

第 1 章

介紹 IBM 量子電腦的量子位元與量子閘

從計算機特性的觀點來看，電腦科學實際上是由傳統的數位計算機 [Turing 1937, von Neumann 1956]、生物計算機 [Adleman 1994]與量子計算機 [Deutsch 1985]。

至今我們能使用由數千萬個電晶體組成的積體電路，來構成傳統的數位計算機，我們稱這些數位計算機-「傳統」。對於傳統電腦來說，量子電腦能在極短的時間內完成一個目前傳統超級電腦難以完成的計算，即意味著量子霸權的來臨。

由於 IBM 的量子電腦已經以雲端服務的方式公開使用，因此需要將一批資深的傳統電腦開發工程師，訓練成量子程式工程師。透過 IBM 量子電腦上的組合語言與 Python [Cross et al 2017, IBM Q 2016]，我們計畫研究一些廣為人知且不錯的想法的量子演算法。我們的目標是利用大家熟悉的線性代數中的向量與矩陣去解釋量子演算法。在此介紹章節中，我們描述了量子位元與操作它的量子閘，並說明如何使用 IBM 量子電腦上的組合語言與 Python，與使用它們去解決任何問題。

1.1 量子位元

傳統位元只有狀態 0 或 1。量子位元 (或稱 qubit) 也有狀態，量子位元的兩個可能的狀態為 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 。像這樣的符號 (' $|>$ ') 稱為 Dirac 表示法。這兩個量子位元 ($|0\rangle$ 和 $|1\rangle$) 的狀態相對於傳統位元的 0 和 1，且在二維的 Hilbert 空間中認為是計算基礎狀態向量。此一基礎狀態向量 $|1\rangle$ 代表著 (2×1) 。列向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和基礎狀態向量 $|1\rangle$ 也代表著一個 (2×1) 的列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。它們構成了二維 Hilbert 空間的正交基礎

傳統位元與量子位元最大的差別在於可以有除了 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的狀態。一個量子位元在二維 Hilbert 空間中具有兩個基礎狀態向量 ($|0\rangle$ 和 $|1\rangle$)。它的任意狀態是由上述基礎狀態向量的線性加權組合而成，稱之為疊加：

$$|\Phi\rangle = l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle = l_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

權重因數 l_0 和 l_1 是稱為概率幅度的複數。因此，須滿足 $|l_0|^2 + |l_1|^2 = 1$ 。換句話說，量子

位元的狀態是二維 Hilbert 空間的單位向量。

一直以來，傳統計算機會用一個位元去檢查記憶體內容的狀態是 0 或 1。然而量子電腦無法用一個量子位元去決定它的狀態，即 l_0 和 l_1 的狀態。取而代之的是：量子電腦測量量子位元後，結果為機率 $|l_0|^2$ 的 0，機率 $|l_1|^2$ 的 1。即代表讀取量子位元需要測量，而讀數是傳統位元。

1.1.1 多重量子位元

在兩位元的傳統系統中，有 00、01、10、11。同樣的兩位元的量子系統也有四個狀態 $|00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$ 和 $|11\rangle$ ，對應到傳統的四個狀態 00、01、10 和 11，並被稱為四維 Hilbert 空間的基礎狀態向量。

兩量子位元的基礎狀態向量 $|00\rangle$ 代表 (4×1) 列向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，基礎向量

$|01\rangle$ 代表 (4×1) 列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，基礎狀態向量 $|10\rangle$ 代表 (4×1) 列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以及基礎

狀態向量 $|11\rangle$ 代表 (4×1) 列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。它們構成四維 Hilbert 空間的正交基礎。兩個量

子位元的任意狀態是由以下基礎狀態向量的線性加權組合，通常稱為疊加：

$$|\Phi\rangle = l_0 |00\rangle + l_1 |01\rangle + l_2 |10\rangle + l_3 |11\rangle = l_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

權重因數 l_0 、 l_1 、 l_2 和 l_3 是稱為概率幅度的複數，因此他們須滿足 $|l_0|^2 + |l_1|^2 + |l_2|^2 + |l_3|^2 = \sum_{k \in \{0,1\}^2} |l_k|^2 = 1$ ，符號 “ $\{0, 1\}^2$ ” 表示 “長度為二的字串集合，每個字為 0 或 1”。換句話說，兩量子位元的狀態為四維 Hilbert 空間的單位向量。

同樣的，傳統電腦用兩個位元去判斷記憶體內容的狀態為 00、01、10 或 11。然而，量子電腦無法兩個量子位元去判斷狀態，是 l_0 、 l_1 、 l_2 和 l_3 的值。取而代之，當量子電腦計算兩個量子位元後，其結果為機率 $|l_0|^2$ 的 00、機率 $|l_1|^2$ 的 01、機率 $|l_2|^2$ 的 10 或機率 $|l_3|^2$ 的 11。這表示讀量子位元需要測量，而讀數是傳統位元。

一般而言，在 n 個傳統位元的系統裡，有 2^n 個可能狀態 $0, 1, 2, \dots$

和 $(2^n - 1)$ ，是 n 個傳統位元十進位表示。相同的， n 個量子位元的系統有 2^n 個狀態 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ 和 $|2^n - 1\rangle$ ，是 n 個量子位元的十進位表示與其對應到傳統的 2^n 狀態 $0, 1, 2, \dots$ 和 $(2^n - 1)$ 。 2^n 個狀態被稱為 2^n 維 Hilber 空間的基礎狀態像量。 n 個基礎狀態像

量的第一個 $|0\rangle$ 表示 $(2^n \times 1)$ 列向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ，第二個向量 $|1\rangle$ 表示 $(2^n \times 1)$ 列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

與最後一個向量 $|2^n - 1\rangle$ 表示 $(2^n \times 1)$ 列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。它們構成 2^n 維 Hilber 空間的正交基

礎， n 個量子位元的任意狀態是由以下基礎狀態向量的線性加權組合，通常稱為疊加

$$|\Phi\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} l_k |k\rangle. \tag{1.3}$$

每個權重因數 l_k 是稱為概率幅度的複數，因此他們須滿足 $\sum_{k=0}^{2^n-1} |l_k|^2 = \sum_{k \in \{0,1\}^n} |l_k|^2 = 1$ 。符號 “ $\{0, 1\}^n$ ” 表示“長度為 n 的字串集合，每個字為 0 或 1”。換句話說， n 量子位元的狀態為 2^n 維 Hilbert 空間的單位向量。

同樣的，傳統電腦用 n 個位元去判斷記憶體內容的狀態為 $0, 1, 2, \dots$ 和 $(2^n - 1)$ 。然而，量子電腦無法 n 個量子位元去判斷狀態，是 $l_k \{0 \leq k \leq (2^n - 1)\}$ 的值。取而代之，當量子電腦計算 n 個量子位元後，其結果為機率 $|l_0|^2$ 的 0、機率 $|l_1|^2$ 的 1、機率 $|l_2|^2$ 的 2 或機率 $|l_{2^n-1}|^2$ 的 $(2^n - 1)$ 。這表示讀量子位元需要測量，而讀數是傳統位元。

1.1.2 多重量子位元的聲明與測量

QASM 是量子組合語言的縮寫。開放式 QASM 是一種簡單文字語言，用於說明通用量子電路，在開放式 QASM，在人類可讀格式的語法有 C 和組合語言的元素。對於開放式 QASM 程式，第一行(非註釋)必須是 “**OPENQASM M.m;**”，其表示主要版本為 M 和次要版本 m。因為在 IBM 量子電腦的雲端上只支援 2.0 版，所以我們說明 2.0 版並使用 2.0 版去編撰量子程式。「關鍵字」版本不能在文件中多次發生。語句用分號分隔。註釋以左斜線開始，以換行結尾。Include、filename 語句：解析 filename，就像將文件內容貼到 include 語句的位置。指定相對路徑。

在開放式 QASM 2.0 版 唯一的儲存類型是傳統的跟量子儲存器，分別是一維的位元和量子位元的陣列。“**qreg name[size];**” 宣告一個量子位元陣列，並給定陣列的名稱與大小。標示

符號，像是名稱，需以小寫開頭，包含字母、數字與底線。變數 `name[k]` 指的是該變數第 k 個量子位元。此儲存器的每個量子位元初始都為 $|0\rangle$ 。同樣的，“`creg name[size];`”宣告一個傳統位元的陣列，並給定陣列的名稱與大小。變數 `name[k]` 指的變數第 k 個變數，此儲存器的每個傳統位元初始都為 0。“`measure qubit|qreg -> bit|creg;`”測量量子位元並覆蓋在傳統位元來記錄結果。兩種參數都必須是儲存器型態或是位元型態。如果兩者都是儲存器類型，且大小相同，則“`measure a -> b;`”表示測量 $a[k] \rightarrow b[k]$; a 儲存器的每個 index k 。

IBM Q 體驗，測量閘的圖案如下：



它以狀態疊加中的一個量子位元作為輸入並吐出 1 或 0。而且，輸出並不是隨機的。根據量子位元的原始狀態，輸出可能為 1 或 0，透過覆蓋傳統位元來記錄測量結果。

在列表 1.1，後端程式 `ibmqx4` 有 IBM 的五個量子位元

```
1 OPENQASM 2.0;
2 include "qelib1.inc";
3 qreg q[5];
4 creg c[5];
5 measure q[0] -> c[0];
6 measure q[1] -> c[1];
7 measure q[2] -> c[2];
8 measure q[3] -> c[3];
9 measure q[4] -> c[4];
```

列表 1.1：五個量子位元宣告和測量的程式

量子電腦是我們敘述如何宣告量子位元與測量的第一個範例。圖 1.1 是列表 1.1 中相對應的量子電路。列表 1.1 中第一行的“OPENQASM 2.0;”表示該程序是使用開放式 QASM 2.0 版編寫的。接著，列表 1.1 中第二行“qelib1.inc;”將繼續解析文件“qelib1.inc”，像是將文件內容貼在 include 位置上，文件“qelib1.inc”**「量子經驗標準標頭」**且路徑為相對路徑。列表 1.1 中第三行“qreg q[5];”宣告五個量子位元。



圖 1.1: 五個量子位元的程式的宣告與測量。

在圖 1.1 的左上角，五個量子位元為 $q[0]$ 、 $q[1]$ 、 $q[2]$ 、 $q[3]$ 與 $q[4]$ 。每個量子位元初始值為 $|0\rangle$ 。接著，語句 “`creg c [5];`” 在列表 1.1 的第四行宣告此程式中有五個傳統位元。在圖 1.1 的左下方，五個傳統位元依次為 $c [0]$ 、 $c [1]$ 、 $c [2]$ 、 $c [3]$ 和 $c [4]$ 。每個傳統位元的初始值都設置為 0。語句 “`measure q [0]-> c [0];`” 在列表 1.1 第五行的內容是測量第一個量子位元 $q [0]$ 並通過覆蓋第一個傳統位元 $c [0]$ 記錄測量結果。接下來，語句 “`measure q [1] -> c [1];`” 在列表 1.1 第六行的內容是測量第二個量子位元 $q [1]$ 並通過覆蓋第二個傳統位元 $c [1]$ 記錄測量結果。語句 “`measure q [2]-> c [2];`” 在列表 1.1 的第七行中的內容是測量第三量子位元 $q [2]$ 並通過覆蓋第三傳統位元 $c [2]$ 記錄測量結果。

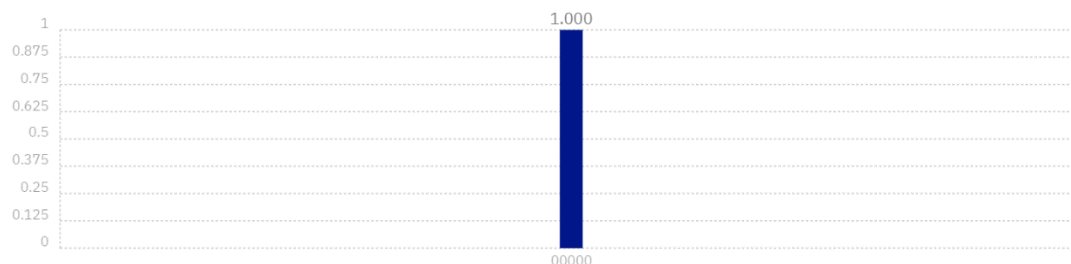


圖 1.2: 在列表 1.1 中的程式測量完成後,我們獲得概率為 1.000 的答案 00000。

接下來，語句 “`measure q [3]-> c [3];`” 在列表 1.1 的第八行是測量第四量子位元 $q [3]$ 並通過覆蓋第四傳統位元 $c [3]$ 記錄測量結果。語句 “`measure q [4]-> c [4];`” 在列表 1.1 的第 9 行上測量第五個量子位元 $q [4]$ 並通過覆蓋第五個經典位元 $c [4]$ 記錄測量結果。在 IBM 量子計算機中具有五個量子位的後端 *ibmqx4* 中，我們使用命令 “`simulate`” 執行清單 1.1 中的 00000 ($c[4] = q[4] = |0\rangle$, $c[3] = q[3] = |0\rangle$, $c[2] = q[2] = |0\rangle$, $c[1] = q[1] = |0\rangle$ 和 $c[0] = q[0] = |0\rangle$) 概率為 1。

2020/03/09 上到此

1.2 不是(NOT)單量子位的門

一台經典的計算機由電路構建而成,包括電線和邏輯門。同樣,量子計算機是由電線和基本量子門組成的量子電路構建的,用於完成和操作量子資訊。使用傳統計算的語言可以說明將古典狀態變更為另一種經典狀態的情況。類似的方式,發生改變量子態到另一個量子態可以通過使用量子計算的語言介紹。在本部分和後面的部分中,我們介紹了 IBM 量子計算機上的量子門,提出了描述其應用的許多示例的量子電路,並描述了如何使用 Open QASM 編寫實現這些範例程式。

