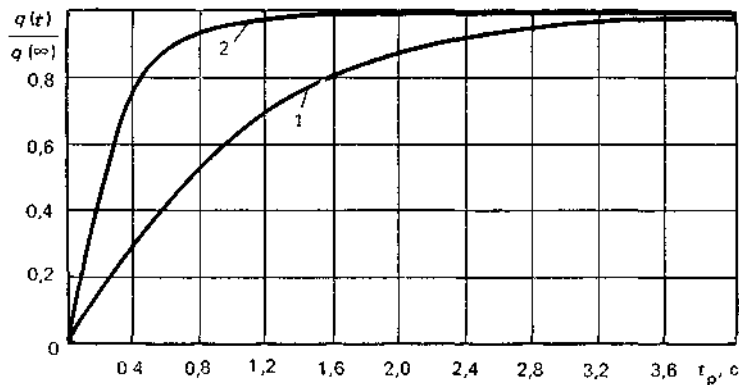


Рис. 3 Графики переходного процесса

Переходный процесс имеет монотонный характер, время регулирования $t_p = 2,8$ с. Изменяя глубину стабилизирующей обратной связи (коэффициент k_{oc}), можно уменьшить время регулирования. В частности, кривая 2 на рис. 3 соответствует $k_{oc} = 0,02$. В этом случае коэффициент передачи усилителя 14 (см. рис. 2) равен $k_{141} = 2$.

4.9.2. Моделирование приводов и управляемого движения манипуляторов на ЭВМ

Для моделирования как систем автоматического управления приводами манипуляторов, так и управляемого движения манипуляторов используются ЭВМ.

Наиболее часто для математического описания приводов манипуляторов используется аппарат структурных схем и передаточных функций. В этом случае задается структурная схема системы, состоящая из соединений типовых динамических звеньев с передаточными функциями степени не выше 2 и безынерционных звеньев с нелинейными характеристиками.

При моделировании на ЭВМ динамики привода необходимо записать систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. В этом случае широко используются известные в теории автоматического управления правила структурных преобразований.

Найдем выражение для системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику линеаризованного привода с абсолютно жесткими механическими связями, структурная схема которого приведена на рис. 1. Для этого предварительно запишем выражение для выходного сигнала q в форме изображения Лапласа

$$Q(s) = W_q(s)Q^*(s) + W_M(s)M_n(s), \tag{2}$$

где $Q(s)$, $Q^*(s)$, $M_n(s)$ определяются как изображения Лапласа функций $q(t)$, $q^*(t)$, $M_n(t)$ соответственно;

$W_q(s)$, $W_M(s)$ — передаточные функции системы по задающему q^* и возмущающему M_n воздействиям соответственно, причем для структурной схемы, приведенной на рис. 1, передаточные функции имеют следующий вид:

$$W_q(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^6 + a_1s^5 + \dots + a_5s + a_6};$$

$$W_M(s) = \frac{c_4s^4 + \dots + c_1s + c_0}{s^6 + a_1s^5 + \dots + a_5s + a_6},$$

где коэффициенты $a_1, \dots, a_6, b_1, b_0, c_4, \dots, c_0$ зависят от параметров системы. Соответствующие выражения имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

Выражение (2) позволяет записать дифференциальное уравнение системы

$$\frac{d^6 q}{dt^6} + a_1 \frac{d^5 q}{dt^5} + \dots + a_5 \frac{dq}{dt} + a_6 q = b_1 \frac{d\dot{q}}{dt} + b_0 q^* + c_4 \frac{d^4 M_n}{dt^4} + \dots + c_1 \frac{dM_n}{dt} + c_0 M_n. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение 6-го порядка (3) сведем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dt &= x_2 + \alpha_1 q^* + \beta_1 M_n; \\ dx_2/dt &= x_3 + \alpha_2 q^* + \beta_2 M_n; \\ &\dots \\ dx_5/dt &= x_6 + \alpha_5 q^* + \beta_5 M_n; \\ dx_6/dt &= - \sum_{k=0}^5 a_{6-k} x_{k+1} + \alpha_6 q^* + \beta_6 M_n, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где коэффициенты α_j и β_j определяются из следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= b_6; \\ \alpha_{6-j} &= b_j - \sum_{k=0}^{6-j-1} a_{6-k-j} \alpha_k; \\ \alpha_5 &= b_0 - \sum_{k=0}^5 a_{6-k} \alpha_k; \\ \beta_0 &= c_6; \\ \beta_{6-j} &= c_j - \sum_{k=0}^{6-j-1} c_{6-k-j} \beta_k; \\ \beta_6 &= c_0 - \sum_{k=0}^5 c_{6-k} \beta_k; \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Выражение (5) позволяет определять коэффициенты α_j и β_j при произвольных значениях b_j и c_j . При этом следует учесть, что $b_6 = b_5 = \dots = b_2 = 0$; $c_6 = c_5 = 0$.

Выходная величина запишется как

$$q = x_1 + \alpha_0 q^* + \beta_0 M_n.$$

Для уравнения (4) коэффициенты α_0 и β_0 равны нулю. Система (4) называется системой линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши.

Если учитывать обычно присутствующие в структурной схеме привода нелинейности типа «ограничение» или «люфт», то для

описания привода можно получить систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Для сложных структурных схем с учетом нелинейностей процедура приведения дифференциального уравнения привода к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши довольно громоздка и в современных программных комплексах она выполняется на ЭВМ.

Для моделирования на ЭВМ управляемого движения манипулятора используются следующие группы операций:

1. Операции вычисления коэффициентов уравнения

$$\left. \begin{aligned} (J_{p1} n_1^2 + a_{14}) \ddot{q}_1 + a_{19} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{20} \dot{q}_1 \dot{q}_3 &= (M_{1d} + M_{1c}) n_1; \\ (J_{p2} n_2^2 + a_{15}) \ddot{q}_2 + a_{18} \ddot{q}_3 - a_{24} \dot{q}_1^2 + a_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + a_{23} \dot{q}_3 &= \\ &= -(M_{2d} + M_{2c}) n_2 + a_{26} p_2 + a_{27} p_3 + a_{29} p_n; \\ (J_{p3} n_3^2 + a_{16}) \ddot{q}_3 + a_{18} \ddot{q}_2 - a_{25} \dot{q}_1^2 - a_{22} \dot{q}_2^2 &= \\ &= (M_{3d} + M_{3c}) n_3 + a_{28} p_3 + 2a_{28} p_n. \end{aligned} \right\}$$

зависящих от обобщенных координат и их производных. Как правило, эти операции сводятся к стандартным действиям над матрицами, например к вычислению коэффициентов системы дифференциальных уравнений динамики манипулятора в нормальной форме Коши.

2. Операции интегрирования систем дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} (J_{p1} n_1^2 + a_{14}) \ddot{q}_1 + a_{19} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{20} \dot{q}_1 \dot{q}_3 &= (M_{1d} + M_{1c}) n_1; \\ (J_{p2} n_2^2 + a_{15}) \ddot{q}_2 + a_{18} \ddot{q}_3 - a_{24} \dot{q}_1^2 + a_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + a_{23} \dot{q}_3 &= \\ &= -(M_{2d} + M_{2c}) n_2 + a_{26} p_2 + a_{27} p_3 + a_{29} p_n; \\ (J_{p3} n_3^2 + a_{16}) \ddot{q}_3 + a_{18} \ddot{q}_2 - a_{25} \dot{q}_1^2 - a_{22} \dot{q}_2^2 &= \\ &= (M_{3d} + M_{3c}) n_3 + a_{28} p_3 + 2a_{28} p_n. \end{aligned} \right\}$$

и (4), описывающих динамику управляемого движения манипулятора.

3. Операции вычисления обобщенных сил и моментов, которые сводятся к обычным вычислениям по конечным формулам.

Из перечисленных вычислительных операций интегрирование систем дифференциальных уравнений требует больших затрат машинного времени. От выбора метода интегрирования и соответствующих программных средств зачастую зависит успешное решение задач моделирования.

Систему дифференциальных уравнений управляемого движения манипулятора удобно рассматривать в векторной форме

$$d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t), \quad (6)$$

где \mathbf{Y} — n -мерный вектор; \mathbf{F} — векторная функция.

Требуется найти решение $\mathbf{Y}(t)$ уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$ для $t > t_0$. Эта задача называется задачей Коши. Для ее решения наиболее часто используют численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим один из алгоритмов интегрирования «жестких» систем дифференциальных уравнений. **Эффект жесткости проявляется в том, что в решении системы дифференциальных уравнений имеются составляющие двух видов: с большими производными по времени и малыми производными**, причем составляющие с большими производными быстро убывают, так что решение системы уравнений в основном определяется составляющими с малыми производными. Однако в любой момент времени возможно появление быстрозатухающего процесса, описываемого функциями с большими производными. При этом даже незначительное увеличение шага интегрирования приводит к резкому возрастанию погрешности вычислений.

Жесткие системы дифференциальных уравнений используются при моделировании явлений, где разброс временных характеристик заложен в физической природе явлений. Например, системы дифференциальных уравнений, описывающие управляемое **движение манипулятора, относятся к жестким системам, так как переходные процессы в системе управления приводом затухают быстрее, чем переходные процессы в механической части манипулятора.**

Для интегрирования жестких систем разработаны специальные методы, из которых отметим метод, использующий элементы матрицы Якоби исходной системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \sum_{i=1}^k P_i \cdot \mathbf{X}_i;$$

$$\mathbf{X}_1 = h \cdot \mathbf{F}_n + \alpha_1 h \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{Y}} \mathbf{X}_1;$$

$$\mathbf{X}_i = h \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Y}_n + \sum_{s=1}^{i-1} \beta_{is} \cdot \mathbf{X}_s) + \alpha_i h \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Y}_n + \sum_{s=1}^{i-1} \gamma_{is} \cdot \mathbf{X}_s)}{\partial \mathbf{Y}} \mathbf{X}_i, \quad i = 2, \dots, k,$$

где $\alpha_i, \beta_{is}, \gamma_{is}, P_i$ — параметры метода интегрирования.

Например, для метода второго порядка коэффициенты могут принимать следующие значения:

$$k = 2; P_1 = 0; P_2 = 1; \alpha_1 = \alpha_2 = 1 - \sqrt{2} / 2; \gamma_{21} = 0; \beta_{21} = (\sqrt{2} - 1) / 2.$$

Выше отмечалось, что использование традиционных методов интегрирования предполагает сведение исходного дифференциального

уравнения или системы дифференциальных уравнений к нормальной форме Коши. Разработаны специальные программные комплексы, позволяющие существенно упростить процедуру задания структуры и параметров системы управления. Как правило, такие системы работают в режиме диалога пользователя с ЭВМ и позволяют существенно сократить время моделирования.

К подобного рода комплексам относится программная система МАСС, позволяющая исследовать САУ во временной области. Система МАСС предназначена для исследования широкого класса САУ (линейных, нелинейных, импульсных, цифровых) во временной области. При этом основным инструментом исследования является построение переходного процесса в системе при определенных начальных условиях и входных воздействиях. Отметим основные особенности МАСС.

1. Система обеспечивает интерактивный режим взаимодействия пользователя с ЦВМ. От пользователя требуется давать правильные ответы на вопросы, задаваемые машиной, причем последовательность вопросов определяется ЦВМ.

2. Система имеет оверлейную структуру. В каждый момент времени в оперативной памяти ЦВМ находятся управляющая программа и один из программных модулей, выполняющий заданную функцию, например ввод структуры САУ и ее параметров и т. д. Остальные модули находятся на внешнем носителе (магнитном диске) и вызываются в оперативную память по мере необходимости. Передача информации между отдельными модулями осуществляется через общую область памяти. Оверлейная структура системы ориентирована на компьютеры различных модификаций.

3. Входной язык системы относится к языкам табличного типа и позволяет описывать САУ, заданные структурными схемами. При этом САУ разбивается на типовые функциональные блоки (интегратор, инерционное звено, инвертор, нелинейные блоки и т. д.). Функциональные блоки образуют библиотеку входного языка. Максимальное число блоков в схеме не должно превышать 200, а порядок моделируемой системы не должен быть выше 75.

4. Структурная схема САУ описывается с помощью спецификации структуры. Каждый оператор структуры имеет следующий вид:

$$I \ T \ Y \ K \ L,$$

где I — номер, присвоенный данному блоку; T — мнемонический тип блока, например символ «+» означает сумматор; Y, K, L — номера блоков, выходы которых подаются на входы данного блока.

5. Значения параметров блоков и начальные условия задаются с помощью операторов спецификации параметров, общий вид которых имеет вид

$$I P_1 P_2 P_3,$$

где I — номер блока; P_1, P_2, P_3 — значения параметров блока.

6. Структурная схема САУ приводится к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, для интегрирования которых используются:

- модифицированный метод Эйлера с постоянным шагом;
- усовершенствованный метод Эйлера с постоянным и переменным шагом;
- метод Рунге — Кутты четвертого порядка с постоянным и переменным шагом.

