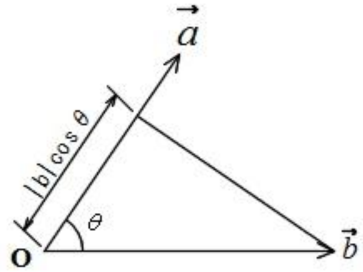
n 次元ベクトル

・n 次元空間における座標
・原点を始点とした終点
・方向と長さ

ベクトルの内積



$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}'\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$
$|a|=1$(単位ベクトル･方向ベクトル)のとき、a 座標を表す。

行列積

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ 、$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ のとき、$$Ab=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$ ($\boldsymbol{a}_i$：行列Ａの第 i 行ベクトル)

内積を同時にとったことになる

$$AB=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_\mathbf{n} \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_\mathbf{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}_\mathbf{n} \end{pmatrix}$$ (b_j：行列Ｂの第 j 列ベクトル)

直交行列

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_n$ が全て長さ 1（単位ベクトル）で、互いが直角に交わるとき
A＝（ $\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\cdots\ \boldsymbol{a}_n$ ）を**直交行列**という。
あるいは…単位形式を単位形式に写す正則一次変換を直交変換といい、その時に使われる行列を直交行列という。

$$A'A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\cdots\ \boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_\mathbf{n} \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_\mathbf{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{a}_\mathbf{n} \end{pmatrix}$$

ここで$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_i=|\boldsymbol{a}_i|^2=\mathbf{1}$、$i\neq j$ のとき$\boldsymbol{a}_i$と$\boldsymbol{a}_j$は直交するので、$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=0$

よって、$$A'A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_\mathbf{n} \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_\mathbf{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{a}_\mathbf{n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=E$$

すなわち、$A'=A^{-1}$ ⇒ **直交行列の転置行列は、逆行列となる。**

・直交行列の行列式は、±1 である。

・直交変換は、原点からの距離を変えない（合同変換）。
原点を中心とした回転
原点を通る超平面（直線、平面、…）に関する鏡像

固有値と固有ベクトル

一般の行列 A(m×n)について、

　$A\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b}$（λは定数、$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$）

が成り立つとき、λをAの**固有値**といい、**b** をAのλに対する**固有ベクトル**という。

特にAが対称ベクトルのとき、λは実数で、固有ベクトルは互いに直交する。

$|\mathbf{b}| = 1$ とすると、

$$\begin{aligned} A\mathbf{b}_1 &= \lambda_1\mathbf{b}_1 \\ A\mathbf{b}_2 &= \lambda_2\mathbf{b}_2 \\ &\vdots \\ A\mathbf{b}_n &= \lambda_n\mathbf{b}_n \end{aligned} \Rightarrow A(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

よって、$P = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n)$　とおくと、

$$AP = P\Lambda \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pは____の性質により直交行列なので、$P'P=E$。よって、

　$P'AP = P^{-1}AP = P^{-1}P\Lambda = \Lambda$

⇒対称行列は、直交行列で対角化できる。

２次形式

対称行列S、変数ベクトル **x** があるとき、

　$\mathbf{x}'S\mathbf{x} = s_{11}x_1^2 + s_{22}x_2^2 + \cdots + s_{nn}x_n^2 + 2(s_{12}x_1x_2 + \cdots + s_{n-1,n}x_{n-1}x_n)$

を２次形式という。

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

正則一次変換

（言葉の定義）一次変換 $\vec{u} = A\vec{x}$ において，行列Aが正則のとき，この一次変換を「正則一次変換」と呼ぶ.