對於一台傳統電腦,其電路包含電線和邏輯閘。我們使用導線在電路周圍傳遞資訊,並使用邏輯閘來完成資訊的操作,即將其從一種狀態轉換為另一種狀態。例如,我們認為傳統單一位元 (不是閘)(NOT GATE) 的一個邏輯閘,其操作是將狀態 0 轉換為另一個狀態 1,將狀態 1 轉換為另一個狀態 0。這就是說,傳統狀態 0 和 1 是互換的。

同樣,量子 **NOT** 閘將狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 帶到相應的狀態 $l_0 |1\rangle + l_1 |0\rangle$, 其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的角色已互換。假定我們表示矩陣 \mathbf{X} 以表示量子 **NOT** 閘,如下所示:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

它也表示 \mathbf{X}^+ 是 \mathbf{X} 的偶聯轉置矩陣 (conjugate-transpose matrix), 等於 $(\mathbf{X}^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

其中 \mathbf{X}^* 表示複雜的偶聯, t 指出轉置操作。因為 $\mathbf{X} \times (\mathbf{X}^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^*)^t$

$\times \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。 \mathbf{X} 是單一矩陣或是單一運算子。如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為:

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

單位的上面是 $|0\rangle$ 的振幅 l_0 , 單位的下面是 $|1\rangle$ 的振幅 l_1 , 而量子 **NOT** 閘的對應輸出為:

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_0 \end{pmatrix} = l_1 |0\rangle + l_0 |1\rangle. \quad (1.6)$$

請注意, 量子 **NOT** 閘是狀態 $|0\rangle$ 替換為對應於矩陣 \mathbf{X} 第一列, 狀態 $|1\rangle$ 也替換為對應於矩陣 \mathbf{X} 第二列的狀態。因為 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X} \times \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 將 \mathbf{X} 兩次應用於一個狀態對它沒有任何說明。對於 **IBM Q** 體驗, 量子 **NOT** 閘圖示如下:

1.2.1 單量子位元 NOT 閘編程

在列表 1.2，在後端 *ibmqx4* 中帶有 5 個量子位的程式是介紹如何使用 **NOT** 閘操作一個量子位的程式的第二個例子。圖 1.3 是列表 1.2 中程式的相應量子電路。列表 1.2 第一行的語句“OPENQASM 2.0;”表示程式是使用 OpenQASM 版本 2.0 編寫的。然後，語句“include "qelib1.inc";”在列表 1.2 的第二行是繼續解析檔案“qelib1.inc”像是將文件的內容粘貼在包含語句的位置，其中檔案“qelib1.inc”是 **量子體驗 (QE) 標準標頭**，它的路徑是相對於目前的工作目錄。語句“qreg q[5];”在列表 1.2 程式的第三行宣告。

```
1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. x q[0];
6. x q[1];
7. x q[2];
8. x q[3];
9. x q[4];
10. measure q[0] -> c[0];
11. measure q[1] -> c[1];
12. measure q[2] -> c[2];
13. measure q[3] -> c[3];
14. measure q[4] -> c[4];
```

列表 1.2: 用五個 **NOT** 閘操作五個量子位元的程式

是五個量子位元。在圖 1.3 的左上，五個量子位隨後為 $q[0]$, $q[1]$, $q[2]$, $q[3]$ 和 $q[4]$ 。每個量子位的初始值設置為 $|0\rangle$ 。接下來，語句 “creg c[5];” 在列表 1.2 的第四行，是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.3 的左下，五個傳統位元隨後為 $c[0]$, $c[1]$, $c[2]$, $c[3]$ 和 $c[4]$ 。每個傳統位元的初始值設置為 0。

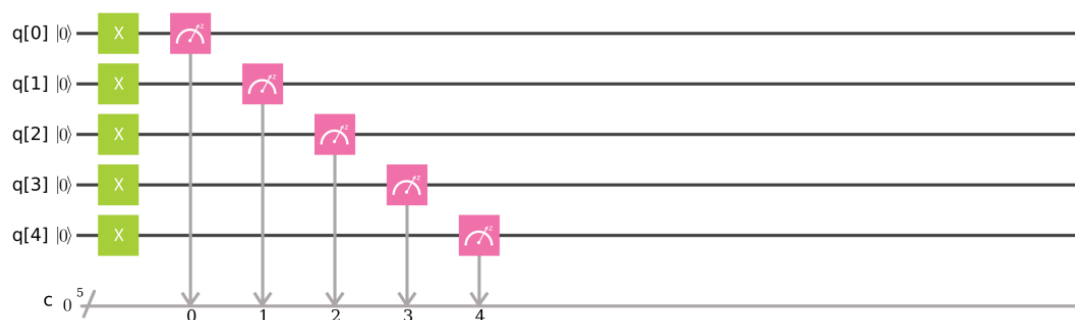


圖 1.3: 利用五個量子 NOT 閘操作五個量子位元的電路

語句 “x q[0];” 在列表 1.2 第 5 行實現了 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。這表示 “x q[0];” 在列表 1.2 第 5 行上，使用 NOT 閘將 $q[0]$ 從這個狀態 $|0\rangle$ 轉成這個狀態 $|1\rangle$ ，其中 “x” 表示 NOT 閘。接著，語句 “x q[1];” 在列表 1.2 的第六行完成了 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。也就是說 “x q[1];” 在列表 1.2 的第六行將使用 NOT 閘將 $q[1]$ 從狀態 $|0\rangle$ 轉成狀態 $|1\rangle$ 。接下來，語句 “x q[2];” 在列表 1.2 的第七行實現 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。這表示語句 “x q[2];” 在列表 1.2 的第七行中，使用 NOT 閘將 $q[2]$ 從狀態 $|0\rangle$ 轉成狀態 $|1\rangle$ 。接著，語句 “x q[3];” 在列表 1.2 第八行完成 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。這表示語句 “x q[3];” 在列表 1.2 第八行使用 NOT 閘將 $q[3]$ 從狀態 $|0\rangle$ 轉成狀態 $|1\rangle$ 。接著，語句 “x q[4];” 在列表 1.2 第九行執行 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

語句 “x q[4];” 在列表 1.2 的第九行中，使用 NOT 閘將 $q[4]$ 從狀態 $|0\rangle$ 轉成狀態 $|1\rangle$ 。完成上述五個語句后，每個量子位元的狀態 $|0\rangle$ 將轉換為狀態 $|1\rangle$ 。

接下來，列表 1.2 第 10 行的語句 “measure q[0] -> c[0];” 是測量第一個量子位元 $q[0]$ ，並通過覆蓋第一個傳統位元 $c[0]$ 來記錄測量結果。列表 1.2 的第 11 行的語句 “measure q[1] -> c[1];” 是測量第二個量子位元 $q[1]$ ，並通過覆蓋第二個傳統位元 $c[1]$ 來記錄測量結果。接下來，列表 1.2 第 12 行的語句 “measure q[2] -> c[2];” 是測量第三個量子位元 $q[2]$ ，並通過覆蓋第三個傳統位元 $c[2]$ 來記錄測量結果。列表 1.1 第 13 行的語句 “measure q[3] -> c[3];” 是測量

第四個量子位元 $q[3]$,並通過覆蓋第四個傳統位元 $c[3]$ 來記錄測量結果。接下來,列表 1.1 第 14 行的語句 “measure $q[4] \rightarrow c[4]$;”是測量第五個量子位元 $q[4]$, 並通過覆蓋第五個傳統位元 $c[4]$ 來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,IBM 的量子電腦中有五個量子位元,我們使用命令 “simulate”來執行列表 1.2 中的程式。結果如圖 1.4 所示。從圖 1.4 中,我們獲得答案 11111 ($c[4] = q[4] = |1\rangle$, $c[3] = q[3] = |1\rangle$, $c[2] = q[2] = |1\rangle$, $c[1] = q[1] = |1\rangle$ and $c[0] = q[0] = |1\rangle$) 的概率為 1

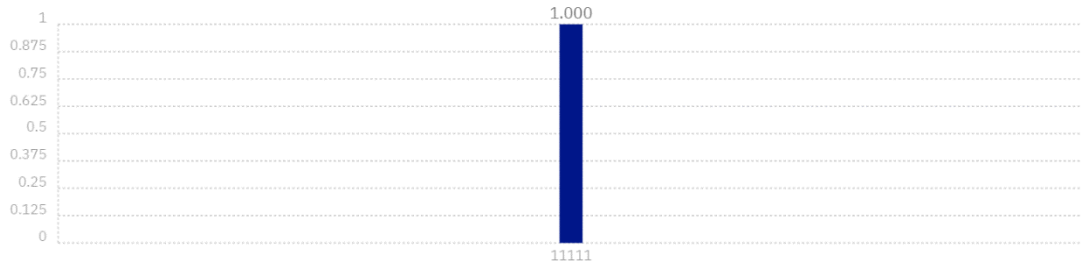


圖 1.4:在列表 1.2 中的程序測量完成後,我們獲得概率為 1.000 的答案 11111。

1.3 單量子位元哈達馬閘

單個量子位元的哈達馬德閘是

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

假定 H^+ 是 H 的偶數轉置矩陣,等於 $(H^*)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, 其中* 示複雜偶聯 t 表示轉置

操作。由於 $H \times (H^*)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (H^*)^t \times H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, H 單一矩陣或單一運算符。這就是說,哈達馬德閘 H 量子閘之一,

具有單個量子位元。如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

頂部條目是 $|0\rangle$ 的振幅,底部條目是 $|1\rangle$ 的振幅。則哈達馬德閘 H 的相應輸出為

$$\begin{pmatrix} \frac{l_0+l_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{l_0-l_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{l_0+l_1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{l_0-l_1}{\sqrt{2}} |1\rangle. \quad (1.9)$$

如果在 (1.8) 中 l_0 的值等於 1,且 l_1 的值等於零,則哈達馬德閘 H 將 $|0\rangle$ 轉換為 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (H 的第一列),即是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之間的 ‘halfway’。同樣,如果在 (1.8) 中 l_0 的值等於零,且 l_1 的值等於 1,則哈達馬德閘 H 將 $|1\rangle$ 轉換成 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$ (H 的第二列),這

也是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之間的 ‘halfway’。因為 $H^2 = H \times H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 使用 H 兩次到一個狀態對它沒有任何說明。對於 **IBM Q** 體驗,哈達馬德閘 H 的圖形表示方式如下:



1.3.1 單量子位元哈達閘編程

在列表 1.3 中, **IBM** 量子編程中帶有五個量子位元的後端 *ibmqx4* 的程式是第三個例子,我們描述了如何使用哈達馬德閘操作一個量子位元進程式設計。圖 1.5 是列表 1.3 中程式的相應量子電路。列表 1.3 第一行的語句"OPENQASM 2.0"指出,程式是使用 Open QASM 的 2.0 版編寫的。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. measure q[0] -> c[0];

```

列表 1.3: 程式對使用哈達姆拉德閘操作量子位元

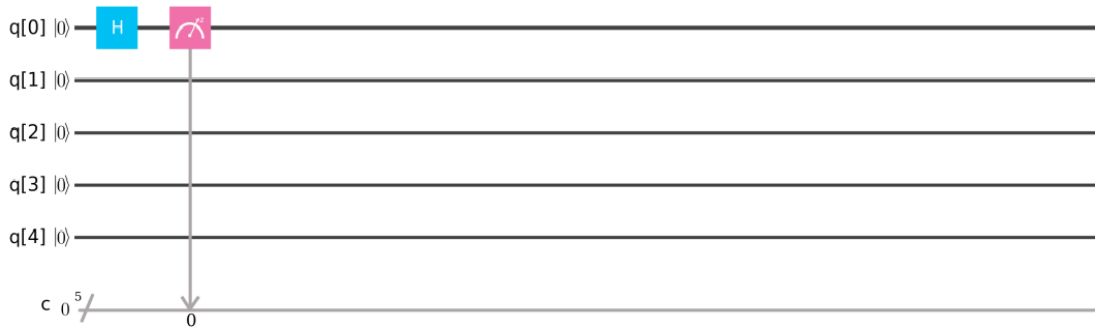


圖 1.5:哈達姆拉德開的量子電路運行量子位元。

語句 “include "qelib1.inc";” 在列表 1.3 的第二行是繼續解析檔案 “qelib1.inc” 好像是將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案 “qelib1.inc” 是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句 “qreg q[5];” 在列表 1.3 的第三行,是宣告程式中有五個量子位元。在圖 1.5 的左上部,五個量子位元隨後為 q[0], q[1], q[2], q[3] and q[4]。每個量子位元的初始值設置為 |0>。

接下來,語句 “creg c[5];” 在列表 1.3 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.5 的左下部,五個傳統位元隨後為 c[0], c[1], c[2], c[3] and c[4]。每個傳統位元的初始值設置為 0。

語句 “h q[0];” 在列表 1.3 的第五行實際完成 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 。也就是說宣告 “h q[0];” 在列表 1.3 的第五行,

使用哈達馬德開將 q[0] 從狀態 |0> 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition),其中 “h” 表示哈達馬德開。

接下來,列表 1.3 第六行的語句 “measure q[0] -> c[0];” 是測量第一個量子位元 q[0],並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0]來記錄測量結果。在後端 ibmqx4 中,在 IBM 的量子電腦中具有五個量子位元,我們應用命令 “模擬”來執行列表 1.3 中的程式。結果如圖 1.6 所示。從圖 1.6 中,我們獲得答案(c[4] = q[4] = |0>, c[3] = q[3] = |0>, c[2] = q[2] = |0>, c[1] = q[1] = |0> 和 c[0] = q[0] = |1>)的概率是 0.520。或是獲得概率為 0.48 的答案 (c[4] = q[4] = |0>, c[3] = q[3] = |0>, c[2] = q[2] = |0>, c[1] = q[1] = |0> 和 c[0] = q[0] = |0>)



圖 1.6:在列表 1.3 中程序的測量完成後,我們獲得概率為 0.520 的答案 00001,獲得概率為 0.480 的答案 00000。

1.4 單量子位元 Z 閘

單個量子位元的 Z 閘是

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\pi} \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

其中 $e^{\sqrt{-1}\times\pi}$ 相同於 $\cos(\pi) + \sqrt{-1} \times \sin(\pi) = -1$ 。假設 Z^+ 是 Z 的偶數轉置矩陣且等於 $(Z^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 表示複雜偶聯, 且 t 表示轉置操作。因為 $Z \times (Z^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Z 是單一矩陣(unitary matrix)或單一運算符(unitary operator)。這意味著 Z 閘是具有單個量子位元的量子閘之一。如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

頂部條目是 $|0\rangle$ 的振幅, 底部條目是 $|1\rangle$ 的振幅, 則 Z 閘的相應輸出為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ -l_1 \end{pmatrix} = l_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-l_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_0 |0\rangle + (-l_1) |1\rangle. \quad (1.12)$$

這表示 Z 閘離開 $|0\rangle$ 不變, 並翻轉 $|1\rangle$ 的標誌, 以給予 $-|1\rangle$ 。由於 $Z^2 = Z \times Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 將 Z 兩次應用於一個狀態對它沒有任何說明。對於 IBM Q 體驗, Z

闢的圖形表示方式如下:



1.4.1 單量子位元 Z 闢編程

在列表 1.4 中,後端 ibmqx4 中帶有五個量子位元的程式是第四個示例,其中我們說明瞭如何使用 Z 闢進程式設計, Z 闢使 $|0\rangle$ 保持不變,並翻轉 $|1\rangle$ 的符號,以給出 $-|1\rangle$. 圖 1.7 是列表 1.4 中程式的相應量子電路。列表 1.4 第一行的語句“OPENQASM 2.0;” 表示程式是使用 Open QASM 版本 2.0 編寫的。接下來,語句 “include "qelib1.inc";” 在列表 1.4 的第二行是繼續解析檔案 “qelib1.inc” 好像是將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案 “qelib1.inc” 是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。

