

# DYNAMICS OF WATER WAVES

BY

C.C. MEI

## 水波动力学

戴世强整理

科学出版社

1984

# 目 录

<b>第一章 概论</b>	<b>1</b>
§1.1 不可压缩流体的基本方程	1
§1.1.1 基本方程	1
§1.1.2 无粘无旋流动的边界条件	3
§1.2 小振幅波的线性化近似	4
§1.3 行波理论的基本概念	6
§1.4 常深度情况下的行波	7
§1.5 群速度	9
§1.5.1 运动学观点	9
§1.5.2 动力学观点	10
<b>第二章 常深度开阔水域中的瞬变波</b>	<b>13</b>
§2.1 二维瞬变波	13
§2.1.1 自由面上初始位移产生的瞬变波	15
§2.1.2 瞬变扰动产生的先导波	21
§2.1.3 海底倾斜产生的地震律波	22
§2.2 底部扰动产生的三维瞬态波	25
§2.2.1 海底冲击产生的二维地震律波	27
§2.3 二维地震律波的先导波	31
§2.4 色散波包的传播	32
§2.5 缓变波列的多重尺度分析	34
§2.5.1 正弦波列的波前演化	38
<b>参考文献</b>	<b>41</b>
<b>第三章 水波折射的射线理论</b>	<b>43</b>
§3.1 底部缓变时行波的几何光学近似	43
§3.2 底部缓变情况下正弦波的射线理论	46
§3.2.1 射线的几何位形	46
§3.3 等深线是平行直线的情况	48
§3.3.1 振幅变化	52
§3.3.2 直焦散线附近的情况	53
§3.4 等深线为圆周的情况	55
§3.4.1 射线的几何位形	55
§3.4.2 振幅变化	60
§3.4.3 一个圆形岛	62
§3.4.4 缓变海底情况下绕射和折射相结合的近似方程	65
<b>参考文献</b>	<b>69</b>

<b>第四章 深度变化较大时的无穷小振幅长波</b>	<b>71</b>
§4.1 线性化长波理论的提法	71
§4.1.1 控制方程	71
§4.1.2 矩形截面的长渠道中的准一维波	73
§4.1.3 辐射条件的进一步说明	74
§4.2 深度有间断的一维情况：法向入射波的散射	77
§4.2.1 一个台阶情况下水波法向入射问题的解	77
§4.2.2 连接点匹配条件合理性的证实	79
§4.2.3 矩形台阶情况下的近场	82
§4.3 等斜率海滩上的边缘波	85
§4.4 基于有限元的数值方法	86
§4.4.1 引言	86
§4.4.2 变分原理	88
§4.4.3 有限元近似	90
<b>参考文献</b>	<b>95</b>
<b>第五章 由长波入射诱发的港湾振动</b>	<b>97</b>
§5.1 引言	97
§5.2 港湾振动问题的提法	99
§5.3 简单形状常深度封闭港池中的固有模式	100
§5.3.1 矩形港池	100
§5.3.2 圆形港池	102
§5.4 辐射阻尼的概念：一个模型	103
§5.5 通过狭缝的绕射	106
§5.6 狭长运河和港湾引起的散射	110
§5.6.1 一般解	110
§5.6.2 狭海湾	113
§5.7 有狭窄入口的矩形港湾	115
§5.7.1 用匹配渐近展开法得到的解	117
§5.7.2 共振谱和非 Helmholtz 模式的响应	119
§5.7.3 Helmholtz 模式	122
§5.7.4 数值结果和实验结果	122
§5.7.5 入口有限长度效应	122
<b>参考文献</b>	<b>125</b>
<b>第六章 浮体动力学，大尺度物体引起的波绕射和辐射</b>	<b>127</b>
§6.1 引言	127
§6.2 受约束浮体的线性化运动方程	127
§6.2.1 运动学条件	127
§6.2.2 线动量守恒	129

§6.2.3	角动量守恒	132
§6.2.4	矩阵形式的浮体动力学方程	136
§6.3	简谐运动	138
§6.3.1	分解为绕射和辐射问题	138
§6.3.2	激励力和恢复力、任意形状物体的附加质量和辐射阻尼	140
§6.4	常深度情况下的速度势	141
§6.4.1	远离物体处	141
§6.4.2	整个流体区域	144
§6.5	铅垂圆柱产生的散射	147
§6.6	简谐波绕射和辐射的一些恒等式	148
§6.6.1	能量辐射和渐近性质	150
§6.6.2	两个绕射问题之间的关系	152
§6.6.3	一个绕射和一个入射问题	155
§6.7	有限元方法的变分原理	157
§6.8	水波能量的浮体吸收	160
§6.8.1	二维横浪吸能器: Salter 凸轮	161
§6.8.2	三维吸能器	163
§6.9	漂移力	170
<b>第七章</b>	<b>浅水中的非线性长波</b>	<b>175</b>
§7.1	近似方程	175
§7.2	边缘波的次谐波共振	180
§7.3	永形色散长波	186
§7.3.1	孤立波	187
§7.3.2	椭圆余弦波 (cnoidal waves)	188
§7.4	单向色散波 -KdV 方程	191
§7.5	初始脉冲的演化	193
§7.5.1	在常深度海洋中周期波的演化	200
<b>参考文献</b>		<b>209</b>
<b>第八章</b>	<b>深水中的非线性波</b>	<b>211</b>
§8.1	引言	211
§8.2	缓变调制的弱非线性波的演化方程	212
§8.2.1	有限深度情况	212
§8.2.2	无限深度情况	218
§8.3	均匀 Stokes 波	220
§8.4	Stokes 波的边带不稳定性	221
§8.5	深水中的永形包络: 演化方程的非线性解	224
§8.6	深水中一维波包络的瞬态演化	227
§8.6.1	单个脉冲的演化	230
§8.6.2	均匀波列阵面的演化	230

§8.6.3 均匀波列的周期性调制: 初始不稳定阶段以后的演化 . . . . .	231
§8.7 稳恒 Stokes 波被薄楔状稍有倾斜的防波堤的绕射 . . . . .	231
<b>参考文献</b>	<b>237</b>
<b>附录一 Neumann 加法定理</b>	<b>239</b>
<b>附录二 平面波的分波展开</b>	<b>241</b>
<b>附录三 矩形港池的源函数</b>	<b>243</b>
<b>附录四 <math>\tilde{G}</math> 级数的求和</b>	<b>245</b>
<b>附录五 一个积分的计算</b>	<b>247</b>
<b>附录六 Fourier 级数的平方</b>	<b>249</b>

# 第一章 概论

近年来,水波研究引起的关注越来越大,而海浪研究是其中的一个重要方面.我们将以海浪学及其应用为背景,简单介绍水波动力学.海洋中存在各种各样周期各异的波动,而关于它们的限制性物理因素也各不相同.如同简单的弹簧-质量系统,这些波动也依赖于某种恢复力.根据恢复力的类型,海洋中的波动可以按表 1.1 所列的进行大致分类.

其中,风浪和涌浪波长比较短,也最常见,它们产生于当地或远处的风暴.地震律波周期较长,也不大常见,它产生于海底地震或海底滑坡,但会带来严重后果.船舶运动或爆炸等人类活动产生的海洋波动,其周期与上述波动的周期大致相同.这些出现在水面上的波动,恢复力主要是重力,因此我们把它们称为表面重力波,简称表面波.海洋波动的恢复力,事实上可能不是单一的,有几种同时存在的可能,因此,表 1.1 给出的界限不是很明显的.

海洋中的温度跃迁层简称温跃层,在温跃层上出现的重力内波,也有海洋科学意义.这些内波在海面上看只有一些间接迹象.在许多情况下,内波中的流体密度变化相当小.假定,在我们感兴趣的深度范围内,海水密度在铅垂方向的变化很小.因此,我们以论述表面重力波为主.

水波动力学与其它学科的有着密切联系.在许多情况下,大气运动与海面的相互作用需要作为考虑的因素,因此水波动力学与大气科学息息相关.与电磁波和声波不同,水波的色散效应与非线性效应非常重要.对小振幅水波如此,而对大振幅的海浪更是如此.由于在等离子体物理和非线性光学中,也存在色散和非线性效应,因此,数学处理方法上可以相互借鉴.

在本章,我们先给出流体力学基本方程和关于无粘无旋流动的一些普遍结论;然后推导关于无穷小振幅波的线性化方程;在介绍完行波的一些基本概念之后,我们将描述常深度水中简谐行波的性质,然后从运动学和动力学的角度,介绍波的群速度这个概念.

## §1.1 不可压缩流体的基本方程

### §1.1.1 基本方程

对于各种表面重力波问题,一般地,在有工程意义的时间和空间尺度上,水密度的变化可以忽略.因此,流体运动的基本方程可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + gz \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.2)$$

方程 (1.1) 和 (1.2) 分别表示了流体运动的质量守恒和动量守恒.其中,  $\rho$  是流体的密度,  $P(\mathbf{x}, t)$  是压力,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$  为速度矢量,  $\nu$  是流体的运动粘性系数,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  是坐标矢量,  $z$  轴铅垂向上.

根据涡量的定义

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (1.3)$$

表 1.1: 海洋中的波

波的类型	物理机制	典型周期	存在区域
声波	可压缩性	$10^{-2} - 10^{-5}$ 秒	海洋内部
毛细波	表面张力	< 0.1 秒	空气和水的界面
风浪和涌浪	重力	1-25 秒	
地震律波	重力	10 分 -2 小时	
内波	重力和密度分层	2 分 -10 小时	密度巨变的层
风暴潮	重力和地球自转	1-10 小时	海岸线附近
潮波	重力和地球自转	12-24 小时	整个海洋层
行星波	重力和地球自转	$o(100)$ 天	

对方程 (1.2) 取旋度 ( $\nabla \times$ ), 应用方程 (1.1), 我们得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (1.4)$$

这个方程说明: 跟随运动流体的涡量变化率等于涡量的拉伸与粘性扩散项之和. 水的运动粘性系数  $\nu$  很小 ( $\cong 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ), 因此, 除了在涡量梯度很大的近壁边界层内, 涡量方程 (1.4) 中的粘性扩散项可以忽略, 我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.5)$$

对于无旋流动,  $\boldsymbol{\Omega} \equiv 0$ . 用  $\boldsymbol{\Omega}$  点积方程 (1.5), 假设  $\mathbf{e}_\Omega$  是  $\boldsymbol{\Omega}$  的单位矢量, 我们得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \frac{\Omega^2}{2} = \Omega^2 [\mathbf{e}_\Omega \cdot (\nabla \mathbf{u})]$$

如果速度梯度为有限值, 则我们可以假设  $[\mathbf{e}_\Omega \cdot (\nabla \mathbf{u})] = M/2$ . 可以看出, 跟随运动流体的  $\Omega^2(\mathbf{x}, t)$  的大小不会超过  $\Omega^2(\mathbf{x}, 0)e^{Mt}$ . 因此, 对于无粘流动, 如果初始时刻无旋, 则流动永远是无旋的. 这是, 速度  $\mathbf{u}$  可以用势函数  $\Phi$  表示为

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (1.6)$$

由质量守恒得出, 速度势  $\Phi$  必须满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.7)$$

考虑到矢量的恒等式

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$$

在动量守恒方程中代入势梯度定义的速度 (1.7), 应用无粘无旋假定, 我们得到

$$\nabla \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right] = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + gz \right)$$

积分得

$$-\frac{P}{\rho} = -gz + \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right] + C(t) \quad (1.8)$$

其中积分常数是时间  $t$  的函数. 它可以包含在速度势中, 因为我们可以定义  $\Phi'$  使得

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C(t), \quad \nabla \Phi' = \nabla \Phi$$

方程中的  $gz$  是流体静压.

### §1.1.2 无粘无旋流动的边界条件

在固定的固体边界上, 法向速度必须消失,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad \text{在 } B \text{ 上} \quad (1.9)$$

其中  $\mathbf{n}$  是  $B$  的单位法向矢量, 法向指向流体. 设海底为  $z = -h(x, y)$ , 则海底参考点  $m(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面可以记为

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_m (x - x_0) + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_m (y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

因此, 海底法向的单位矢量必然是

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right) / \sqrt{1 + (\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial y)^2}$$

所以, 在海底, 速度势的法向梯度为零意味着

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad \text{在海底} \quad (1.10)$$

在自由表面上, 我们假设自由表面可以描述为  $F(\mathbf{x}, t) = z - \zeta(x, y, t) \equiv 0$ , 考虑到对  $F$  的全微分是

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F \right) dt \equiv 0 \quad (1.11)$$

代入  $F$  的定义式, 考虑到  $\nabla F = (-\zeta_x, -\zeta_y, 1)$ , 我们有自由表面上的运动学边界条件

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \Phi_x \zeta_x + \Phi_y \zeta_y - \Phi_z = 0 \quad (1.12)$$

现在, 我们考虑与作用力有关的动力学条件. 如果忽略表面张力效应, 则可以认为紧贴作用表面处水的压力等于大气压力  $P_a$ . 在水波动力学中, 一般地, 我们取  $P_a = 0$ . 因此, 根据方程 (1.8), 我们得到自由表面上的动力学边界条件

$$-g\zeta + \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right] = -\frac{P_a}{\rho} \quad (1.13)$$



显然,它是非线性的.水波问题数学处理起来困难,主要原因在于自由面上边界条件是非线性的.

当海面上的大气运动作用不能忽略时,大气运动与水波之间的互相耦合,就决定了我们不能事先确定大气压力.尽管大气与水波的互相作用是风生表面波的关键,但是,如果讨论的局部现象只涉及到遥远风暴产生的水波,且由于大气的密度远小于水的密度,这时我们就可以忽略大气的作用.

### 习题

(1.1) 试把自由表面上的边界条件合成如下:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{P_a}{\rho} + \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial(\mathbf{u})^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u})^2 \right] = 0, \quad \text{当 } z = \zeta$$

当  $P_a = \text{常数}$  时,可得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial(\mathbf{u})^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u})^2 = 0, \quad \text{当 } z = \zeta$$

### §1.2 小振幅波的线性化近似

在表面波的振幅较小的情况下,表面波问题的控制方程,通过分析可以得到简化.我们先看一下问题有关的尺度:相应的长度尺度是波幅  $A$ , 波长  $\lambda$ , 和海底平均深度  $h_0$ ; 时间尺度是  $\omega^{-1}$ . 我们用

$$\begin{bmatrix} \lambda/2\pi \\ \omega^{-1} \\ A \\ A\omega\lambda/2\pi \end{bmatrix} \quad \text{表征} \quad \begin{bmatrix} x, y, z, h \\ t \\ \zeta \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

可以看出空间坐标的尺度为  $\lambda/2\pi$ , 速度势  $\Phi$  的尺度是  $A\omega\lambda/2\pi$ , 因此,速度的尺度是  $A\omega$ . 如果无量纲量用撇号表示,有

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ x, y, z, h \\ t \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \text{表征} \quad \begin{bmatrix} (A\omega\lambda/2\pi)\Phi' \\ (\lambda/2\pi)(x', y', z', h') \\ (\omega^{-1})t' \\ (A)\zeta' \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

把这个关系代入 Laplace 方程 (1.7), 我们得到

$$\nabla' \Phi' = \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \Phi' = 0, \quad -h' < z' < \varepsilon \zeta' \quad (1.16)$$

类似地,应用方程 (1.9)(1.12)(1.13), 我们有

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial n'} = 0, \quad z' = -h' \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \varepsilon \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial y'} \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} = 0, \quad z' = \varepsilon \zeta' \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + \left( \frac{2\pi g}{\omega^2 \lambda} \right) \zeta' + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla' \Phi')^2 = -P'_a = -\frac{2\pi P_a}{\rho A \omega^2 \lambda}, \quad z' = \varepsilon \zeta' \quad (1.19)$$

其中,  $\varepsilon = 2\pi A/\lambda =$  波的斜度. 显然, 在无量纲方程中, 各项前边的系数确定了该项在方程中的相对重要性. 现在, 我们可以考虑波的斜度非常小的情况. 对于小振幅波,  $\varepsilon \ll 1$ . 考虑到未知的自由面与水平面  $z' = 0$  的差别是  $O(\varepsilon)$ , 这里, 我们讨论对自由面边界条件的简化. 对  $\Phi'$  在水平面上作 Taylor 展开, 得

$$\Phi'(x', y', \varepsilon \zeta', t') = \Phi' \Big|_0 + \varepsilon \zeta' \frac{\partial \Phi'}{\partial z} \Big|_0 + \frac{(\varepsilon \zeta')^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} \Big|_0 + O(\varepsilon^2)$$

其中  $\Phi' \Big|_0 = \Phi'(x', y', 0, t')$ . 现在, 我们取  $O(1)$  阶近似, 自由面边界条件变成, 当  $z' = 0$  时,

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} = \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + \left( \frac{2\pi g}{\omega^2 \lambda} \right) \zeta' = -P'_a \end{cases}$$

其中, 只有最重要的线性项得到保留. 回到原来的物理量, 我们得到线性化的小振幅波的方程如下

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad -h < z < 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad z = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta = -\frac{P_a}{\rho}, \quad z = 0 \quad (1.23)$$

把方程 (1.8) 线性化, 可以得到流体的总压力,

$$P = -\rho g z + p \quad (1.24)$$

其中  $p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  是流体的动压. 为了求解实际问题, 还需要补充初始条件, 物面条件和无穷远处的边界条件. 在固壁附近, 势流理论允许流体运动存在有限的切向速度, 但是, 在固壁表面上该速度应当消失. 这说明固壁附近一定存在边界层, 使速度在这个薄层内由有限值降到零. 现在, 我们来大致估算一下边界层的厚度  $\delta$ . 为此, 我们在物面上取局部坐标系  $(x_n, x_{\tau 1}, x_{\tau 2})$ ,  $x_n$  是壁面的法向坐标, 而  $x_{\tau 1}, x_{\tau 2}$  是壁面的两个切向坐标. 显然,

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \gg \frac{\partial}{\partial x_{\tau k}}, \quad k = 1, 2$$

因此, 根据线性化的动量方程, 在边界层内, 切向速度  $\mathbf{u}_\tau$  近似满足关系

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} \simeq \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\tau}{\partial x_n^2} - \frac{1}{\rho} \nabla_\tau P$$

如果用波的周期  $2\pi/\omega$  作为实际尺度, 我们就可以导出边界层厚度的估算式

$$\delta \sim \sqrt{\frac{2\pi\nu}{\omega}}$$

因此, 当  $\nu \simeq 0.01\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $2\pi/\omega \simeq 1\text{s}$  时,  $\delta \simeq 0.1\text{cm}$ . 这个厚度与常见波的波长 ( $\lambda \sim 10-200\text{m}$ ) 相比, 是很小的. 但是, 如果是湍流边界层, 湍流粘性大约为  $100\nu$ , 当周期为  $10\text{s}$  时, 预计湍流边界层的厚度为  $O(10)\text{cm}$  以内, 可见, 边界层在各向尺度与波长相当的流体区域中所占比例很小, 在几个波长距离和几个周期的时间内, 对波动全局的影响甚微. 但是, 对于远远大于波长的长距离和时间尺度远大于周期的长时间问题, 就需要考虑粘性的累积效应.