7. В состав программной системы входят оптимизационные процедуры, позволяющие решать задачи параметрической оптимизации САУ. Библиотека оптимизационных процедур включает алгоритмы Розенброка, симплекс-метода, случайного поиска, Фибоначчи, Гаусса — Зайделя и др..

Рассмотрим пример применения системы МАСС для моделирования системы управления приводом манипулятора (см. 4.9.1). На первом этапе по структурной схеме системы (см. рис. 1) составляется схема моделирования с использованием блоков из функционального набора блоков. Схема моделирования представлена на рис. 4.

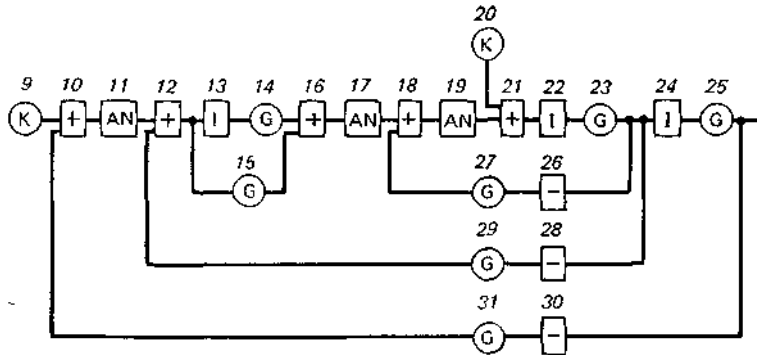


Рис. 4. Схема моделирования линеаризованного привода средствами МАСС

В состав схемы входят следующие блоки: блоки суммирования 10, 12, 16, 18, 21 (языковой символ «+»); блоки констант 9, 20 (языковой символ K), с помощью которых задаются значения постоянных задающего q^* и возмущающего M_n воздействий соответственно; блоки

интеграторов 13, 22, 24 (языковой символ I); блоки инерционных звеньев 11, 17, 19 (языковой символ AN); блоки усилителей 14, 15, 23, 25, 27, 29, 31 (языковой символ G); блоки инверторов 26, 28, 30 (языковой символ «-»).

На втором этапе по структурной схеме составляется спецификация структуры (набора в произвольном порядке операторов структуры, необходимых для ввода в ЭВМ функционального состава и конфигурации схемы моделирования). Спецификация структуры для схемы, изображенной на рис. 4, представлена в табл. 1.

Таблица 1

Таблица 2

Блок	Тип	Входы			Блок	Параметры		
		1	2	3		1	2	3
9	K	—	—	—	9	1	—	—
10	+	9	31	—	11	5	0,001	—
11	AN	10	—	—	14	10	—	—
12	+	11	29	—	15	0,2	—	—
13	I	12	—	—	17	10	0,003	—
14	G	13	—	—	19	2	0,01	—
15	G	12	—	—	20	0	—	—
16	+	14	15	—	23	100	—	—
17	AN	16	—	—	25	0,0143	—	—
18	+	17	27	—	27	0,2	—	—
19	AN	18	—	—	29	0,025	—	—
20	K	—	—	—	31	1	—	—
21	+	19	20	—				
22	I	21	—	—				
23	G	22	—	—				
24	I	23	—	—				
25	G	24	—	—				
26	-	23	—	—				
27	G	26	—	—				
28	-	23	—	—				
29	G	28	—	—				
30	-	25	—	—				
31	G	30	—	—				

На третьем этапе составляется спецификация параметров, позволяющая задавать начальные условия и параметры. В частности, спецификация параметров, соответствующая нулевому начальному состоянию системы, единичному задающему воздействию и отсутствию возмущающего воздействия M_n , представлена в табл. 2.

На четвертом этапе происходит ввод спецификаций структуры и параметров ЭВМ. Далее пользователю предоставляется возможность выбрать метод, шаг и время интегрирования, а также интервал выдачи

данных. По окончании интегрирования системы дифференциальных уравнений и выдачи результатов работы пользователю предоставляется возможность выбрать один из 15 вариантов дальнейшего общения с ЭВМ (например, изменить структуру, параметры и начальные условия, а также метод и параметры интегрирования и т. д.).

Результаты моделирования с помощью системы МАСС переходного процесса в системе (см. рис. 4) при $k_{oc} = 0,025$ представлены на рис. 5 (кривая 1).

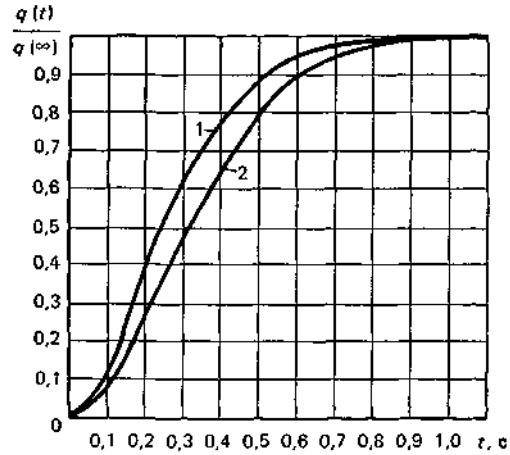


Рис.5. Графики переходных процессов

С помощью программной системы МАСС можно исследовать влияние основных нелинейностей (ограничения, люфта, зоны нечувствительности) на работу системы управления приводом. В частности, переходный процесс в системе при учете нелинейности «ограничение» и «зона нечувствительности» представлен кривой 2.

Рассмотрим моделирование управляемого движения манипулятора на ЭВМ. Для простоты опишем движение двухзвенного манипулятора в вертикальной плоскости (рис. 6). Двигатели расположены в шарнирах O_1 и O_2 .

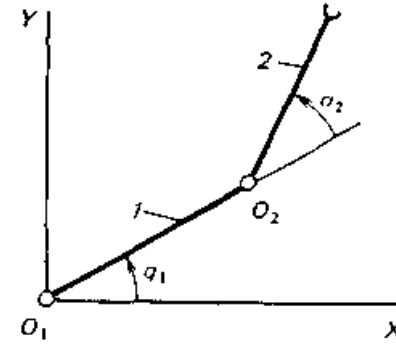


Рис.6. Схема двухзвенного манипулятора

Уравнения динамики манипулятора можно получить с помощью уравнений Лагранжа ВТОРОГО рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2,$$

где T — кинетическая энергия манипулятора; q_i и \dot{q}_i — обобщенные координаты и их производные; Q_i — обобщенные силы.

Запишем уравнения динамики двухзвенного манипулятора:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 &= M_1; \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 &= M_2, \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= m_1 l_1^2 + J_1 + 4m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 4m_2 l_1 l_2 \cos q_2 + J_2; \\ a_{12} &= m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2 + J_2; \\ a_{21} &= a_{12}; \\ a_{22} &= m_2 l_2^2 + J_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В (7) используются следующие обозначения: m_1 и m_2 — массы 1-го и 2-го звеньев соответственно; $2l_1$ и $2l_2$ — длины звеньев; J_1 и J_2 — моменты инерции звеньев,

$$J_i = m_i l_i^2 / 3.$$

Выражения для M_1 и M_2 имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_{дв1} i_1 + M_{p11} + M_{p21} + 2m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 + \\ &\quad + 4m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2; \\ M_2 &= M_{дв2} i_2 + M_{p22} - 2m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В выражении (8) $M_{двj}$ — момент, создаваемый j -м двигателем; i_j — коэффициент передачи j -го редуктора; M_{p11} и M_{p21} — моменты,

создаваемые в 1-м шарнире I весом звеньев:
 $M_{p11} = -P_1 l_1 \cos q_1; M_{p21} = -P_2(2l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2));$
 M_{p22} — момент, создаваемый во 2-м шарнире весом 2-го звена
 $M_{p22} = -P_2 l_2 \cos(q_1 + q_2)$. При этом в выражении (8) для простоты не учитываются моменты трения в шарнирах и вес груза.

Для рассматриваемой упрощенной модели привода момент, развиваемый двигателем,

$$M_{ав} = (q^* - q)k_1 - \dot{q}k_2, \quad (9)$$

где q^* — задающее воздействие, k_1 и k_2 — постоянные, определяемые системой управления привода.

Выражение (9) получено для линеаризованной модели привода (см. рис. 1) при

$$W_1(s) = k_{y1}; W_2(s) = k_{y2}; W_3(s) = k_{y3}; W_4(s) = k_{y4}.$$

Для моделирования управляемого движения использовалась программная система МАСС. Моделирование производилось при следующих исходных данных:

$$2l_1 = 2l_2 = 1 \text{ м}; m_1 = m_2 = 2,5 \text{ кг}; q_1(0) = 0; q_2(0) = 0;$$

$$\dot{q}_1(0) = 0; \dot{q}_2(0) = 0, i_1 = 50; i_2 = 50.$$

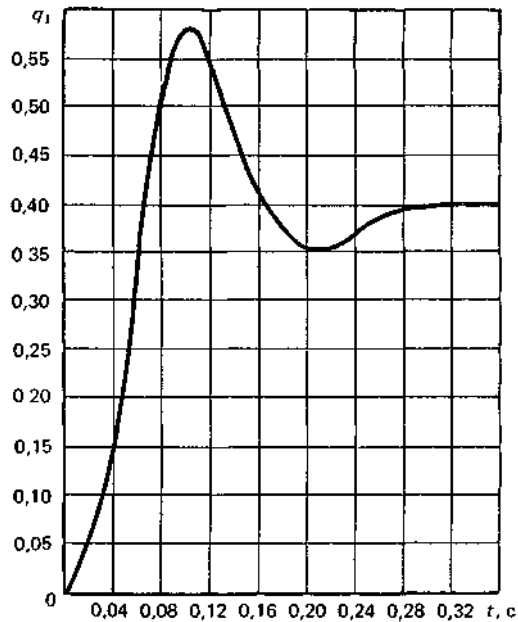


Рис. 7. График изменения $q_1(t)$

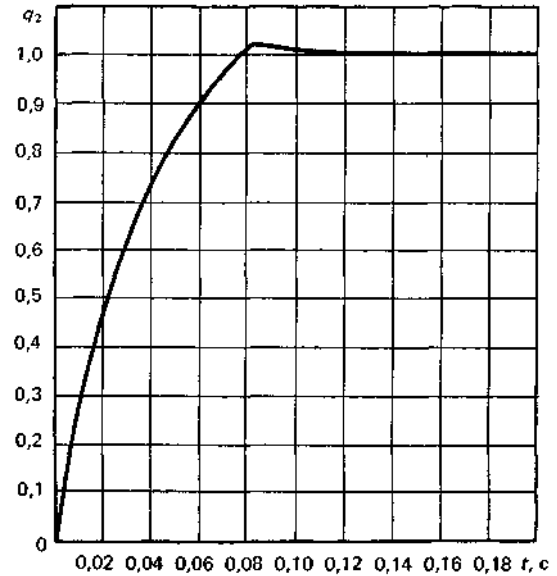


Рис. 8. График изменения $q_2(t)$

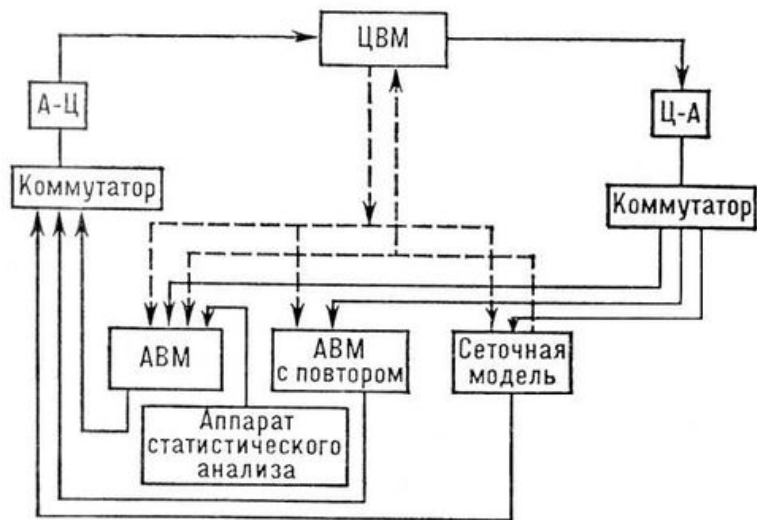
На рис. 7 и 8 представлены результаты моделирования при $k_1 = 200; k_2 = 2; q_1^* = 0,4 \text{ рад}; q_2^* = 1 \text{ рад}$.