```
1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. z q[0];
7. measure q[0] -> c[0];
```

列表 1.4:使用 Z 闢的程式。

語句 “qreg q[5];” 在列表 1.4 的第三行,是宣告程式中有五個量子位元。在圖 1.7 的左上部,五個量子位元隨後為 $q[0]$, $q[1]$, $q[2]$, $q[3]$ 和 $q[4]$. 每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$. 接下來,語句“creg c[5];” 在列表 1.4 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.7 的左下部,五個傳統位元隨後為 $c[0]$, $c[1]$, $c[2]$, $c[3]$ 和 $c[4]$. 每個傳統位元的初始值設置為 0。

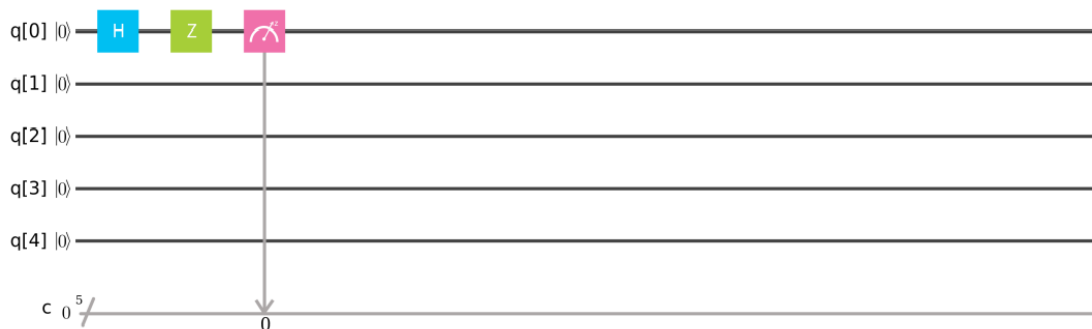


圖 1.7:列表 1.4 中程式的相應量子電路。

語句 “h q[0];” 在列表 1.4 第五行實現 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 這表明語句“h q[0];”在列表 1.4 的第五行,使用哈達德閘將 q[0] 從狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition), 其中“h”表示哈達馬德閘。接下來,語句 “z q[0];” 在列表 1.4 的第六行完成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$. 這就是說語句 “z q[0];” 在列表 1.4 的第六行,應用 Z 閘將 q[0] 從狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$.

接下來,列表 1.4 第 7 行的語句“measure q[0] -> c[0];”是測量第一個量子位元 q[0],並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0]來記錄測量結果。在後端 ibmqx4 中,IBM 的量子計算機中有五個量子位元,我們使用命令“模擬”來執行列表 1.4 中的程式。結果如圖 1.8 所示。從圖 1.8 中,我們獲得答案 00001 (c[4] = q[4] = $|0\rangle$, c[3] = q[3] = $|0\rangle$, c[2] = q[2] = $|0\rangle$, c[1] = q[1] = $|0\rangle$ 和 c[0] = q[0] = $|1\rangle$)的概率是 0.49。或者,我們獲得答案 00000 (c[4] = q[4] = $|0\rangle$, c[3] = q[3] = $|0\rangle$, c[2] = q[2] = $|0\rangle$, c[1] = q[1] = $|0\rangle$ 和 c[0] = q[0] = $|0\rangle$)的概率為 0.51。



圖 1.8:在列表 1.4 中程式的測量完成後,我們獲得概率為 0.490 的答案 00001,得到概率為 0.510 的答案 00000。

2020/03/16 上到此

1.5 單量子位元 Y 閘

單個量子位元的 Y 閘是

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \\ e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虛單位與 $e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + \sqrt{-1} \times \sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{-1}$ 和 $e^{-\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + \sqrt{-1} \times \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{-1}$. 假定 Y^+ 是 Y 的偶聯轉置矩陣, 等於 $(Y^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, 其中* 表示複雜偶聯與 t 表示轉置操作。由於 $Y \times (Y^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = (Y^*)^t \times Y = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Y 是單一矩陣 (unitary matrix) 或單一運算符 (unitary operator)。這就是說, Y 閘是量子閘之一, 具有單個量子位元。如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

頂部條目是 $|0\rangle$ 的振幅, 底部條目是 $|1\rangle$ 的振幅, 則 Y 閘的相應輸出為

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{-1}l_1 \\ \sqrt{-1}l_0 \end{pmatrix} = (-\sqrt{-1}l_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\sqrt{-1}l_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-\sqrt{-1}l_1) |0\rangle + (\sqrt{-1}l_0) |1\rangle. \quad (1.15)$$

這表示 Y 閘將單個量子位元從狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 轉換為另一個狀態 $(-\sqrt{-1}l_1) |0\rangle + (\sqrt{-1}l_0) |1\rangle$ 。由於 $Y^2 = Y \times Y = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 使用 Y 兩次到一個狀態對它沒有任何說明。對於 **IBM Q** 體驗, Y 閘的圖形表示方式如下:



1.5.1 單量子位元 Y 閘編程

在列表 1.5 中, **IBM** 量子電腦中帶有五個量子位元的後端 *ibmqx4* 中的程式是第五個示例,

其中我們介紹了如何使用 Y 閘進行程式設計,該閘將單個量子位元從一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$ 轉換為另一種狀態 $(-\sqrt{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}) |0\rangle + (\sqrt{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}) |1\rangle$. 圖 1.9 是列表 1.5 中程式的相應量子電路。列表 1.5 第一行的語句 “OPENQASM 2.0;” 指出,程式是使用 Open QASM 的 2.0 版編寫的。接著,語句 “include "qelib1.inc";” 在列表 1.5 的第二行是繼續解析檔案 “qelib1.inc” 好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案 “qelib1.inc” 是量子體驗 (QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句 “qreg q[5];” 在列表 1.5 的第三行,是宣告在程式中有五個量子位元

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. y q[0];
7. measure q[0] -> c[0];

```

列表 1.5:程式使用 Y 閘。

在圖 1.9 的左上部,五個量子位元隨後為 q[0], q[1], q[2], q[3] q[4]. 每個量子位元的初始值設置為 |0>.接下來,語句 “creg c[5];” 在列表 1.5 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.9 的左下部,五個傳統位元隨後為 c[0], c[1], c[2], c[3] 和 c[4]. 每個傳統位元的初始值設置為 0.

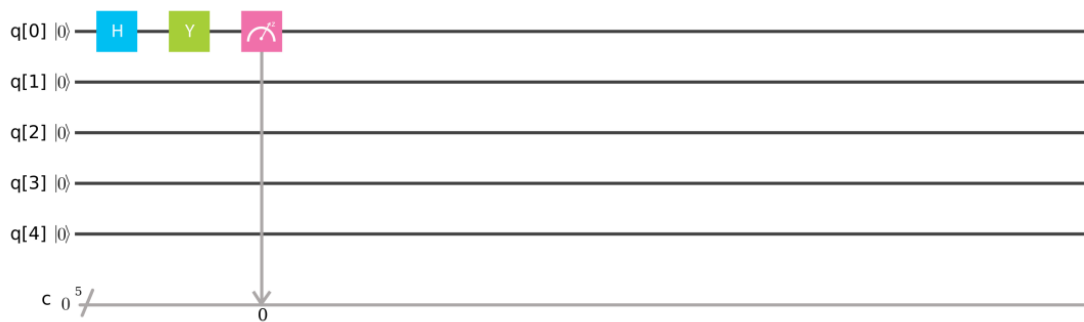


圖 1.9:列表 1.5 中程式的相應量子電路。

語句 “h q[0];” 在列表 1.5 的第五行完成
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 也就是說 “h q[0];” 在列表 1.5 的第五行,應用哈達馬德閘將 q[0]從狀態 $|0\rangle$ 轉換成狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition), 其中“h”表示哈達馬德閘。接下來,語句 “y q[0];” 在列表 1.5 的第六行實現 $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right) = (-\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) |0\rangle + (\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}}) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sqrt{-1} |0\rangle + \sqrt{-1} |1\rangle)$$
. 這表示語句 “y q[0];” 在列表 1.5 的第六行,應用 Y 閘將 q[0] 從一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (-\sqrt{-1} |0\rangle + \sqrt{-1} |1\rangle)$.

接下來,列表 1.5 第 7 行的語句“measure q[0] -> c[0];”是測量第一個量子位元 q[0],並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0]來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,在 **IBM** 的量子電腦中具有五個量子位元,我們應用命令“simulate”來執行列表 1.5 中的程式。結果如圖 1.10 所示。從圖 1.10 中,我們獲得答案 00001 (c[4] = q[4] = $|0\rangle$, c[3] = q[3] = $|0\rangle$, c[2] = q[2] = $|0\rangle$, c[1] = q[1] = $|0\rangle$ 和 c[0] = q[0] = $|1\rangle$) 的概率為 0.52。或者,我們獲得概率為 0.480 的答案 00000 (c[4] = q[4] = $|0\rangle$, c[3] = q[3] = $|0\rangle$, c[2] = q[2] = $|0\rangle$, c[1] = q[1] = $|0\rangle$ 和 c[0] = q[0] = $|0\rangle$)



圖 1.10:在列表 1.5 中程序的測量完成後,我們獲得概率為 0.520 的答案 00001,獲得概率為 0.480 的答案 00000。

1.6 單量子位元的 S 閘

單個量子位元的 S 閘,它是 Z 閘的平方根

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虛單位與 $e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + \sqrt{-1} \times \sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{-1}$. 假定 S^+ 是 S 的偶數轉置矩陣, 等於 $(S^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 指出複雜偶聯與 t 表示轉置操作. 因為 $S \times (S^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} = (S^*)^t \times S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, S 是單一矩陣(unitary matrix)或單一運算符(unitary operator). 這意味著 S 閘是具有單個量子位元的量子閘之一. 如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

頂部條目是 $|0\rangle$ 的振幅, 底部條目是 $|1\rangle$ 的振幅, 則來自 S 閘的相應輸出是

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ \sqrt{-1} l_1 \end{pmatrix} = (l_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\sqrt{-1} l_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (l_0) |0\rangle + (\sqrt{-1} l_1) |1\rangle = (l_0) |0\rangle + (e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \times l_1) |1\rangle. \quad (1.18)$$

這表示 S 閘將單個量子位元從一個狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 轉換成另一個狀態 $(l_0) |0\rangle + (\sqrt{-1} l_1) |1\rangle = (l_0) |0\rangle + (e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \times l_1) |1\rangle$. 這也是說, S 閘離開 $|0\rangle$ 不變, 並修改階段 $|1\rangle$ 給 $(\sqrt{-1}) |1\rangle = (e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} |1\rangle)$. 應用 S 閘後, 測量 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的概率保持不變, 但它修改了量子狀態的相位.