### §1.3 行波理论的基本概念

我们将介绍关于行波描述的一些基本概念, 它们包括周期, 振幅, 波数, 相函数, 和相速度. 行波是表面波的一种形式, 通常表达为

$$\zeta(x, y, t) = \text{Re}[Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}] = a \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \delta) \quad (1.25)$$

其中

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad \mathbf{x} = (x, y)$$

$a, \delta$  是实数,  $A$  是复常数. 有时为了简洁, 可以把实部符号  $\text{Re}$  去掉, 用复数形式

$$\zeta(x, y, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad (1.26)$$

对于位置在  $\mathbf{x}$  的观测者,  $\zeta$  是周期为  $2\pi/\omega$  振幅为  $a$  的时变波. 而对于固定的时刻  $t$ , 则  $\zeta$  是随  $x, y$  变化的波动; 在  $y$  相等的平面上, 波动周期为  $2\pi/k_x$ , 在  $x$  相等的平面上, 波动周期为  $2\pi/k_y$ . 在  $x$  方向, 每单位长度的波峰 (或波谷) 的数目为  $k_x/2\pi$ , 类似地, 在  $y$  方向, 每单位长度的波峰 (或波谷) 的数目为  $k_y/2\pi$ . 因此,  $\mathbf{k}$  称为波数矢量.

波的相函数定义是

$$S(x, y, t) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t \quad (1.27)$$

在一个固定的时刻  $t$ , 对于  $S = \text{常数}$  的直线, 其法向单位矢量是

$$\mathbf{e}_k = (k_x, k_y)/k, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (1.28)$$

沿着这一相函数为常数的直线, 水面高度处处相等. 当波幅为实数时, 波峰对应于  $S = 2n\pi$ , 而波谷则对应于  $(2n+1)\pi$ .  $S$  的等值线彼此平行, 称之为相线. 与水平面  $z = 0$  的最大偏离  $A$  称为振幅.

把  $S$  的全微分

$$dS = \nabla S \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

与相函数的定义式 (1.23) 进行对比, 可以发现, 对于数值相等的相线, 由于

$$\mathbf{k} = \nabla S = \mathbf{e}_k |\nabla S|, \quad -\omega = \frac{\partial S}{\partial t}$$

相线沿着其法线方向移动的速度是

$$\mathbf{e}_k \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{-\partial S/\partial t}{|\nabla S|} = \frac{\omega}{k} = C \quad (1.29)$$

它称为相速度. 相速度的定义说明, 波的圆频率是相位的时间变化率, 波数是相位的空间变化率.

### §1.4 常深度情况下的行波

现在, 我们把线性化的水波方程应用于常深度情况, 讨论行波的特征. 令深度  $h = \text{常数}$ , 行波的圆频率为  $\omega$ , 相应地, 有

$$\begin{cases} \zeta(x, y, t) = \eta(x, y)e^{-i\omega t} \\ \Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)e^{-i\omega t} \\ \mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, z)e^{-i\omega t} \\ P(x, y, z, t) + \rho g z = p(x, y, z)e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (1.30)$$

把这些关系代入线性化方程 (1.20)-(1.23), 我们得到

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h < z < 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad (1.32)$$

$$i\omega\eta + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (1.33)$$

$$-i\omega\phi + g\eta = -\frac{p_a}{\rho}, \quad z = 0 \quad (1.34)$$

联立方程 (1.33) 和 (1.34), 有

$$-\omega^2\phi + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{i\omega}{\rho}p_a, \quad z = 0 \quad (1.35)$$

其中, 可以假设  $p_a = 0$ . 为了求得速度势  $\phi$ , 令  $\eta$  为

$$\eta = Ae^{ikx} \quad (1.36)$$

用分离变量法, 容易发现, 方程 (1.31)-(1.32) 的解满足形式

$$\phi = B \cosh k(z+h)e^{ikx}$$

应用自由表面边界条件 (1.35) 和假设  $p_a = 0$ , 得

$$B = -\frac{igA}{\omega} \frac{1}{\cosh kh}$$

再根据边界条件 (1.33), 发现频率和波数之间的相互依赖关系

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (1.37)$$

它称为色散关系. 因此, 有速度势的表达式:

$$\phi = -\frac{gA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{ikx} \quad (1.38)$$

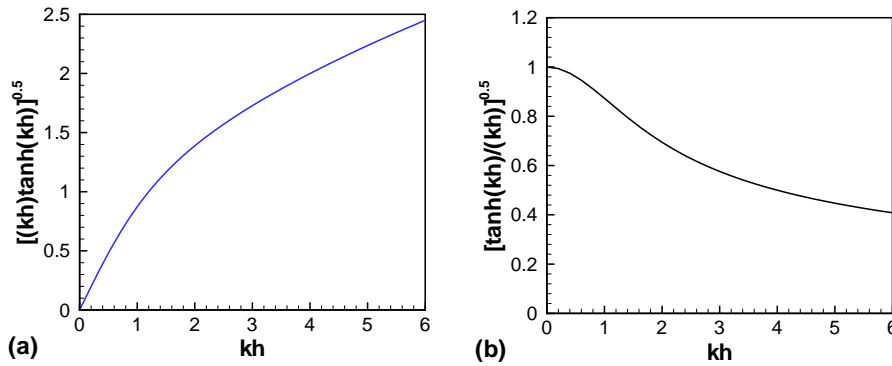


图 1.1: (a) 无量纲频率与无量纲波数的关系; (b) 无量纲相速度与无量纲波数的关系

色散关系 (1.37) 也可以把它写成如下的无量纲形式

$$\omega(h/g)^{1/2} = (kh \tanh kh)^{1/2}$$

无量纲频率和无量纲波数之间的这种色散关系, 如图 1.1(a) 所示.

在极端情况下, 我们得到渐近近似

$$\begin{cases} \omega \simeq \sqrt{gh}k, & k \ll 1 \\ \omega \simeq \sqrt{gk}, & kh \gg 1 \end{cases} \quad (1.39)$$

注意到波数关系  $k\lambda = 2\pi$ , 发现无量纲波数实际上是深度与波长的比. 因此,  $kh \ll 1$  代表的是长波或浅水波情况, 而  $kh \gg 1$  则代表短波和深水波情况. 当  $h$  固定时, 短波频率较高. 当频率固定时, 深度小时波数较大, 波长较短.

对于常深度情况, 水波的相速度是

$$C = \frac{\omega}{k} = \left( \frac{g}{k} \tanh kh \right)^{1/2} \quad (1.40)$$

对应的无量纲形式是

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \left( \frac{\tanh kh}{kh} \right)^{1/2} \quad (1.41)$$

它对无量纲波数的依赖关系如图 1.1(b) 所示. 类似地, 在极端情况下, 我们得到

$$\begin{cases} C = \sqrt{gh}, & kh \ll 1 \quad (\text{长波, 浅水波}) \\ C = \sqrt{g/k}, & kh \gg 1 \quad (\text{短波, 深水波}) \end{cases} \quad (1.42)$$

一般地, 在常深度情况下, 波长较长的波相速度比较大. 因此, 如果把初始扰动看成波长连续的波的迭加, 则可以预计, 随着时间的增加, 较长的波常常跑在较短的波的前边, 当扰动向外传播时, 长波和短波分开得越大, 而中等波长的波在两者之间行进. 由于不同频率的波行进速度有差别, 产生传播过程中波分散的现象, 称为色散. 从方程 (1.42) 可以看出, 在常深度情况下, 如果  $kh \ll 1$  成立, 相应的长波和浅水波的相速度就是固定不变的, 它们在传播过程中不会发生分散, 故称为非色散波. 一般情况下, 水波是色散波.

## §1.5 群速度

我们将看到, 波的群速度可以定义为频率对波数的导数, 代表波动能量的传播速度. 现在, 我们分别从波的运动学和动力学两个方面来讨论, 以加深对波动理论中群速度的理解.

### §1.5.1 运动学观点

首先, 我们假设在波数狭窄范围  $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$  内, 存在一群正弦波. 这时, 自由面的位移变成

$$\zeta = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk, \quad \Delta k/k_0 \ll 1 \quad (1.43)$$

其中  $A(k)$  是波数谱. 把频率看作波数的函数, 在  $k_0$  点展开, 我们得到

$$\omega = \omega(k_0) + (k - k_0) \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} + O[(k - k_0)^2] \quad (1.44)$$

再令  $\omega_0 = \omega(k_0)$ ,  $C_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0}$ , 和  $\xi = (k - k_0)/k_0$ , 假设波数谱  $A(k)$  足够光滑, 取比较粗糙的近似, 有

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta &\simeq A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k/k_0}^{\Delta k/k_0} \{ e^{ik_0 \xi [x - C_g t]} \} k_0 d\xi \\ &= 2A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{\sin \Delta k (x - C_g t)}{(x - C_g t)} \\ &= A_g e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \end{aligned} \right. \quad (1.45)$$

其中

$$A_g = 2A(k_0) \frac{\sin \Delta k (x - C_g t)}{(x - C_g t)} \quad (1.46)$$

考虑到方程 (1.45) 有指数因子  $e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$ , 我们可以把  $\zeta$  看成是有缓慢调制振幅  $A_g$  的正弦波列. 这样一来,  $A_g$  确定的波包络, 如图 1.2 所示, 是以速度  $C_g$  行进的, 这个速度称为群速度. 波包络相邻两波节之间的距离是振幅的调制长度尺度, 大约等于  $\pi/\Delta k$ , 比载波的波长  $2\pi/k_0$  大得多.

在常深度情况下, 应用色散关系 (1.37), 有

$$\left\{ \begin{aligned} C_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \\ &= \frac{C}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \end{aligned} \right. \quad (1.47)$$

因此, 在极端情况下, 的

$$C_g \simeq \left\{ \begin{aligned} C &= \sqrt{gh}, \quad kh \ll 1, \quad (\text{长波, 浅水波}) \\ \frac{1}{2}C &= \frac{1}{2}\sqrt{g/k}, \quad kh \gg 1, \quad (\text{短波, 深水波}) \end{aligned} \right. \quad (1.48)$$

在中等水深的情况下, 自然有不等式

$$\frac{1}{2} < C_g/C < 1 \quad (1.49)$$

表明相速度大于群速度, 各个波峰将从波群的尾部向前沿行进.

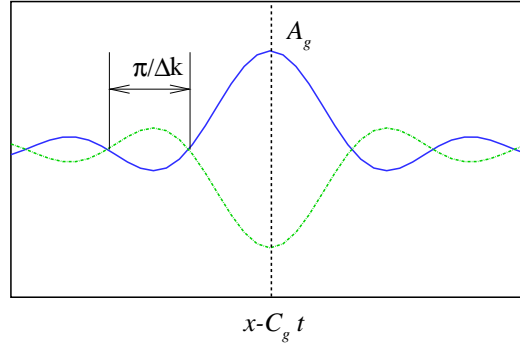


图 1.2: 窄频带群波的示意图

### §1.5.2 动力学观点

为了说明群速度与能量传播之间的关系, 现在, 我们计算一下, 在常深度的行波波列内, 单位正方形的自由面下水柱的平均能量, 若用上部横杠代表一个周期上的平均值, 则整个流体柱内的动能是

$$\begin{cases} E_k &= \frac{1}{2} \rho \overline{\int_{-h}^{\zeta} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]^2 dz} \\ &\simeq \frac{1}{2} \rho \overline{\int_{-h}^{\zeta} [\text{Re}u(\mathbf{x}, t)]^2 + [\text{Re}w(\mathbf{x}, t)]^2 dz} \end{cases} \quad (1.50)$$

其中, 精确到  $O(kA)^2$  阶, 积分上限变成了  $z = 0$ , 用  $\mathbf{u} = \nabla\Phi$  可以求出速度场. 一般地, 若

$$a = \text{Re}Ae^{-i\omega t}, \quad b = \text{Re}Be^{-i\omega t}$$

则乘积  $ab$  的时均值

$$\overline{ab} = \frac{1}{T} \int_0^T ab dt = \frac{1}{2} \text{Re}(AB^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(A^*B) \quad (1.51)$$

根据速度势的表达式 (1.38), 容易导出速度场

$$\begin{cases} u &= \frac{gkA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i(kx-\omega t)} \\ v &= 0 \\ w &= -\frac{igkA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i(kx-\omega t)} \end{cases}$$

代入方程 (1.50), 应用积分公式

$$\int_0^{kh} \cosh^2 \xi d\xi = \frac{1}{4} (\sinh 2kh + 2kh)$$

和色散关系 (1.37), 我们有

$$\begin{cases} E_k &= \frac{\rho}{4} \left( \frac{gkA}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 kh} \int_{-h}^0 [\cosh^2 k(z+h) + \sinh^2 k(z+h)] dz \\ &= \frac{\rho}{4} \left( \frac{gkA}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 kh} \frac{\sinh 2kh}{2k} = \frac{1}{4} \rho g A^2 \end{cases} \quad (1.52)$$

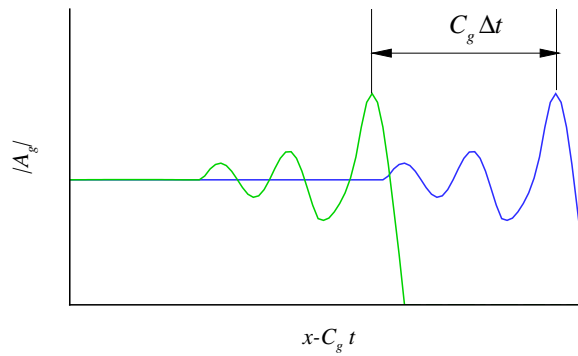


图 1.3: 正弦波的包络波前沿的示意图

另外，单位面积下流体柱内的势能是

$$E_p = \int_0^{\zeta} \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g \overline{\zeta^2} = \frac{1}{4} \rho g A^2 \quad (1.53)$$

可以看出，动能和势能是相等的，这种现象称为波能量的均分。流体柱内的总能量是

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \rho g A^2 \quad (1.54)$$

现在，我们考虑通过沿着波峰的单位宽度的铅垂截面的能流速率。它等于压力做功的平均速率。因此

$$\left\{ \begin{aligned} \text{能流速率} &= \text{压力作功率} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} p(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) dz} \\ &\simeq -\rho \int_{-h}^0 \overline{\Phi_t \Phi_x} dz \\ &= \frac{1}{2} \rho g \left[ \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right] = EC_g \end{aligned} \right. \quad (1.55)$$

可以看出，从动力学的意义上说，群速度是能量传播的速度。我们考察单位宽度的长的波槽中产生表面波的情况。造波机启动后，经过一段长时间后，包络可能是处处均匀的，不同的是波的前沿附近，波的形状可能如图 1.5.2 显示的那样。因为造波机输入的能量速率是  $EC_g$ ，因此，波区的延伸速率一定是  $C_g$ ，波前沿必然以群速度传播。

### 习题



- (1.2) 一个两层流体系统的底部是水平的, 上层流体的密度是  $\rho$ , 下层较重的流体密度是  $\rho'$ ; 假设自由表面在  $z = 0$ , 界面在  $z = -h$ , 底面在  $z = -h'$ . 试证明正弦行波的色散关系是

$$\left(\frac{\omega^2}{gk}\right)^2 \{\rho' \coth kh \coth k(h' - h) + \rho\} - \frac{\omega^2}{gk} \rho' \rho' \{\coth kh + \coth k(h' - h)\} + \rho' - \rho = 0$$

对于同一波数  $k$ , 研究频率分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的两种可能的解模式. 特别是, 当  $h' \rightarrow \infty$  时,  $\omega_1^2 = gk$ ,

$$\omega_2^2 = gk \frac{\rho' - \rho}{\rho' \coth kh + \rho} < \omega_1^2,$$

并证明界面与自由表面的振幅比是

$$e^{-kh} \text{(第一种模式)}, \quad -\frac{\rho'}{\rho' - \rho} e^{kh} \text{(第二种模式)}$$

对两种模式分别画出群速度与波数  $k$  的关系图.

- (1.3) 已知自由面上的表面张力, 水面上的大气压力  $P_a$  和水面之下的水压  $P$  之间, 满足 Laplace 关系,

$$P - P_a \cong -T(\zeta_{xx} + \zeta_{yy}), \quad z \cong 0$$

其中  $T$  是表面张力系数. 当温度为  $20^\circ\text{C}$  时, 空气 - 水界面的表面张力系数  $T = 74 \times 10^{-3} \text{N/m}$ . 试写出自由面边界条件, 并研究深水情况的表面平行波:  $\Phi \propto e^{kx} e^{i(kx - \omega t)}$ , 证明色散关系是

$$\omega^2 = gk + Tk^3/\rho$$

并证明相速度具有最小值  $C_m$ , 且满足

$$\frac{C^2}{C_m^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{k_m}{k} + \frac{k}{k_m} \right)$$

其中,  $\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = 2\pi \sqrt{\frac{T}{g\rho}}$ ,  $C_m^2 = 2\sqrt{\frac{Tg}{\rho}}$  对水和空气来说,  $\lambda_m$  和  $C_m$  是多大? 试讨论  $\omega, C$  随  $k$  的变化.