4.10. Гибридные вычислительные системы

4.10.1. Моделирование систем на гибридных вычислительных системах

При исследовании сложных автоматизированных и автоматических систем используются гибридные вычислительные системы (ГВС). Появление их обусловлено тем, что для моделирования сложных автоматизированных и автоматических систем невозможно использование только аналоговых либо только цифровых машин. Задачи комплексного моделирования сложных автоматизированных комплексов удается решить лишь с помощью ГВС, в которых сочетаются высокое быстродействие АВМ с высокой точностью ЦВМ. Эффективность использования ГВС во многом определяется рациональным разделением функций аналоговой и цифровой частей ГВС.

Гибридная вычислительная система, аналого-цифровая вычислительная машина, комбинированная вычислительная машина, комбинированный комплекс из нескольких электронных *вычислительных машин*, использующих различное представление величин (аналоговое и цифровое) и объединённых единой системой управления. В состав гибридной вычислительной системы, кроме аналоговых и цифровых машин (АВМ и ЦВМ) и системы управления, обычно входят преобразователи представления величин, устройства внутрисистемной связи и периферийное оборудование. Гибридная вычислительная система — комплекс ЭВМ, в этом её главное отличие от гибридной вычислительной машины, названной так потому, что она строится на гибридных решающих элементах, либо с использованием аналоговых и цифровых элементов.



Структурная схема универсальной гибридной вычислительной системы: сплошной линией обозначены информационные, а пунктирной — управляющие каналы.

В литературе часто к гибридной вычислительной системе относят АВМ с параллельной логикой, АВМ с цифровым программным управлением и АВМ с многократным использованием решающих элементов, снабженные запоминающим устройством. Такого рода вычислительные машины, хотя и содержат элементы, используемые в ЦВМ, но по-прежнему сохраняют аналоговый способ представления величин и все специфические особенности и свойства АВМ. Появление

гибридных вычислительных систем обусловлено тем, что для решения многих новых задач, связанных с управлением движущимися объектами, оптимизацией и моделированием систем управления, созданием комплексных тренажеров и др., возможности отдельно взятых АВМ и ЦВМ оказываются уже недостаточными.

Расчленение вычислительного процесса в ходе решения задачи на отдельные операции, выполняемые АВМ и ЦВМ в комплексе, уменьшает объём вычислительных операций, возлагаемых на ЦВМ, что при прочих равных условиях существенно повышает общее быстродействие гибридной вычислительной системы.

Различают аналого-ориентированные, цифро-ориентированные и сбалансированные гибридно вычислительные системы. В системах первого типа ЦВМ используется как дополнительное внешнее устройство к АВМ, предназначенное для образования сложных нелинейных зависимостей, запоминания полученных результатов и для осуществления программного управления АВМ. В системах второго типа АВМ используется как дополнительное внешнее устройство ЦВМ, предназначенное для моделирования элементов реальной аппаратуры, многократного выполнения небольших подпрограмм.

Создание эффективных гибридных комплексов требует в первую очередь уточнения основных областей их применения и детального анализа типичных задач из этих областей. В результате этого устанавливают рациональную структуру гибридного комплекса и формируют требования к его отдельным частям.

Задачи, которые эффективно решаются на гибридной вычислительной системе, можно разбить на следующие основные группы: моделирование в реальном масштабе времени автоматических систем управления, содержащих как аналоговые, так и цифровые устройства; воспроизведение в реальном масштабе времени процессов, содержащих высокочастотные составляющие и переменные, изменяющиеся в широком диапазоне; статистическое моделирование; моделирование биологических систем; решение уравнений в частных производных; оптимизация систем управления.

Примером задачи первой группы может служить моделирование системы управления прокатного стана. Динамика процессов в нём воспроизводится на аналоговой машине, а специализированная управляющая станом машина моделируется на универсальной ЦВМ среднего класса. Вследствие кратковременности переходных процессов в приводах прокатных станов, полное моделирование таких процессов в реальном масштабе времени потребовало бы применения сверхбыстродействующих ЦВМ. Аналогичные задачи часто

встречаются в системах управления военными объектами.

Типичными для второй группы являются задачи управления движущимися объектами, в т. ч. и задачи самонаведения, а также задачи, возникающие при создании вычислительной части комплексных тренажеров. Для задач самонаведения характерно формирование траектории движения в процессе самого движения. Большая скорость изменения некоторых параметров при приближении объекта к цели требует высокого быстродействия управляющей системы, превышающего возможности современных ЦВМ, а большой динамический диапазон — высокой точности, трудно достижимой на АВМ. При решении этой задачи на гибридную вычислительную систему целесообразно возложить воспроизводство уравнений движения вокруг центра тяжести на аналоговую часть, а движение центра тяжести и кинематические соотношения — на цифровую часть вычислительной системы.

К третьей группе относятся задачи, решение которых получается в результате обработки многих реализаций случайного процесса, например решение многомерных уравнений в частных производных методом Монте-Карло, решение задач стохастического программирования, нахождение экстремума функций многих переменных. Многократная реализация случайного процесса возлагается на быстродействующую АВМ, работающую в режиме многократного повторения решения, а обработка результатов, воспроизводство функций на границах области, вычисление функционалов — на ЦВМ. Кроме того, ЦВМ определяет момент окончания счёта. Применение гибридной вычислительной системы сокращает время решения задач этого вида на несколько порядков по сравнению с применением только цифровой машины.

Аналогичный эффект достигается при использовании гибридной вычислительной системы для моделирования процессов распространения возбуждения в биологических системах. Специфика этого процесса заключается в том, что даже в простейших случаях требуется воспроизводить сложную нелинейную систему уравнений в частных производных.

Поиск решения задачи оптимального управления для объектов выше третьего порядка обычно связан с большими, часто непреодолимыми, трудностями. Ещё больше они возрастают, если необходимо отыскать оптимальное управление в процессе работы системы. Гибридная вычислительная система в значительной степени помогает устранить эти трудности и использовать такие сложные в вычислительном отношении методы, как принцип максимума Понтрягина.

Применение гибридной вычислительной системы эффективно также

при решении нелинейных уравнений в частных производных. При этом могут решаться как задачи анализа, так и задачи идентификации и оптимизации объектов. Примером задачи оптимизации может служить подбор нелинейности теплопроводного материала для заданного распределения температур; определение геометрии летательных аппаратов для получения требуемых аэродинамических характеристик; распределение толщины испаряющегося слоя, предохраняющего космические корабли от перегрева при входе в плотные слои атмосферы; разработка оптимальной системы подогрева летательных аппаратов с целью предохранения их от обледенения при минимальной затрате энергии на подогрев; расчёт сети ирригационных каналов и установление оптимальных расходов в них и т.п. При решении этих задач ЦВМ соединяется с сеточной моделью, многократно используемой в процессе решения.

Развитие гибридных вычислительных систем возможно в двух направлениях: построение специализированных гибридных вычислительных систем, рассчитанных на решение только одного класса задач, и построение универсальных гибридных вычислительных систем, позволяющих решать сравнительно широкий класс задач. Структура такого универсального гибридного комплекса состоит из АВМ однократного действия, АВМ с повторением решения, сеточной модели, устройств связи между машинами, специального оборудования для решения задач статистического моделирования и периферийного оборудования. Помимо стандартного *математического обеспечения ЭВМ*, входящих в комплекс, в гибридных вычислительных системах требуются специальные *программы*, обслуживающие систему связи машин и автоматизирующие процесс подготовки и постановки задач на АВМ, а также *единый язык программирования* для комплекса в целом.

Наряду с новыми вычислительными возможностями в гибридных вычислительных системах возникают специфические особенности, в частности появляются погрешности, которые в отдельно работающих ЭВМ отсутствуют. Первичными источниками погрешностей являются временная задержка аналого-цифрового преобразователя, ЦВМ и цифро-аналогового преобразователя; ошибка округления в аналого-цифровом и цифро-аналоговом преобразователях; ошибка от неодновременной выборки аналоговых сигналов на аналого-цифровой преобразователь и неодновременной выдачи цифровых сигналов на цифро-аналоговый преобразователь; ошибки, связанные с дискретным характером выдачи результатов с выхода ЦВМ. При автономной работе ЦВМ с преобразователями временная задержка, например, не вызывает погрешности, а в гибридных вычислительных системах она не

только может вызвать существенные погрешности, но и нарушить работоспособность всей системы.

Анализ погрешностей гибридных вычислительных систем имеет значение как для оценки погрешности работы комплекса при решении определённого класса задач, так и для разработки методов повышения точности и эффективности системы. Первичные погрешности автономно работающих АВМ и ЦВМ, входящих в гибридную вычислительную систему, достаточно хорошо изучены, но оценка погрешности при решении с помощью гибридного комплекса нелинейных задач представляет ещё неразрешенную проблему.

4.10.2. Блок-схема комплексной аналого-цифровой вычислительной установки

Как мы уже отмечали, для решения многообразных технических задач широкое применение нашли комбинированные вычислительные системы, состоящие из совместно работающих цифровых и аналоговых математических машин.

В комбинированной установке аналоговые и цифровые машины образуют единый комплекс аппаратуры связанной через преобразователи непрерывных величин в дискретные и дискретных величин в непрерывные, а также через коммутаторы ввода и вывода информации.

Обмен информацией между машинами осуществляется по специальным командам цифровой вычислительной машины (ЦВМ). В подобных системах используются достоинства тех и других вычислительных машин: быстрдействие аналоговых машин при решении дифференциальных уравнений и универсальность, точность, удобство реализации сложных нелинейных функций и логических законов управления, характерные для цифровых машин.

Применение комплексной аналого-цифровой установки для исследования процессов управления в сложных системах автоматического регулирования, содержащих управляющие машины, позволяет осуществить в лабораторных условиях работу управляющей вычислительной машины (УВМ) с моделью системы в натуральном масштабе времени, проверить алгоритмы и оценить характеристики управляющей машины, установить необходимые информационные связи между УВМ, системой и человеком.

Опыт применения управляющих вычислительных машин показывает, что универсальные УВМ, которые содержат многоканальные преобразователи и электронные часы,

вырабатывающие тактирующие импульсы для организации обмена информацией между УВМ и объектом, могут быть успешно использованы в комбинированных вычислительных установках.

При исследовании методами математического моделирования систем управления сложными технологическими процессами необходимо построение аналогов технологического оборудования, электроприводов, регуляторов и устройств автоматики, а также аналогов процесса обработки изделия или сырья с учетом изменения его геометрических размеров, веса, отдельных физико-технических свойств.

В комбинированной установке для моделирования указанных элементов технологического комплекса целесообразно использовать аналоговые вычислительные машины, а на цифровую машину возложить функции моделирования работы УВМ реальной системы, т. е. функции управляющей машины.

Отличительная особенность модели сложного производственного процесса состоит в необходимости воспроизведения различных состояний обрабатываемого изделия, механизмов и устройств управления, а также переходов из одного состояния в другое. С этой целью аналого-цифровая установка должна содержать блок программного переключения модели. С помощью этого блока можно имитировать различные режимы, включая аварийные, возникающие при функционировании реального комплекса, задавать начальные данные обрабатываемого изделия и исходное состояние оборудования. Функции блока программного переключения могут быть возложены на УВМ, входящую в аналого-цифровой комплекс.

На рис. 1 представлена блок-схема комбинированной аналого-цифровой установки. Схемой предусмотрена возможность моделирования как режимов автоматического управления технологическим процессом посредством УВМ, так и режимов ручного управления.

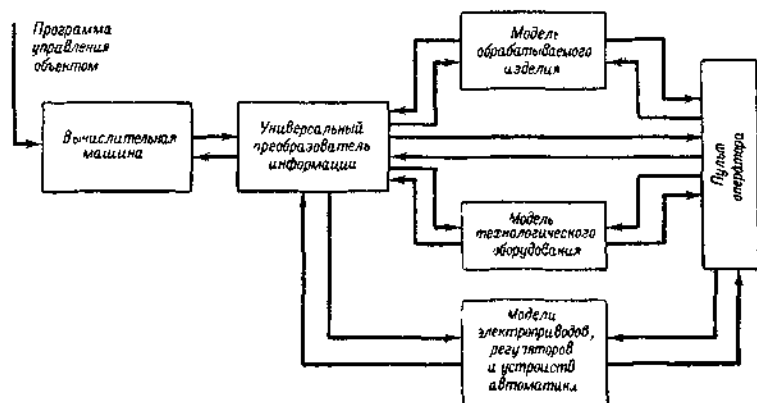


Рис. 1. Схема комбинированной аналого-цифровой моделирующей установки.

В режиме автоматического управления информация о моделируемом процессе считывается с аналоговых машин и преобразуется из непрерывной формы в дискретную. Управляющая вычислительная машина в соответствии с алгоритмами управления по каналам обратного преобразования выдает на аналоговую модель управляющие воздействия.

Для возможности моделирования режимов ручного управления установка снабжена пультом оператора. С пульта оператора осуществляется управление аналогами отдельных механизмов и производится визуальное наблюдение за моделируемым процессом. С этого же пульта могут задаваться начальные условия, характеризующие исходное состояние механизмов и обрабатываемого изделия.