因為 $S^2 = S \times S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 將 S 應用於狀態兩次等效於對其執行 Z 閘. 對於 **IBM Q** 體驗, S 閘的圖形表示方式如下



1.6.1 單量子位元 S 閘程式設計

在列表 1.6 中,後端 *ibmqx4* 中帶有五個量子位元的程式是第六個示例,其中我們將描述如何使用從一個狀態轉換單個量子位元的 S 閘進行程式設計 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換成另一狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}}) (|0\rangle + (\sqrt{-1}) |1\rangle)$. 圖 1.11 是列表 1.6 中程式的相應量子電路。列表 1.6 第一行的語句 “OPENQASM 2.0;” 表示程式是使用 Open QASM 版本 2.0 編寫的。接下來語句 “include "qelib1.inc;” 在列表 1.6 的第二行繼續解析檔案 “qelib1.inc” 好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案 “qelib1.inc” 是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句 “qreg q[5];” 在列表 1.6 的第三行,是宣佈,在程式中有五個量子位元

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. s q[0];
7. measure q[0] -> c[0];

```

列表 1.6:程式使用 S 閘。

在圖 1.11 的左上部,五個量子位元隨後為 q[0], q[1], q[2], q[3] 和 q[4]. 每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$. 接下來,語句 “creg c[5];” 在列表 1.6 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.11 的左下部,五個傳統位元隨後為 c[0], c[1], c[2], c[3] 和 c[4]. 每個傳統位元的初始值設置為 0.

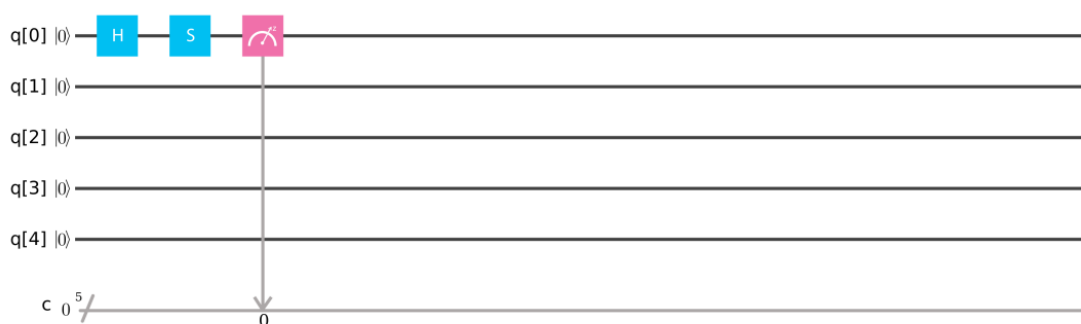


圖 1.11:列表 1.6 中程式的相應量子電路。

語句 “h q[0];” 在列表 1.6 第五行實現 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 這表示語句“h q[0];” 在列表 1.6 的第五行,使用哈達馬德閘將 q[0] 從狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition),其中 “h”

表示哈達馬德閘。接下來,語句“s q[0];” 列表 1.6 的第六行完成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\sqrt{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(|0\rangle + \sqrt{-1} |1\rangle)$. 這就是語句 “s q[0];” 在列表 1.6 的第六行,使用 S 閘將 q[0] 從一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \sqrt{-1} |1\rangle)$.

接下來,語句 “measure q[0] -> c[0];” 在列表 1.6 第 7 行是測量第一個量子位元 q[0] 並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0] 來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,IBM 的量子電腦中有五個量子位元,我們使用命令“simulate”來執行列表 1.6 中的程式。結果如圖 1.12 所示。從圖 1.12 中,我們獲得答案 00001 (c[4] = q[4] = $|0\rangle$, c[3] = q[3] = $|0\rangle$, c[2] = q[2] = $|0\rangle$, c[1] = q[1] = $|0\rangle$ 和 c[0] = q[0] = $|1\rangle$) 的概率是 0.55。或者,我們獲得概率為 0.450 的答案 00000 (c[4] = q[4] = $|0\rangle$, c[3] = q[3] = $|0\rangle$, c[2] = q[2] = $|0\rangle$, c[1] = q[1] = $|0\rangle$ 和 c[0] = q[0] = $|0\rangle$)。



圖 1.12:在列表 1.6 中程式的測量完成後,我們獲得概率為 0.550 的答案 00001,獲得概率為 0.450 的答案 00000。

1.7 單個量子位元的 S^+ 閘

單個量子位元的 S^+ 閘,即 S 閘的偶數轉置矩陣

$$S^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虛單位與 $e^{-\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + \sqrt{-1} \times \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{-1}$. 假定

$(S^+)^+$ 是 S^+ 的偶數轉置矩陣, 等於 $((S^+)^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$, 其

中 $*$ 表示複雜偶聯與 t 表示是轉置操作. 由於 $S^+ \times ((S^+)^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \times$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} = ((S^+)^*)^t \times S^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, S^+ 是單一矩陣

(unitary matrix)或單一運算符(unitary operator). 這就是說 S^+ 閘是具有單個量子位元的量子閘之一. 如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

頂部條目是 $|0\rangle$ 的振幅, 底部條目是 $|1\rangle$ 的振幅, 然後來自 S^+ 閘的相應輸出是

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ -\sqrt{-1} l_1 \end{pmatrix} = (l_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\sqrt{-1} l_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (l_0) |0\rangle + (-\sqrt{-1} l_1) |1\rangle = (l_0) |0\rangle +$$

$$(e^{-\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \times l_1) |1\rangle. \quad (1.21)$$

這意味著 S^+ 閘將單個量子位元從一個狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 轉換為另一個狀態 $(l_0) |0\rangle +$

$(-\sqrt{-1} l_1) |1\rangle = (l_0) |0\rangle + (e^{-\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} \times l_1) |1\rangle$. 這也表明 S^+ 閘離開 $|0\rangle$ 不變, 並修改 $|1\rangle$

的相位, 以給予 $(-\sqrt{-1}) |1\rangle (e^{-\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{2}} |1\rangle)$. 在應用 S^+ 閘後, 測量或 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的概率保持

不變, 但它修改了量子狀態的相位. 因為 $(S^+)^2 = S^+ \times S^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 對狀態應用 S^+ 兩次等效於對其執行 Z 閘. 對於 **IBM Q** 體驗, S^+ 閘的圖形表示方式如下:



1.7.1 使用單量子位元 S^+ 閘編程

在列表 1.7 中,後端 *ibmqx4* 中帶有五個量子位元的程式是第七個示例,其中我們說明瞭如何使用 S^+ 閘進行程式設計,該程式將單個量子位元從一個狀態轉換 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 到其他狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}}) (|0\rangle + (-\sqrt{-1}) |1\rangle)$.圖 1.13 是列表 1.7 中程式的相應量子電路。列表 1.7 第一行的語句“OPENQASM 2.0;” 指出,程式是使用 Open QASM 的 2.0 版編寫的。接下來語句“include "qelib1.inc;” 在列表 1.7 的第二行繼續解析檔案 “qelib1.inc” 好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案 “qelib1.inc” 是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句 “qreg q[5];” 在列表 1.7 的第三行,是宣告在程式中有五個量子位元。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. sdg q[0];
7. measure q[0] -> c[0];

```

列表 1.7:程式使用 S^+ 閘。

在圖 1.13 的左上部,五個量子位元隨後為 $q[0]$, $q[1]$, $q[2]$, $q[3]$ 和 $q[4]$. 每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$.接下來,語句 “creg $c[5]$;” 在列表 1.7 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.13 的左下部,五個傳統位元隨後為 $c[0]$, $c[1]$, $c[2]$, $c[3]$ 和 $c[4]$. 每個傳統位元的初始值設置為 0.

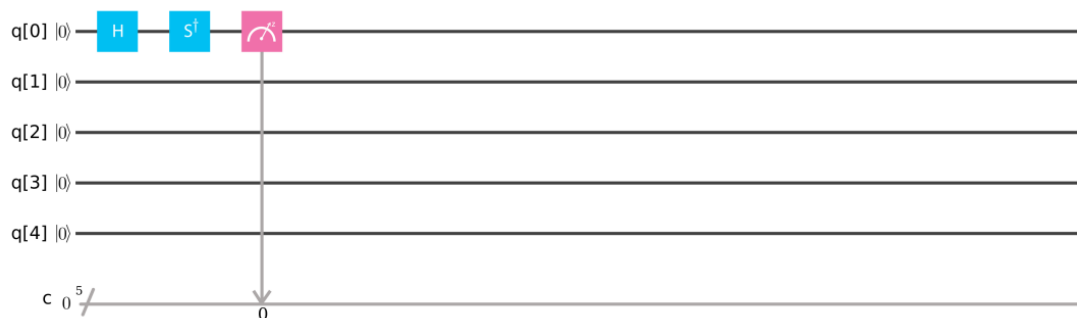


圖 1.13:列表 1.7 中程式的相應量子電路。

語句 “h $q[0]$;” 在列表 1.7 的第五行完成
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 這就是說語句“h q[0];” 在列表 1.7 的第五行,應用哈達馬德閘將 q[0] 從一個狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition), 其中“h” 表示哈達馬德閘。接下來,語句 “sdg q[0];” 在列表 1.7 的六行實際執行

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\sqrt{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-\sqrt{-1}) |1\rangle)$$

這表示語句 “sdg q[0];” 在列表 1.7 的第六行,應用 S^+ 閘將 q[0] 從一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-\sqrt{-1}) |1\rangle)$ 。

接下來,列表 1.7 第 7 行的語句“measure q[0] -> c[0];”是測量第一個量子位元 q[0],並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0]來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,在 **IBM** 的量子電腦中具有五個量子位元,我們應用命令“simulate”來執行列表 1.7 中的程式。結果如圖 1.14 所示。從圖 1.14 中,我們獲得答案 00001 (c[4] = q[4] = $|0\rangle$, c[3] = q[3] = $|0\rangle$, c[2] = q[2] = $|0\rangle$, c[1] = q[1] = $|0\rangle$ 和 c[0] = q[0] = $|1\rangle$) 的概率為 0.5。或是我們獲得概率為 0.5 的答案 00000 (c[4] = q[4] = $|0\rangle$, c[3] = q[3] = $|0\rangle$, c[2] = q[2] = $|0\rangle$, c[1] = q[1] = $|0\rangle$ 和 c[0] = q[0] = $|0\rangle$)



圖 1.14:在列表 1.7 中程序的測量完成後,我們獲得概率為 0.500 的答案 00001,獲得概率為 0.500 的答案 00000。

1.8 單量子位元 T 閘

單個量子位元的 T 閘,它是 S 閘的平方根

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times \frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虛單位與 $e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{-1} \times \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 假定 T^+ 是 T 的偶數轉置矩陣, 等於 $(T^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 表示複雜偶聯, t 表示轉置操作. 由於 $T \times (T^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = (T^*)^t \times T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, T 是單一矩陣或單一運算元. 這表明 T 閘是具有單個量子位元的量子閘之一. 如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

頂部條目是 $|0\rangle$ 的振幅, 底部條目是 $|1\rangle$ 的振幅, 則 T 閘的相應輸出為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times l_1 \end{pmatrix} = (l_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times l_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (l_0) |0\rangle + (e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times l_1) |1\rangle. \quad (1.24)$$

這就是說 T 閘將單個量子位元從一個狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 轉換為另一個狀態 $(l_0) |0\rangle + (e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times l_1) |1\rangle$. 這還意味著 T 閘離開 $|0\rangle$ 不變, 並修改 $|1\rangle$ 的相位, 以給予 $(e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} |1\rangle)$. 使用 T 閘後, 測量 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的可能性保持不變, 但它修改了量子狀態的相位. 因為 $(T)^2 = T \times T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$, 使用 T 兩次到一個狀態等效於對它執行 S 閘. 對於 **IBM Q** 體驗, T 閘的圖形表示方式如下



1.8.1 單量子位元 T 閘程式設計

在列表 1.8 中, 後端 *ibmqx4* 中帶有五個量子位元的程式是第八個示例, 其中我們將描述如何使用 T 閘進行程式設計, 該 T 閘將單個量子位元從一個狀態轉換 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 到其他狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}}) (|0\rangle + (e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} |1\rangle))$. 圖 1.15 是列表 1.8 中程式的相應量子電路. 列表 1.8

第一行的語句“OPENQASM 2.0;”表示程式是使用 Open QASM 版本 2.0 編寫的。接下來，語句“include "qelib1.inc";”在列表 1.8 的第二行繼續解析檔案“qelib1.inc”好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置，其中檔案“qelib1.inc”是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句“qreg q[5];”在列表 1.8 的第三行，是宣告在程式中有五個量子位元。

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. t q[0];
7. measure q[0] -> c[0];

列表 1.8:程式使用 T 閘。

在圖 1.15 的左上部，五個量子位元隨後為 q[0], q[1], q[2], q[3] 和 q[4]。每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$ 。接下來，語句“creg c[5];”列表 1.8 的 4 號線是宣佈有 5 個傳統位元。

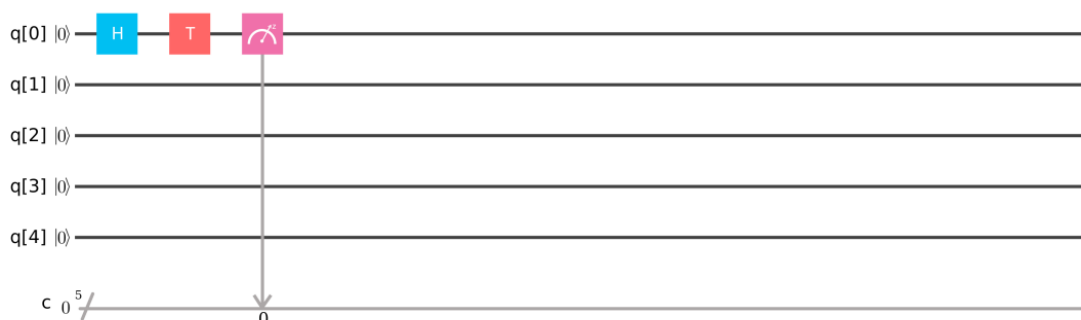


圖 1.15:列表 1.8 中程式的相應量子電路。

在圖 1.15 的左下部，五個傳統位元隨後為 c[0], c[1], c[2], c[3] 和 c[4]。每個傳統位元的初始值設置為 0。

語句“h q[0];”在列表 1.8 的第五行實現 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 。這意味著他宣告“h q[0];”在列表 1.8 的第五行，使用哈達德閘將 q[0] 從一個狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加，

superposition), 其中“h”表示哈達馬德閘。接下來,語句“t q[0];”在列表 1.8 的第六行實際完

成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}}) |1\rangle)$ 。這就是說語句“t q[0];”在列表 1.8 的第六行使用 T 閘將 q[0] 從一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}}) |1\rangle)$ 。