対称行列Sと変数ベクトル **x** について、

　$\mathbf{y} = T\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{y}$

となる正則行列Tと変数ベクトル **y** を用意したとき、

　$\mathbf{x}'S\mathbf{x} = (T^{-1}\mathbf{y})'S(T^{-1}\mathbf{y}) = \mathbf{y}'(T^{-1})'ST^{-1}\mathbf{y}$　　＊$(AB)' = B'A'$

ここで　$R = (T^{-1})'ST^{-1}$ とおくと、

　$\mathbf{y}'(T^{-1})'ST^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}'R\mathbf{y}$　　＊Sが対称行列なので、$(T^{-1})'ST^{-1} = R$ も対称行列となる

となり、新たなベクトルと行列で置き換えることができる。

対称行列の対角化

対称行列Ｓは直交行列Ｐよって

　　Ｐ′ＳＰ

として対角化出来るが、ＰはＳの固有ベクトルを規準化(長さ 1)にして並べたものとして作ることが出来る。なぜなら、異なる固有値の固有ベクトルはすべて互いに直交するからで、それらを長さ 1 にすれば、すなわち直交行列となる。

Ｓの固有値を$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$とすると、

$$P'SP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

従って、2 次形式 $x'Sx$ があるとき、S の固有ベクトルによる直交行列 P を用意することにより、

$\mathbf{x}=P\mathbf{y}$

とおくと、

$\mathbf{x}'S\mathbf{x}=\mathbf{y}'P'SP\mathbf{y}=\mathbf{y}'(P'SP)\mathbf{y}=\mathbf{y}'\Lambda\mathbf{y}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\dots+\lambda_n y_n^2$

となり、2 次の項のみで表すことが出来る。これを**2 次形式の標準化**という。

正定値行列

$\mathbf{x}\neq 0$ のとき、常に

$\mathbf{x}'S\mathbf{x}>0$

である対称行列 S を、正定値行列という。

性質 1：

・正定値行列の固有値はすべて正である(必要十分条件)

$$P'SP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

のとき(固有値はすべて正)、

$\mathbf{x}=P\mathbf{y}(\mathbf{x}\neq 0, \mathbf{y}\neq 0)$と変換すると、

$\mathbf{x}'S\mathbf{x}=\mathbf{y}'P'SP\mathbf{y}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\dots+\lambda_n y_n^2>0$

逆に

$\mathbf{x}'S\mathbf{x}>0$ のとき

$\mathbf{x}'S\mathbf{x}=\mathbf{y}'P'SP\mathbf{y}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\dots+\lambda_n y_n^2$

ここで、$\lambda_1\leqq 0, \mathbf{y}=(1, 0, 0, \dots, 0)'$とすると、

$\mathbf{x}=P\mathbf{y}=P(1, 0, 0, \dots, 0)'=\lambda_1\leqq 0$

となり、$\mathbf{x}'S\mathbf{x}>0$ と矛盾する。

よって、$\mathbf{x}'S\mathbf{x}>0$ であるためには、すべての固有値が正でなくてはならない。

性質 2：

$\mathbf{x}'S\mathbf{x}=(\mathbf{x}, S\mathbf{x})>0$ より、$\mathbf{x}, S\mathbf{x}$ のなす角は $\pi/2$ 未満である。

非負定値行列…常に $\mathbf{x}'S\mathbf{x}\geqq 0$

非正定値行列…常に $\mathbf{x}'S\mathbf{x}\leqq 0$

負定値行列…常に $\mathbf{x}'S\mathbf{x}<0$

多変数二次式

$f(x)=f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)=\mathbf{x}'S\mathbf{x}+\mathbf{a}'\mathbf{x}+b$ $(S\neq 0, \mathbf{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n))$

二次式の標準形

$|S|\neq 0$ のとき(ただし S は正則)

$f(x)=\mathbf{x}'S\mathbf{x}+\mathbf{a}'\mathbf{x}+b$ において、$\mathbf{y}=\mathbf{x}+c$ とおくと、$\mathbf{x}=\mathbf{y}-c$　　　これは $\mathbf{x}$ を c だけ平行移動したことになる

よって

$f(\mathbf{x})=(\mathbf{y}-c)'S(\mathbf{y}-c)+\mathbf{a}'(\mathbf{y}-c)+b=\mathbf{y}'S\mathbf{y}-c'S\mathbf{y}-\mathbf{y}'Sc+c'Sc+\mathbf{a}'\mathbf{y}-\mathbf{a}'c+b$

ここで $c'S\mathbf{y}=(\mathbf{y}'Sc)'=\mathbf{y}'Sc$ なので

$f(x)=\mathbf{y}'S\mathbf{y}-2c'S\mathbf{y}+\mathbf{a}'\mathbf{y}+c'Sc-\mathbf{a}'c+b$