Большая группа задач, решаемых на комбинированной установке, связана с исследованием проблемы установления связи между человеком, УВМ и управляемым объектом. К числу этих задач относятся режимы обучения УВМ при управлении моделью объекта с пульта оператора. Аналого-цифровая установка может также использоваться в качестве тренажера. В этом случае УВМ программным путем задает определенную ситуацию на модели и анализирует правильность действий оператора в заданных условиях. Требуемая информация о возникающей в моделируемом процессе ситуации, а также результаты действия оператора воспроизводятся на индикаторной панели пульта ручного управления.

Вычислительные машины, управляющие многоагрегатными системами, обычно работают в мультипрограммном режиме,

реализующем управление несколькими механизмами посредством ряда программ с различным уровнем приоритетности. Поскольку на УВМ комбинированной установки возлагается совмещение функций управляющей машины и блока программного переключения модели, мультипрограммный режим работы является для нее основным. При моделировании систем автоматизации с УВМ программы управления моделями целесообразно выполнять в виде подпрограмм, взаимодействие которых осуществляется ведущей программой.

Подпрограмма управления моделью отдельного механизма, как и в случае управления УВМ реальным объектом, состоит из последовательности циклов снятия информации с модели, обработки полученной информации в соответствии с принятым алгоритмом, определения необходимых управляющих воздействий и выдачи управляющих воздействий.

Ведущая программа выполняет следующие функции:

- 1) задание мультипрограммного режима управления механизмами (выбор управляемых в данный момент механизмов, выбор алгоритмов управления механизмами, частоты обращения к подпрограмме управления каждым механизмом, требуемой точности отработки задания и др);
- 2) включение в действие подпрограмм, осуществляющих управление механизмами;
- 3) проверку выполнения критерия завершения данной подпрограммы управления.

Построение ведущей программы УВМ комплексной установки зависит от принятого способа (синхронного или асинхронного) связи УВМ с объектом. При моделировании системы, построенной по принципу синхронной связи, наиболее часто применяемой в управлении непрерывными процессами, управление аналоговой частью установки разбивается синхронизирующими импульсами электронных часов на циклы равной продолжительности. Эти импульсы прерывают выполняемые машиной вычисления и переводят ее к работе, связанной с последовательным опросом каналов, по которым поступает информация о величине переменных моделей, с преобразованием поступивших сигналов в дискретную форму, расчетом и выдачей управляющих воздействий. После выполнения этого цикла УВМ продолжает прерванные вычисления до прихода следующего синхронизирующего импульса. Все переключения в аналоговой части установки, соответствующие изменению технологической ситуации, т. е. внешних возмущающих воздействий, параметров обрабатываемого изделия и механизмов, производятся внутри цикла

между синхронизирующими импульсами. В ряде случаев эта часть программы может реализовываться методами случайных испытаний.

При моделировании производственных процессов дискретного типа, в которых отдельные механизмы, связанные с технологическим процессом обработки изделия, имеют непостоянный по времени производственный цикл, работа УВМ с моделями по аналогии с реальной системой осуществляется по принципу асинхронной связи. В этом случае в комбинированной установке используется система многоканального приоритетного прерывания УВМ. Датчиками сигналов прерывания являются реле, входящие в состав аналоговой части установки. Для программ, осуществляющих функции блока программного переключения, должны быть предусмотрены особые сигналы прерывания, помимо технологических сигналов, необходимых для (реализации на модели алгоритмов управления. При моделировании реальных алгоритмов управления, построенных по принципу асинхронной связи, ведущая программа несколько усложняется за счет введения в машину дополнительных подпрограмм блока программного переключения модели.

В качестве примера исследования на комплексной аналого-цифровой установке процессов управления в системах автоматизации с УВМ, выполненных по асинхронному принципу связи, ниже рассматривается система управления механизмами клетки блюминга.

4.10.3. Моделирование процессов управления механизмами клетки блюминга

Основные задачи УВМ в системе комплексной автоматизации блюминга состоят в следующем:

- 1) обеспечение высокой производительности мощного производственного комплекса путем автоматизации оперативного планирования его работы;
- 2) оптимизация по времени с учетом различного рода ограничений рабочих процессов механизмов;
- 3) осуществление самонастройки отдельных управляющих устройств по результатам прокатки;
- 4) реализация программ управления механизмами и др.

Управляя клетью, УВМ обеспечивает автоматическое изменение режимов работы главного привода при изменении параметров слитка, оптимальные режимы разгона и торможения двигателей главного привода, перестановку верхнего валка, линеек манипулятора, кантовку слитка в соответствии со схемой обжатий.

Весьма эффективным средством исследования подобной многоагрегатной системы является комбинированная аналого-

цифровая установка, с помощью которой может быть произведен анализ структуры потоков информации в системе, алгоритмов управления отдельными механизмами, принципов реализации режимов работы УВМ при одновременном управлении несколькими механизмами, режимов обучения машины оператором и самообучения машины.

Применение аналого-цифровой установки в процессе разработки автоматизированной системы управления клетью блюминга связано с задачей построения кибернетической модели, содержащей аналогии механизмов клетки (главного привода, нажимного устройства, линеек, кантователя и рольгангов), управляющую вычислительную машину, модель пульта оператора клетки и модель процесса изменения геометрических размеров, местоположения и скорости перемещения слитка (рис. 2).

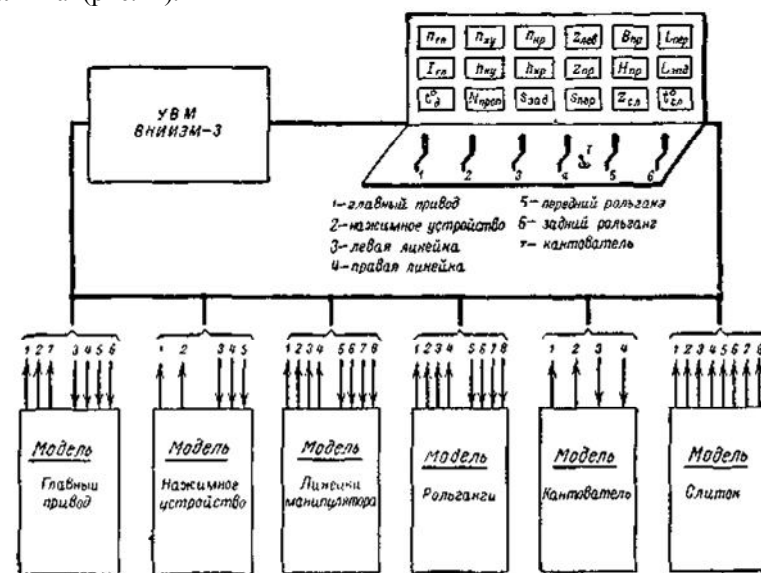


Рис. 2. Блок-схема модели клетки блюминга.

К главному приводу: 1 — $n_{г.л.}$; 2 — $I_{г.л.}$; 3 — Вперед; 4 — Назад; 5 — ослабление потока; 6 — ускорение, 7 — $t_{д.}^0$.

К нажимному устройству: 1 — $n_{н.у.}$; 2 — $n_{н.у.}$; 3 — Вперед; 4 — Назад; 5 — ослабление потока.

К линейке манипулятора: 1 — $z_{лев.}$; 2 — $z_{пр.}$; 3 — $v_{лев.}$; 4 — $v_{пр.}$; 5 — левый Вперед; 6 — левый; 7 — правый Вперед; 8 — правый Назад.

К рольгангам: — Впер. Вперед; 2 — Впер. Назад; 3 — $v_{задн.}$ Вперед; 4 — $v_{задн.}$ Назад; 5 — передний Вперед; 6 — передний Назад; 7 — задний Вперед; 8 — задний Назад

К кантователю: 1 — $n_{кп.}$; 2 — $n_{кп.}$; 3 — Подъем; 4 — Опускание.

К слитку: 1 - $L_{пер.}$; 2 - $L_{зад.}$; 3 - $B_{пр.}$; 4 - $H_{пр.}$; 5 - $S_{зад.}$; 6 - $S_{пр.}$; 7 - $z_{сл.}$; 8 - $t_{сл.}$

Особенность кибернетической модели состоит в учете взаимодействия и взаимной связи между механизмами клетки, слитком, УВМ и человеком, работающим за пультом оператора, в режимах автоматического и ручного управления процессом прокатки. В связи с этим математическое описание эволюции слитка и процессов в отдельных механизмах принимается приближенным, а аналоги механизмов выполняются в виде функциональных моделей с соблюдением основных временных зависимостей между управляющими воздействиями и выходными величинами. Если в ходе исследования возникает необходимость детального рассмотрения процессов в том или ином механизме, его модель строится на основе более полного математического описания.

В модели клетки предусмотрены основные связи, по которым в режиме автоматического управления в реальной системе проходят сигналы от УВМ и от датчиков, а также связи между оператором и клетью, с помощью которых осуществляется ручное управление и контроль за ходом процесса.

Рассмотрим схемы моделей механизмов клетки и слитка, выполненных на базе счетно-решающих элементов аналоговых вычислительных машин. Схемы состоят из стандартных операционных усилителей, конденсаторов, сопротивлений, поляризованных реле и вентилях, входящих в комплект серийных моделирующих установок.

Моделирование главного привода. Схема главного привода представляет собой систему Г — Д с обратными связями, обеспечивающими линейное изменение э. д. с. генератора. Такой закон изменения э. д. с. позволяет получить в переходных процессах форму кривой тока главной цепи, близкую к прямоугольной. Путем схемной реализации кубичной зависимости между потоком и его производной аналогичная форма кривой тока достигается при регулировании скорости вращения за счет изменения магнитного потока двигателя:

$$p\Phi_D = \frac{I_{дин}}{I_k T_m} \Phi_D^3, \quad (1)$$

где $I_{дин}$ — величина динамической составляющей тока;

I_k — ток короткого замыкания;

T_m — электромеханическая постоянная времени двигателя.

Математическая модель главного привода может быть представлена в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} pE_G &= pE_0 \operatorname{sign}(U_Y - \alpha E_G) \text{ при } U_Y \neq \alpha E_G; \\ pE_G &= 0 \text{ при } U_Y = \alpha E_G; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} p\Phi &= k_1 \Phi^3 \operatorname{sign}(U'_Y - \beta \Phi) \text{ при } U'_Y \neq \beta \Phi; \\ p\Phi &= 0 \text{ при } U'_Y = \beta \Phi; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$I_A = \frac{E_G - k_e n_D \Phi_D}{R_A}, \quad (4)$$

$$\frac{GD^2}{375} p n_D = M_D - M_{сг}; \quad (5)$$

$$M_D = k_M \Phi_D I_A, \quad (6)$$

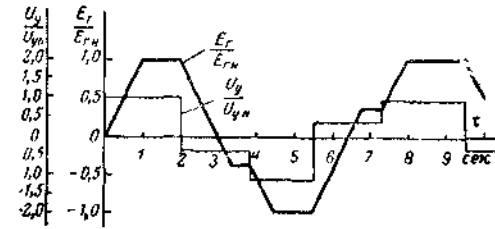
где U_Y, U'_Y — управляющие сигналы, поступающие от УВМ или с пульта ручного управления;

α, β — коэффициенты, определяющие величину установившегося значения э. д. с. генератора и магнитного потока двигателя;

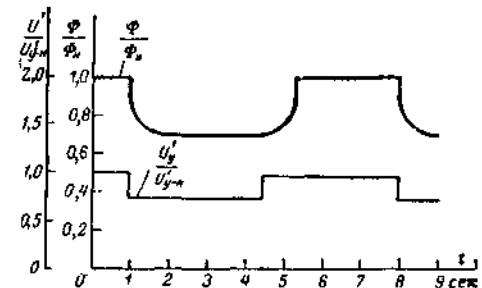
pE_0 — заданная скорость изменения э. д. с. генератора;

k_I — коэффициент пропорциональности между потоком и его производной.

Выражения (2) и (3) описывают кривые изменения э. д. с. генератора E_G и потока двигателя Φ_D во времени под действием управляющих сигналов U_Y и U'_Y (рис. 3, а и б).



а)



б)

Рис. 3. Кривые изменения э. д. с. генератора (а) и магнитного потока двигателя (б) под действием управляющих сигналов.

Выражения (4) — (6) являются известными уравнениями тока главной цепи I_a и момента, развиваемого двигателем, M_d .

Схема реализации уравнений (1) — (6) на моделирующей установке представлена на рис. 4.