## 第二章 常深度开阔水域中的瞬变波

瞬变波产生于持续时间有限的激发引起的扰动, 它的传播是常见的物理现象. 这些激发可能源自海底地震, 海底滑坡或爆炸, 相应的瞬变波对海岸建筑有显著影响. 研究瞬变波的传播有实际意义: 对地震律波的传播分析, 可以为研究海底地震提供资料; 溃坝时形成的溃坝波, 对下游建筑物会产生很大压力. 瞬变水波的传播分析比较复杂. 本章将给出扰动源机理和简单的海底模型. 为了奠定非线性分析的基础, 本章将介绍多重尺度展开法.

### §2.1 二维瞬变波

假设海洋是常深度的, 且没有别的固体边界的影响. 同时, 假设, 自由面和海底的扰动与坐标  $y$  无关, 因此, 我们得到简化为  $x, z$  平面内的二维问题, 相应的水波运动的速度势满足

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

如果水波的线性化假设成立, 且大气压力  $P_a(x, t)$  是已知的, 则自由表面上的边界条件是

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta = -\frac{P_a}{\rho} \quad (2.3)$$

假设海底方程是  $z = -h + H(x, t)$ , 海底表面的方程是  $F(x, t) = H(x, t) - h - z = 0$  因此, 由海底表面函数的微分消失

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) F \right] dt = 0$$

及速度的定义式 (1.6), 我们有海底边界条件

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{当 } z = -h + H(x, t) \quad (2.4)$$

设海底起伏很小, 相当于假设了海底边界离地震中心较远, 这时  $H$ ,  $\frac{\partial H}{\partial t}$  和  $\frac{\partial H}{\partial x}$  的振幅很小, 说明海底边界条件 (2.4) 中的二次项可以忽略, 线性化近似适用, 即

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial t} \equiv W(x, t), \quad \text{当 } z \simeq -h \quad (2.5)$$

这里,  $W(x, t)$  是已知的函数. 接下来的问题是如何给出初始条件? 是在整个区域还是在部分区域给出问题的初始条件? 为了弄清这些问题, 我们引入 Laplace 变换和它的逆变换:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} \bar{f}(s) ds \quad (2.7)$$

其中  $\Gamma$  是复平面  $s$  中虚轴和  $\bar{f}(s)$  的所有奇点的右侧的铅垂线. 对瞬变波的基本方程进行 Laplace 变换, 可得

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = \bar{W}(x, s), \quad z = -h \quad (2.9)$$

$$-\zeta(x, 0) + s\bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z}, \quad z=0 \quad (2.10)$$

$$-\Phi(x, 0, 0) + s\bar{\Phi} + g\bar{\zeta} = -\frac{\bar{P}_a}{\rho}, \quad z=0 \quad (2.11)$$

从方程 (2.10) 和 (2.11) 中消去  $\bar{\zeta}$ , 得

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} + \frac{s^2}{g}\bar{\Phi} = -\zeta(x, 0) + \frac{s}{g}\Phi(x, 0, 0) - \frac{s\bar{P}_a}{\rho g} = G(x, s), \quad (z=0) \quad (2.12)$$

因此, 如果给定了水面上的初始条件, 即给出自由面的初始铅垂位移  $\zeta(x, 0)$  和  $\Phi$  的初始值,  $G(x, s)$  就完全确定了. 这样的问题称为 Cauchy-Poisson 问题.

为了理解  $\Phi(x, 0, 0)$  的物理意义, 我们考虑特殊的大气压力  $P_a(x, t) = I\delta(t)$  (这里,  $\delta(t)$  是 Dirac  $\delta$  函数), 即  $t = 0$  前后水面是平静的,  $t = 0$  时刻水面受到一冲击压力. 对自由面条件方程 (2.3) 在时间  $t$  的  $(0_-, 0^+)$  范围内的进行积分, 得

$$\Phi(x, 0, 0^+) - \Phi(x, 0, 0_-) + \int_{0_-}^{0^+} g\zeta dt = -\frac{I}{\rho} \int_{0_-}^{0^+} \delta(t) dt = -\frac{I}{\rho}$$

显然,  $\Phi(x, 0, 0_-) = 0$ , 而  $\zeta$  必定是有限的, 所以, 我们得到  $\Phi(x, 0, 0^+) = -I/\rho$ . 这说明了  $\Phi$  的初始值, 代表了早于  $t = 0^+$  时刻作用于自由面的冲击压力.

对于有限时间  $t$ , 可以期望, 流体在远离初始扰动的地方没有运动, 即

$$\Phi(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{当 } |x| \rightarrow \infty$$

根据区域内没有别的固体扰动的假设, 方程 (2.8)-(2.12) 描述的问题, 容易用 Fourier 变换的方法求解. Fourier 变换的定义是

$$\begin{cases} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk \end{cases} \quad (2.13)$$

代入瞬变波问题的方程, 可以发现, 速度势的 Fourier-Laplace 变换的像  $\tilde{\Phi}(k, z, s)$  满足

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dz^2} - k^2 \tilde{\Phi} = 0, \quad -h < z < 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dz} + \frac{s^2}{g}\tilde{\Phi} = \tilde{G}(k, s), \quad z = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dz} = \tilde{W}(k, s), \quad z = -h \quad (2.16)$$

其中,

$$\tilde{G}(k, s) = -\frac{s\tilde{P}_a(k, s)}{\rho g} - \tilde{\zeta}(k, 0) + \frac{s}{g}\tilde{\Phi}(k, 0, 0) \quad (2.17)$$

容易发现, 对于方程 (2.14)-(2.16) 描述的问题, 它的解是

$$\tilde{\Phi} = \frac{\operatorname{sech}kh}{s^2 + gk \tanh kh} \left[ g\tilde{G} \cosh k(z+h) + \frac{\tilde{W}}{k} (s^2 \sinh kz - gk \cosh kz) \right] \quad (2.18)$$

其中, 方括号中的第一项代表了自由面扰动的影响, 第二项代表了底部扰动的影响. 取逆 Fourier-Laplace 变换, 我们得到速度势的形式

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} ds e^{st} \tilde{\Phi}(k, z, s) \quad (2.19)$$

应用方程 (2.3), 自由面高度的形式是

$$\begin{cases} \zeta &= -\frac{P_a}{\rho g} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0, t) \\ &= -\frac{P_a}{\rho g} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} ds e^{st} \frac{s}{g} \tilde{\Phi}(k, z, s) \end{cases} \quad (2.20)$$

在以下两小节中, 我们通过两个特例, 来考察在具体扰动情况下, 如何用方程 (2.19) 和 (a-74) 对问题进行分析.

### §2.1.1 自由面上初始位移产生的瞬变波

现在要考虑的情况是

$$P_a(x, t) = W(x, t) = \Phi(x, 0, 0) = 0; \quad \zeta(x, 0) \equiv \zeta_0(x) \neq 0$$

即自由面上无压力冲击, 大气压力为零, 海底无扰动, 只有自由面上的初始位移. 因此, 我们有

$$\tilde{W} = 0, \quad \tilde{G} = -\tilde{\zeta}_0(k) \quad (2.21)$$

代入方程 (2.20), 得自由面高度

$$\zeta = -\frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\zeta}_0(k) \int_{\Gamma} ds \frac{se^{st}}{s^2 + gk \tanh kh} \quad (2.22)$$

容易求得关于  $s$  的积分, 考虑到被积函数在

$$s = \pm i\omega, \quad (\omega = \sqrt{gk \tanh kh}) \quad (2.23)$$

处有两个极点. 对于  $t < 0$  的情况, 在右半个  $s$  平面上取封闭的半周线, 如图 2.1 所示, 因为被积函数的因子  $e^{st}$  在  $s \rightarrow \infty$  时, 一致地趋于零. 根据 Jordan 引理, 在大的半圆弧上的线积分为零. 根据 Cauchy 留数定理, 因为这个半圆内无奇点, 所以原来的关于  $s$  的积分为零. 即

$$\zeta = 0, \quad (t < 0) \quad (2.24)$$

对于  $t > 0$  的情况, 必须选择左半  $s$  平面上的半圆 (见图 2.1). 根据 Jordan 引理, 沿着这个大的半圆弧的线积分为零. 只有在  $\pm i\omega$  两个极点处的留数

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{se^{st}}{s^2 + \omega^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{se^{st}}{(s+i\omega)(s-i\omega)} = \cos \omega t, \quad (t > 0) \quad (2.25)$$

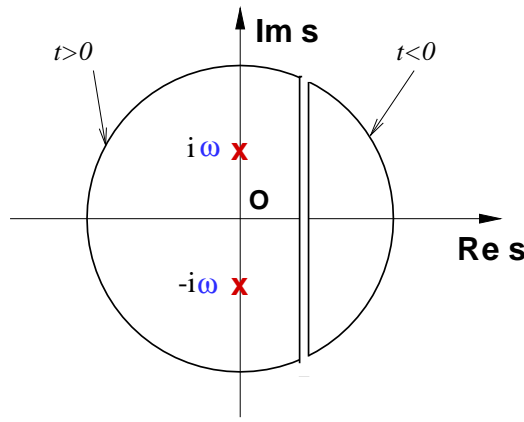


图 2.1: 复数平面上用于求逆 Laplace 变换的周线

代入方程 (2.22), 我们有

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \cos \omega t \tilde{\zeta}_0 k \quad (2.26)$$

把  $\zeta_0(x)$  看成奇偶两部分的迭加,

$$\zeta_0(x) = \zeta_0^e(x) + \zeta_0^o(x)$$

则相应的 Fourier 变换式是

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}(k) &= 2 \int_0^{\infty} dx \cos kx \zeta_0^e - 2i \int_0^{\infty} dx \sin kx \zeta_0^o(x) \\ &\equiv \tilde{\zeta}_0^e(k) + \tilde{\zeta}_0^o(k) \end{cases} \quad (2.27)$$

其中,  $\tilde{\zeta}_0^e$  是  $k$  的实的偶函数,  $\tilde{\zeta}_0^o$  是  $k$  的虚的奇函数. 为简单起见, 假设  $\zeta_0$  是  $x$  的实函数, 因此  $\zeta_0 = \zeta_0^e$ , 方程 (2.26) 变成

$$\begin{cases} \zeta(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \tilde{\zeta}_0^e \cos kx \cos \omega t \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} dk \tilde{\zeta}_0^e [e^{i(kx-\omega t)} + e^{i(kx+\omega t)}] \end{cases} \quad (2.28)$$

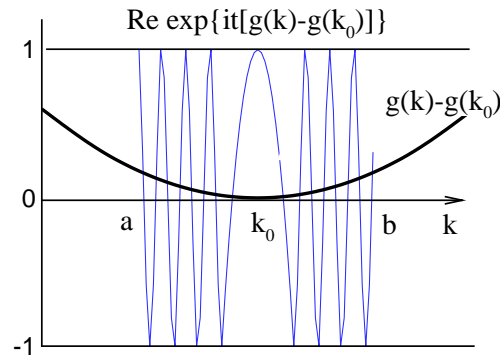
其中方括号中的第一项代表右行波, 第二项代表左行波. 而且, 我们看出, 初始扰动分散成波长从零到无穷大的各种波, 这是由波的色散决定的. 由方程 (2.28) 出发, 计算表面初始位移初始的波的显式解, 一般难度较大. 但是, 通常人们关心的是  $t$  很大时波动解的渐近性质. 为了看出这些渐近性质, 分析时需要用的方法, 是在水波研究中由 Kelvin 提出的驻相法 (固定相位法). 这种方法介绍如下:

假设  $f$  和  $g$  是  $k$  的光滑函数, 我们来考察积分

$$I(t) = \int_a^b dk f(k) e^{itg(k)} \quad (2.29)$$

在  $t$  很大情况下的渐近形态. 显然,  $e^{itg}$  在  $t$  很大时是  $k$  的快速震荡函数, 如图 2.2 所示. 一般地, 曲线下的净面积很小, 趋于零. 但是驻点  $k_0$  附近需要重点考虑. 在驻点  $k_0$ , 我们有

$$g'(k) = 0, \quad \text{当 } k = k_0 \quad (2.30)$$

图 2.2: 驻点  $k_0$  附近的函数  $g(k)$  变化情况

从图 2.2 可以看出, 在  $k_0$  附近,  $\exp\{it[g(k) - g(k_0)]\}$  出现缓慢变化, 对积分有主要贡献. 因此, 我们把被积函数写成

$$\exp[itg(k_0)] \exp\{it[g(k) - g(k_0)]\}$$

对  $g(k)$ , 应用  $k_0$  附近的 Taylor 展开, 并取前两项, 我们得到

$$g(k) \simeq g(k_0) + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 g''(k_0)$$

把它代入积分式, 得

$$I \simeq e^{itg(k_0)} f(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[i(k - k_0)^2 t g''(k_0)/2]$$

这里积分限已经用  $\pm\infty$  替代了. 应用已知的关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{\pm itk^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\pm i\pi/4}$$

我们得到

$$I \simeq e^{itg(k_0)} f(k_0) \sqrt{\frac{2\pi}{t|g''(k_0)|}} e^{\pm i\pi/4} \quad (2.31)$$

其中, 当  $g''(k_0) > 0$  时, 用因子  $e^{i\pi/4}$ ; 否则, 如果  $g''(k_0) < 0$ , 则要用因子  $e^{-i\pi/4}$ . 上述积分结果的误差是  $O(1/t)$ .

应用驻相方法, 我们就可以考察方程 (2.28) 表达的右行波在  $t \gg 1$  时的渐近形态. 现在, 我们发现  $g(k)$  的形式是

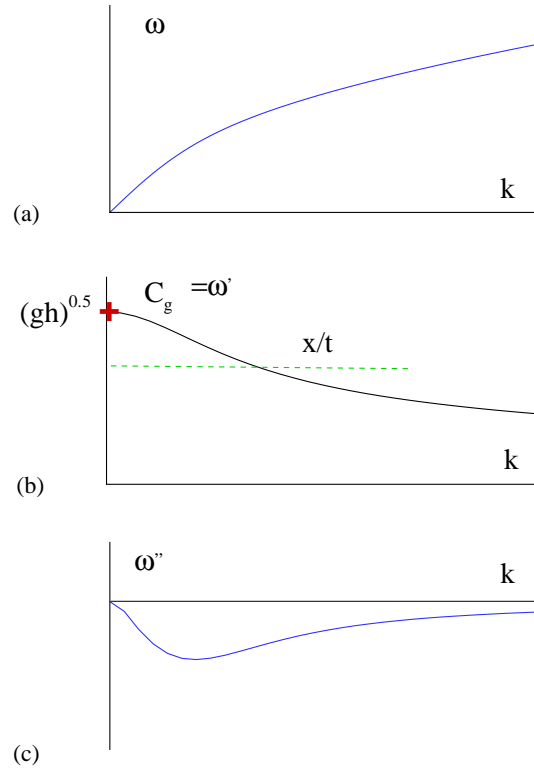
$$g(k) = k \frac{x}{t} - \omega(k)$$

相应的有

$$g'(k) = \frac{x}{t} - \omega'$$

和

$$g'' = -\omega''$$

图 2.3:  $\omega, \omega'$  和  $\omega''$  随  $k$  的变化

从图 2.3(b), 可以看出, 当  $x > 0$  时, 如果  $x/t < \sqrt{gh}$ , 则当

$$x/t = \omega'(k_0) = C_g(k_0) \quad (2.32)$$

时, 函数  $g(k)$  有一个驻点  $k_0$ , 它是  $x/t$  的函数, 即驻点的值依赖于观测者速度  $x/t$ . 在波数范围  $(0, \infty)$  内, 方程 (2.28) 表达的左行波, 没有驻点, 它对积分的贡献值量级是  $O(1/t)$ . 因此, 根据驻相积分近似 (2.31), 我们得到

$$\zeta(x, t) \simeq \frac{1}{\pi} \tilde{\zeta}_0^e(k_0) \left[ \frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|} \right]^{1/2} \cos \left[ k_0 x - \omega(k_0)t + \frac{\pi}{4} \right] + O(t^{-1}), \quad \text{当 } x/t < \sqrt{gh} \quad (2.33)$$

考虑到  $\omega''(k) < 0$ , 可以看出, 如果  $x > 0, t > 0$ , 则图 2.3(b) 虚线表示的直线  $x/t$  与曲线  $\omega'$ , 在  $x/t > \sqrt{gh}$  的情况下, 不会有交点. 这意味着, 当观测者的速度  $x/t$  大于波的群速度最大值  $\sqrt{gh}$  时, 积分 (2.28) 没有驻点, 可以近似为

$$\zeta \simeq O(t^{-1}), \quad \text{当 } x/t > \sqrt{gh} \quad (2.34)$$

从方程 (2.33), 可以发现, 如果观测者以波的群速度运动, 他看到的是波数为  $k_0$  频率为  $\omega(k_0)$  的一系列正弦波, 波的振幅是随  $t^{-1/2}$  衰减的. 如果观测者的运动速度较大, 则  $k_0$  较小 (见图 2.3), 他将看到波长较长, 振幅较大 (因为这时  $\omega'' A = O(1)$ ) 的波列. 因为  $\tilde{\zeta}^e$  决定于初始

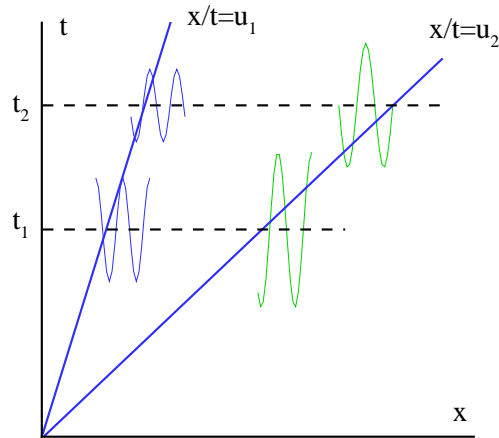


图 2.4: 两个运动观测者之间色散波的空间时间图

位移  $\zeta_0(x)$ , 所以, 初始位移也确定了色散波的振幅. 假设,

$$\zeta_0(x) = \frac{Sb}{\pi(x^2 + b^2)}$$

初始时刻水面有面积为  $S$ , 宽度为  $b$  的对称性突起, 则

$$\tilde{\zeta}_k = \tilde{\zeta}_0^e(k) = S e^{-|k|b}$$

如果  $b$  的值很大, 则除了小的  $k_0$  对应的波长大的先导波外,  $\tilde{\zeta}_0^e$  的值很小. 随着  $b$  的增加, 给定  $k_0$  的波振幅减小.