接下來,列表 1.8 第 7 行的語句“measure q[0] -> c[0];”是測量第一個量子位元 q[0] 並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0] 來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,IBM 的量子電腦中有五個量子位元,我們使用命令“simulate”來執行列表 1.8 中的程式。結果如圖 1.16 所示。從圖 1.16 中,我們獲得了答案



圖 1.16:在列表 1.8 中程序的測量完成後,我們獲得概率為 0.480 的答案 00001,獲得概率為 0.520 的答案 00000。

00001 ($c[4] = q[4] = |0\rangle, c[3] = q[3] = |0\rangle, c[2] = q[2] = |0\rangle, c[1] = q[1] = |0\rangle$ and $c[0] = q[0] = |1\rangle$) 的概率為 0.480。或者,我們獲得概率為 0.520 的答案 00000 ($c[4] = q[4] = |0\rangle, c[3] = q[3] = |0\rangle, c[2] = q[2] = |0\rangle, c[1] = q[1] = |0\rangle$ and $c[0] = q[0] = |0\rangle$)。

1.9 單量子位元 T+ 閘

單個量子位元的 T+ 閘,即 T 閘的偶數轉置矩陣

$$T^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虛單位 $e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + \sqrt{-1} \times \sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 。假定

$(T^+)^\dagger$ 是 T^+ 的偶數轉置矩陣，等於 $((T^+)^\dagger)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ，其中 $*$ 是複雜的偶聯且 t 是轉置操作。由於 $T^+ \times ((T^+)^\dagger)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = ((T^+)^\dagger)^t \times T^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， T^+ 是單一矩陣(unitary matrix)或單一運算符(unitary operator)。這就是說 T^+ 閘是具有單個量子位元的量子閘之一。如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

頂部條目是 $|0\rangle$ 的振幅,底部條目是 $|1\rangle$ 的振幅,則 T^+ 閘的相應輸出為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times l_1 \end{pmatrix} = (l_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times l_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (l_0) |0\rangle + (e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times l_1) |1\rangle. \quad (1.27)$$

這表示 T^+ 閘將單個量子位元從一個狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 轉換為另一個狀態 $(l_0) |0\rangle + (e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times l_1) |1\rangle$ 。這還意味著 T^+ 閘離開 $|0\rangle$ 不變,並修改 $|1\rangle$ 的相位,以給予 $(e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}})$ $|1\rangle$ 。在應用 T^+ 閘 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的概率保持不變,但它修改了量子態的相位。因為 $(T^+)^2 = T^+ \times T^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$ ，對狀態應用 T^+ 兩次等效於對它執行 S^+ 閘。對於 **IBM Q** 體驗, T^+ 閘的圖形表示方式如下:



1.9.1 使用單量子位元 T^+ 閘編程

在列表 1.9 中,後端 *ibmqx4* 中帶有五個量子位元的程式是介紹如何使用 T^+ 閘進行程式設計的第九個示例,該 T^+ 閘將單個量子位元從一個狀態轉換 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 到其他狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}}) |1\rangle))$ 。圖 1.17 是列表 1.9 中程式的相應量子電路。列表 1.9 第一行的語句 “OPENQASM 2.0;” 指出,程式是使用 Open QASM 的 2.0 版編寫的。接下來,語句 “include “qelib1.inc”;” 在列表 1.9 的第二行繼續解析檔案 “qelib1.inc” 好

像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案 “qelib1.inc” 是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句 “qreg q[5];” 在列表 1.9 的第三行,是宣告在程式中有五個量子位元。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. tdg q[0];
7. measure q[0] -> c[0];

```

列表 1.9: 程式使用 T+ 關。

在圖 1.17 的左上部,五個量子位元隨後為 q[0], q[1], q[2], q[3] q[4]. 每個量子位元的初始值設置為 |0>. 接下來,語句 “creg c[5];” 在列表 1.9 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.17 的左下部,五個傳統位元隨後為 c[0], c[1], c[2], c[3] 和 c[4]. 每個傳統位元的初始值設置為 0.

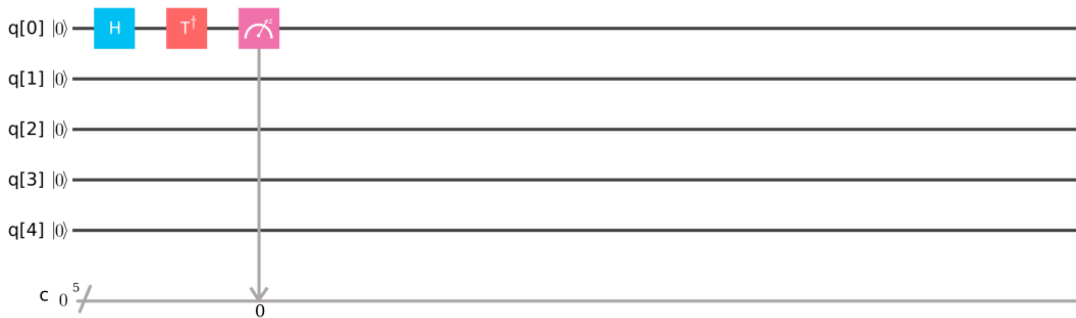


圖 1.17:列表 1.9 中程式的相應量子電路。

語句 “h q[0];” 列表 1.9 的第五行完成 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 這就是說宣告 “h q[0];” 在列表 1.9 的第五行,使用哈達馬德閘將 q[0] 從一個狀態 |0> 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition), 其中 “h” 示哈達馬德閘。接下來,語句 “tdg q[0];” 在列表 1.9 的六行實際

實現 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}}) |1\rangle)$. 這表示宣告 “tdg q[0];” 列表 1.9 的第六行使用 T^+ 閘將 $q[0]$ 從一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (e^{-\sqrt{-1}\times\frac{\pi}{4}}) |1\rangle)$.

接下來,列表 1.9 第 7 行的語句“measure q[0] -> c[0];”是測量第一個量子位元 $q[0]$,並通過覆蓋第一個傳統位元 $c[0]$ 來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,在 **IBM** 的量子電腦中具有五個量子位元,我們應用命令“simulate”來執行列表 1.9 中的程式。結果如圖 1.18 所示。從圖 1.18 中,我們獲得答案 00001($c[4] = q[4] = |0\rangle, c[3] = q[3] = |0\rangle, c[2] = q[2] = |0\rangle, c[1] = q[1] = |0\rangle$ and $c[0] = q[0] = |1\rangle$) 的概率是 0.55。或是我們獲得概率為 0.45 的答案 00000 ($c[4] = q[4] = |0\rangle, c[3] = q[3] = |0\rangle, c[2] = q[2] = |0\rangle, c[1] = q[1] = |0\rangle$ and $c[0] = q[0] = |0\rangle$)。



圖 1.18:在列表 1.9 中程序的測量完成後,我們獲得概率為 0.550 的答案 00001,獲得概率為 0.450 的答案 00000。

1.10 單個量子位元的身份閘

單個量子位元的標識閘 ID 是

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

假定 id^+ 是 id 的偶數轉置矩陣,等於 $((id)^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 是複合偶聯, t 是轉置操作。

因為 $id \times ((id)^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ((id)^*)^t \times id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, id 是一陣陣或單一矩陣算子。這表明標識閘 id 是具有單個量子位元的量子閘之一。

如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

頂部條目是 $|0\rangle$ 的振幅,底部條目是 $|1\rangle$ 的振幅,則來自標識閘 id 的相應輸出是

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix} = l_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle. \quad (1.30)$$

這就是說,標識閘 id 將單個量子位元從一個狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 轉換為另一個狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 。這還意味著標識閘 id 不會更改 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 並且僅在等於一個時間單位的時間對單個量子位元執行空間操作。使用識別閘 id 後,測量 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的概率保持不變。由於 $(id)^2 =$

$$id \times id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

將識別閘 id 兩次應用於狀態相當於對它不執行任何操作。對於 **IBM Q** 體驗,標識閘 id 的圖形表示方式如下:



1.10.1 使用單量子位元標識閘編程

在列表 1.10 中,後端 *ibmqx4* 中帶有五個量子位元的程式是介紹如何使用從一個狀態轉換單個量子位元 $q[0]$ 的標識閘 id 進行程式設計的第十個示例 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 到其他狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle))$ 。實際上,標識閘 id 僅在 $q[0]$ 上完成空間操作的時間等於一個時間單位。圖 1.19 是列表 1.10 中程序的相應量子電路。列表 1.10 第一行的語句 “OPENQASM 2.0;” 表示程式是使用 Open QASM 版本 2.0 編寫的。接下來,宣告 “include “qelib1.inc”;;” 在列表 1.10 的第二行是繼續解析檔案 “qelib1.inc” 好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案 “qelib1.inc” 是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句 “qreg q[5];” 在列表 1.10 的第三行,是宣告程式中有五個量子位元。

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";

3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. id q[0];
7. measure q[0] -> c[0];

列表 1.10:程式要使用標識闡。

在圖 1.19 的左上角,五個量子位元是隨後的 $q[0]$, $q[1]$, $q[2]$, $q[3]$ 和 $q[4]$. 每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$. 接下來,語句 “creg c[5];” 在列表 1.10 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.19 的左下部,五個傳統位元隨後為 $c[0]$, $c[1]$, $c[2]$, $c[3]$ 和 $c[4]$. 每個傳統位元的初始值設置為 0.

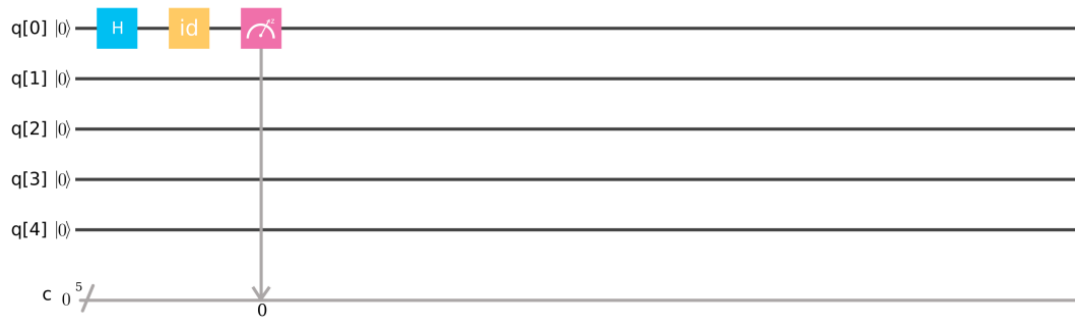


圖 1.19:列表 1.10 中程序的相應量子電路。

語句 “h q[0];” 在列表 1.10 的五行實際執行 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 這意味著他宣告 “h q[0];” 在列表 1.10 的第五行,應用哈達馬德闡將 $q[0]$ 從一個狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition), 其中 “h” 表示哈達馬德闡。接下來,語句 “id q[0];” 在列表 1.10 的第六行實際完成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 這就是說宣告 “id q[0];” 列表 1.10 的第六行使用標識闡 *id* 將 $q[0]$ 從一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 這還意味著,標識闡 *id* 僅在 $q[0]$ 上完成空閒操作,時間等於一個時間單位。

接下來,列表 1.10 第 7 行的語句“measure q[0] -> c[0];”是測量第一個量子位元 q[0],並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0]來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,在 **IBM** 的量子電腦中具有五個量子位元,我們應用命令“simulate”來執行列表 1.10 中的程式。結果如圖 1.20 所示。從圖 1.20 中,我們獲得答案 00001(c[4] = q[4] = |0>, c[3] = q[3] = |0>, c[2] = q[2] = |0>, c[1] = q[1] = |0> 和 c[0] = q[0] = |1>) 的概率為 0.46。或是我們獲得概率為 0.54 的答案 00000 (c[4] = q[4] = |0>, c[3] = q[3] = |0>, c[2] = q[2] = |0>, c[1] = q[1] = |0> 和 c[0] = q[0] = |0>).



圖 1.20:在列表 1.10 中程式的測量完成後,我們獲得概率為 0.460 的答案 00001,獲得概率為 0.540 的答案 00000。

2020/3/30 教到此

1.11 兩個量子位元的 Controlled-NOT 閘

兩個量子位元的 *controlled-NOT* 或 *CNOT*

$$U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

假定 U_{CN}^+ 是 U_{CN} 的偶數轉置矩陣,等於 $((U_{CN})^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 是複雜偶

聯, t 是轉置操作, 由於 $U_{CN} \times ((U_{CN})^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$((U_{CN})^*)^t \times U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U_{CN} \text{ 是單}$$

一矩陣(unitary matrix)或單一運算符(unitary operator)。這就是說, *controlled-NOT* 或

CNOT 閘 U_{CN} 是具有兩個量子位元的量子閘之一。如果量子狀態 $l_0|00\rangle + l_1|01\rangle + l_2|10\rangle + l_3|11\rangle$ 以向量表示法書寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

第一個條目 l_0 是 $|00\rangle$ 的振幅,第二個條目 l_1 是 $|01\rangle$ 的振幅,第三個條目 l_2 是 $|10\rangle$ 的振幅,第四個條目 l_3 是 $|11\rangle$ 的振幅,則來自 **CNOT** 閘 U_{CN} 的相應輸出為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = l_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_0|00\rangle + l_1|01\rangle + l_2|10\rangle + l_3|11\rangle. \quad (1.33)$$

這表示 **CNOT** 閘 U_{CN} 將兩個量子位元從一個狀態 $l_0|00\rangle + l_1|01\rangle + l_2|10\rangle + l_3|11\rangle$ 轉換為另一個狀態 $l_0|00\rangle + l_1|01\rangle + l_2|10\rangle + l_3|11\rangle$ 。也就是說,在 **CNOT** 閘 U_{CN} 中,如果控制量子位元(第一個量子位元)設置為 0,則目標量子位元(第二個量子位元)是單獨保留的。如果控制量子位元(第一個量子位元)設置為 1,則目標量子位元(第二個量子位元)被翻轉。測量 $|00\rangle$ or $|01\rangle$ 的概率保持不變,測量 $|10\rangle$ 的概率是 $|l_3|^2$,測量 $|11\rangle$ 的概率是 $|l_2|^2$,應用

$$\text{CNOT 閘 } U_{CN}. \text{ 因為 } (U_{CN})^2 = U_{CN} \times U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

將 **CNOT** 閘 U_{CN} 兩次應用於一個狀態相當於對它不執行任何操作。對

於 IBM Q 體驗, **CNOT** 閘 U_{CN} 的圖形表示方式如下:



在 **CNOT** 閘 U_{CN} 的圖形表示,頂部導線承載控制量子位元,底部導線承載目標量子位元。

1.11.1 IBMQX4 中受 Controlled-NOT 閘的連接性

編寫教科書的作者編寫量子演演演算法時,具有完全連接的硬體,其中可以將兩個量子位元的量子閘應用於任意一對兩個量子位元。實際上,真正的量子計算機 *ibmqx4* 可能沒有完全連接。在具有五個量子位元的 *ibmqx4* 中,有六個連接。圖 1.21 中出現了 **CNOT** 閘的六個連接。圖 1.21 中的第一個 **CNOT** 閘具有控制量子位元 $q[1]$ 和目標量子位元 $q[0]$,Open QASM 版本 2.0 中的相應指令是“`cx q[1],q[0];`”,其中 **cx** 表示 **CNOT** 閘。

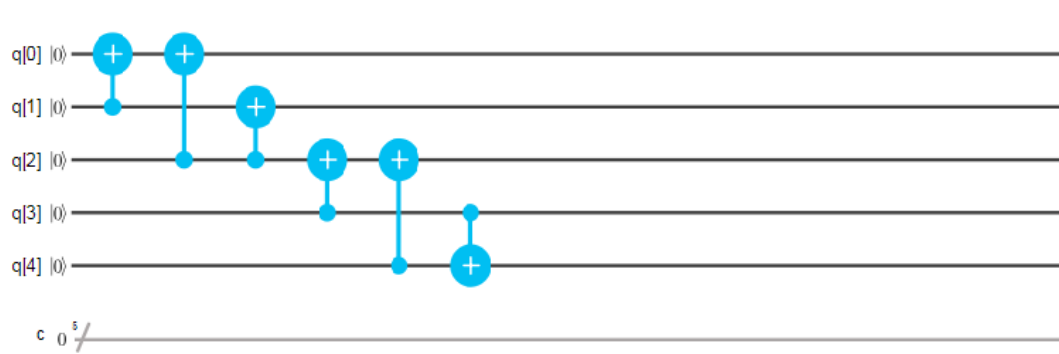


圖 1.21: **CNOT** 閘在 **IBM** 量子電腦上 *ibmqx4* 中有六個連接。

圖 1.21 中的第二個 **CNOT** 閘具有控制量子位元 $q[2]$ 和目標量子位元 $q[0]$ 和 Open QASM 版本 2.0 中的相應指令是“`cx q[2],q[0];`”, 其中 **cx** 表示 **CNOT** 閘。

圖 1.21 中的第三個 **CNOT** 閘具有控制的量子位元 $q[2]$ 和目標量子位元 $q[1]$ 。Open QASM 版本 2.0 中的相應指令為 “`cx q[2],q[1];`”, 其中 **cx** 表示 **CNOT** 閘。圖 1.21 中的第四個 **CNOT** 閘具有控制的量子位元 $q[3]$ 和目標量子位元 $q[2]$ Open QASM 版本 2.0 中的相應指令為 “`cx q[3],q[2];`”, 其中 **cx** 表示 **CNOT** 閘。圖 1.21 中的第五個 **CNOT** 閘具有控制的量子位元 $q[4]$ 和目標量子位元 $q[2]$ 。Open QASM 版本 2.0 中的相應指令為 “`cx q[4],q[2];`”, 其中 **cx** 表示 **CNOT** 閘。圖 1.21 中的第六個 **CNOT** 閘具有控制的量子位元 $q[3]$ 和目標量子位元 $q[4]$ 。Open QASM 版本 2.0 中的相應指令為 “`cx q[3],q[4];`”, 其中 **cx** 表示 **CNOT** 閘。

相反,具有五個量子位元的完全連接硬體將允許 **CNOT** 閘應用於任意兩個量子位元的二十對。這表明有十四個“缺少連接”。幸運的是,使用巧妙的閘序列可以產生連接的不同方法。例如,具有控制量子位元 $q[j]$ 和 $q[k]$ 是 $0 \leq j$ 和 $k \leq 4$ 的 **CNOT** 閘可以通過在 **CNOT** 閘後的每個量子位元上應用 哈達馬閘來反轉。這就是說,新指令(新連接) “`cx q[k], q[j]`” 是通過應用後五個指令實現的,這些指令後來為 “`h q[j];`”, “`h q[k];`”, “`cx q[j], q[k];`”, “`h q[j];`” 和 “`h q[k];`” for $0 \leq j$ 和 $k \leq 4$. 類似地,如果存在一個帶控制位元 $q[j]$ 和目標位元 $q[l]$ 的 **CNOT** 閘。如果存在控制位元 $q[j]$ 和目標位元 $q[k]$, 和控制位元 $q[k]$ 和目標位元 $q[l]$ 在 $0 \leq j, k$ 和 $l \leq 4$. 這表明,新指令(新連接) “`cx q[j], q[l]`” 是通過應用四個指令實現的,這些指令隨後為 “`cx q[k], q[l];`”, “`cx q[j], q[k];`”, “`cx q[k], q[l];`” and “`cx q[j], q[k];`” for $0 \leq j, k$ 和 $l \leq 4$.

1.11.2 實施一位複製機,使用 CNOT 閘

提供的數據輸入使用 $|0\rangle$ 永久初始化。然後 CNOT 閘在每個輸出上發出控制輸入的副本。因此, CNOT 閘實際上是一個位複製機。在列表 1.11 中,後端 *ibmqx4* 中帶有五個量子位元的程式是第十一個示例,其中我們將描述如何使用 CNOT 閘進行程式設計,該閘將控制位元 $q[3]$ 和目標位元 $q[4]$ 從一個狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))$ ($|0\rangle$) $(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$ 到其他狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle))$ 。實際上,CNOT 閘在每個輸出上發出控制輸入的副本。圖 1.22 是列表 1.11 中程序的相應量子電路。列表 1.11 第一行的語句“OPENQASM 2.0;”指出,程式是使用 Open QASM 版本 2.0 編寫的。然後,宣告“include "qelib1.inc";”在列表 1.11 的第二行是繼續解析檔案“qelib1.inc”好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案“qelib1.inc”是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句“qreg q[5];”在列表 1.11 的第三行,是宣告程式中有五個量子位元。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[3];
6. cx q[3],q[4];
7. measure q[3] -> c[3];
8. measure q[4] -> c[4];