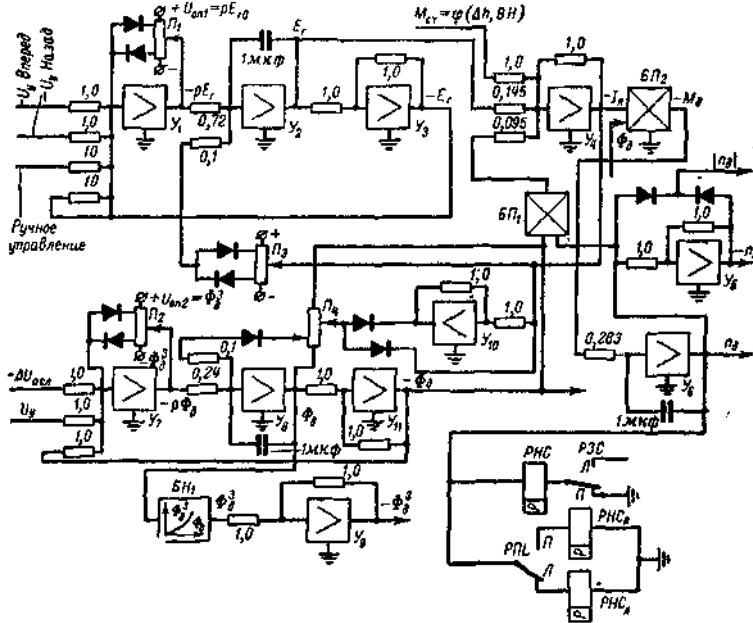


Рис. 4. Схема модели главного привода.

Основу схемы составляют операционные усилители Y_1 и Y_7 с большим коэффициентом передачи и диодным ограничением в цепи обратной связи. Напряжения на выходе усилителей Y_1 и Y_7 соответствуют скорости изменения э. д. с. генератора pE_r и потока двигателя $p\Phi_d$ и определяются величиной опорного напряжения потенциометров Π_1 и Π_2 :

$$U_{оп1} = pE_r; U_{оп2} = \Phi_d^3.$$

Установившиеся значения э. д. с. генератора и потока двигателя пропорциональны управляющим сигналам и коэффициентам передачи усилителей Y_1 и Y_7 .

Моделирование уравнений (4) — (6) осуществляется с помощью операционных усилителей Y_4 , Y_6 и блоков произведений $БП_1$, $БП_2$. Обратная связь по току с отсечкой воспроизводится посредством потенциометров Π_3 и Π_4 с диодными элементами.

С целью упрощения электроприводы верхнего и нижнего валков представлены в виде одной модели системы Г—Д эквивалентной мощности.

Моделирование вспомогательных механизмов. Математическая модель характеристики изменения скорости нажимного устройства, линеек манипулятора и рольгангов $n = f(t)$ (рис. 5) может быть представлена в следующем виде:

$$pn = pn_0 \operatorname{sign}(U_y - \gamma n) \text{ при } U_y \neq \gamma n; \\ pn = 0 \text{ при } U_y = \gamma n,$$

где U_y — управляющее напряжение, поступающее с УВМ или пульта ручного управления;
 γ — коэффициент, определяющий величину установившейся скорости механизма.

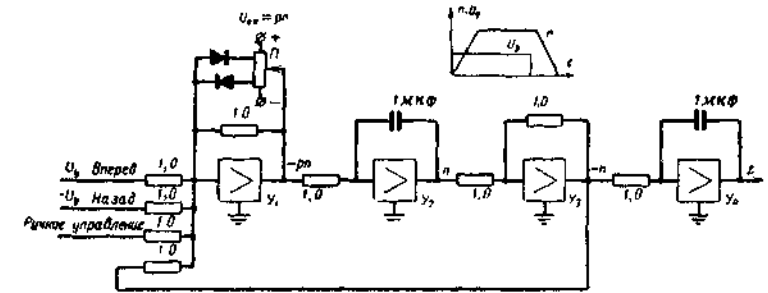


Рис. 5. Характеристика скорости и модель вспомогательного механизма.

В схеме модели ускорению вспомогательного механизма pn соответствует выходное напряжение усилителя Y_1 , величина которого задается с УВМ или пульта ручного управления через потенциометр Π . Установившееся значение скорости зависит от уровня входного сигнала U_y . Путем варьирования коэффициента передачи усилителя Y_1 при постоянном опорном и входном напряжениях можно получить формы кривой изменения скорости механизма от линейной до экспоненциальной.

Особенность модели линеек манипулятора (рис. 6) состоит в учете сухого трения механизма (усилитель Y_5) и давления слитка на линейку (усилитель Y_6).

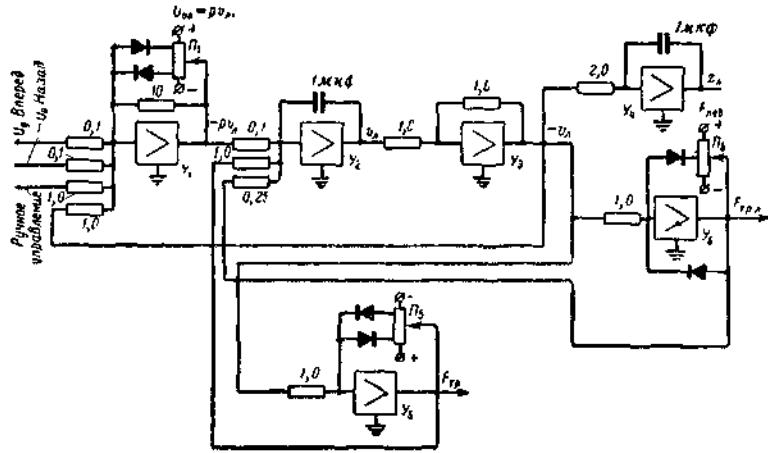


Рис. 6. Модель линеек манипулятора

Моделирование поперечного перемещения слитка на рольганге. Для моделирования поперечного перемещения удобно ввести понятие силы, с которой линейки действуют на слиток, определив ее величину через деформацию механизма линейки:

$$F_{л,лев} = k(z_{л,лев} - z_{сл}); \quad (8)$$

$$k = k_0 \text{ при } z_{лев} > z_{сл};$$

$$k = 0 \text{ при } z_{лев} \leq z_{сл};$$

$$F_{л,пр} = k(z_{л,пр} - z_{сл} - B_{сл}); \quad (9)$$

$$k = k_0 \text{ при } z_{пр} - B_{сл} \leq z_{сл};$$

$$k = 0 \text{ при } z_{пр} - B_{сл} \geq z_{сл},$$

где $F_{лев}$, $F_{пр}$ — силы взаимодействия между слитком и линейками;
 $z_{лев}$, $z_{пр}$ — угол поворота двигателя линейки, приведенный к системе отсчета положения слитка на рольганге;
 $z_{сл}$ — положение слитка на рольганге;
 $B_{сл}$ — ширина слитка;
 k — коэффициент пропорциональности между деформацией механизма и силой взаимодействия линейки со слитком.

Уравнение движения слитка представим в следующем виде:

$$m_{сл} \frac{d^2 z_{сл}}{dt^2} = F_{лев} - F_{тр} - F_{пр}; \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{тр} &= \text{sign } v'_{сл} F_{тр0}; \\ \text{sign } v'_{сл} &= 1 \text{ при } v'_{сл} > 0; \\ \text{sign } v'_{сл} &= -1 \text{ при } v'_{сл} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $v'_{сл}$ — скорость поперечного перемещения слитка;

m — масса слитка;

$F_{тр}$ — сила трения между слитком и рольгангом.

Соответствующая схема электронной модели представлена на рис. 7.

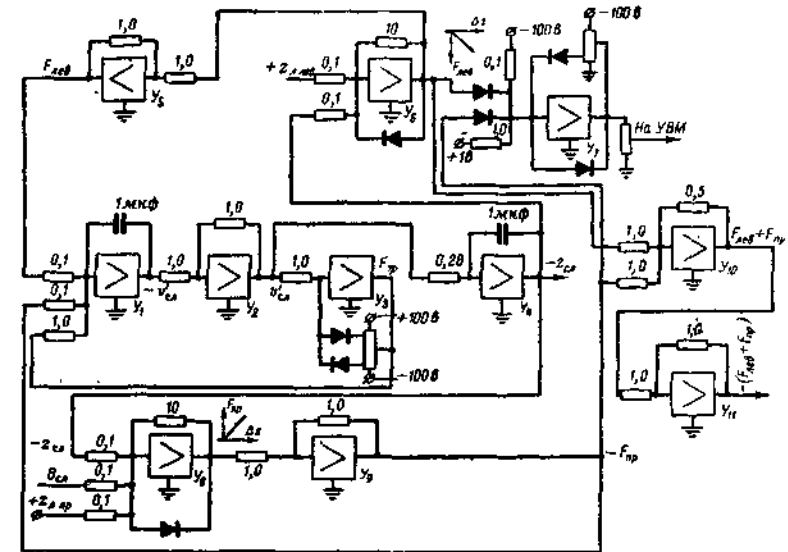


Рис. 7. Модель поперечного перемещения слитка.

Взаимодействие линейки и слитка моделируется с помощью операционных усилителей Y_6 , Y_8 , выходное напряжение которых пропорционально давлению на слиток. До момента соприкосновения линеек со слитком напряжение на выходе усилителей равно нулю, что достигается включением диодов в цепи обратной связи. Сила трения между слитком и рольгангом реализуется на усилителе Y_3 , а уравнение движения слитка — на усилителе Y_1 . Сигнал прерывания, поступающий в УВМ в случае захвата слитка обеими линейками,

формируется с помощью схемы совпадения и усилителя $У_7$, имеющего релейную характеристику.

Моделирование перемещения слитка вдоль рабочей линии. Моделирование продольного перемещения слитка вне валков производится с учетом сил инерции и сил трения между слитком и рольгангом, а в случае захвата слитка линейками — между слитком и линейками:

$$m_{сл} \frac{dv_{сл}}{dt} = F_{тр} - F_{тр.л}; \quad (12)$$

$$\frac{ds_{сл}}{dt} = v_{сл}; \quad (13)$$

$$F_{тр.л} = F_{тр.о} \text{sign } \delta; \quad (14)$$

$$\text{sign } \delta = 1 \text{ при } v_p - v_{сл} > 0;$$

$$\text{sign } \delta = -1 \text{ при } v_p - v_{сл} < 0,$$

где $v_{сл}$ — скорость слитка вдоль рольганга;

$F_{тр.л}$ — сила трения между слитком и линейками;

v_p — линейная скорость рольганга;

$s_{сл}$ — расстояние от слитка до валков.

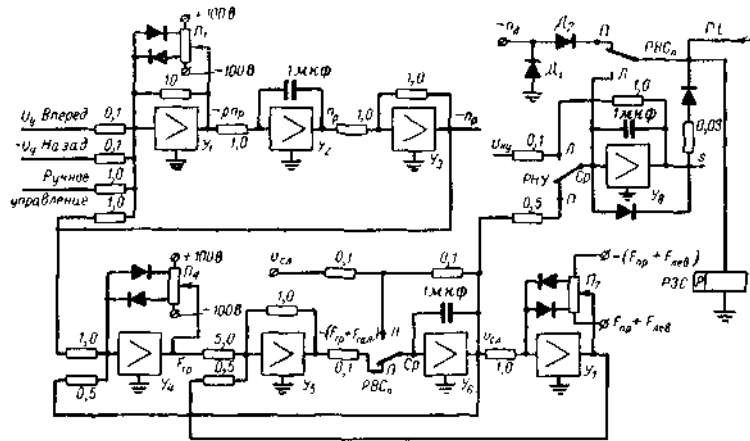


Рис. 8. Схема электронной модели рольганга и перемещения слитка вдоль рабочей линии.

На схеме электронной модели (рис. 8) скорость движения слитка вдоль рабочей линии воспроизводится на операционном усилителе $У_6$, который при имитации периода нахождения слитка в валках работает в режиме

инерционного звена с малой постоянной времени, фиксируя с небольшой динамической погрешностью скорость прокатанной или непрокатанной части слитка. Тот же усилитель переходит в режим интегрирующего звена в период моделирования выброса слитка из валков. При этом решается уравнение движения слитка по рольгангу.

Силы трения между рольгангом и слитком, а также между слитком и линейками реализуются соответственно на усилителях $У_4$ и $У_7$, имеющих релейную характеристику.

Величина напряжения на входе усилителя $У_7$ зависит от опорного напряжения потенциометра $П_7$, которое пропорционально давлению линейки на слиток.

Расстояние слитка от валков имитируется с помощью операционного усилителя $У_8$, который работает в режиме интегрирующего звена, начиная с момента выброса слитка из валков. При захвате слитка валками контакты реле $РВС$ замыкают накоротко цепь обратной связи усилителя $У_8$ и коэффициент передачи этого усилителя становится равным нулю. Момент захвата ($s=0$) слитка фиксируется реле $РЗС$. Начальное положение слитка на рабочей линии задается с помощью реле ввода начальных условий $РНУ$.

Положение, при котором валки вращаются навстречу движению слитка и захват невозможен, отображается на модели с помощью диодной цепи $Д_1, Д_2$.

Моделирование буксовки слитка в валках и срыв захвата производится с помощью реле $РБ$ (рис. 9), которое включается по специальной команде с УВМ или пульта ручного управления.