把许多观测者在  $t_1$  时刻所见的情况综合起来, 就得到图 2.4 所示的那种自由面‘快照’, 于是, 长波有前移的趋势, 短波有后退的趋势. 再来考察一下后一时刻  $t_2 (> t_1)$  的情况. 对同一个观测者来说, 他看到的是波长不变, 振幅减小了的波运动速度分别为  $(x/t) = u_1$ ,  $(x/t) = u_2$  的两个观测者, 都向右移动了, 但是他们之间的空间间隔增大了, 两种波长固定的波有分散的趋势, 这就是色散现象. 观测者如果要想以相速度移动的一特定的波峰, 则他自身的速度就必须不断调整, 因为, 驻相点  $k_0$  和  $C(k_0)$  与波峰到达的地点是相关的. 假如他以波长为  $2\pi/k_0$  的波群速度运动, 则他看到的是这一波长的正弦波, 它们从后边追来, 跑到前方去, 因为波的相速度是大于群速度的.

现在, 我们分析两个运动速度不同的观测者之间波群的能量. 设两个观测者之间的速度差很小, 在某固定时刻  $t$ , 分别到达了地点  $x_1, x_2$ , 并且  $x_2 > x_1$ , 因此  $k_1 > k_2$  (见图 2.3(b)). 对于  $k_2$  和  $k_1$  之间的驻点  $k_0$ , 表面波可以表示为

$$\zeta = A(k_0) \cos \left[ k_0 x - \omega(k_0) t + \frac{\pi}{4} \right]$$

其中,

$$A = \frac{1}{2\pi} \tilde{\zeta}_0^e \left[ \frac{2\pi}{t |\omega''(k_0)|} \right]^{1/2} \quad (2.35)$$



它的能量近似为

$$E \approx \frac{1}{2} \rho g A^2 \quad (2.36)$$

因此,  $x_1$  与  $x_2$  之间各波的总能量是

$$E_{tot} \approx \frac{1}{4\pi} \rho g \int_{x_1}^{x_2} |\tilde{\zeta}_0^e|^2 \frac{1}{|\omega''(k_0)|} \frac{dx}{t} \quad (2.37)$$

由  $x/t = \omega'(k_0)$ , 参考图 2.3(c), 容易发现

$$\frac{dx}{t} = \omega'' dk_0 = -|\omega''(k_0)| dk_0 \quad (2.38)$$

因此我们有

$$E_{tot} \approx \int_{k_2}^{k_1} \frac{\rho g}{4\pi} |\tilde{\zeta}_0^e(k_0)|^2 dk_0 = \text{常数} \quad (2.39)$$

这个常数与时间  $t$  无关. 因此, 在两个以局部群速度运动的观测者之间, 波的总能量守恒, 瞬变波的情况下, 群速度仍然是能量传播的速度.

为了考察驻相法得到的大  $x$ , 大  $t$  下的渐近结果与几何光学理论的联系, 我们把方程 (2.32) 的  $k_0$  改写为  $k$ , 把  $k$  当作  $x$  和  $t$  的函数, 对方程 (2.32) 的两边分别对  $x$  和  $t$  求导, 并注意到  $x/t = \omega'$ , 我们有

$$\frac{1}{t} = \omega'' k_x, \quad -\frac{\omega'}{t} = \omega'' k_t$$

因此

$$k_x = \frac{1}{t\omega''}, \quad k_t = -\omega' \frac{1}{t\omega''} \quad (2.40)$$

可以看出

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega' \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (2.41)$$

相当于

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (2.42)$$

考虑到

$$dk = \frac{\partial k}{\partial t} dt + \frac{\partial k}{\partial x} dx \quad (2.43)$$

因此, 沿着曲线

$$\frac{dx}{dt} = C_g = \omega', \quad dk = 0$$

$k$  保持为常数. 方程 (2.36) 乘以  $\omega^{-1}$ , 在对  $x$  和  $t$  求导, 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( C_g \frac{E}{\omega} \right) = 0 \quad (2.44)$$

它是几何光学近似的基本结果. 因此, 对于缓变的周期性波列普遍成立.

## §2.1.2 瞬变扰动产生的先导波

最快的波对应于  $k \approx 0$ , 以接近于  $\sqrt{gh}$  的速度运动. 在波前沿,

$$g'(k) \simeq \left( \frac{x}{t} - \sqrt{gh} \right)$$

很小, 相位接近驻定; 而且  $\omega'' \simeq -\sqrt{gh}h^2k$  也很小, 这时近似关系 (2.33) 不再成立, 需要有更好的近似. 以下, 我们考察这种关于行进得最快波长最长的波——先导波.

由于  $k \simeq 0$ , 应用色散关系  $\omega^2 = gk \tanh kh$ , 我们把  $g(k)$  按照小  $k$  作 Taylor 展开

$$\begin{cases} g(k) = k \frac{x}{t} - \omega(k) \simeq k \frac{x}{t} - \sqrt{gh} \left( k - \frac{k^3 h^2}{6} + \dots \right) \\ = k \left( \frac{x}{t} - \sqrt{gh} \right) + \frac{\sqrt{gh}}{6} h^2 k^3 + \dots \end{cases} \quad (2.45)$$

接近先导波处  $x/t - \sqrt{gh}$  可为零, 故必须保留  $O(k^3)$  项. 类似地, 可以发现只有方程 (2.33) 的右行波的贡献是重要的, 因此

$$\begin{cases} \zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \tilde{\zeta}_0^e(k) \cos(kx - \omega t) + O(t^{-1}) \\ \simeq \frac{1}{2\pi} \tilde{\zeta}_0^e(0) \int_0^\infty dk \cos \left[ k(x - t\sqrt{gh}) + \left( \frac{h^2 t \sqrt{gh}}{6} \right) k^3 \right] \end{cases} \quad (2.46)$$

其中用了  $\tilde{\zeta}_0^e$  为实函数这一事实. 我们注意到

$$\tilde{\zeta}_0^e(0) = \int_{-\infty}^\infty \zeta(x, 0) dx \quad (2.47)$$

是初始扰动高出水面的总体积.

令

$$Z^3 = \frac{2(x - t\sqrt{gh})^3}{h^2 t \sqrt{gh}}, \quad k(x - t\sqrt{gh}) = Z\alpha \quad (2.48)$$

则

$$dk = \left( \frac{2}{h^2 t \sqrt{gh}} \right)^{1/3} d\alpha$$

积分 (2.46) 变成

$$\zeta \simeq \frac{\tilde{\zeta}_0^e}{2\pi} \left( \frac{2}{h^2 t \sqrt{gh}} \right)^{1/3} \int_0^\infty d\alpha \left( Z\alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right) \quad (2.49)$$

定义  $Z$  的 Airy 函数为

$$\text{Ai}(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \cos \left( Z\alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right) \quad (2.50)$$

我们得到

$$\zeta \simeq \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0^e \left( \frac{2}{h^2 t \sqrt{gh}} \right)^{1/3} \text{Ai} \left[ \left( \frac{2}{h^2 t \sqrt{gh}} \right)^{1/3} (x - t\sqrt{gh}) \right] \quad (2.51)$$

需要说明的是, 函数  $\text{Ai}(Z)$  在  $Z = 0$  附近的值, 需要用数值积分得到. 在数值积分时, 可以根据被积余弦函数在相函数等于  $[3(2k+1)\pi/2] = a_k, k = 1, 2, \dots$  取零点, 把积分限分成许多段, 把原来的积分化为相函数区间  $(0, \pi/2)$ , 以及长度为  $2\pi$  的许多  $(\pi/2, \pi/2 + 2\pi), (\pi/2 + 2\pi, \pi/2 + 4\pi), \dots$  区间上的积分之和. 而当  $Z$  小于零, 且绝对值较大时, 我们就可以用驻相

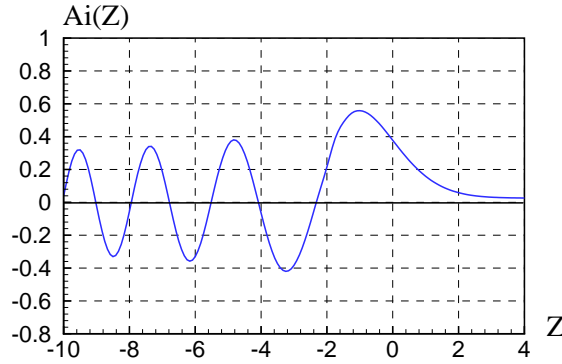


图 2.5: 水面凸起或凹陷产生的先导波的变化, 纵坐标为  $Ai(Z)$

法估计  $Ai(Z)$  的近似值. Airy 函数的变化情况如图 2.5 所示: 当  $Z < 0$  时, 是震荡的, 当  $Z > 0$  时, 它呈指数衰减.

我们看到, 对于固定的  $t$ ,  $Z$  正比于  $x - t\sqrt{gh}$ , 这代表各点离开波前  $x = t\sqrt{gh}$  的距离. 在波前的前面, 波的振幅很小, 而最高峰出现在波前的后面某距离处, 在波峰的后面, 振幅和波长逐渐减小.  $Z$  正比于  $t^{-1/3}$ , 因此, 不同时刻的快照形状不同, 只是由于离开波前的距离正比于  $t^{1/3}$ , 说明相同的波形随时间而延伸展开. 在演化中, 先导波振幅随  $t^{-1/3}$  规律衰减 (见方程 (2.51)), 而波列中其余的波则随  $t^{-1/2}$  的规律衰减. 因此, 先导波生存的时间比“波身”长, 说明先导波维持得最久, 这在地震律波方面表现得更明显.

### §2.1.3 海底倾斜产生的地震律波

地震律波是地震产生的水波. 当海底地震区域的海底位移是已知的, 则水波问题纯粹是流体力学问题. 但由于直接测量地震附近的海底位移太困难, 因此, 只能努力探讨远离地震处测量的水波记录, 粗略演绎海底运动的性质.

经常看到的地震律波的两个特征是: 地震律波到达海岸时, 常发生海水离岸退却的先导现象; 最先到达的波峰可能不是最大的.

现在, 我们将介绍一个理想化的模型, 以对这两个特征加以定性描述. 假定, 初始时刻自由面上没有扰动,

$$\zeta(x, 0) = \Phi(x, 0) = P_a(x, 0, t) = 0 \quad (2.52)$$

在海底  $z = -h$ , 底面位移  $H(x, t)$  预先给定, 因此  $W - \frac{\partial H}{\partial t}$  是已知的, 由方程 (2.18) 得 Fourier-Laplace 变换后的解是

$$\widetilde{\Phi} = \frac{\widetilde{W}}{k \cosh kh} \frac{s^2 \sinh kz - gk \cosh kz}{s^2 + gk \tanh kh} \quad (2.53)$$

自由面位移是

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dke^{ikx}}{\cosh kh} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} ds \frac{s \widetilde{W}^{st}}{e} s^2 + \omega^2 \quad (2.54)$$

其中,  $\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$ . 我们再假定, 海底运动是在无穷小时间间隔内完成的突然移动, 即

$$H(x, 0_-) = 0, \quad H(x, 0_+) = H_0(x)$$

因此海底法向速度可以用  $\delta$  函数表示为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = W(x, t) = H_0(x)\delta(t) \quad (2.55)$$

从而, 我们有  $\widetilde{W} = \widetilde{H}_0(k)$ , 且

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\widetilde{H}_0(k)}{\cosh kh} \frac{1}{2} [e^{i(kx+\omega t)} + e^{i(kx-\omega t)}] \quad (2.56)$$

类似于前边的讨论, 我们可以把  $H_0(x)$  看成是奇函数  $H_0^o(x)$  和偶函数  $H_0^e(x)$  的和. 假设边界条件是可以线性化的, 这两部分可以分开处理, 然后再把所得的结果迭加起来. 容易证明, 偶函数  $H_0^e(x)$  的效应与前边讨论的自由面初始位移情形十分类似, 不同的是现在多了被积函数的因子  $(\cosh kh)^{-1}$ , 它把短波的影响缩小了. 因此现在我们集中讨论奇函数  $H_0^o(x)$  的效应.

引入函数  $B(x)$ , 使得

$$H_0^o = \frac{dB}{dx} \quad (2.57)$$

因此,  $B(x)$  必然是  $x$  的偶函数, 且

$$\widetilde{H}_0^o = ik\widetilde{B}(k)$$

$\widetilde{B}$  为  $k$  的偶函数. 因此, 我们有

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{\cosh kh} ik\widetilde{B}(k) \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{\cosh kh} \widetilde{B}(k) \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \operatorname{Re} \left[ 2 \int_0^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{\cosh kh} \widetilde{B}(k) \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \right] \end{aligned} \right. \quad (2.58)$$

在  $t$  很大且远离先导波时, 类似地, 我们可以用驻相法处理这个积分, 可望得到非常相似的定性结果, 出现的一个主要差别是: 当  $x/t = \text{常数}$  时,  $\zeta \sim t^{-2/3}$ . 现在, 我们考察一下向  $x > 0$  区域传播的先导波附近的情况. 这时, 方程 (2.58) 中的第二个积分 (与右行波有关) 起主要作用, 而且对积分的重要贡献来自  $k \simeq 0$  的附近. 考虑到

$$\left\{ \begin{aligned} J &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dk \frac{e^{i(kx-\omega t)}}{\cosh kh} \widetilde{B}k \simeq \operatorname{Re} \widetilde{B}(0) \int_0^{\infty} dk e^{i(kx-\omega t)} \\ &\simeq \operatorname{Re} \widetilde{B}(0) \int_0^{\infty} dk \exp\{i[k(x-t\sqrt{gh}) + \frac{1}{6}k^3h^2t\sqrt{gh}]\} \\ &\simeq \pi \widetilde{B}(0) \left(\frac{2}{h^2t\sqrt{gh}}\right)^{1/3} \operatorname{Ai} \left[ \left(\frac{2}{h^2t\sqrt{gh}}\right)^{1/3} (x-t\sqrt{gh}) \right] \end{aligned} \right.$$

因此, 把  $J$  代入方程 (2.58), 我们得到

$$\zeta \simeq \left(\frac{2}{h^2t\sqrt{gh}}\right)^{2/3} \frac{\widetilde{B}(0)}{2} \operatorname{Ai}' \left[ \left(\frac{2}{h^2t\sqrt{gh}}\right)^{1/3} (x-t\sqrt{gh}) \right] \quad (2.59)$$

其中  $\operatorname{Ai}'(Z) = \frac{d}{dZ} \operatorname{Ai}(Z)$ . 可见, 先导波随时间  $t^{-2/3}$  衰减. 这比海底纯粹的凸起或凹陷情况下的先导波衰减要快得多 (那时  $\zeta \propto t^{-1/3}$ ), 其原因是海底运动半凸半凹时, 凹凸部分的贡献有彼此互相抵消的趋势. 函数  $\operatorname{Ai}'(Z)$  的变化性质如图 2.6 所示. 现在, 考虑到

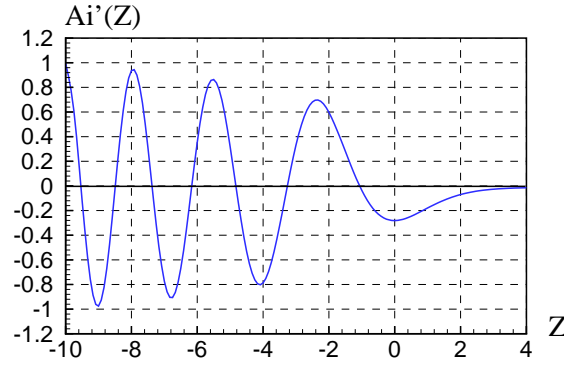


图 2.6: 海底反对称倾斜产生的先导波的变化.

$$\int_{-\infty}^x H_0^o(x) dx$$

当海底为左凸右凹时,  $B(x) \geq 0$ ,

$$\tilde{B}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx$$

这时, 向右传播的波前的先导波是水面的凹陷 (因此, 水从岸边后退); 随后的波峰则振幅渐增. 因此, 在左侧 ( $x < 0$ ), 波前是向右的波前关于  $x$  轴和  $z$  轴的镜像, 其先导波是一个小的波峰. 但是, 如果海底倾斜的方向相反, 则当  $x > 0$  时, 波前的先导就是水位的上升.

### 习题

(2.1) 试证: 在初始条件

$$\zeta(x, 0) = \tilde{\zeta}_0(0)\delta(x), \quad \zeta_t(x, 0) = 0$$

下, 精确地求解方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = gh \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right]$$

得到的解为式 (2.51).

(2.2) 毛细 - 重力波的 Cauchy-Poisson 问题. 考虑一个有毛细作用的自由面. 假设自由面有局部初始凸起

$$\zeta(x, 0) = \frac{b}{\pi}(x^2 + b^2)^{-1}$$

求解与之对应的二维自由面响应; 导出大  $t$  情况下  $x/t$  固定时的渐近结果, 并描述相应的物理图案; 考察驻点附近  $\omega''$  为零的情况.