2 次項：$\mathbf{y}'S\mathbf{y}$

1 次項：$-2c'S\mathbf{y}+\mathbf{a}'\mathbf{y}$

定数項：$c'Sc-a'c+b$

1 次項を消去するためには、

$-2c'S\mathbf{y}+\mathbf{a}'\mathbf{y}=0$

となればよい。つまり、

$(-2c'S+\mathbf{a}')\mathbf{y}=0$

$\mathbf{y}\neq 0$ なので

$$-2c'S+\mathbf{a}'=0 \Leftrightarrow -2Sc+\mathbf{a}=0 \Leftrightarrow Sc=\frac{1}{2}\mathbf{a} \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}S^{-1}\mathbf{a}$$

と、おけばよい。このとき

$$c'Sc=\left(\frac{1}{2}S^{-1}\mathbf{a}\right)' S\left(\frac{1}{2}S^{-1}\mathbf{a}\right)=\frac{1}{4}\mathbf{a}'S^{-1}SS^{-1}\mathbf{a}=\frac{1}{4}\mathbf{a}'S^{-1}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}'c=\mathbf{a}'\left(\frac{1}{2}S^{-1}\mathbf{a}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{a}'^{S^{-1}}\mathbf{a}$$

なので、

$$f(x)=\mathbf{y}'S\mathbf{y}+b+\frac{1}{4}\mathbf{a}'S^{-1}\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{a}'S^{-1}\mathbf{a}=\mathbf{y}'S\mathbf{y}+b-\frac{1}{4}\mathbf{a}'S^{-1}\mathbf{a}$$

となり、1 次の項が消える。

$$d=b-\frac{1}{4}\mathbf{a}'S^{-1}\mathbf{a}$$

とおくと、

$$f(x)=\mathbf{y}'S\mathbf{y}+d$$

さらに

$\mathbf{y}=P\mathbf{z}$(ただし、P は $P'SP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$と、S を対角化する直交行列とする)

とおくと、

$$f(x)=(P\mathbf{z})'S(P\mathbf{z})+d=\mathbf{z}'P'SP\mathbf{z}+d=\mathbf{z}'\Lambda\mathbf{z}+d=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\ldots+\lambda_n z_n^2+d$$

この時、

$$\mathbf{z}'\Lambda\mathbf{z}+d$$

を、多変数 2 次式の標準形という。

2 次曲面（2 次超曲面）

$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}'S\mathbf{x}+\mathbf{a}'\mathbf{x}+b=0$

を満たす x の集合のこと。

◎$|S|\neq 0$ のとき

$f(x)=\mathbf{x}'S\mathbf{x}+\mathbf{a}'\mathbf{x}+b=\mathbf{z}'\Lambda\mathbf{z}+d=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\ldots+\lambda_n z_n^2+d=0$

n=3 のとき

・$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$（正定値行列）

$z_3=m$（定数）で切った断面を考える。

$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2+d=0$

$\lambda_3 z_3^2+d=-e$ とおいて

$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2-e=0 \Leftrightarrow \lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2=e \Leftrightarrow z_1^2/(e/\lambda_1)+z_1^2/(e/\lambda_2) \Leftrightarrow z_1^2/\left(\sqrt{e/\lambda_1}\right)^2+z_2^2/\left(\sqrt{e/\lambda_2}\right)^2=1$

断面は楕円、一点、または空であり、各楕円は互いに相似である。

断面として楕円をもつとき、この図形を楕円面（楕円体表面）という。一点、あるいは空の場合もある

・$\lambda_1 > 0, \lambda_2 <0, \lambda_3 > 0$（符号が異なる）

$z_1^2/\left(\sqrt{e/\lambda_1}\right)^2 - z_2^2/\left(\sqrt{e/\lambda_2}\right)^2=1$　←　双曲線

多変数関数の局所近似

・局所 1 次近似

1 変数…y=f(x)のとき、導関数 y=f'(x)

多変数

傾斜（勾配）ベクトル gradient

$$\mathrm{grad}\ f=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_1}}\\ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_2}}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_n}}\end{pmatrix}$$