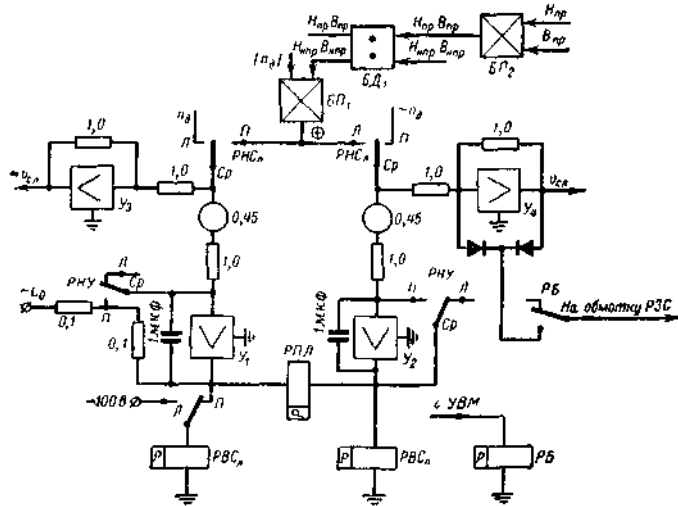


Рис. 9. Модель изменения длины слитка при прокатке.

Замыкание контакта реле *РБ* приводит к срабатыванию реле *РЗС* и *РНС*, работающих при имитации буксовки и срыва захвата в вибрационном режиме. При этом в модели главного привода статический ток имеет пульсирующий характер. Различие между буксовкой и срывом захвата определяется УВМ на основании данных о длине прокатанной и непрокатанной частей слитка. Наименования реле, установленных в схеме: *РПЛ*—реле схемы определения середины слитка; *РБ* — реле буксования; *РЗС* — реле захвата слитка; *РВС* — реле выброса слитка; *РНУ* — реле ввода начальных условий; *РНС* — реле направления движения слитка.

Моделирование процесса изменения высоты и ширины слитка. В основу модели процесса изменения размеров слитка (высоты и ширины) (рис. 10) положено предположение, что высота прокатанной части равна величине раствора валков, а увеличение ширины слитка пропорционально обжатиям; что касается высоты и ширины непрокатанной части, то они остаются неизменными.

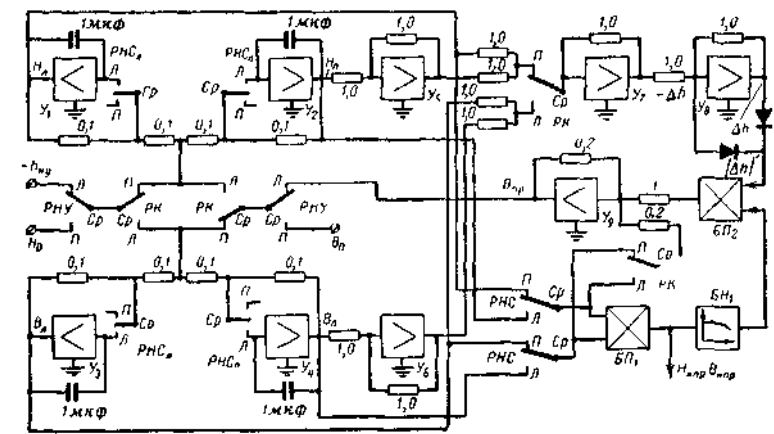


Рис. 10. Модель изменения высоты и ширины слитка при прокатке.

При моделировании решаются следующие логические задачи:

- а) ввод и запоминание первоначальных значений ширины и высоты слитка;
- б) с момента захвата слитка валками — имитация обжатия;
- в) запоминание высоты и ширины прокатанной части слитка;
- г) в случае кантовки — взаимная замена элементов памяти, содержащих значение высоты и ширины слитка.

Четыре операционных усилителя U_1-U_4 в зависимости от направления движения слитка работают попеременно в режимах запоминающего и инерционного звена. На двух усилителях, работающих в режиме инерционного звена, воспроизводятся высота и ширина прокатанной части слитка, а на двух остальных усилителях, работающих в режиме запоминающего звена, — высота и ширина непрокатанной части слитка. При кантовке функции операционных усилителей, моделирующих высоту и ширину слитка, взаимно меняются. Выходное напряжение усилителя U_7 соответствует обжатию слитка Δh . Ширина прокатанной части слитка моделируется на основе соотношения (15), реализуемого на операционных блоках $U_9, БП_1, БП_2, БН_1$:

$$B_{пр} = B_{нпр} + \Delta h \varphi_B(HB), \quad (15)$$

где $\varphi_B(HB)$ — нелинейный коэффициент уширения, зависящий от сечения слитка.

Моделирование изменения длины слитка при прокатке. При моделировании процесса прокатки слитка сделано допущение, что скорость прокатанной части слитка равна окружной скорости валков. В этом случае скорость непрокатанной части слитка, а также длина прокатанной и непрокатанной частей слитка, определяются следующими соотношениями:

$$v_{\text{нпр}} = \frac{hb}{HB} v_{\text{пр}}; \quad (16)$$

$$v_{\text{пр}} = v_B; \quad (17)$$

$$dL_{\text{нпр}} = v_{\text{нпр}} dt; \quad (18)$$

$$L_{\text{нпр}} = L_0 - \frac{hb}{HB} \int_{t_{\text{нач}}}^t v_{\text{пр}} dt, \quad (19)$$

где $v_{\text{пр}}$, $v_{\text{нпр}}$ — скорости прокатанной и непрокатанной частей слитка соответственно;

v_B — окружная скорость прокатных валков;

$H_{\text{пр}}$, $H_{\text{нпр}}$ — высота прокатанной и непрокатанной частей слитка;

$B_{\text{пр}}$, $B_{\text{нпр}}$ — ширина прокатанной и непрокатанной частей слитка.

На электронной модели (рис. 9) решение приведенных уравнений осуществляется на двух операционных усилителях U_1 , U_2 , которые работают в режиме интегрирования в период нахождения слитка в валках и в режиме запоминающего звена в период выброса слитка из валков. Выходные напряжения этих усилителей пропорциональны длине слитка слева и справа от валков.

Моделирование процесса кантовки слитка выполнено приближенно без учета динамических нагрузок и воздействия линеек. Момент кантовки определяется из условия

$$h_{\text{кр}} \geq \frac{B^2}{\sqrt{H^2 + B^2}}, \quad (20)$$

где $h_{\text{кр}}$ — высота подъема крюка кантователя.

Электронная модель (рис. 11) состоит из интегрирующего и суммирующего усилителей U_1 и U_2 , блока нелинейности $БН_1$ и симметричного триггера $СТ$.

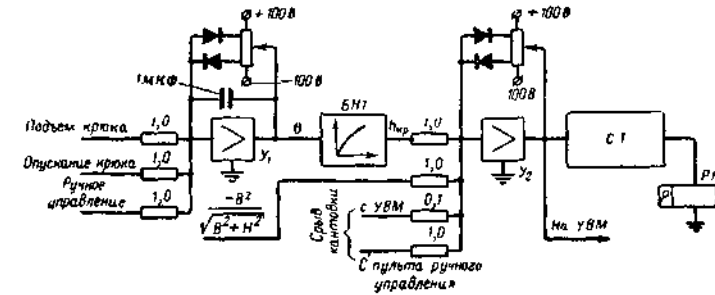


Рис. 11. Схема модели кантователя.

При подаче с УВМ или пульта ручного управления сигнала на кантовку напряжение интегрирующего усилителя U_1 увеличивается и поступает на вход блока нелинейности, на котором набрана функциональная зависимость высоты подъема крючков от угла поворота вала двигателя. На суммирующем усилителе U_2 , имеющем релейную характеристику, происходит проверка выполнения условия (20). В момент изменения знака напряжения на выходе усилителя U_2 переключается триггер и реле PK , с помощью которого производится коммутация в схеме модели высоты и ширины слитка.

При имитации срыва кантовки с УВМ или с пульта ручного управления на вход усилителя U_2 подается дополнительное напряжение, вследствие чего напряжение на выходе усилителя U_2 не меняет знака и триггер не срабатывает.

Рассмотрим работу схемы модели клетки для случая нормального режима прокатки.

С блока начальных условий на аналоговой части комбинированной моделирующей установки вводятся исходные геометрические размеры слитка (высота, ширина, длина, продольное и поперечное положения на рольганге). На пульте ручного управления устанавливаются данные о его весе, температуре, марке стали. Начальное положение механизмов клетки принимается произвольным. С помощью переключателя на пульте оператора выбирается автоматический или ручной режим управления моделью клетки.

По сигналу автоматическая работа УВМ прерывает выполняемую программу и переходит к программе управления моделью клетки. Управляющая вычислительная машина запрашивает с пульта ручного управления установки данные о слитке и производит расчет программы обжатия на основании портфеля заказов, находящегося в памяти машины.

После окончания расчета УВМ выдает управляющее воздействие на модель привода рольгангов. Напряжение на интеграторе V_8 (рис. 8), характеризующее расстояние от конца слитка до прокатных валков, начинает уменьшаться, имитируя перемещение слитка на рольганге по направлению к валкам.

Далее УВМ переходит к управлению моделями механизмов клетки, выдавая управляющие воздействия в соответствии с программой обжатия и положением слитка на рабочей линии.

Получая информацию о величине статического тока прокатного двигателя, УВМ фиксирует момент захвата слитка валками, после чего выдает управляющее воздействие на разгон главного привода до номинальной скорости. В период, соответствующий нахождению слитка в валках, УВМ на основе данных о скорости и параметрах слитка производит расчет момента выдачи сигнала на торможение привода. После выброса слитка УВМ, получив с модели главного привода сигнал прерывания, выдает команду на модель нажимного устройства и на модель линеек манипулятора. Если обжатие в следующем пропуске должно осуществляться в другом калибре, то по сигналу УВМ в модели клетки производится имитация кантовки и перемещения слитка в поперечном направлении линейками манипулятора.

Использование аналого-цифровой установки оказалось весьма эффективным и наглядным при детальном анализе процессов управления клетью блюминга.

Для исследования полных алгоритмов УВМ, соответствующих реальным условиям работы клетки, с пульта ручного управления моделью или с помощью блока программного переключения вводятся сигналы, имитирующие срывы захвата слитка, буксовку, срыв раската с крючьев кантователя и т. п.

На аналого-цифровой установке могут моделироваться процессы прокатки в отдельном пропуске или цикле, состоящем из ряда пропусков, а также процессы работы клетки с различными слитками в течение длительного периода времени.

Особенностью алгоритма управления клетью блюминга является непрерывное взаимодействие УВМ с оператором. Для моделирования этого режима на комбинированной установке предусмотрена приоритетность действий человека, работающего за пультом ручного управления. Управляющая машина выдает воздействия в том случае, когда командоаппарат ручного управления механизмом находится в нулевом положении. В случае сбоя машины или ситуации прокатки, не предусмотренной алгоритмом управления, УВМ прекращает выдачу управляющих сигналов на отдельный механизм или группу механизмов и включает на пульте ручного управления

соответствующие сигнальные лампы. Управляющая машина снова переходит на режим автоматического управления по специальной команде оператора. Комбинированная установка полностью переводится на режим ручного управления при установке переключателя в положение ручная работа.

Рассмотрим для примера моделирование управляемого движения двухзвенного манипулятора на ГВС. Тогда в соответствии с приведенными принципами АВМ выполняет операции интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику манипулятора, и уравнений динамики привода. Для упрощенной модели привода эта операция не производится.

При этом ЦВМ выполняет следующие операции:

- решение прямой задачи кинематики, т. е. определение координат и ориентации захватного устройства;
- расчет коэффициентов системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику манипулятора;
- расчет управляющих воздействий (уставок) q^* на приводы манипулятора.

На рис. 12 приведена упрощенная схема разделения задач на АВМ и ЦВМ.

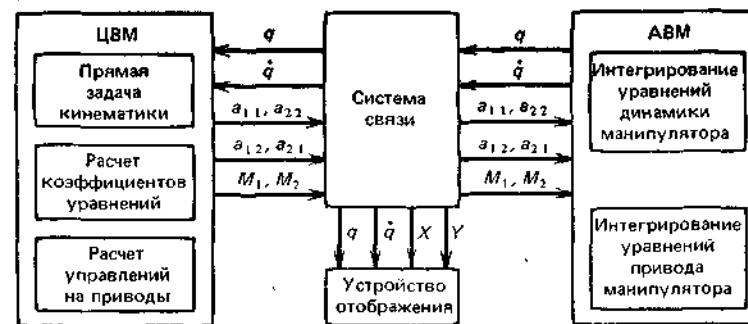


Рис. 12. Схема разделения операций в ГВС при моделировании управляемого движения манипулятора

Устройство отображения позволяет наблюдать обобщенные координаты и их производные, а также координаты захватного устройства x, y .