(2.3) 水流上的波. 已知河流的流速为  $U$ , 深度为  $h$ . 引进扰动速度势  $\Phi$ , 满足

$$\text{总的速度} = U\vec{i} + \nabla\Phi, \quad \Phi = \Phi(x, y, z, t)$$

其中  $x, y, z$  是固定的空间坐标, 试给出关于  $\Phi$  的初边值问题的数学描述, 考察  $U$  对行波色散关系  $\omega = \omega(k, U)$  的影响. 再假设  $t = 0$  时, 有一局部的冲击压力  $p = p_0\delta(x)\delta(y)$  作用在自由面上, 试确定  $\zeta(x, t)$  (包括波前沿) 在大  $t$  和大  $x$  下的渐近性质, 并描述物理图象和  $U$  的作用.

## §2.2 底部扰动产生的三维瞬态波

上一节讨论的, 是二维瞬态水波. 现在, 我们将考察三维瞬态波, 并假设它产生于海底扰动. 如果扰动是在一个有限的水平区域, 产生的波将沿着所有水平方向传播, 这时流体的运动是三维的. 我们将用适当的变换, 求得三维瞬态波的解, 并应用二元驻相法探讨解的渐近性质. 现在, 速度势  $\Phi(x, y, z, t)$  满足三维 Laplace 方程, 假设在任意时刻, 自由面上无扰动, 海底运动是二维的, 满足运动方程

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = W(x, y, t), \quad z = -h \quad (2.60)$$

$W$  只在有限的区域不为零, 而且

$$\Phi, \nabla\Phi \rightarrow 0, \quad (\text{当 } r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty) \quad (2.61)$$

现在, 我们用源迭加的方法 (响应函数法) 来求  $\Phi$  的形式. 考虑在  $t = 0_+$  时刻集中在  $(0, 0, -h)$  的冲击扰动, 它的速度势响应为  $G(x, y, t)$ . 这样, 对应于海底的运动, 有关系

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \delta(x)\delta(y)\delta(t - 0_+), \quad z = -h \quad (2.62)$$

响应函数  $G$  还满足与  $\Phi$  对应的方程和条件,

$$\nabla^2 G = 0, \quad -h < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty \quad (2.63)$$

$$G_{tt} + gG_z = 0, \quad z = 0 \quad (2.64)$$

$$G = G_t = 0, \quad t = 0, z = 0 \quad (2.65)$$

$$G, \nabla G \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad t \text{ 有限} \quad (2.66)$$

容易证明,  $\Phi$  可以用  $G$  表示为

$$\Phi = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' W(x', y', \tau) G(x - x', y - y', z, t - \tau) \quad (2.67)$$

从物理上看, 方程 (2.67) 代表了一系列冲击源的迭加, 在  $x = x', y = y', z = -h$ , 和  $t = \tau$ , 源的强度是

$$W(x', y', \tau) dx' dy' d\tau$$

我们知道卷积定理：两个函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的卷积

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = f_1(t) \oplus f_2(t)$$

的 Laplace 变换，等于这两个函数 Laplace 变换的乘积.

$$\overline{f_1 \oplus f_2}(s) = \overline{f_1}(s) \cdot \overline{f_2}(s)$$

. 根据这个定理，我们可以得到  $\overline{\Phi}$  的形式如下

$$\overline{\Phi}(x, y, s) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \overline{W}(x', y', s) \overline{G}(x - x', y - y', z, s) \quad (2.68)$$

因为点源有轴对称性，使得求解  $G(x, y, t)$  变容易了. 为此，我们定义  $\delta(r)$ ，使得

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (2.69)$$

这个定义是在两端积分相等的条件下给出的.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta(x)\delta(y) = 1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{r dr}{2\pi r}$$

代入方程 (2.62), 得

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(t - 0_+) \quad (2.70)$$

现在，关于  $G$  的问题与  $\theta$  无关了. 考虑到问题的轴对称性，应用零阶的 Hankel 变换

$$\hat{f}(k) = \int_0^{\infty} r J_0(kr) f(r) dr \quad (2.71)$$

其逆变换是

$$f(r) = \int_0^{\infty} k J_0(kr) \hat{f}(k) dk \quad (2.72)$$

定义  $G$  的 Laplace-Hankel 变换

$$\widehat{G} = \int_0^{\infty} e^{-st} ds \int_0^{\infty} r J_0(kr) G(r, z, t) dr$$

在极坐标下，方程 (2.63) 变成

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0, \quad -h < z < 0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (2.73)$$

考虑到贝塞尔函数  $J_{\pm\nu}(r)$  满足定义它的常微分方程

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + r^{-1} \frac{d}{dr} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) \right] J_{\pm\nu} = 0$$

再根据分部积分，应用无穷远处条件  $G = 0, \partial G / \partial r = 0$ ，我们有

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} dr \cdot r J_0(kr) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) \right] = J_0 \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) k J_0' dr = \\ = -kr J_0' G \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} G k^2 (r J_0'' + J_0') dr = -k^2 \int_0^{\infty} r J_0 G dr = -k^2 \widehat{G} \end{array} \right.$$

因此, 对方程 (2.73) 进行 Laplace-Hankel 变换, 可以得到

$$\frac{d^2 \widehat{G}}{dz^2} - k^2 \widehat{G} = 0 \quad (2.74)$$

自由面条件 (2.64) 经过变换之后的形式是

$$\widehat{G}_z + \frac{s^2}{g} \widehat{G} = 0, \quad z = 0 \quad (2.75)$$

底部边界条件 (2.70) 的变换是

$$\widehat{G}_z = \frac{1}{2\pi}, \quad z = -h \quad (2.76)$$

根据条件方程 (2.75) 和 (2.76), 我们得到方程 (2.74) 的解

$$\widehat{G} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \frac{s^2 \sinh kz - gk \cosh kz}{k \cosh kh} \quad (2.77)$$

其中  $\omega^2 = gk \tanh kh$ , 求上式的逆 Hankel 变换, 得

$$\overline{G}(r, z, s) = \int_0^\infty k J_0(kr) \widehat{G} dk, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (2.78)$$

如果点源不在底面极坐标的原点, 而是在另一点  $\mathbf{r}'$ , 则必须把  $|\mathbf{r}| = r$  换成  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , 因此有

$$\overline{G}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, z, s) f(r) = \int_0^\infty k J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \widehat{G}(k, z, s) dk \quad (2.79)$$

这里

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta \\ x' = r' \cos \theta', & y' = r' \sin \theta' \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')]^{1/2} \end{cases}$$

因此, 应用方程 (2.68), 我们有

$$\overline{\Phi}(r, \theta, z, s) = \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \overline{W}(r', \theta', s) \cdot \int_0^\infty k J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \widehat{G}(k, z, s) dk \quad (2.80)$$

于是, 速度势  $\Phi(r, \theta, z, t)$  可以用 Laplace 逆变换求得. 相应的, 自由面位移的 Laplace 变换是

$$\overline{\zeta} = -\frac{s}{g} \overline{\Phi} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \overline{W}(r', \theta', s) \cdot \int_0^\infty k J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{s}{s^2 + \omega^2} \frac{dk}{\cosh kh} \quad (2.81)$$

接下来, 我们将讨论二维地震律波和相应的先导波.

### §2.2.1 海底冲击产生的二维地震律波

假设海底的冲击位移是

$$W(r, \theta, t) = \mathcal{W}(r, \theta) \delta(t - 0_+) \quad (2.82)$$

其 Laplace 变换是

$$\overline{W} = \mathcal{W}(r, \theta) \quad (2.83)$$



代入自由面位移的方程 (2.81), 并进行逆 Laplace 变换, 我们得到

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \mathcal{W}(r', \theta', s) \cdot \int_0^\infty k J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\cos \omega t dk}{\cosh kh} \quad (2.84)$$

为了进一步分析, 需要用 Neumann 定理 [10], 把函数  $J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  展开成级数

$$\begin{cases} J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(kr) J_n(kr') \cos n(\theta - \theta') \\ = \sum_0^{\infty} \varepsilon_n J_n(kr) J_n(kr') \cos n(\theta - \theta') \end{cases} \quad (2.85)$$

这里  $\varepsilon_n$  是 Jacobi 符号 ( $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 2$ , 当  $n \geq 1$ ). 把方程 (2.85) 代入方程 (2.84), 并记

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \mathcal{W}(r', \theta', s) J_n(kr') \cdot \begin{bmatrix} \cos n\theta' \\ \sin n\theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_n^c(k) \\ W_n^s(k) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

我们得到

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_0^{\infty} \varepsilon_n \int_0^\infty k J_n(kr) \frac{\cos \omega t}{\cosh kh} \cdot (W_n^c \cos n\theta + W_n^s \sin n\theta) dk \quad (2.87)$$

原则上讲, 给定  $\mathcal{W}(r, \theta)$ , 就可以进行 (2.86) 的积分, 求出  $W_n^c(k)$  和  $W_n^s$ , 再由数值积分和求和就可以得到最后的解.

为了得到一些物理概念, 现在, 我们考察两种简单的情况:

$$\mathcal{W} = W_1(r) \cos \theta, \quad \text{和} \quad \mathcal{W} = W_0(r) \quad (2.88)$$

可见第一种情况下, 海底冲击位移关于  $y$  轴是对称的, 在第二种情况下, 是轴对称的. 第二种情况比较简单, 这里, 只给出第一种情况的分析. 我们看到

$$\begin{cases} W_n^c(k) = 0 (n \neq 1), \quad W_n^s = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ W_1^c = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr' \cdot r' W_1(r') J_1(kr') \end{cases} \quad (2.89)$$

代入方程 (2.87), 得

$$\zeta = \cos \theta \int_0^\infty k J_1(kr) \frac{\cos \omega t}{\cosh kh} (2W_1^c) dk \quad (2.90)$$

接下来, 我们考察大  $r$  和大  $t$  条件下  $\zeta$  的渐近性态. 记

$$\widehat{W}_1(2k) = 2W_1^c = \int_0^\infty r J_1(kr) W_1(r) dr, \quad F(k) = k \frac{\widehat{W}_1}{\cosh kh}$$

注意到恒等式

$$J_1(kr) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi \cos(\psi - kr \sin \psi) \quad (2.91)$$

方程 (2.90) 变成

$$\begin{cases} \zeta(r, \theta, t) = \cos \theta \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi \int_0^\infty dk F(k) \cos(\psi - kr \sin \psi) e^{-i\omega t} \\ = \cos \theta \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\psi \cdot \\ \cdot \left\{ e^{-i\psi} \int_0^\infty dk F(k) e^{i(kr \sin \psi - \omega t)} + e^{i\psi} \int_0^\infty dk F(k) e^{-i(kr \sin \psi + \omega t)} \right\} \end{cases} \quad (2.92)$$

现在, 考察方程 (2.92) 中的第一个二重积分

$$I = \int_0^\pi d\psi e^{-i\psi} \int_0^\infty dk F(k) e^{it[krt^{-1} \sin \psi - \omega(k)]} \quad (2.93)$$

可以看出, 相函数依赖于两个变量  $k$  和  $\psi$ , 在  $k \in (0, \pi)$  和  $\psi \in (0, \infty)$  的范围内, 令相函数对  $k$  和  $\psi$  的偏导数同时为零, 可以找出驻相点. 我们先令  $\psi$  固定, 求出沿  $k$  的驻相贡献, 然后对  $\psi$  重复类似的过程. 因此, 对于大  $t$ , 固定  $rt^{-1}$ ,  $\sin \psi$ , 用驻相法如下:

$$\begin{cases} g(k) &= krt^{-1} \sin \psi - \omega(k) \\ g'(k) &= rt^{-1} \sin \psi - \omega'(k) \\ g''(k) &= -\omega''(k) \end{cases} \quad (2.94)$$

根据图 2.2 可知,  $g''(k) > 0$ . 在  $g'(k)$  的零点有一个驻点, 用它可得积分的近似值

$$\sqrt{\frac{2\pi}{t|\omega''(k)|}} F(k) \exp \left\{ it [krt^{-1} \sin \psi - \omega(k)] + i\frac{\pi}{4} \right\}$$

其中的  $k$  应满足方程  $g'(k) = 0$ . 类似的分析表明, 方程 (2.92) 中的另一个积分没有驻点, 因此是  $O(t^{-1})$  量级. 积分  $I$  可以写成

$$I = \int_0^\pi e^{-i\psi} e^{i\pi/4} \left( \frac{2\pi}{t|\omega''(k)|} \right)^{1/2} F(k) e^{it[krt^{-1} \sin \psi - \omega(k)]} \quad (2.95)$$

现在关于  $\psi$  的相函数及其前二阶导数是

$$\begin{cases} f(\psi) &= krt^{-1} \sin \psi - \omega(k) \\ \frac{df}{d\psi} &= krt^{-1} \cos \psi + \frac{dk}{d\psi} [rt^{-1} \sin \psi - \omega'(k)] = krt^{-1} \cos \psi \\ \frac{d^2 f}{d\psi^2} &= -krt^{-1} \sin \psi + rt^{-1} \cos \psi \frac{dk}{d\psi} \end{cases}$$

显然,  $\psi$  的驻点是  $\psi = \pi/2$ , 相应的  $d^2 f/d\psi^2 = -k_0 r t^{-1} < 0$ . 而  $k_0$  满足

$$rt^{-1} - \omega'(k_0) = 0$$

因此, 我们有

$$I = e^{-\pi/2} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|}} F(k_0) \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}} \cdot e^{i[k_0 r - \omega(k_0)t]} \quad (2.96)$$

相应的自由面位移是

$$\begin{cases} \zeta &= \cos \theta \operatorname{Re} \left[ \frac{-i}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|}} F(k_0) \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}} \cdot e^{i[k_0 r - \omega(k_0)t]} \right] + O(t^{-1}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|}} F(k_0) \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}} \cdot \sin[k_0 r - \omega(k_0)t] + O(t^{-1}) \end{cases} \quad (2.97)$$

可以看出, 当  $r/t =$  常数时,

$$\zeta \simeq \frac{1}{t} \cos \theta F(k_0) \sqrt{\frac{1}{k_0 r t^{-1} |\omega'' k_0|}} \sin t [k_0 r t^{-1} - \omega k_0] \quad (2.98)$$

其中  $k_0$  是  $r/t$  的函数, 波的衰减速率  $\propto t^{-1}$ , 比一位波快. 海底冲击位移的对称性, 反映了沿着  $x$  方向 ( $\theta = 0$ ) 波的振幅最大, 而沿着对称轴  $y$ , 当  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  时波幅很小. 如果进一步假设

$$W_1 = \begin{cases} \frac{A}{a} \sqrt{a^2 - r^2} & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \quad (2.99)$$

因此,

$$\begin{cases} \widehat{W}_1(k) = \frac{A}{a} \int_0^\infty r J_1(kr) \sqrt{a^2 - r^2} dr \\ = Aa^2 \int_0^{\pi/2} J_1(ka \sin \theta) \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \end{cases} \quad (2.100)$$

注意到贝塞尔函数的级数展开式 ([10], 384, 474 页), 我们发现<sup>1</sup>

$$\widehat{W}_1(k) = Aa^2 \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1}{ka} J_1^2(ka/2) \right] \quad (2.101)$$

相应的, 我们有

$$F(k) = \frac{k}{\cosh kh} \widehat{W}_1 = \frac{\pi}{2} \frac{Aa}{\cosh kh} J_1^2(ka/2) \quad (2.102)$$

从方程 (2.102) 可见源的区域大小  $a$  的影响.  $J_1^2(ka/2)$  显然是震荡的, 说明  $F(k)$  也是随  $ka$  震荡的, 从源区不同部分来的波有干涉作用.

<sup>1</sup> 原式有误. 因为, 根据文献 [10], 可以知道:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^p (\sin \theta)^q d\theta &= \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2}) \Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+q}{2} + 1)} \\ 2^z \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) &= 2\sqrt{\pi} \Gamma(2z) \end{aligned}$$

注意到贝塞尔函数和它的平方的级数展开:

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \sum_0^\infty \frac{(-)^m}{m! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\ J_n^2(z) &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-)^m \Gamma(2m+2n+1)}{m! \Gamma(m+2n+1) [\Gamma(n+m+1)]^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2n} \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{cases} \widehat{W}_1(k) = \frac{A}{a} \int_0^\infty r J_1(kr) \sqrt{a^2 - r^2} dr \\ = Aa^2 \sum_0^\infty \frac{(-)^m (z/2)^{2m+1}}{m! \Gamma(m+2)} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2m+2} (\cos \theta)^2 d\theta \\ = Aa^2 \sum_0^\infty \frac{(-)^m (z/2)^{2m+1}}{m! \Gamma(m+2)} \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(\frac{2m+3}{2})}{2\Gamma(m+3)} \\ = Aa^2 \sum_0^\infty \frac{(-)^m (z/2)^{2m+1}}{m! \Gamma(m+2)} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\sqrt{\pi} \Gamma(2m+3) / 2^{2m+3})}{2\Gamma(m+3) \Gamma(m+2)} \\ = Aa^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{ka} J_1^2(ka/2) \end{cases}$$

其中我们用到了关系式  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ .

### §2.3 二维地震律波的先导波

现在, 我们继续讨论在上一节的反对称情况对应的先导波. 对于先导波,  $kh \ll 1$ , 但是对于充分大的  $r$ , 由于先导波一定有某个有限大的波长, 因此

$$kr \gg 1$$

应用大  $kr$  时  $J_1(kr)$  渐近形式

$$J_1(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos(kr - \frac{3\pi}{4})$$

作驻相近似, 我们可以得到

$$\zeta \simeq \cos \theta \operatorname{Re} \int_0^\infty F(k) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cdot \frac{1}{2} [e^{i(kr - \omega t - \frac{3}{4}\pi)} + e^{-i(kr + \omega t - \frac{3}{4}\pi)}] \quad (2.103)$$

与前边讨论的情形类似, 对先导波, 只有第一个被积函数是重要的, 并可以把  $\omega$  展开成

$$\omega \simeq C_m k (1 - \frac{k^2 h^2}{6})$$

其中  $C_m = \sqrt{gh}$  是相速度的最大值. 由于

$$F(k) \simeq Aa \frac{\pi}{2} \left( \frac{ka}{4} \right)^2 = \frac{Aa^3 \pi}{16} k^2$$

我们有

$$\zeta \simeq \frac{\cos \theta}{2} \frac{Aa^2}{16} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \operatorname{Re} e^{-\frac{3}{4}\pi} \int_0^\infty dk k^{3/2} e^{i[k(r - C_m t) + \frac{(kh)^3 C_m t}{6h}]} \quad (2.104)$$

其中的积分可以改写成

$$I = h^{-5/2} \int_0^\infty d(kh) (kh)^{3/2} e^{i[kh(\frac{r}{h} - \frac{C_m t}{h}) + \frac{1}{6}(kh)^3 \frac{C_m t}{h}]} \quad (2.105)$$

加入变量代换, 使得

$$(kh)^3 \frac{C_m t}{6h} = u^6, \quad kh = u^2 \left( \frac{C_m t}{6h} \right)^{-1/3}$$

我们得到

$$I = h^{-5/2} \left( \frac{C_m t}{6h} \right)^{-5/6} \int_0^\infty du 2u^4 e^{i(u^2 p + u^6)} \quad (2.106)$$

其中,

$$p = \left( \frac{r}{h} - \frac{C_m t}{h} \right) \left( \frac{C_m t}{6h} \right)^{-1/3}$$

积分可以改写成

$$I = -2h^{-5/2} \left( \frac{C_m t}{6h} \right)^{-5/6} \frac{d^2}{dp^2} \int_0^\infty du 2u^4 e^{i(u^2 p + u^6)} \quad (2.107)$$

把它代入方程 (2.104), 有

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta \simeq \sqrt{\pi} \frac{\cos \theta}{2} \frac{Aa^3}{16} \frac{1}{\sqrt{r}} h^{-5/2} \left( \frac{C_m t}{6h} \right)^{-5/6} \\ \cdot \frac{d^2}{dp^2} \operatorname{Re} \left[ (1+i) \int_0^\infty du e^{-(u^2 p + u^6)} \right] \end{array} \right. \quad (2.108)$$

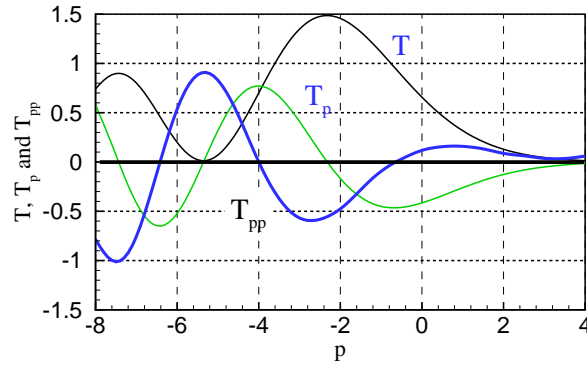


图 2.7:  $T$ ,  $T_p$  和  $T_{pp}$  作为  $p$  的函数.

当  $p = 0$ , 即当观测者正好在  $r = C_m t$  处时, 我们可以算出方程 (2.107) 中的积分: 令  $\tau = u^6$ , 则

$$\int_0^{\infty} du u^4 e^{iu^6} = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-1/6} e^{i\tau} = \frac{1}{6} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) e^{i5\pi/12}$$

如果我们定义函数

$$T(p) = \text{Re} \left[ (1+i) \int_0^{\infty} e^{i(u^2 p + u^6)} du \right] \quad (2.109)$$

于是, 可以得到

$$\zeta = \left\{ \frac{\cos \theta}{2} \frac{A a^2}{16} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{r}} \right\} h^{-5/2} \left( \frac{C_m t}{6h} \right)^{-5/6} T_{pp} \quad (2.110)$$

$T$ ,  $T_p$  和  $T_{pp}$  随  $p$  的变化, 如图 2.7 所示. 注意到  $\zeta$  的变化正比于

$$r^{-1/2} t^{-5/6} = (r/t)^{1/2} t^{-4/3} = \left( \frac{r}{t} \right) r^{-4/3}$$

可以发现: 在波前  $r/t \simeq C_m$  附近, 波幅正比于  $t^{-4/3}$  或  $r^{-4/3}$ . 若  $A < 0$ , 海底在右半部分 ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) 向下倾斜, 左半部分向上倾斜, 则与二维情形类似, 处在右边的观测者看到的先导波是一个波谷, 接着是一个高的波峰.

## §2.4 色散波包的传播

现在, 我们来考察缓慢调制波群的演化, 以加深对色散现象的理解. 从简单问题出发, 求得一些精确解, 从中发现问题简化的方法和近似解法, 为解决复杂问题奠定基础.

考察波谱连续的正弦右行波,

$$\zeta(x, t) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (2.111)$$

它产生于一长的波槽中处在  $x = -\infty$  的造波机从  $t = -\infty$  开始激发. 波幅谱  $\mathcal{A}(k)$  取决于初始扰动. 圆频率  $\omega(k)$  取一般的形式. 对于 Gause 波包

$$\zeta(x, 0) = \text{Re} A_0 e^{ik_0 x} e^{-x^2/4\sigma^2} \quad (2.112)$$

振幅谱  $\mathcal{A}(k)$  由逆 Fourier 变换得到

$$\begin{cases} \mathcal{A}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, 0) e^{ikx} dx \\ &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x - x^2/4\sigma^2} dx \\ &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\frac{x}{2\sigma} + i(k-k_0)\sigma]^2 - (k-k_0)^2\sigma^2} dx \end{cases}$$

令  $u = \frac{x}{2\sigma} + i(k-k_0)\sigma$ , 我们有

$$\mathcal{A}(k) = \frac{A_0}{2\pi} 2\sigma e^{-(k-k_0)^2\sigma^2} \int_{\Gamma} e^{-u^2} du$$

其中, 积分路线  $\Gamma$  是复平面  $u$  上从  $-\infty + i(k-k_0)\sigma$  到  $\infty + i(k-k_0)\sigma$  的直线. 因为  $e^{-u^2}$  在  $\Gamma$  与实轴间的条带内是解析的, 根据 Cauchy 定理,  $\Gamma$  可以换成实轴. 应用熟悉的结果

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad (2.113)$$

我们得到

$$\mathcal{A}(k) = \frac{A_0\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-(k-k_0)^2\sigma^2} \quad (2.114)$$

相应的, 时刻  $t$  的波形是

$$\zeta = \text{Re} \frac{A_0\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2\sigma^2 + i(kx - \omega t)} dk \quad (2.115)$$

考察  $\sigma k_0 \gg 1$ , 原始包络很平,  $k = k_0$  附近波谱很尖的情况下上述积分的性态. 离开  $k_0$  处后, 被积函数迅速减小, 因此, 可以近似地取  $\omega(k)$  是它的 Taylor 展开的前几项,

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0)\omega'_0 + \frac{1}{2}(k - k_0)\omega''_0 + \dots$$

其中  $\omega_0 = \omega(k_0)$ ,  $\omega'_0 = \omega'(k_0)$ , 等等, 令  $u = k - k_0$ ,  $\zeta$  可以写成

$$\zeta \simeq \text{Re} \frac{A_0\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma^2 + it\omega''_0/2)u^2 + i(x - \omega'_0 t)u} du \quad (2.116)$$

配方, 设  $b = \sqrt{1 + i\omega''_0 t/2}$ , 应用关系 (2.113), 得

$$\zeta = \text{Re} A \left[ \frac{1}{b} e^{-(x - \omega'_0 t)^2 / 4\sigma^2 b^2} \right] e^{i(kx - \omega_0 t)} \quad (2.117)$$

显然, 包络以群速度  $C_g = \omega'_0$  运动, 它的最大值出现在  $x = C_g t$ . 对于大  $t$ , 反比于  $t^{1/2}$  衰减. 包络的长度尺度  $2\sigma b$ , 对于大  $t$ , 正比于  $t^{1/2}$  正大. 因此, 在传播过程中, 整个波群越来越平坦. 与方程 (1.45) 相比, 方程 (a-168) 是一种改进. 方程 (2.117) 对应的波群所拥有的能量可以近似为

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \rho g |A_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{1}{b} e^{-(x - \omega'_0 t)^2 / 4\sigma^2 b^2} \right|^2 \\ = \frac{1}{4} \rho g |A_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ 1 + \frac{1}{4} (\omega''_0 t)^2 \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{-(x - \omega'_0 t)^2}{2\sigma^2 [1 + (\omega''_0 t)^2 / 4]} \right\} \\ = \frac{1}{4} \rho g |A_0|^2 \sqrt{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{4} \rho g |A_0|^2 \sqrt{2\pi\sigma} \end{cases}$$

初始波形 (2.112) 的能量近似是

$$\frac{1}{4}\rho g|A_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{4}\rho g|A_0|^2 \sqrt{2\pi}\sigma \quad (2.118)$$

可见波群的能量是守恒的.

应当注意,  $\sigma^{-1}$  是波包络调制的缓慢变化率. 如果到  $\sigma^{-2}$  阶近似, 就会涉及色散曲线的曲率  $\omega''$ . 为了说明这一点, 我们来看一个简单的例子. 考虑两个波长频率差别很小的正弦波

$$\zeta = A_0 \{ \exp[i(k_-x - \omega_-t)] + \exp[i(k_+x - \omega_+t)] \}$$

其中  $k_- = k - \delta k$ ,  $k_+ = k + \delta k$ ,  $\omega_{\pm} = \omega(k_{\pm})$ ,  $\delta k/k \ll 1$ . 对  $\omega$  作 Taylor 展开, 有

$$\omega_{\pm} = \left[ \omega \pm \omega' \delta k + \frac{1}{2} \omega'' (\delta k)^2 + \dots \right]$$

因此,

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta &\simeq 2A_0 \cos[\delta k(x - C_g t)] \\ &\cdot \exp \left\{ i \left[ kx - \left( \omega + \frac{1}{2} \omega'' (\delta k)^2 \right) t \right] \right\} \end{aligned} \right. \quad (2.119)$$

可以看出, 精确到  $O(\delta k)$ , 有调制包络, 运动速度为  $C_g = \omega'(k)$ ; 精确到  $O[(\delta k)^2]$ , 相位频率就发生变化.

对于在  $k_0$  附近有尖峰的任何振幅谱, 方程 (2.111) 可以近似为

$$\zeta(x, t) \simeq \text{Re} \{ A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \} \quad (2.120)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} A(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) \\ &\cdot \exp \left\{ i \left[ (k - k_0)x - \left( (k - k_0)\omega'_0 + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \omega''_0 \right) t \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

容易验证,  $A$  满足一下微分方程

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{i}{2} \omega''_0 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (2.121)$$

这是量子力学中常见的 Schrödinger 方程. 在下一节, 我们将用一种摄动方法 (多重尺度法), 从控制方程出发, 导出这个方程. 这种方法的优点是, 可以简化随后的分析, 也为以后处理非线性问题奠定基础.

## §2.5 缓变波列的多重尺度分析

形式上, 我们引入缓变量

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \mu x, & x_2 &= \mu^2 x, \dots \\ t_1 &= \mu t, & t_2 &= \mu^2 t, \dots \end{aligned} \right. \quad (2.122)$$

其中  $0 < \mu \ll 1$ ,  $\mu$  是两种时间尺度比的度量. 在摄动分析中, 把上述缓变量也当作自变量处理. 事实已经证明, 这种处理得到的结果与其它方法的结果一致, 已经成为处理非线性问题的有力工具.

假设速度势和自由面位移是

$$\begin{cases} \Phi(x, z, t) &= \Phi(x, x_1, x_2, \dots; z; t, t_1, t_2, \dots) \\ \zeta(x, z, t) &= \zeta(x, x_1, x_2, \dots; t, t_1, t_2, \dots) \end{cases} \quad (2.123)$$

现在, 导数的形式发生了变化

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial t_1} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \end{cases} \quad (2.124)$$

因此

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_1} + \mu^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_2} \right) + \dots \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t \partial t_1} + \mu^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial t_2} \right) + \dots \end{cases} \quad (2.125)$$

对  $z$  的导数形式不变. 限于考虑缓变的正弦波, 假定有摄动级数:

$$\Phi = (\psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots)e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.126)$$

其中

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(x_1, x_2, \dots; z; t_1, t_2, \dots), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (2.127)$$

是缓变量的函数, 正弦波的缓变振幅. 把方程 (2.124)-(2.126) 代入 Laplace 方程, 合并同类项, 得到如下的递推方程

$$\begin{cases} O(\mu^0): & -k^2\psi_0 + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial z^2} = 0 \\ O(\mu): & -k^2\psi_1 + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} = -2ik \frac{\partial\psi_0}{\partial x_1} \\ O(\mu^2): & -k^2\psi_2 + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} = - \left[ 2ik \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x_1^2} + 2ik \frac{\partial\psi_0}{\partial x_2} \right] \end{cases} \quad (2.128)$$

类似地, 由自由面边界条件得到

$$\begin{cases} O(\mu^0): & -\omega^2\psi_0 + g \frac{\partial\psi_0}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \\ O(\mu): & -\omega^2\psi_1 + g \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = 2i\omega \frac{\partial\psi_0}{\partial t_1}, \quad z = 0 \\ O(\mu^2): & -\omega^2\psi_2 + g \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = 2i\omega \frac{\partial\psi_1}{\partial t_1} - \left[ \frac{\partial^2\psi_0}{\partial t_1^2} - 2i\omega \frac{\partial\psi_0}{\partial t_2} \right], \quad z = 0 \end{cases} \quad (2.129)$$

由底面条件得

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\psi_2}{\partial z}, \quad z = -h \quad (2.130)$$

显然,  $\psi_0$  的解是

$$\psi_0 = -\frac{igA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh}, \quad A = A(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) \quad (2.131)$$

其中

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (2.132)$$



把  $\psi_0$  代入方程 (2.128)-(2.130), 可以得到关于  $\psi_1$  的非齐次方程和非齐次边界条件 (自由面上). 对应的齐次问题以  $\psi_0$  为其非平凡解. 这个非齐次问题必须满足一个可解性条件才会有解. 这个可解性条件, 是把 Green 公式应用于  $\psi_0, \psi_1$  后得到的.

$$\int_{-h}^0 dz \left[ \psi_0 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - k^2 \psi_1 \right) - \psi_1 \left( \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - k^2 \psi_0 \right) \right] = \left[ \psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \psi_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right]_{-h}^0$$

代入  $\psi_0$  以及有关的条件关系, 由上式可以得到

$$-\frac{\partial A}{\partial x_1} \left\{ \frac{gk}{\omega} \frac{1}{\cosh^2 kh} \int_{-h}^0 \cosh^2 k(z+h) dz \right\} = \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.133)$$

注意到花括号内的量等于群速度  $C_g$ , 我们得到

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 \quad (2.134)$$

它的解是  $A(x_1 - C_g t_1)$ , 说明包络波以群速度传播且不改变形状. 这个结果包括了特例 (1.46), 也适用于逐渐开始稳恒地维持的波列的波前.

在稳态问题中, 当在一个局部地区内初始扰动时, 无穷远处的边界条件如何描述? 只说在无穷远处的扰动保持为有限或者趋于零, 不能保证解的唯一性. 比如, 当水面有谐振时, 在远处 ( $x \rightarrow \infty$ ) 应有行波解

$$\frac{-igA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kz} e^{i(kx-\omega t)}$$

当  $\omega > 0$  固定时,  $k$  是正是负? 从能量传播的角度看,  $k > 0$ , 因为能量是从振动中心向外传播的. 但是, 在守恒系统中, 能量与动量有关, 求解时已用了动量方程, 再用一次的话, 在逻辑上不能自圆其说, 需要另外加证明. 从数学上讲, 还应当加上更强的定解条件. 如果严格局限在稳态问题的范围内, 一般地这个条件可以描述为: "局部产生的正弦扰动一定向外传播到无穷远处." 这个重要的条件称为辐射条件. 即使是在某些特殊情况下, 证明辐射条件的合理性, 无疑也是需要的.

现在, 我们把稳态看成是一个初值问题在  $t \rightarrow \infty$  时的极限, 考虑特殊情况: 由  $x = 0$  处造波机的正弦振动产生的, 处于  $x > 0$  区域的一维波. 设  $x = 0$  附近的正弦波的振幅, 按照某种规律  $A(t) = A_1(t_1)$ , 从  $t \sim -\infty$  的 0 值缓慢地变化到  $t \sim \infty$  的  $A_0$  (见图 2.8), 可以预期任何  $x_1 > 0$  处的解是由方程 (2.132) 给出, 其中

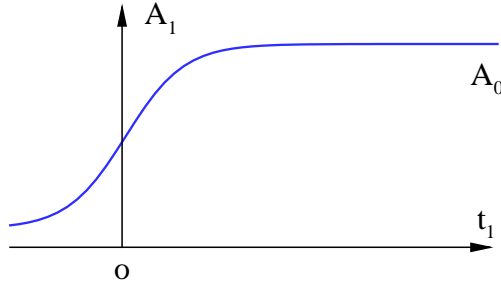
$$A(x, t) = A_1(t_1 - x_1/C_g)$$

因此, 对于任何有限的  $t_1$ , 当  $x_1$  充分大时, 波幅为零. 也就是说, 当  $x_1 \rightarrow \infty$  时,  $A \simeq A_1(-x_1/C_g) \rightarrow 0$ , 根据图 2.8, 这只有在  $C_g > 0$  时才是可能的, 因为  $C_g$  和  $k$  同号, 所以一定有  $k > 0$ . 由方程 (2.126) 可知,  $\psi_0^{i(kx-\omega t)}$  向右传播, 以即向外传播. 原则上, 辐射条件可以从一般的初值问题推得, 不必假设扰动的缓慢激发.

方程 (2.134) 所确定的性质, 只适合于  $O(\mu^{-1})$  尺度, 即关于  $x_1$  和  $t_1$  的情况. 现在, 我们研究二阶的方程和条件, 考察更长的距离和时间  $O(\mu^{-2})$  上的变化, 即, 涉及  $x_2$  和  $t_2$  的情况.