・接平面

$g(\mathbf{x})=\mathrm{grad}\ f(\mathbf{x})$

とすると

$y=g^t(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+f(\mathbf{x}_0)$

接 2 次曲面による局所 2 次近似

$f(\mathbf{x}) \fallingdotseq f(\mathbf{x}_0)+g^t(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+1/2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)'H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$

H(x)：ヘッセ行列（Hessian）

$$H(x_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}$$ 2 回偏導関数を要素とする行列。

通常は$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$が成り立つので、対称行列となる。

$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ において $g(\mathbf{x}_0)=0$ とすると、

$y=f(\mathbf{x}_0)+g^t(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=f(\mathbf{x}_0)$

これを**停留点**という。

$y=f(\mathbf{x}_0)$が極値であるためには、

$g(\mathbf{x}_0)=0$

かつ

$H(\mathbf{x}_0)$が正定値（極小）

または

$H(\mathbf{x}_0)$が負定値（極大）

$H(x_0)$の固有値に異符号のものがあると、極値にはならない（鞍点）。

$H(x_0)$の固有値が非負定値または非正定値の場合、2 次近似では極値かどうかの判定が出来ない。

代数系

集合Ｓ，演算・⇒（Ｓ，・）

集合Ｓの２つの要素に対して演算・を行ったとき、その結果がまたＳの要素になる。

例）集合 $\mathbb{Z}$（整数)、演算＋（加算)、演算÷（除算）

（$\mathbb{Z}$, +）は代数系　（$\mathbb{Z}$，÷）は代数系ではない

性質

・結合法則：（ｘ・ｙ）・ｚ＝ｘ・（ｙ・ｚ）

・交換法則：ｘ・ｙ＝ｙ・ｘ

２つの演算について

・分配法則

ｘ・（ｙ＊ｚ）＝ｘ・ｙ＊ｘ・ｚ

（ｘ＊ｙ）・ｚ＝ｘ・ｚ＊ｙ・ｚ

単位元ｅの存在

ｅ・ｘ＝ｘ・ｅ＝ｘ

（$\mathbb{Z}$，＋）：ｅ＝0　（$\mathbb{Z}$，×）：ｅ＝1　（Ｍ，・）ｅは単位行列（Ｍは正方行列）

逆元の存在

Ｘ・Ｙ＝Ｙ・Ｘ＝ｅ

群（group）

①結合法則が成り立つ

②単位元が存在する

③任意の元について逆元が存在する

同型

２つの群（G，・)、(H，*）を用意する。

G から H への格言に対する一対一の対応関係を f と書く（全単射 $f : G \to H$）

任意の a , b∈G について

$f(a \cdot b)=f(a)*f(b)$

が成立するとき、(G，・)、(H，*）は**同型**であるという。

例）正の実数を $\mathbb{R}_+$として、（$\mathbb{R}_+$，＋）と（$\mathbb{R}_+$，×）を考える。このとき、f(a)=log a とすれば、

f(a×b)＝log(a×b)=lob a + log b

部分群

（S，・）について H⊂S となる H が（H，・）となるとき、（H，・）を（S，・）の**部分群**という

直交行列全体（O_n，・)：直交群

行列式１の直交行列全体（SO_n，・)：特殊直交群

環（Ring）

２つの演算{＋、×}が定義されている代数系で、

①＋に関して可換群($y+x=x+y$)

②分配法則が成り立つ

③×に関して結合法則が成り立つ

（M_n , {＋、×}）　　　M_n：n 次正方行列

$AB \neq BA$ のとき非可換群

$AB=BA$ のとき可換群

・＋に関する単位元は 0

・$XY=0$ となる $X \neq 0$,　$Y \neq 0$ が存在しないとき、整域と呼ぶ。

環のうち、単位元が存在し、0 以外について逆元が存在するものを体(field)という

（$\mathbb{Z}$, {＋、×}）（Z は整数）整数環

（$\mathbb{R}$, {＋、×}）（R は実数）実数環（体）

多項式環（可換環、整域）

剰余類体（有限体）Z_p：素数 p で割った余り