```

列表 1.11:使用 CNOT 閘實現一個位複製機。

在圖 1.22 的左上部,五個量子位元隨後為 $q[0]$, $q[1]$, $q[2]$, $q[3]$ 和 $q[4]$ 。每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$ 。接下來,語句“creg c[5];”在列表 1.11 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.22 的左下部,五個傳統位元隨後為 $c[0]$, $c[1]$, $c[2]$, $c[3]$ and $c[4]$ 。每個傳統位元的初始值設置為 0

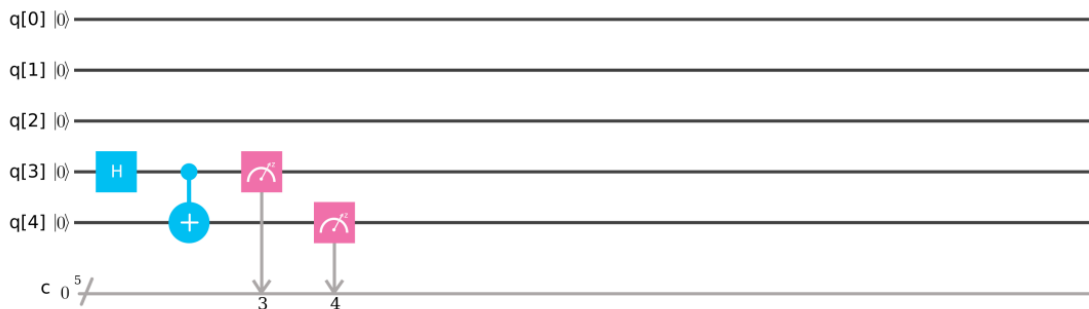


圖 1.22:列表 1.11 中程序的相應量子電路。

語句“h q[3];” 在列表 1.11 的第五行實際完成 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$.這就是說宣告 “h q[3];” 在列表 1.11 的第五行, 將使用哈達馬德閘將 q[3] 從一個狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition), 其中 “h” 表示哈達馬德閘。接下來,語句 “cx q[3],q[4];” 在列表 1.11 的第六行實際完成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$. 這表明語句 “cx q[3],q[4];” 在列表 1.11 的第六行,應用 **CNOT** 閘, 在每個輸出上發出控制輸入 q[3]的副本

接下來, 列表 1.11 第 7 行的語句 “measure q[3] -> c[3];” 是測量第四個量子位元 q[3], 並通過覆蓋第四個傳統位元 c[3]來記錄測量結果。列表 1.11 第 8 行的語句 “measure q[4] -> c[4];” 用於測量第五個量子位元 · q[4],並通過覆蓋第五個傳統位元 c[4]來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,IBM 的量子電腦中有五個量子位元,我們使用命令“simulate”來執行列表 1.11 中的程式。結果如圖 1.23 所示。



圖 1.23:在列表 1.11 中程序的測量完成後,我們獲得概率為 0.540 的答案 00000,獲得概率為 0.460 的答案 11000。

從圖 1.23, 我們獲得答案 00000 ($c[4] = q[4] = |0\rangle, c[3] = q[3] = |0\rangle, c[2] = q[2] = |0\rangle, c[1] = q[1] = |0\rangle$ 和 $c[0] = q[0] = |0\rangle$) 的概率為 0.540。或者,我們獲得概率為 0.460 的答案 11000 ($c[4] = q[4] = |1\rangle, c[3] = q[3] = |1\rangle, c[2] = q[2] = |0\rangle, c[1] = q[1] = |0\rangle$ 和 $c[0] = q[0] = |0\rangle$)。如果答案是 00000,則這意味著 **CNOT** 閘將控制輸入 q[3] 的值 0 複製到目標位元 q[4]。如果答案是 11000,則表示 **CNOT** 閘將控制輸入 q[3] 的值 1 複製到目標位元 q[4]。

1.12 單量子位元與一個參數的 $UI(\lambda)$ 閘

$UI(\lambda)$ 閘是量子體驗的第一個物理閘,是單個量子位元的相閘,一個參數的持續時間為零。

$$UI(\lambda) = UI(\text{lambd}\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

其中 λ ($\text{lambd}\alpha$)是實值。假定 $(UI(\lambda))^+ (UI(\text{lambd}\alpha))^+$ 是 $UI(\lambda) (UI(\text{lambd}\alpha))$ 的偶聯轉置矩陣,等於 $((UI(\lambda)))^{*t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\lambda} \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 是複雜偶聯和 t 是轉置操作。因為

$$UI(\lambda) \times (UI(\lambda))^+ = UI(\lambda) \times ((UI(\lambda)))^{*t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\lambda} \end{pmatrix} =$$

$$(UI(\lambda))^+ \times UI(\lambda) = ((UI(\lambda)))^{*t} \times UI(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\times\lambda} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, UI(\lambda) (UI(\text{lambd}\alpha))$$
 是一元矩陣或單一運算符。這意味著相閘 $UI(\lambda) (UI(\text{lambd}\alpha))$ 是量子閘之一,是單個量子位元的相位,一個參數的相位,持續時間為零。如果量子狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

第一個條目 l_0 是 $|0\rangle$ 的振幅,第二個條目 l_1 是 $|1\rangle$ 的振幅,然後從相閘 $UI(\lambda) (UI(\text{lambd}\alpha))$ 的相應輸出是

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times l_1 \end{pmatrix} = l_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times l_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_0 |0\rangle + (e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times l_1) |1\rangle. \quad (1.36)$$

這就是說,相閘 $UI(\lambda) (UI(\text{lambd}\alpha))$ 將一個量子位元從一個狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 轉換為另一個狀態 $l_0 |0\rangle + (e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times l_1) |1\rangle$ 。這表示相閘 $UI(\lambda) (UI(\text{lambd}\alpha))$ 使 $|0\rangle$ 保持不變,並修改 $|1\rangle$ 的相位,以給予 $(e^{\sqrt{-1}\times\lambda}) |1\rangle$ 。使用相位閘 $UI(\lambda) (UI(\text{lambd}\alpha))$ 後,測量 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的概率保持不變,但它修改了量子狀態的相位。因為 $(UI(\lambda))^2 = UI(\lambda) \times UI(\lambda) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times 2\times\lambda} \end{pmatrix},$$
 使用相位閘 $UI(\lambda) (UI(\text{lambd}\alpha))$