首先, 可以证明,  $\psi_1$  的非齐次解是

$$\psi_1 = -\frac{g}{\omega k} \frac{q \sinh q}{\cosh kh} \frac{\partial A}{\partial x_1}, \quad q = k(z+h) \quad (2.135)$$

图 2.8: 缓变波幅  $A_1(t_1)$ .

借鉴于方程 (2.134), 它满足边界条件. 这里不计  $\psi_1$  的齐次解, 因为它存在于  $\psi_0$  中. 把  $\psi_0$  和  $\psi_1$  的表达式代入到递推方程和相应的边界条件, 我们得到

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - k^2 \psi_2 = \frac{i2g}{\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \frac{q \sinh q}{\cosh kh} + \frac{ig}{\omega} \left( \frac{\partial^2 A}{dx_1^2} + i2k \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) \frac{\cosh q}{\cosh kh} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \psi_2 = i \left( \frac{2h \sinh kh}{\cosh kh} C_g + \frac{C_g^2}{\omega} \right) \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial t_2}, \quad z = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0, \quad z = -h \end{cases} \quad (2.136)$$

经过长而简单的代数运算, 可以得到简单的可解性条件

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} = \frac{i}{2} \omega'' \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \quad (2.137)$$

其中

$$\omega'' = \frac{d^2 \omega}{dk^2} = \frac{C_g}{k} (1 - 2kh \tanh kh) - \frac{C_g^2}{\omega} + \frac{C}{2k} (2kh \coth kh - 1)$$

用  $\mu$  和  $\mu^2$  分别乘以方程 (2.134) 和 (2.137), 去掉小参数  $\mu$ , 恢复  $x, t$  变量, 我们有

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{i}{2} \omega''_0 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (2.138)$$

该方程制约着包络波的缓慢调制, 与方程 (2.121) 完全一样. 采用以群速度  $C_g$  运动的坐标系,

$$\xi = x - C_g t$$

方程 (2.138) 变成 Schrödinger 方程

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{2} \omega''_0 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \quad (2.139)$$

这个方程只含一个空间坐标, 比包含  $x, z$  的边值问题容易处理. 下面我们看看  $x, t$  很大时包络波的渐近性态.

## §2.5.1 正弦波列的波前演化

在某一时刻触发的正弦波, 此后稳定地维持下来. 这种波可以通过启动在一长水槽一端的正弦造波机来实现, 到了最后, 在某一固定位置, 出现稳定的正弦运动. 现在, 我们寻求满足如下边界条件的方程 (2.139) 的解:

$$\begin{cases} A \rightarrow 0, & \xi \rightarrow \infty \\ A \rightarrow A_0, & \xi \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.140)$$

也就是说, 包络从波前之后的常数  $A_0$ , 变成波前的前边的零.

我们预期相似性解的形式是

$$A = A_0 f(\gamma), \quad \gamma = -\frac{\xi}{\sqrt{t}} \quad (2.141)$$

代入方程 (2.139), 我们得到

$$f'' - \frac{i\gamma}{|\omega''|} f' = 0 \quad (2.142)$$

相应的边界条件是

$$\begin{cases} f \rightarrow 1, & \gamma \sim \infty \\ f \rightarrow 0, & \gamma \sim -\infty \end{cases} \quad (2.143)$$

因此, 根据方程 (2.142), 得

$$f = C \int_{-\infty}^{\gamma} \exp\left(\frac{iu^2}{2|\omega''|}\right) du \quad (2.144)$$

要求

$$1 = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{iu^2}{2|\omega''|}\right) du \quad (2.145)$$

应用恒等式

$$\int_0^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \quad (2.146)$$

得出

$$C = e^{-i\pi/4} (2\pi|\omega''|)^{-1/2} \quad (2.147)$$

因此, 我们得到

$$f = \frac{A}{A_0} = e^{-i\pi/4} (2\pi|\omega''|)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\gamma} du \exp\left(\frac{iu^2}{2|\omega''|}\right) \quad (2.148)$$

应用关系 (2.146), 我们有

$$f = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{2} + e^{-i\pi/4} (2\pi|\omega''|)^{-1/2} \int_0^{\gamma} du \exp\left(\frac{iu^2}{2|\omega''|}\right) \quad (2.149)$$

设  $\pi v^2 = \frac{u^2}{|\omega''|}$ , 上式变成

$$\begin{cases} f = \frac{A}{A_0} & = \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \int_0^{\beta} dv \exp[i(\pi v^2/2)] \\ & = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1+i}{2} + \int_0^{\beta} dv \left( \cos \frac{\pi v^2}{2} + i \sin \frac{\pi v^2}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (2.150)$$

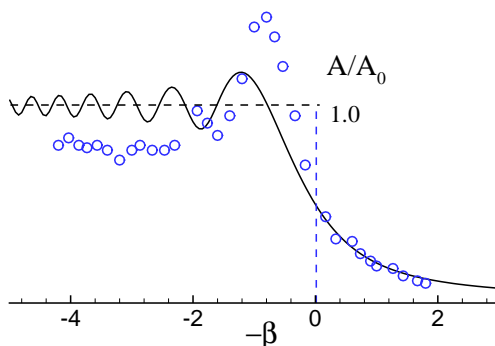


图 2.9: 波幅的理论值 (Miles 1962) 与实验值 (Longuet-Higgins 1974) 的比较. 波幅在距造波机 160ft 处测得, 频率是  $\omega = 5.52\text{rad/sec}$ .

其中

$$\beta = -\xi(t\pi|\omega''|)^{-1/2} \quad (2.151)$$

根据菲涅耳 (Fresnel) 函数的定义

$$S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi t^2}{2} dt \quad (2.152)$$

我们有

$$f = \frac{A}{A_0} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{1}{2} + C(\beta) \right) + i \left( \frac{1}{2} + S(\beta) \right) \right] \quad (2.153)$$

考虑到  $\left| \frac{A}{A_0} \right| = \left| \left( \frac{A}{A_0} \right) \left( \frac{A}{A_0} \right)^* \right|^{1/2}$ , 有

$$\left| \frac{A}{A_0} \right| = 2^{-1/2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C(\beta) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} + S(\beta) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.154)$$

$\left| \frac{A}{A_0} \right| \sim \beta$  的曲线见图 2.9. 可以看出, 在波前  $x = C_g t$  的前面, 包络波指数衰减; 在  $x = C_g t$  处达到稳态值的一半, 在  $x = C_g t$  线之后, 随着  $|x - C_g t|$  的增加, 经过在  $A_0$  附近的几次震荡后, 最后达到  $A_0$  值. 过渡区域正比于  $t^{1/2}$  伸展其范围, 这是典型的水波色散现象. Longuet-Higgins(1974) 的实验定性上支持这一理论. 其中存在若干定量上的差异, 可能与非线性效应有关. 特别地, 对于充分高的振幅, 观测到的波峰在包络波的第一个高峰处破碎. 由于在深水中包络波的速度是波峰速度的一半, 故两个相继的波峰到达包络波的高峰处的时间间隔为两个波的周期 (见图 2.10). 如果在高峰处波高得足以破碎, 人们会发现两个相继破碎波之间的时间间隔是  $2T$ .

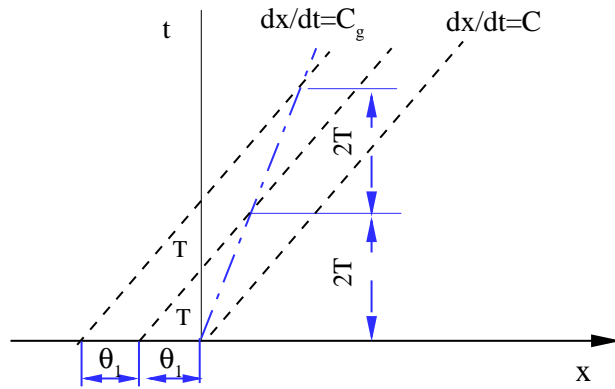


图 2.10: 深水中的群速度 - 相速度效应 ( $C_g = C/2$ ); 一波的波峰与包络波波峰重合的两相继瞬时的间隔是  $2T$ , 图中  $\theta_1 = 2\pi/k$ .

## 参考文献

- [1] Stoker, J.J.(1956). *Water Waves*. Interscience, New York.
- [2] Carrier, G.F., M. Krook, & C.E. Pearson(1966). *Functions of a complex variable: Theory and Technique*. McGraw-Hill, New York.
- [3] Jeffreys, H. & B.S. Jeffreys(1953). *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed., Cambridge University Press, London.
- [4] Whitham, G.B.(1965). Nonlinear dispersive waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* **283**:238-261.
- [5] Kajiura, K.(1963). The leading wave of a tsunami. *Bull. Earthquake Res. Inst.* University of Tokyo **41**: 525-571.
- [6] Shepard, F. P. (1963). *Submarine Geology*, 2nd ed., Harper and Row, New York.
- [7] Papoulis, A.(1968). *Systems and Transforms with Applications in Optics*, McGraw-Hill, New York.
- [8] Cole, J.D.(1968). *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell, Waltham, Mass.
- [9] Nayfeh, A.H.(1973). *Perturbation Methods*, Wiley, New York.
- [10] 王竹溪, 郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社, 北京, 1979, 400-401.



### 第三章 水波折射的射线理论

在线性化近似下, 水面波の色散关系是

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}$$

当  $h$  缓慢变化时, 取  $h$  为局部化的值, 得出的波速也是逐渐变化的. 对于一定的  $\omega$ , 波数  $k$  在传播过程中缓慢变化; 因此, 当一平面单色波从等深度区传播到深度缓变的区域时, 波速是逐渐变化的. 原来是直的相线将发生弯曲, 波型和波幅也发生变化. 主要与相速度有关的现象, 在光学和声学中称为折射. 水波折射的另一种起因, 是水平方向有缓慢变化的海流.

研究水波折射有重大的实际意义. 比如, 近海地形复杂多变, 一般近岸处水较浅, 从深海来的波浪在接近海岸时大小方向都会发生一定的改变为了建筑恰当的防波堤, 从理论上和实践上了解波浪的详情是必须的, 本章的内容在一定程度上对此有所裨益. 本章以折射理论为重点, 它阐明了深度变化对无穷小波传播的作用. 制约缓变的基本方程将从一种系统化的摄动方法导出, 这种方法是量子力学中的 WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin 方法) 的推广.

#### §3.1 底部缓变时行波的几何光学近似

已经知道, 当波长远小于特征长度时, 可以用几何光学近似. 对于水波问题, 现在, 我们假定波长远小于水深变化的水平长度尺度, 即

$$\mu = O(\nabla h/kh) \ll 1 \quad (3.1)$$

这说明, 在一个波长的范围内,  $h$  的相对变化很小. 这种海底称为缓变海底. 现在, 我们取  $\mu$  为小参数来作摄动分析, 为此, 我们引入缓变量

$$\bar{x} = \mu x, \quad \bar{y} = \mu y, \quad \bar{t} = \mu t \quad (3.2)$$

令  $\Phi = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ ,  $h = h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ , 则线性化的控制方程是

$$\begin{cases} \mu^2(\Phi_{\bar{x}\bar{x}} + \Phi_{\bar{y}\bar{y}}) + \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = 0, & -h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) < z < 0 \\ \mu^2\Phi_{\bar{t}\bar{t}} + g\Phi_z = 0, & z = 0 \\ \Phi_z = -m\mu^2(\Phi_{\bar{x}}h_{\bar{x}} + \Phi_{\bar{y}}h_{\bar{y}}), & z = -h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \end{cases} \quad (3.3)$$

再引入预期的行波展开式

$$\Phi = [\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + (-i\mu)^2\phi_2 + \dots]e^{iS/\mu} \quad (3.4)$$

其中

$$\phi_j = \phi_j(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{t}), \quad S = S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$$

这种展开意味着波幅随缓变坐标  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$  变化, 而相位则随快坐标  $\mu^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  变化. 因此

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} = i\Phi \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} + \mu \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-i\mu)^j \frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{x}} \right\} e^{iS/\mu}$$



这样, 第一项中就有了  $O(1)$  的量, 相位中有  $\mu^{-1}$  的原因也可以这样来理解.

直接求导, 我们得到

$$\begin{cases} \mu^2 \Phi_{\bar{t}\bar{t}} = -(-i\mu)^2 \Phi_{\bar{t}\bar{t}} \\ = - \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-i\mu)^j \{ [S_{\bar{t}}^2 + (-i\mu) S_{\bar{t}\bar{t}}] \phi_j \right. \\ \left. + 2S_{\bar{t}} \phi_{j\bar{t}} + (-i\mu)^2 \phi_{j\bar{t}\bar{t}} \right\} e^{iS/\mu} \\ \bar{\nabla} \Phi = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-i\mu)^j (i \bar{\nabla} S / \mu \phi_j + \bar{\nabla} \phi_j) \right\} e^{iS/\mu} \\ \mu^2 \bar{\nabla}^2 \Phi = -(-i\mu)^2 \bar{\nabla}^2 \Phi \\ = -(-i\mu)^2 \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-i\mu)^j \left[ \bar{\nabla}^2 \phi_j + \frac{\bar{\nabla} S}{-i\mu} \cdot \bar{\nabla} \phi_j \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{-i\mu} \bar{\nabla} \cdot (\phi_j \bar{\nabla} S) + \left( \frac{\bar{\nabla} S}{-i\mu} \right)^2 \phi_j \right] \right\} e^{iS/\mu} \end{cases}$$

我们定义

$$\mathbf{k} = \bar{\nabla} S, \quad \omega = -S_{\bar{t}} \quad (3.5)$$

局部波数矢量和局部频率. 分离  $(-i\mu)$  的各次幂, 得递推方程

$$\begin{cases} O((-i\mu)^0): \quad \phi_{0zz} - k^2 \phi_0 = 0, \quad -h < z < 0 \\ \phi_{0z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_0 = 0, \quad z = 0 \\ \phi_{0z} = 0, \quad z = -h \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} O((i\mu)^1): \quad \phi_{1zz} - k^2 \phi_1 = \mathbf{k} \cdot \bar{\nabla} \phi_0 + \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{k} \phi_0), \quad -h < z < 0 \\ \phi_{1z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_1 = -[\omega \phi_{0\bar{t}} + (\omega \phi_0)_{\bar{t}}] / g, \quad z = 0 \\ \phi_{1z} = \phi_0 \mathbf{k} \cdot \bar{\nabla} h, \quad z = -h \end{cases} \quad (3.7)$$

方程 (3.6) 和 (3.7) 是两个常微分方程的边值问题, 方程 (3.6) 的解是

$$\phi_0 = -\frac{igA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} \quad (3.8)$$

其中

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (3.9)$$

因此,  $\omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  和  $k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  与  $h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  的关系, 与  $h$  是常数时的色散关系是一样的. 振幅  $A$  是待定常数.

为了确定  $A$  满足的方程, 我们应用关于  $\phi_0$  和  $\phi_1$  的 Green 公式, 得到求解  $\phi_1$  的可解性条件:

$$\int_{-h}^0 dz \{ \phi_1 (\phi_{0zz} - k^2 \phi_0) - \phi_0 (\phi_{1zz} - k^2 \phi_1) \} = [\phi_1 \phi_{0z} - \phi_{1z} \phi_0]_h^0$$

代入递推方程, 我们得到

$$\begin{cases} \int_{-h}^0 dz \phi_0 [(\mathbf{k} \cdot \bar{\nabla} \phi_0) + \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{k} \phi_0)] \\ = -\frac{1}{g} \{ \phi_0 [\omega \phi_{0\bar{t}} + (\omega \phi_0)_{\bar{t}}] \}_{z=0} - \{ \phi_0^2 \}_{z=-h} \mathbf{k} \cdot \bar{\nabla} h \end{cases} \quad (3.10)$$

应用 Leibniz 法则

$$D \int_b^a f dz = \int_b^a Df dz + (Da)[f]_{z=a} - (Db)[f]_{z=b}$$

其中 ( $D$  可为  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}$  或  $\frac{\partial}{\partial y}$ ), 合并同类项, 方程 (3.10) 变成

$$\nabla \cdot \int_{-h}^0 dz \mathbf{k} \phi_0^2 + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} [\omega \phi_0^2]_{z=0} = 0$$

应用方程 (3.8), (3.9),  $E$  和  $C_g$  的定义式 (1.54), (1.47), 容易验证

$$\nabla \cdot \left( \frac{E}{\omega} C_g \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E}{\omega} \right) = 0 \quad (3.11)$$

在振子的经典力学中, 能量和频率的比值称为作用量, 而且当振子的性质缓慢地改变时, 它是不变量. 因此, 这里的  $E/\omega$  称为波作用量, 从方程 (3.11) 可以看出, 当它以群速度传输时是守恒的.

对于缓变水波, 相函数  $S$  的控制方程由 (3.9) 和 (3.11) 联立求得. 在光学上称为程函方程 (eikonal equation). 只要求出相函数  $S$ , 振幅可以通过解方程 (3.11) 得到.

根据定义 (3.5), 我们可以看出

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \nabla \omega = 0 \quad (3.12)$$

写成一维形式, 是

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

根据定义,  $k$  是单位长度上等相线的数目, 即等相线的密度; 而  $\omega$  则是通过固定点的等相线的数目, 即等相线的通量. 在  $\bar{x}$  和  $\bar{x} + d\bar{x}$  所界的控制体内, 等相线的增加率为  $d\bar{x} \cdot \partial k / \partial t$ , 而离开该控制体的等相线的流率为  $d\bar{x} \cdot \partial \omega / \partial \bar{x}$ , 因此方程 (3.13) 就是波峰守恒律.

下边, 我们将局限于讨论正弦波, 研究几个实例, 且与光学中所讨论的对象进行对比. 我们将把自变量的短划去掉, 因为, 近似方程已经导出, 没有必要再区分缓慢变量和物理变量了.