Литература

Раздел I

1. Bellert S., Topological analysis and synthesis of linear systems. *J. Franklin Inst.*, № 6 (1962).
2. Bellert S., Topological considerations and synthesis of linear networks by means of the method of structural numbers, *Arch. Elektrot.*, № 3 (1963).
3. Bellert S., Computer four-pole synthesis based on the method of structural numbers, *Arch. Elektrot.*, № 3 (1964).
4. Bellert S., La formalisation de la notion du systeme cybernetique. Actes des Colloques Philosophiques Internationaux de Royaumont. Paris, 1964.
5. Bellert S., Topologiczna analiza i synteza uktadow liniowych, *Zesz. Nauk. Pol. Warsz. Elektryka*, № 37 (1964).
6. Berge C., Theorie des graphes et ses applications, Paris, 1958; русский перевод: Берг К., Теория графов и ее применение, ИЛ, 1962.
7. Bers A., The degrees of freedom in RLC networks, *Trans. IRE*, CT-6, № 1 (1959).
8. Bryant P. R., Order of complexity of electrical networks, Inst. Electr. Engrs (London) Monograph № 335E, June 1959.
9. Cauer W., Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Berlin, 1954.
10. Coates C.L., General topological formulas for linear network functions, *Trans. IRE*, CT-5 (March 1958).
11. Coates C.L., Flow graph solutions of linear algebraic equations, *Trans. IRE*, CT-6 (June 1959).
12. Coates C.L., General topological formulas for linear network functions, General Electric Res. Lab. Rep. № 57-RL-1746, Schenectady, N.Y.
13. Foster R. M.,- Geometric circuits of electrical networks. Bell System Monograph, № B.653, *Trans. AIEE*, 51 (Apr. 1932).
14. Foster R. M., The number of series parallel networks, Proc. Int. Congr. Math. I, 1952.
15. Foster R. M., Topologic and algebraic considerations in network synthesis, Proc. Polytechn. Inst. Brooklyn Symposium on Modern Network Synthesis I, Apr. 1952.
16. Foster R. M., Passive network synthesis, Proc. Polytechn. Inst. Brooklyn Symposium on Modern Network Synthesis 5, 1955.
17. Foster R. M., An extension of a network theorem, *Trans. IRE*, CT-8 (March 1961).

18. Franklin P., The electric currents in a network, *J. Mathematics and Physics, A* (Apr. 1925).
19. Guillemin E. A., Introductory circuit theory, New York, 1953.
20. Kirchhoff G., tiber die Auflosung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der linearen Verteilung galvanischer Strome gefihrt wird, Poggendorf Ann. Physik, 1847.
21. Mason S. J., Feedback theory — some properties of signal flow graphs, *Proc. IRE* (Sept. 1953).
22. Mason S. J., Feedback theory - furllior properties of signal flow graphs, *Proc. IRE* (July 1956).
23. Mason S. J., Topological .dialysis of linear non-reciprocal networks, *Proc. IRE* (June 1957).
24. Mason S. J., Zimmermann H. J., Electronic circuits, signals and systems, New York — London, 1960; русский перевод: Мэзон С., Циммерман Г., Электронные цепи, сигналы и системы, ИЛ, 1963.
25. Maxwell J. C., Electricity and magnetism, Oxford 1892, Clarendon Press.
26. Mayeda W., Topological formulas for active networks, Inst. Techn. Rpt., № 8, US Army Contract № DA-11-022-ORD-1983, Univ. of Illinois, Jan. 1958.
27. Mayeda W., Applications of mathematical logic to network theory. Ph. D. thesis Univ. of Illinois, 1958.
28. Mayeda W., Seshu S., Topological formulas for network functions, Bull. № 446, Univ. of Illinois Engineering Experiment Station, 1957.
29. Mayeda W., Van Valkenburg M. E., Network analysis and synthesis by digital computer, Inst. Radio Engrs Convent. Rec, pt. 2, № 5, 1957.
30. Mayeda W., Van Valkenburg M. E., Analysis of non-reciprocal networks by digital computers, Inst. Radio Engrs Natl. Convent. Rec, pt. 2, 1958.
31. Okada S., Onodora R., On network topology. II Bull., Yamagata U. 2, 1953.
32. Okada S., Onodera R., Miya zaki Y., Linear geometry and topology of networks, Proc. Polytechn. Inst. Broklyn Symposium on Modern Network Synthesis, 5, 1955.
33. Okada S., Onodera R., Orui H., Kondo K., Iri M., Mizoo Y., Sunaga T., Linear geometry and topology of networks. RAAG Memoirs of the unifying study of basic problems in engineering and physical sciences by means of geometry Y, II, Tokyo, 1953.
34. Percival W. S., Solution of passive electrical networks by means of mathematical tress., *J. IEE*, London (1953).

35. Percival W. S., Graphs of active networks. Inst. Electr. Engrs (London) Monograph № 125, 1955.
36. Reza F. M., Order of complexity and minimal structures in network analysis, Univ. of Illinois Symposium on Circuit Analysis, 1955.
37. Reza F. M., Some topological considerations in network theory, *Trans. IRE*, CT-5 (March 1958).
38. Seshu S., Topological considerations in the design of driving point functions, *Trans. IRE*, CT-2 (Dec. 1955).
39. Seshu S., Balabamian N., Linear network analysis, New York, 1959; русский перевод: Сешу С, Балабамян Н., Анализ линейных цепей, Госэнергоиздат, 1963.
40. Seshu S., Reed M. R., Singular transformations in networks theory, Proc. Natl. Electronics Conf., 1955.
41. Seshu S., B cod M. B., On cut sets of electrical networks. Proc. 2nd Midwest Symposium on Circuit Theory Mich. State Univ., 1956.
42. Seshu S.,- Reed M. B., Linear graphs and electrical networks, Reading Massachusetts (USA), 1961; русский перевод: Сешу С, Рид М., Линейные графы и электрические цепи, изд-во «Высшая школа», 1971.
43. Сигорский П. П., Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами, Киев, 1958.
44. Сигорский В. П., Анализ электрических схем, Киев, 1963.
45. Trent H. M., Note on Ilie enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., Oct. 1954.
46. Wana t a b e П., A nicliod of Iroo oxpansion in network topology, *Trans. IHE*, CT-8 (March 1961).

Раздел 2

1. American Machinist, "How Cross uses special computer in designing special machines", 12 nov. 1966.
2. Andrightto, Verge. Determination des contours apparents et des zones en contre-depouille. Memoire de l'Ecole National Superieure des Arts et Metiers, 1974.
3. Ansaldi S., de Floriani L., Falcidieno B. Geometric Modelling of Solid Objects by Using a Face-adjacency Graph Representation, Computer Graphics, July, 1985.
4. Araki H., Amano Y. Replacement of physical models by highly accurate numerical models for manufacturing stamping dies in the integrated CAD/CAM system, Prolamat 1985.

5. Atkins D. A., Tapia R. A. Mathematical ship lofting, Society of Naval Architects and Marine Engineers, Santa Barbara Congress, 13 oct. 1962.
6. Auffray, Pichouron. Definition des surfaces developpables s'appuyant sur une courbe. Application a la determination des surfaces annexes des outils d'emboutissage, Memoire du Conservatoire National des Arts et Metiers, juin 1974.
7. Automotive Engineer, "Advanced techniques for body engineering (GMC)", march 1969.
8. Ball A. A., Consurf, Introduction of the conic lofting tile. Computer Aided Design, 6—4, oct. 1974.
9. Ball A. A., Storry D. J. T. Recursively generated B-spline surfaces, CAD, 84.
10. Barnhill R. E., Smooth interpolation over triangles. Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 1974.
11. Barnhill R. E. Smooth interpolation over triangles, CAGD 1974.
12. Barnhill R. E. Surfaces in computer-aided geometric design a survey with new results, CAGD, sept. 1985.
13. Beeker E. Smoothing of shapes designed with free-form surfaces, CAD, may 1986.
14. Bernard F. Surfaces complexes lissees selon un critere d'energie minimale, Avions Marcel Dassault.
15. Bezier P. Numerical control, Mathematics and application, J. Wiley, 1972.
16. Bezier P., Sioussiou S. Semi-automatic system for defining free-form curves and surfaces, CAD, march 1983.
17. Bezier P. UNISURF, from styling to tool shop. Proceedings of C. A. P. E. 83 meeting. North Holland 1983.
18. Bezier P. Emploi de la commande numerique pour l'etude des carrosseries et des outillages, *J. de la Societe des l'Automobile* (S. I. A.), Avril 1968.
19. Bezier P. Essai de definition numerique des courbes et des surfaces experimentales, These, Universite de Paris VI, 1977.
20. Board of Trade Journal, Electronic control of machine tools for contour milling (supplement, 1963).
21. Boehm W. Generating the Bezier points of triangular splines, SGAGD, 1983.
22. Boehm W. Generating the Bezier-points of triangular splines, Surfaces in CAGD, North Holland, 1983.
23. Boehm W. The de Boor algorithm for triangular splines, SCAGD, 1983.
24. Boehm W. On the efficiency of knot insertion algorithm, CAGD, mai 1985.

25. Boehm W. Triangular spline algorithms, CAGD, mai 1985.
26. Boehm W. Multivariate spline method in CAGD, CAD, mars 1986.
27. Boehm W. Curvature continuous curves and surfaces, CAD, mars 1986.
28. Braid I. C., Hillyard R. C., Stroud I. A. Stepwise construction of polyhedra in geometric modelling, MMCGD.
29. Braid I. C. From geometric to product modelling, PROLAMAT 1985.
30. Brodlić K. W. A review of methods for curves and function drawing MMCGD, Academic Press, 1980.
31. Brunet P. Increasing the smoothness of bi-cubic spline surfaces, CAGD, mai 1986.
32. CAD, Computer Aided Design, Butterworth.
33. CAD. 84, Actes du congrès CAD de Brighton, 1984, Butterworth.
34. CAGD, Computer Aided Geometric Design, Elsevier-North-Holland.
35. CAGD. 74, Actes du colloque CAGD-Salt Lake City 1974, Academic Press.
36. Caja E., Garetti R. NC grinder makes press-tools, Metalworking Production, may 1965.
37. Casteljaу P. (de), Mathematiques et CAD, Volume 2: formes a poles. Edition Hermes 1985. [Имеется перевод: Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 1 — М.: Мир, 1988.]
38. Catmull E. A class of local interpolating splines. CAGD 1974.
39. Chalvet M. Machine a dessiner et a sculpter, precede Unisurf Renault/CII, Ingenieurs et Techniciens, juin 1969.
40. Chang G. Z. Matrix formulation of Bezier techniques, CAD 14, № 6, nov. 1982.
41. Chang G. Z. An elementary proof of the convergence for the generalized Bernstein-Bezier polynomials, University of Science and technology of China. Hefei, Anhui (People's Republic of China).
42. Chang G. Z. Families of adjoint patches for a Bezier triangular patch, CAGD, mai 1985.
43. Chang G. Z. The application of Bezier's functions to a proof of the Bernstein's theorem, University of Utah Salt Lake City. feb. 1981.
44. Chang S. J. A class of matrix methods for surface representation. Academy of China.
45. Chemla B. Systeme conversationnel de determination mathematique de courbes et surfaces. These de doctorat, Universite de Paris VII, 1971.
46. Chen J., Wu J. H. Non-modal interpolation, an improved technique for the uni-forme B-spline method, CAD, 1984.
47. Chung W. L. A new method of view synthesis for solid modelling, CAD, 1984.

48. Coons S. A. Surfaces for computer-aided design of space forms, Technical report MAC-TR-41, M. I. T. Cambridge, Mass, juin 1967.
49. Coons S. A. Surface patches and B-splines curves, CAGD, 1974.
50. Dahmen W., Micchelli C. A. Line average algorithm: a method for the computer generation of smooth surfaces, CAGD, mai 1985.
51. Daulte J. J. Informations Schnittstellen zwischen Beischreibung und Fertigung gek-rummter Flächen, Ecole Federate Polytechnique de Zurich, These de doctorat, 1974.
52. Dokan T. A design system for products with sculptured surfaces, CAD, 1984.
53. F-Mesh, Computer program manual, Fujitsu Ltd.
54. Farin-G. Bezier polynomials over triangles and the construction of C polynomials, Brunei University. Uxbridge, Great Britain (1980).