兩次到一個狀態等效於這樣做,使 $|0\rangle$ 保持不變並修改 $|1\rangle$ 的相位,以給予 $(e^{\sqrt{-1}\times 2\times\lambda}) |1\rangle$
 對於 **IBM Q** 體驗,相關 $UI(\lambda)$ ($UI(\text{lambda})$) 的圖像表示如下所示



1.12.1 使用 $U1(\lambda)$ 閘程式設計,帶有一個參數

列表 1.12 中,在 **IBM** 量子電腦中有五個量子位元的後端 *ibmqx4* 中,該程式是介紹如何使用相位閘 $UI(2 * \text{pi})$ 將單個量子位元 $q[0]$ 從一個狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}})(|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種

狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}})(|0\rangle - |1\rangle)$. 由於相關 $UI(\text{lambda})$ 的第一個參數 lambda 的輸入值為 $(2 * \text{pi})$,

$UI(2 * \text{pi})$ 等於 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 相關 $UI(2 * \text{pi})$ 實際上實現一個標識閘。

圖 1.24 是列表 1.12 中程序的相應量子電路。

列表 1.12 第一行的語句"OPENQASM 2.0"表示程式是使用 Open QASM 版本 2.0 編寫的。接下來宣告 "include "qelib1.inc";" ,在列表 1.12 的第二行是繼續解析檔案"qelib1.inc" 好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案"qelib1.inc" 是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句 "qreg q[5];" 在列表 1.12 的第三行,是宣告程式中有五個量子位元。在圖 1.24 的左上部,五個量子位元隨後為 $q[0]$, $q[1]$, $q[2]$, $q[3]$ 和 $q[4]$. 每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$ 。然後,語句 "creg c[5];" 列表 1.12 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.24 的左下部,五個傳統位元隨後為 $c[0]$ 、 $c[1]$ 、 $c[2]$ 、 $c[3]$ 和 $c[4]$ 。每個傳統位元的初始值設置為 0。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. u1(2 * pi) q[0];
7. measure q[0] -> c[0];
    
```

列表 1.12:使用相位閘 $UI(2 * \text{pi})$ 與一個參數的程式。

語句 “h q[0];” 在列表 1.12 的五行實際實現 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle).$$

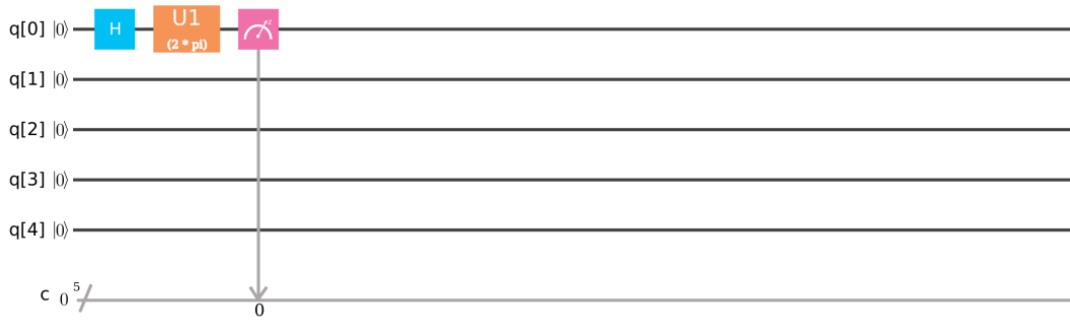


圖 1.24:列表 1.12 中程序的相應量子電路。

這是說宣告 t “h q[0];” 在列表 1.1 2 的第五行,應用哈達馬德閘將 q[0]從一個狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition), 其中“h” 表示哈達馬德閘。接下來,語句

“u1(2 * pi) q[0];” 在列表 1.12 的第六行實際完成 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$.這就是說宣告“u1(2 * pi) q[0];” 列表 1.12 的第六行,將實現一個標識閘到 q[0]

接下來,列表 1.12 第 7 行的語句“measure q[0] -> c[0];” 是測量第一個量子位元 q[0],並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0]來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,在 **IBM** 的量子電腦中具有五個量子位元,我們應用命令 “simulate” 來執行列表 1.12 中的程式。結果如圖 1.25 所示。從圖 1.25 中,我們獲得答案 00000 ($c[4] = q[4] = |0\rangle, c[3] = q[3] = |0\rangle, c[2] = q[2] = |0\rangle, c[1] = q[1] = |0\rangle$ and $c[0] = q[0] = |0\rangle$) 的概率是 0.530。或者我們獲得概率為 0.47 的答案 00001 ($c[4] = q[4] = |0\rangle, c[3] = q[3] = |0\rangle, c[2] = q[2] = |0\rangle, c[1] = q[1] = |0\rangle$ and $c[0] = q[0] = |1\rangle$)



圖 1.25:在列表 1.12 中程序的測量完成後,我們獲得概率為 0.530 的答案 00000,獲得概率為 0.470 的答案 00001。

1.13 具有兩個參數的單量子位元的 $U2(\phi, \lambda)$ 閘

相關 $U2(\phi, \lambda)$ ($U2(\text{phi}, \text{lambda})$) 是量子體驗的第二個物理閘,是兩個參數的單量子位元相關,持續時間為一個單位閘時間是

$$U2(\phi, \lambda) = U2(\text{phi}, \text{lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1}\times\lambda}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\times\phi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

其中 ϕ 和 λ (phi and lambda) 都是真實數。假定 $(U2(\phi, \lambda))^+$ ($(U2(\text{phi}, \text{lambda}))^+$) 是 $U2(\phi, \lambda)$ ($U2(\text{phi}, \text{lambda})$) 的偶聯轉置矩陣。等於 $((U2(\phi, \lambda))^*)^t =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\sqrt{-1}\times\phi}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-e^{-\sqrt{-1}\times\lambda}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } * \text{ 複雜的結合和, } t \text{ 是轉置操作, 因為 } U2(\phi, \lambda) \times$$

$$(U2(\phi, \lambda))^+ = U2(\phi, \lambda) \times ((U2(\phi, \lambda))^*)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1}\times\lambda}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\times\phi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\sqrt{-1}\times\phi}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-e^{-\sqrt{-1}\times\lambda}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (U2(\phi, \lambda))^+ \times U2(\phi, \lambda) = ((U2(\phi, \lambda))^*)^t \times U2(\phi, \lambda) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\sqrt{-1}\times\phi}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-e^{-\sqrt{-1}\times\lambda}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1}\times\lambda}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\times\phi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U2(\phi, \lambda) (U2(\text{phi},$$

$\text{lambda}))$ 是一元矩陣或單一運算符。這意味著相關 $U2(\phi, \lambda)$ ($U2(\text{phi}, \text{lambda})$) 是量子閘之一,是兩個參數的單量子位元的相關,持續時間為一個時間單位。如果量子狀態 $|0\rangle = |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

第一個條目 l_0 是 $|0\rangle$ 的振幅,第二個條目 l_1 是 $|1\rangle$ 的振幅,則從相閘 $U2(\phi, \lambda)$ ($U2(\text{phi}, \text{lambda})$) 的相應輸出是

$$\begin{pmatrix} \frac{l_0 - e^{\sqrt{-1}\lambda} l_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\phi} l_0 + e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)} l_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{l_0 - e^{\sqrt{-1}\lambda} l_1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{e^{\sqrt{-1}\phi} l_0 + e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)} l_1}{\sqrt{2}} |1\rangle. \quad (1.39)$$

這就是說,相閘 $U2(\phi, \lambda)$ ($U2(\text{phi}, \text{lambda})$) 將單個量子位元從一個狀態 $l_0 |0\rangle + l_1 |1\rangle$ 轉換為另一個狀態 $\frac{l_0 - e^{\sqrt{-1}\lambda} l_1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{e^{\sqrt{-1}\phi} l_0 + e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)} l_1}{\sqrt{2}} |1\rangle$ 。由於 $(U2(\phi, \lambda))^2 =$

$$U2(\phi, \lambda) \times U2(\phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1}\lambda}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\phi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1}\lambda}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\phi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1 - e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)}}{2} & \frac{-e^{\sqrt{-1}\lambda}(1 + e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)})}{2} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\phi}(1 + e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)})}{2} & \frac{(1 - e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)})e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)}}{2} \end{pmatrix},$$

使用相閘 $U2e$ $U2(\phi, \lambda)$ ($U2(\text{phi}, \text{lambda})$) 兩次到一個狀態等效於修改其振幅。對於 **IBM Q** 體驗,相閘 $U2(\phi, \lambda)$ ($U2(\text{phi}, \text{lambda})$) 的圖像表示如下所示:



1.13.1 使用 $U2(\phi, \lambda)$ 閘程式設計,具有兩個參數

對於相閘 $U2(\text{phi}, \text{lambda})$, 第一個參數 phi 和第二個參數 lambda 的輸入值分別為 $(0 * \text{pi})$ 和 $(1 * \text{pi})$, 所以 $U2(0 * \text{pi}, 1 * \text{pi})$ 等於 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1}\lambda}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\phi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1}(\lambda+\phi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 。因此,相閘 $U2(0 * \text{pi}, 1 * \text{pi})$ 實際上實現了一個哈達馬德閘。在列表 1.13 中,在

IBM 量子計算機中有五個量子位元的後端 *ibmqx4* 中,該程式是第十三個示例,其中我們將說明如何使用相閘 $U2(0 * \text{pi}, 1 * \text{pi})$ 進行程式設計,將單個量子位元 $q[0]$ 從一個狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}})(|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種 $(|0\rangle)$ 。圖 1.26 是列表 1.13 中程序的相應量子電路。

列表 1.13 第一行的“OPENQASM 2.0;”宣告指出,程式是使用開放 QASM 版本 2.0 編寫的。然後,宣告“include "qelib1.inc";”在列表 1.13 的第二行是繼續解析檔案“qelib1.inc”好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案“qelib1.inc”是量子體驗(QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句“qreg q[5];”在列表 1.13 的第三行,是宣告程式中有五個量子位元。在圖 1.26 的左上部,五個量子位元隨後為 q[0], q[1], q[2], q[3] 和 q[4]。每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$ 。接下來,語句“creg c[5];”在列表 1.13 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.26 的左下部,五個傳統位元隨後為 c[0], c[1], c[2], c[3] 和 c[4]。每個傳統位元的初始值設置為 0。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. u2(0*pi,1*pi) q[0];
7. measure q[0] -> c[0];

```

列表 1.13:使用相位閘 $U2(0*\pi, 1*\pi)$ 具有兩個參數的程式。

語句“h q[0];”在列表 1.13 的第五行實際完成 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 。這就是說,語句“h q[0];”在列表 1.13 的第五行,將使用哈達馬德閘將 q[0] 從一個狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition),

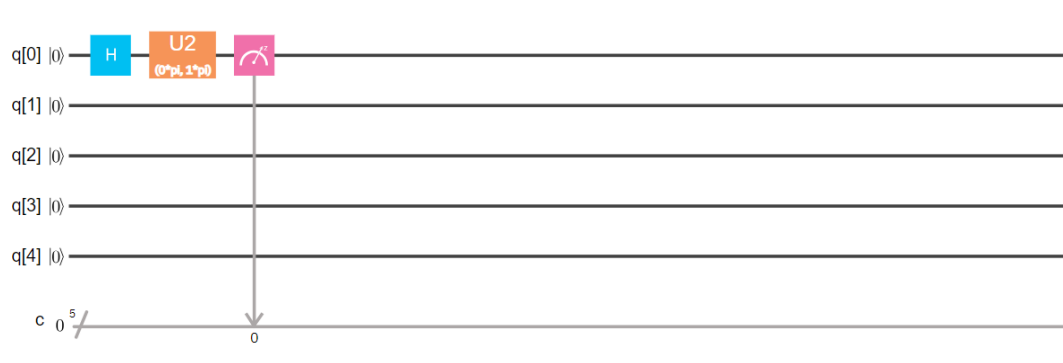


圖 1.26:列表 1.13 中程序的相應量子電路。

其中“h”代表哈達馬德閘。接下來,語句“u2(0*pi,1*pi) q[0];”在列表 1.13 的六行實際實現

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1} \times 1 \times \pi}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1} \times 0 \times \pi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1} \times (1 \times \pi + 0 \times \pi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle. \text{ 這表}$$

明語句 “u2(0*pi,1*pi) q[0];” 在列表 1.13 的第六行，將完成一個哈達馬德閘到 q[0]。因此，將哈達馬德閘從列表 5 和列表 1.13 的第 6 行應用於 q[0] 對它沒有任何說明

接下來，列表 1.13 第 7 行的語句 “measure q[0] -> c[0];” 是測量第一個量子位元 q[0]，並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0] 來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中，IBM 的量子電腦中有五個量子位元，我們使用命令 “simulate” 來執行