Раздел 3

1. Ahlberg J.K. et al. The Theory of Splines and their Applications, N. Y., 1967.
2. Barnhill R.E. et al. Computer Aided Geometric Design (Proceedings of the Conference held at the University of UTAH SALT LAKE CITY, 1974).
3. Bohm W. Inserting new Knots into 5-spline Curves, Computer Aided Design, 12, p. 199-201, 1980.
4. Bohm W. Subdividing multivariate Splines, Computer Aided Design, 15, No. 6, 1983.
5. Bohm W., Farin G. Letter to the Editor, Computer Aided Design, 15, 1983.
6. Blomgren R., Fuhr R. Algorithms to convert between rational B-Spline. Representation of Curves and Surfaces, Boeing, November 16, 1982.
7. De Boor. A practical Guide to Splines, Applied Math Sciences, No. 27, Springer-Verlag. On calculating with B -Splines, *J. Approximation Theory*, 6, p. 50—62, 1972.
8. Cohen E., Lyche T., Riesenfeld R. Discrete B-Splines and subdivision Techniques, Computer Aided Geometric Design and Computer Graphics (University of Oslo Norway), Computer Graphics and Image processing, 14, p. 87-111, 1980.
9. Coons S. A. Surfaces for Computer Aided design, Design Division Mech. Engin, Dept. MIT 1964, revised 1967.
10. Farin G. Subsplines über Dreiecken, Fakultat zu Braunschweig genehmigte Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften, 1979 B. Polynomials over Triangles and the Construction of Piecewise C and Polynomials, University of Utah, 1980.

11. Ferguson J. C. Multivariable Curve Interpolation. The Boeing Company D2-22504, July 1963, and *J. of ACM II*, 1964.
12. Forrest A. R. Computational Geometry, Proc. Royal Soc. London A, 1971.
13. Forrest A. R. The twisted Cubic Curve, A Computer Aided Geometric Design Approach, CAD, 12, p. 165-172, 1980.
14. Gordon W. J. Blending-Function Methods of bivariate and multivariate Interpolation and Approximation, *SIAM J. Numer Anal*, 8, No. 1, 1971.
15. Gordon W. J., Hall C. A. Construction of curvilinear coordinate Systems and Applications to mesh Generation, *Intern. J. Numer methods engag.*, 7, No. 4, 461-477, 1973.
16. Gordon W. J., Wixon J. A. Pseudo-Harmonic Interpolation on convex Domains, *SIAM J. Number Anal*, II, No. 5, p. 909-933 1974.
17. Gordon W. J., Hall C. A. Exact Matching of Boundary Conditions and Incorporations of semi quantitative Solution Characteristics in initial Approximations to Boundary value Problems, *J. Comput. Phys.*, 25, No. 2, p. 151-162, 1977.
18. Gordon W. J., Wixom J. A. Shepard's Method of "Metric Interpolation" to bivariate and multivariate Interpolation, 32, No. 141, p. 253-264, 1978.
19. Greville T. N. E. On the Normalization of the 5-Splines and the Location of the Nodes for the Case of unequally spaced Knots (167), p. 286-291.
20. Greville T. N. E., Schoenberg I. J., Sharma A. The Spline Interpolation of Sequence satisfying a linear Recurrence Relation, 17, No. 3, p. 200-221, 1976.
21. Lane J. M., Riesenfeld R. F. A theoretical Development for the Computer Generation and Display of Piecewise polynomial Surfaces, *IEEE Trans, on pattern Analysis and Machine inteli*, 2, No. 1, 1980.
22. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.-М.: Наука, 1980.
23. Riesenfeld R. Applications of i?-Spline Approximation to geometric Problems of Computer Aided Design, UTEC CSC, 73-126, March, 1973.
24. Schoenberg I. J. On Spline Functions with supplement by T. N. E. Greville Inequalities, Academic Press, 1967.
25. Schoenberg I. J. Cardinal Interpolation and Spline Functions, *Journal of Approximation Theory* 2, p. 167-206, 1969.
26. Schoenberg I. J. Cardinal Interpolation and Spline Functions II. Interpolation of data of power Growth, *Journal of Approximation Theory*, 6, p. 404-420, 1972.

Раздел 4

1. Тетельбаум И. М., Электрическое моделирование, Физматгиз, 1959.
2. Коган Б. Я., Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования, Физматгиз, 1959.
3. Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin Verlag von B. Q. Teubner, 1913.
4. Шаталов А. С. Структурные методы в теории управления и электроавтоматике, Госэнергоиздат, 1962.
5. Becker S. M., To simplify analog programming try signal how graphs, *Control Engineering*, H964, II, № 9, p. 1109—1111.
6. Рюденберг Р., Явления неустановившегося режима в электрических установках, Гостехиздат, 1933.
7. Weber E., Field transients in magnetic systems, *Trans. AIEE* 493)1, vol. 50, p. 1234—1247.
8. Дунаевский С. Я., Влияние вихревых токов на процесс установления потока, «Электричество», 1951, № 2.
9. Мусин Е. А., Сравнение различных способов учета влияния вихревых токов на процесс установления потока в машине постоянного тока, ЛЭТИ имени В. И. Ульянова (Ленина) вып. XLII 1960.
10. Brockman J, Linkous G., D. C. mashines response to impact excitation, *Trans. AIEE*, 11955, vol. 74, pt. ill I, p. 500—505.
11. Бахвалов Ю. А., Математическое моделирование переходных процессов синхронной машины на основе экспериментальных динамических характеристик, *Изв. вузов, Электромеханика*, 1962, № 2.
12. Боляев И. П., Математическое моделирование электромашинных схем постоянного тока, *Изв. вузов, Электромеханика* 1961, № 5.
13. Snively N. P., Robinson P., Measurement and calculation of D C. machine armature circuit inductance, *Trans. AIEE*, 1960, vol. 69, pt 11, p. 1228—1237.
14. Иосифьян А. Г., Общая теория амплитуды, *Изв АН Арм. ССР*, т. IX, 1945.
15. Иосифьян А. Г., Каган Б. М., Шереметьевский Н. Н., Теория амплитудно-сельсинной следящей системы, «Электричество», 1946, № 3.
16. Иосифьян А. Г., Каган Б. М., Основы следящего привода, Госэнергоиздат, 1954.

17. Клобуков В. П., Электромашинные усилители, Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, т. II, ч. 1, Машгиз, 1959.
18. Якименко Н. М., Электромашинный усилитель как элемент регулирующей системы, «Электричество», 1949, № 9.
19. Эттингер Е. Л., Рейнгольд Ю. Р., Экспериментальное исследование динамических свойств электромашинного усилителя и определение его параметров, «Электричество», 1956, № 3.
20. Рейнгольд Ю. Р., Устойчивость электромашинного усилителя с гибкой отрицательной обратной связью, «Электричество», 1957, № 2.
21. Рейнгольд Ю. Р., К методике экспериментального исследования динамических свойств автоматизированного электропривода, «Электричество», 1954, № 10.
22. Рудаков Н. В., Электромашинные усилители в системах автоматики, Госэнергоиздат, 1961.
23. Ш и н и б е р о в Л. П., О передаточной функции электромашинного усилителя с поперечным полем, «Электричество», 1956, № 10.
24. Михайлов В. С, Росин Е. И., Электромашинные усилители продольного поля на судах, Судпромгиз, 1963.
25. Росин Е. И., Оценка влияния неравенства воздушных зазоров на работу электромашинного усилителя типа «рототрол», Изв. ЛЭТИ имени В. И. Ульянова (Ленина), вып. 42, 1960.
26. М а л и ш е в с к и й В. Е., Некоторые вопросы теории трехступенчатых электромашинных усилителей продольного поля, Труды ЦНИИМФ, вып. 14, 1958.
27. Крылов О. А., М а з и я Л. В., Моделирование стабилизирующего трансформатора, «Электричество», 1962, № 7.
28. Я к и м е н к о Н. М., Электромашинный усилитель как элемент регулирующей системы, «Электричество», 1948, № 9.
29. Крылов О. А., М а з и я Л. В., Структурные схемы для математического моделирования стабилизирующих устройств электроприводов, «Электротехника», 1963, № 10.
30. Рейнгольд Ю. Р., С т а е в Э. Р., Передаточная функция системы ЭМУ-Г с емкостной гибкой обратной связью по напряжению усилителя, «Электричество», 1962, № 5.
31. Глухов В. П., Якубайтис Э. А., Моделирование дроссельных магнитных усилителей, Автоматика и телемеханика, т. XX, 1959, № 7.
32. Б о я р е в и ч В. Я., Моделирование магнитного усилителя на электронной аналоговой машине, Доклады 4-й межвузовской

- конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники, сб. № 3, МЭИ, 1962.
33. Л и п м а н Р. А., Н е г н е в и ц к и й И. Б., Быстродействующие магнитные и магнитно-полупроводниковые усилители, Госэнергоиздат, 1960.
 34. С т о р м Г. Ф., Магнитные усилители, ИИЛ, 1957.
 35. Розенблат М. А., Магнитные усилители, «Советское радио», 1960.
 36. Розенблат М. А., Магнитные усилители с самонасыщением, Госэнергоиздат, 1963.
 37. Цыпки н Я. З., Теория импульсных систем, Физматгиз, 1958.
 38. Стефанович Т. Х., Магнитные усилители для автоматизации промышленных установок, Госэнергоиздат, 1961.
 39. Л ь в о в Е. Л., Передаточные функции магнитного усилителя с самаподмагничиванием с активно-индуктивной нагрузкой на постоянном токе, Автоматика и телемеханика, т. XXV, 1964, № 1.
 40. Каминская Д. А., Ломакин В. П., Ти таковская Л. Е., Электронное моделирование магнитных усилителей, Изв. вузов, Электромеханика, 1964, № 9.
 41. Д у н а е в с к и й С. Я., Моделирование магнитных усилителей, «Электротехника», 1965, № 12.
 42. С т о р м Г. Ф., Флерти С. У., Постоянная времени трехфазного магнитного усилителя, Труды 1-го международного конгресса федерации по автоматическому управлению, 1960, т. 4.
 43. О л ь ш е в с к и й Ю. Н., Применение аналоговых вычислительных машин для расчета электрических систем регулирования, ЦИНТИ — Приборэлектромпром, 1962.
 44. Горев А. А., Переходные процессы синхронной машины, Госэнергоиздат, 1950.
 45. В а ж н о в А. И., Основы теории переходных процессов синхронной машины, Госэнергоиздат, 1960.
 46. P a r k t R. H., Two-reaction theory of synchronous machines, AIEE Trans., v. 48, July section, 1929, p. 716—730.
 47. R a n k i n A. W., Per-unit impedances of synchronous machines, AIEE Trans, vol. 64, August 1945, p. 569—573.
 48. Ibid, pt II, September -1945, p. 839-841.
 49. C r a y B., Power system stability, John Wiley and Sons.
 50. AIEE, Test code for synchronous machines, sections 1520— 1525, 1530, 1540, 1541.
 51. R i a z M, Analog computer representations of synchronous generator in voltage-regulation studies, pt III, vol. 75, December 1956

52. Boffi L. V., Haas V. B, Analog computer representations of alternator for parallel operations, Jr. AIEE, Trans, pt I (Communication and Electronics), vol. 76, May 1957, p. 153—158.
53. Фиалков М. Н., Расчет динамических режимов шаговых синхронных двигателей, «Электротехника», 1964, № 9.
54. Kovacs K. P., Losung regelungstechnischer Fragen asynchroner und synchroner Maschinen mit Analogrechnern, Regelungs-technik, 9, Jahrgang, September 1961, ill. 9.
55. Шлыков Ф. М, Моделирование электроприводов с асинхронными двигателями, Изв. вузов, 1960, № 6.
56. Васильев В. Г., Зверев В. А., Электронная модель схемы выпрямительного моста, Изв. вузов, Электромеханика, 1961, № 1.
57. З в е р е в В. А., Электронное моделирование электрических цепей с выпрямительными элементами, Труды ХПИ, т. 37, 1962.
58. Хлебников С. Д., Засыпкин А. С, Моделирование однофазных выпрямительных мостов с идеальными вентилями на аналоговых вычислительных машинах, Изв. вузов, Электромеханика, 1964, № 4.
59. Якубовский В. Я, Математическая модель выпрямительного агрегата, Изв. вузов, Электромеханика, 1963, № 10.
60. Я к у б о в с к и й В. Я., Математическая модель инверторного агрегата, «Электромеханика», 1964, № 4.

Научно-практическое издание

Кононюк Анатолий Ефимович

Обобщенная теория моделирования

Книга 1

Начала

Часть 2

Авторская редакция

Подписано в печать 25.05.2012 г.

Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 25,5. Тираж 300 экз.

Издатель и изготовитель:

Издательство «Освита Украины»

04214, г. Киев, ул. Героев Днепра, 63, к. 40

Свидетельство о внесении в Государственный реестр издателей ДК №1957 от 23.04.2009 г.

Тел./факс (044) 411-4397; 237-5992

E-mail: osvita2005@ukr.net, www.rambook.ru

Издательство «Освита Украины» приглашает

авторов к сотрудничеству по выпуску изданий, касающихся вопросов управления, модернизации, инновационных процессов, технологий, методических и методологических аспектов образования и учебного процесса в высших учебных заведениях.

Предоставляем все виды издательских и полиграфических услуг