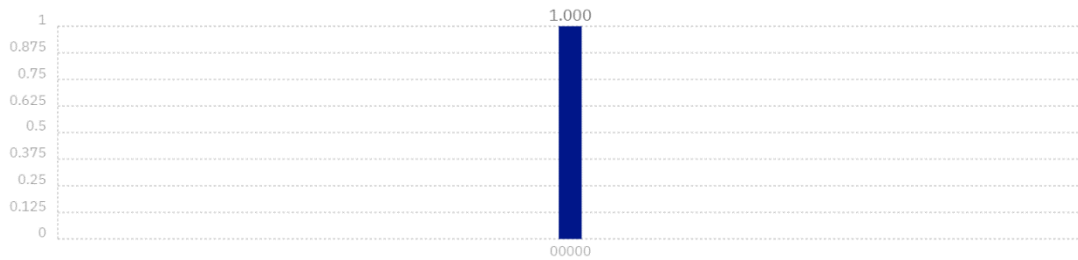


圖 1.27：對清單 1.13 中的程序的測量完成後，我們獲得了概率為 1.000 的答案 00000。

列表 1.13。結果如圖 1.27 所示。從圖 1.27 中，我們獲得答案 00000 ($c[4] = q[4] = |0\rangle$, $c[3] = q[3] = |0\rangle$, $c[2] = q[2] = |0\rangle$, $c[1] = q[1] = |0\rangle$ and $c[0] = q[0] = |0\rangle$) 的概率是 1。

1.14 三個參數的單量子位元的 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ 閘

相閘 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ ($U3(\text{theta}, \text{phi}, \text{lambda})$) 是量子體驗的第三個物理閘，是三個參數的單量子位元相閘，持續時間為兩個單位的柵極時間

$$U3(\theta, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{\sqrt{-1} \times \lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{\sqrt{-1} \times \phi} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{\sqrt{-1} \times (\lambda + \phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

其中 θ , ϕ and λ (theta, phi and lambda) 都是真實數，它被認為是 $(U3(\theta, \phi, \lambda))^+$ ($(U3(\text{theta}, \text{phi}, \text{lambda}))^+$) 是 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ ($U3(\text{theta}, \text{phi}, \text{lambda})$) 的偶聯-轉置矩陣和

等於 $((U3(\theta, \phi, \lambda))^*)^t = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-\sqrt{-1} \times \phi} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -e^{-\sqrt{-1} \times \lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-\sqrt{-1} \times (\lambda + \phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$ ，其中 *

是複雜的結合， t 是轉置操作。因為 $U3(\theta, \phi, \lambda) \times ((U3(\theta, \phi, \lambda))^*)^t =$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{\sqrt{-1} \times \lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{\sqrt{-1} \times \phi} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{\sqrt{-1} \times (\lambda + \phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-\sqrt{-1}\times\phi} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -e^{-\sqrt{-1}\times\lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = ((U3(\theta, \phi, \lambda))^*)' \times U3(\theta, \phi, \lambda) \\
& = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-\sqrt{-1}\times\phi} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -e^{-\sqrt{-1}\times\lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \times \\
& \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{\sqrt{-1}\times\phi} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U3(\theta, \phi, \lambda) (U3(\theta, \phi, \lambda))
\end{aligned}$$

是單一矩陣(unitary matrix)或單一運算符(unitary operator)。這意味著相關 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ ($U3(\theta, \phi, \lambda)$) 是量子閘之一,是三個參數的單量子位元相關,持續時間為兩個單位的柵極時間。如果量子狀態 $l_0 |0\rangle = l_1 |1\rangle$ 以向量表示法編寫為

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

第一個條目 l_0 是 $|0\rangle$ 的振幅,第二個條目 l_1 是 $|1\rangle$ 的振幅,則來自相關 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ ($U3(\theta, \phi, \lambda)$) 的相應輸出

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} l_0 \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - l_1 \times e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ l_0 \times e^{\sqrt{-1}\times\phi} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + l_1 \times e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \left(l_0 \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - l_1 \times \right. \\
& \left. e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) |0\rangle + \left(l_0 \times e^{\sqrt{-1}\times\phi} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + l_1 \times e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) |1\rangle.
\end{aligned} \quad (1.42)$$

這表示相位閘 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ ($U3(\theta, \phi, \lambda)$) 將單個量子位元從一個狀態 $l_0 |0\rangle +$

$l_1 |1\rangle$ 轉換為另一個狀態 $(l_0 \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - l_1 \times e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)) |0\rangle + (l_0 \times e^{\sqrt{-1}\times\phi} \times$

$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + l_1 \times e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)) |1\rangle$ 。因為 $(U3(\theta, \phi, \lambda))^2 =$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)} \times \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{\sqrt{-1}\times\lambda} \times (1 + e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{\sqrt{-1}\times\phi} \times (1 + e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}) & (\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}) \times (-e^{\sqrt{-1}\times(\lambda+\phi)}) \end{pmatrix},$$

使用相關 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ ($U3(\theta, \phi, \lambda)$) 兩次到一個狀態等效於修改其振幅。對於

IBM Q 體驗,相關 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ ($U3(\theta, \phi, \lambda)$) 的圖形表示如下:

U3

1.14.1 使用具有三個參數的 $U3(\theta, \phi, \lambda)$ 闡程式設計,

對於相關 $U3(\theta, \phi, \lambda)$, 第一個參數的輸入值為 $(0.5 * \pi)$, 第二個參數 ϕ 的輸入值為 $(0 * \pi)$, 第三個參數 λ 的輸入值為 $(1 * \pi)$, 所以 $U3(0.5*\pi, 0*\pi, 1*\pi)$

$$\text{等 於 } \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -e^{\sqrt{-1} \times 1 \times \pi} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ e^{\sqrt{-1} \times 0 \times \pi} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & e^{\sqrt{-1} \times (1 \times \pi + 0 \times \pi)} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1} \times 1 \times \pi}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1} \times 0 \times \pi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1} \times (1 \times \pi + 0 \times \pi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

因此,相關 $U3(0.5*\pi, 0*\pi, 1*\pi)$ 實際上完成一個哈達馬德閘。在列表 1.14 中,在 **IBM** 量子計算機中有五個量子位元的後端 `ibmqx4` 中,該程式是第十四個示例,其中我們將描述如何使用相位 $U3(0.5*\pi, 0*\pi, 1*\pi)$ 進行程式設計。

將單個量子位元 `q[0]` 從一個狀態 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (|0\rangle + |1\rangle)$ 轉換為另一種狀態 $(|0\rangle)$ 。圖 1.28 是列表 1.14 中程式的相應量子電路。

列表 1.14 第一行的語句“`OPENQASM 2.0;`”表示程式是使用 Open QASM 版本 2.0 編寫的。接下來宣告 “`include "qelib1.inc";`” 在列表 1.14 的第二行是繼續解析檔案 “`qelib1.inc`” 好像將文件的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔案 “`qelib1.inc`” 是量子體驗 (QE)標準頭和路徑是相對於當前工作目錄。語句 “`qreg q[5];`” 在列表 1.14 的第三行,是宣告程式中有五個量子位元。在圖 1.28 的左上部,五個量子位元隨後為 `q[0]`, `q[1]`, `q[2]`, `q[3]` 和 `q[4]`。每個量子位元的初始值設置為 $|0\rangle$ 。接下來,語句“`creg c[5];`” 在列表 1.14 的第四行,是宣告程式中有五個傳統位元。在圖 1.28 的左下部,五個傳統位元隨後為 `c[0]`、`c[1]`、`c[2]`、`c[3]` 和 `c[4]`。每個傳統位元的初始值設置為 0。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. h q[0];
6. u3(0.5*pi,0*pi,1*pi) q[0];
7. measure q[0] -> c[0];

```

列表 1.14:使用三個參數的相關 $U3(0.5*\pi, 0*\pi, 1*\pi)$ 的程式

語句 “`h q[0];`” 在列表 1.14 的五行實際執行 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$. 這表示語句“h q[0];” 在列表 1.14 的第五行,應用哈達馬德閘將 q[0] 從一個狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊加, superposition), 其中“h”表示哈達馬德閘。接下來語句 “u3(0.5*pi,0*pi,1*pi) q[0];”

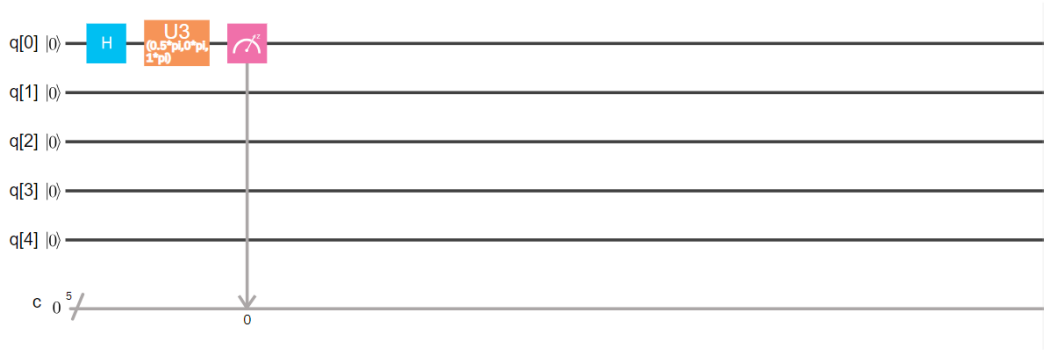


圖 1.28:列表 1.14 中程序的相應量子電路。

$$\begin{aligned}
 & \text{在列表 1.14 的第六行實際完成} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -e^{\sqrt{-1}\times 1\times\pi} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ e^{\sqrt{-1}\times 0\times\pi} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & e^{\sqrt{-1}\times(1\times\pi+0\times\pi)} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \times \\
 & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-e^{\sqrt{-1}\times 1\times\pi}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\sqrt{-1}\times 0\times\pi}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{\sqrt{-1}\times(1\times\pi+0\times\pi)}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

$|0\rangle$. 這就是說宣告 “u3(0.5*pi,0*pi,1*pi) q[0];” 在列表 1.14 的第六行是完成一個哈達馬德閘到 q[0]。因此,使用哈達馬德閘兩次從第五行和列表 1.14 到 q[0] 的第六行對它沒有任何說明

接下來,列表 1.14 第 7 行的語句“measure q[0] -> c[0];”是測量第一個量子位元 q[0],並通過覆蓋第一個傳統位元 c[0]來記錄測量結果。在後端 *ibmqx4* 中,IBM 的量子電腦中有五個量子位元,我們使用命令 “simulate” 來執行列表 1.14 中的程式。結果如圖 1.29 所示。從圖 1.29 中,我們獲得答案 00000 ($c[4] = q[4] = |0\rangle$, $c[3] = q[3] = |0\rangle$, $c[2] = q[2] = |0\rangle$, $c[1] = q[1] = |0\rangle$ 和 $c[0] = q[0] = |0\rangle$) 的概率為 1.000

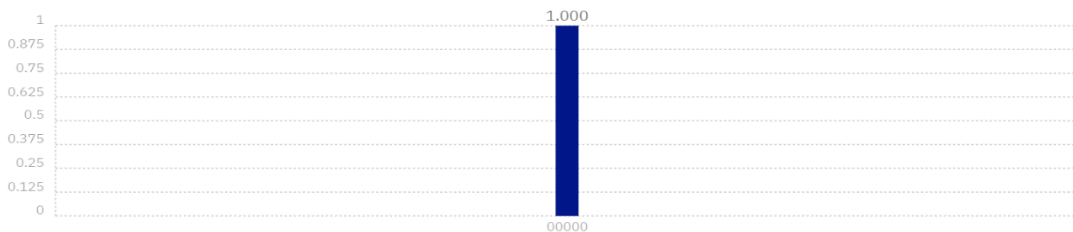


圖 1.29:在列表 1.14 中的程序測量完成後,我們獲得概率為 1.000 的答案 00000。

1.15 摘要

本章中,我們介紹了單個量子位元、多個量子位元及其疊加。我們還描述了在後端 *ibmqx4* 中使用 IBM 量子電腦中的五個量子位元在 Open QASM(版本 2.0) 中對量子位元和傳統位元宣告和測量的兩個語句。我們用單個量子位元說明瞭所有量子閘,以及後端 *ibmqx4* 中兩個量子位元 *controlled-NOT* 或 *CNOT* 閘,IBM 的量子電腦中有五個量子位元。同時,我們還詳細介紹了後端 *ibmqx4* 中的 *controlled-NOT* 閘,與 IBM 量子計算機中的五個量子位元的連接。我們介紹了如何使用單個量子位元的每個量子閘編程,完成每種不同類型的應用程式,以及如何在後端 *ibmqx4* 中使用 IBM 量子計算機中的五個量子位元執行每個量子程式。我們還介紹了如何使用 *controlled-NOT* 閘進行程式設計,以實現一位複印機。

1.16 書目註解

一篇為量子至上提供了詳細的技術定義的著名文章是 [Aaronson and Chen 2017]。熱門教科書 [Nielsen and Chuang 2000; Imre and Balazs 2007; Lipton and Regan 2014] 給出了量子位元和量子閘的優秀介紹。一本受歡迎的教科書 [Silva 2018], 一個著名的專案 [IBM Q 2016] 和兩篇著名的文章 [Cross et al 2017; Coles et al 2018] 提供了許多極好的例子,在後端 *ibmqx4* 中使用 5 個量子位元在 Open QASM(版本 2.0) 中編寫具有量子彙編語言的量子程式。

1.17 練習

1.1 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 *NOT* 閘

1.2 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 *哈達馬德* 閘

1.3 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 *Z* 閘

1.4 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 *Y* 閘

1.5 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 *S* 閘

1.6 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 S^+ 閘

- 1.7 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 T 閘
- 1.8 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 T^\dagger 閘.
- 1.9 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 辨識 閘
- 1.10 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 使用一個參數的 $U_1(\lambda)$ 閘
- 1.11 請編寫一個量子程式,其中我們使用三個參數的 $U_3(\theta, \phi, \lambda)$ 實現 使用兩個參數的 $U_2(\phi, \lambda)$ 閘