## 习题

(3.1) 一密度为  $\rho$  和  $\rho'$  的两层海洋, 有缓变的底部  $z = -h(x, y)$ , 界面在  $z = 0$ , 而自由面在  $z = -h'$  处. 取自由面固化近似 (因为考虑内波时, 自由面变动很小), 分析内波行波波例 (用 WKB 近似). 证明, 在首阶近似  $O(\mu^0)$  下, 能量为  $E = \frac{1}{2}\Delta\rho g A^2$ , 而色散关系和群速度分别是

$$\begin{cases} \omega^2 &= \frac{\Delta\rho g k}{\rho' \coth k h' + \rho \coth k h} \\ C_g &= \frac{C}{2} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{g \Delta\rho (\rho' h' \operatorname{csch}^2 k h' + \rho h \operatorname{csch}^2 k h)} \right] \end{cases}$$

然后证明, 在  $O(\mu)$  阶下, 可解性条件导致波作用量守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E}{\omega} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{E}{\omega} \mathbf{C}_g \right) = 0$$

### §3.2 底部缓变情况下正弦波的射线理论

#### §3.2.1 射线的几何位形

假如波是稳恒的,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , 根据方程 (3.12), 可知  $\omega = \text{const}$ , 因此  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ ,  $k^2 = (\nabla S)^2$ ,  $\omega^2 = gk \tanh kh$ , 程函方程有较简单的形式:

$$\nabla \cdot (E \mathbf{C}_g) = 0 \quad (3.14)$$

设想, 在  $x-y$  平面内画满了  $\mathbf{k}$  矢量, 它们的大小和方向随空间都有变化. 从一给定点出发, 画出处处切于  $k$  矢量的曲线, 这种曲线称为射线. 它总是正交于当地的相线  $S = \text{const}$ ; 两相邻的射线形成射线管. 现在, 我们来考察射线管的一段, 其两端的宽度为  $d\sigma_0$  和  $d\sigma$  (图 3.1). 现在, 沿着射线管的边界形成的封闭周线积分方程 (3.14), 利用 Gauss 散度定理以及  $\mathbf{C}_g$  切于射线这一事实, 可以证明通过射线管两端的能流相等

$$E C_g d\sigma = E_0 C_{g0} d\sigma_0 = \text{const} \quad (3.15)$$

这是对仅适用于常深度情况的结果的推广. 由方程 (3.15) 可知, 沿一射线的振幅变化是

$$\frac{A}{A_0} = \left[ \frac{C_{g0}}{C_g} \frac{d\sigma_0}{d\sigma} \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

其中  $d\sigma/d\sigma_0$  称为射线间隔因子. 一旦确定了射线, 而且已知 0 点处的振幅, 则立即可求得沿射线任意一点处的振幅.

根据定义 (3.5), 相函数满足非线性偏微分方程

$$|\nabla S|^2 = k^2, \quad \text{即} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = k^2 \quad (3.17)$$

右端的  $k^2$  由色散关系 (3.9) 确定. 这个程函方程可以用特征方法以非常一般的方式加以处理. 现在, 我们把这种处理进行初步描述如下.

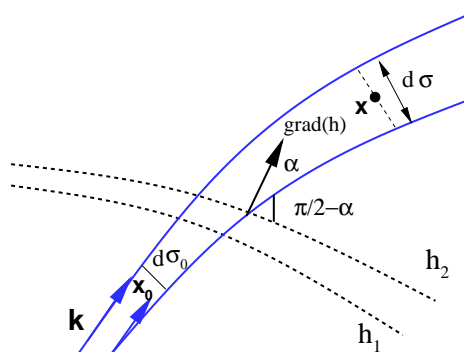


图 3.1: 射线管和等深线

令  $y = y(x)$  为一特定的射线, 其斜率必定是

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial S}{\partial y} / \frac{\partial S}{\partial x}$$

由方程 (3.17) 得

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{k}{\partial S / \partial x}, \quad \frac{ky'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\partial S}{\partial y}$$

对第二个方程取导数,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \frac{ky'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} y' \\ = \left( \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial S}{\partial y} \right) / \frac{\partial S}{\partial x} \\ = \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla S)^2 \right] / \frac{\partial S}{\partial x} \\ = \left( \frac{\partial k}{\partial y} \right) \sqrt{1 + y'^2} \end{cases}$$

我们得到射线方程

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{ky'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \sqrt{1 + y'^2} \frac{\partial k}{\partial y}, \quad k = k(x, y(x)) \quad (3.18)$$

上式是  $y(x)$  的非线性微分方程. 只要已知初始点 (和该点的射线斜率), 就可以用数值方法解得射线路径.

现在, 我们来看看方程 (3.18) 与 Fermat 原理之间的对应关系. Fermat 原理指出: "设  $P_0$  和  $P_1$  是一射线上的两点, 且设

$$L = \int_{P_0}^{P_1} k ds$$

为沿连接  $P_0$  和  $P_1$  的某一路径的积分, 则当且近当该路径与射线相重合时  $L$  达极值.” 为了证明这一原理, 需要用变分学的一个结果: 考虑泛函

$$L = \int_{P_0}^{P_1} F[x, y(x), y'(x)] dx \quad (3.19)$$

当且仅当  $F$  满足如下的 Euler 方程

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (3.20)$$

时, 泛函  $L$  达极值. 取泛函

$$L = \int_{P_0}^{P_1} k \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (3.21)$$

令方程 (3.19) 中的  $F$  为  $F = k \sqrt{1 + y'^2}$ , 容易证明, 方程 (3.18) 恰好是对应于 Fermat 原理的 Euler 方程.

因此, 程函方程和 Fermat 原理只不过是同一事物的两种表达方式. 对最低阶近似, 这是完善的. 然而, 当需要考虑海底斜率或涉及非线性时, 就需要进行高阶近似.

下边我们考察几个射线的位形易于确定的实例, 它们与一些光学问题有类比关系.

### §3.3 等深线是平行直线的情况

我们假设, 所有的等深线与  $y$  轴平行, 因此,  $h = h(x)$ ,  $k = k(x)$ , Euler 方程 (3.18) 变成

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{ky'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad (3.22)$$

因此

$$\frac{ky'}{\sqrt{1 + y'^2}} = K = \text{const} \quad (3.23)$$

考虑到

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad (3.24)$$

(其中  $\alpha$  是射线与正  $x$  轴的夹角), 可见, 方程 (3.23) 就是我们熟悉的 Snell 定律

$$k \sin \alpha = k_0 \sin \alpha_0 = K, \quad \text{或} \quad \frac{\sin \alpha}{C} = \frac{\sin \alpha_0}{C_0} \quad (3.25)$$

这里  $k_0, \alpha_0$  是射线上一已知点  $(x_0, y_0)$  上的  $k, \alpha$  值. 从方程 (3.23), 可以求出

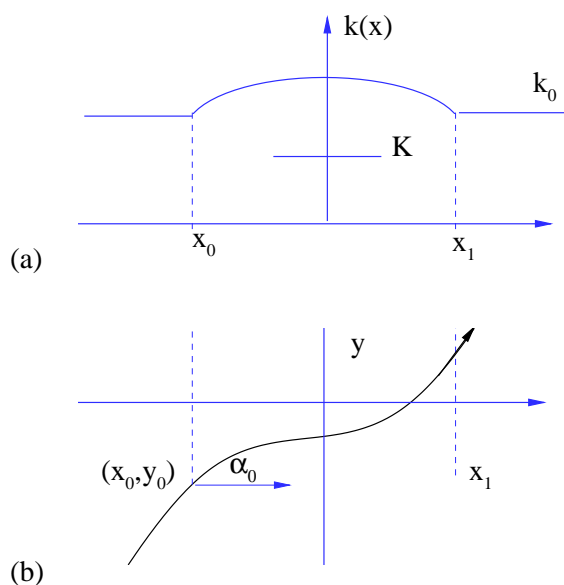
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\pm K}{\sqrt{k^2 - K^2}} \quad (3.26)$$

积分得射线方程

$$y - y_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{K dx}{\sqrt{k^2 - K^2}} \quad (3.27)$$

显然, 仅在  $k^2 > K^2$  处才可能有射线.

一个波的相线与射线相交, 相线的斜率必定是

图 3.2: (a) 一海脊的  $k(x)$  曲线; (b) 入射射线 ( $K < k_0 = k_{\min}$ )

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{\sqrt{k^2 - K^2}}{K} \quad (3.28)$$

相线的方程是

$$\mp Ky = \int^x \sqrt{k^2 - K^2} + \text{const} \quad (3.29)$$

以下介绍几种可能的情况.

#### [例 1] 入射到海脊或海滩的平面波

当海底有海脊时, 远处来的波是怎样行进的? 为什么海浪接近水越来越浅的海滩时, 总是垂直于海滩推进? 这些问题可以用简单的模型来研究和解答. 为简单起见, 假设来自左方 ( $x \sim -\infty$ ) 的入射波是平面波, 平行的入射线在  $x = x_0$  处进入海脊 ( $x_0 < 0$ ), 与  $x$  轴的夹角是  $\alpha_0$ ; 由色散关系 (3.9) 可知,  $h$  越小,  $k$  越大. 根据方程 (3.25),  $\alpha$  在海脊处先变小, 而后再变大, 与光学中的折射情况相似. 因为  $k_0 \sin \alpha_0 = K < k$ , 故根式  $\sqrt{k^2 - K^2}$  总是实数; 因为  $dy/dx > 0$ , 故方程 (3.26), (3.27) 中取正号. 随着  $h$  的减小,  $k$  增大,  $dy/dx$  减小, 射线越过海脊时, 先变得越来越垂直于等深线, 过脊顶后, 再越来越偏离等深线的法线. 射线路径示意图见图 3.2.

作为极限情况, 假设脊顶露出水面, 两侧形成海滩; 对于上述射线, 由于  $h \rightarrow 0$  时,  $k \rightarrow \infty$  (注意当  $h \rightarrow 0$  时有  $k \sim \omega/\sqrt{gh}$ ), 射线转向, 趋于垂直于等深线 ( $\alpha \rightarrow 0$ , 由 Snell 定律), 最终垂直地拍击海岸线.

Pocinki(1950) 选择了如下的  $k(x)$ ,

$$k = \begin{cases} k_0, & x > a \\ k_0 \frac{1 - a/b}{1 - x/b}, & a > x > b \end{cases}$$

这是一个起自  $x = a$ , 终达海岸线  $x = b$  的海滩模型. 代入方程 (3.26), 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x/b) \sin \alpha_0 / (1-a/b)}{\sqrt{1 - (1-x/b)^2 \sin^2 \alpha_0 / (1-a/b)^2}}, \quad a > x > b \quad (3.30)$$

取

$$\lambda = \frac{\sin \alpha_0}{1-a/b}, \quad \xi = 1-x/b, \quad \eta = y/b$$

我们得到

$$d\eta = \frac{-\lambda \xi d\xi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2}} = \frac{1}{\lambda} d\sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2} \quad (3.31)$$

积分容易得出

$$\xi^2 + (\eta - \eta_c)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

即

$$(x-b)^2 + (y-y_c)^2 = \frac{(b-a)^2}{\sin^2 \alpha_0}$$

因此, 射线是一簇圆心在  $x = b$ ,  $y = y_c$  的圆弧. 设  $y_0$  是射线与等深线的  $x = a$  交点, 在上式中令  $x = a$ ,  $y = y_0$ , 就得到参数  $y_c$  与  $y_0$  之间的关系

$$y_c = y_0 - (b-a) \cos \alpha_0$$

[例 2] 俘获在一海脊上的波假如  $k_{\max} > K = k_0 \sin \alpha_0 > k_{\min}$  (见图 3.3(a)), 则射线只可能存在于  $k > K$  的区域  $b < x < a$  中. 让这种射线从  $x_0 (b < x_0 < a)$  出发, 而且入射角  $\alpha_0 \in (0, \pi/2)$ . 从  $x_0$  到  $a$ ,  $dy/dx > 0$ ,  $y$  由方程 (3.27) (取 + 号) 给出, 射线趋近于  $(x, y) = (a, y_a)$  点, 其中

$$y_a = y_0 + \int_{x_0}^a \frac{K dx}{\sqrt{k^2 - K^2}}$$

注意, 对于充分光滑的海底,  $k$  可以在  $x = a$  附近展开成 Taylor 级数, 如果  $k'_{x=a} \neq 0$ , 我们有

$$k^2 = K^2 + (x-a)(k^2)'_{x=a} + \dots \quad (3.32)$$

上述积分是有限的, 但是在  $x = a$  处  $dy/dx$  是无穷大, 因此直线  $x = a$  是所有这些射线的包络, 称为焦散线. 由于相邻射线彼此相交, 确定振幅的方程 (3.16) 不再成立. 过了点  $(a, y_a)$ ,  $dy/dx < 0$ , 射线折转回来, 由方程 (3.27) (取 - 号) 给出, 直到到达直线  $x = b$  为止.  $x = b$  是所有射线的包络的另一条焦散线. 这样, 射线在向正  $y$  轴方向前进的同时, 在上述两条焦散线之间来回跳动 (见图 3.3(b)). 对于所述的  $K$  下的正弦波, 在范围  $b < x < a$  之外, 不可能存在. 这种现象称为波的俘获.

由于气象因素, 在自由面上会施加强迫力 (大气压力或风), 这可能引起陷波的外部激发. 因为对于这样大的  $K (> k_{\min})$  值, 远离海脊处不存在简谐波. 所以, 这时不可能由海脊两侧入射的简谐波激发海脊波, 至少按线性化机理分析时是如此. 不过, 这并不排除由外部源激发瞬时波的可能性.

### [例 3] 海沟

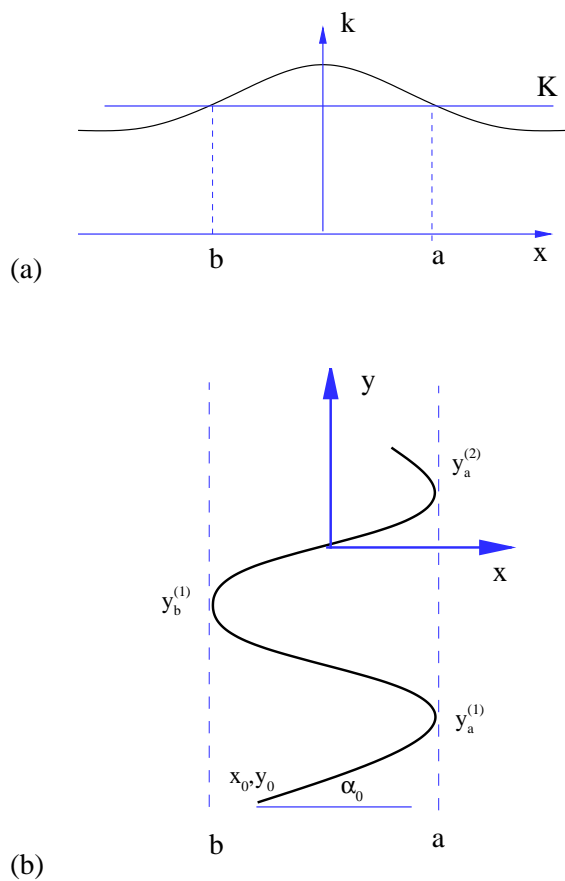


图 3.3: (a) 一海脊的  $k(x)$  曲线; (b) 入射射线 ( $K < k_0 = k_{\min}$ )



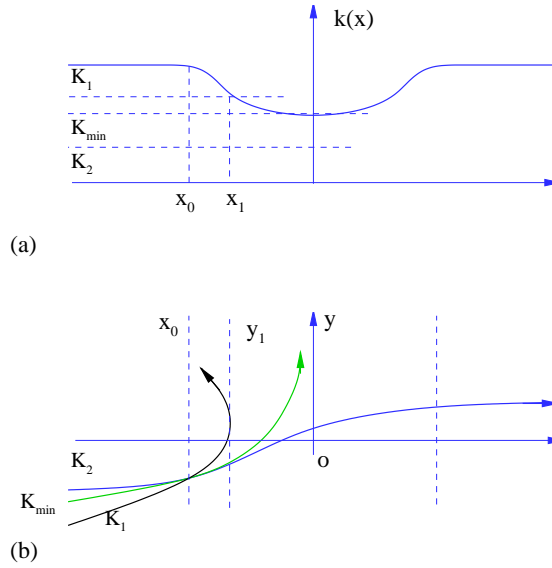


图 3.4: 海沟上各种可能的射线. (a) 海沟上  $k(x)$  的变化; (b) 不同  $K$  值的入射射线

对于等深度海底的海沟,  $k(x)$  的变化如图 3.4(a) 所示. 如果入射波的  $K = k_0 \sin \alpha_0 = K_2 < k_{\min}$ , 射线先向海沟轴方向弯曲, 而后反方向弯曲, 经过海沟向右行进, 如图 3.4(b) 所示. 但是, 如果  $K = K_1$  充分大, 则在  $k < K_1$  区域内不可能存在射线,  $k(x_1) = K_1$  的直线  $x = x_1$  是一条焦散线, 射线只能折回它出发的那一侧. 对于固定的  $k_0 = k_{\min}$ , 只要入射角  $\alpha_0$  充分接近于  $\pi/2$ , 就可以达到充分大的  $K$  值, 这时入射线与等深线的夹角是很小的锐角, 这种入射称为掠入射. 当  $K$  达到临界值  $k_0 \sin \alpha_0 = k_{\min}$  时, 入射线变成渐近地平行于等深线.

### §3.3.1 振幅变化

在上述的简单情况下,  $\partial/\partial y = 0$ , 很容易对方程 (3.14) 进行积分, 我们得到

$$EC_g \cos \alpha = \frac{1}{2} \rho g A^2 C_g \cos \alpha = \text{const} \quad (3.33)$$

现在, 我们用下标 0, 表示参考深度  $h_0$  下的值, 令  $\lambda = 2kh / \sinh kh$ , 我们得到振幅比

$$\frac{A}{A_0} = \left[ \frac{(C_g)_0 \cos \alpha_0}{C_g \cos \alpha} \right]^{1/2} = \left[ \frac{k \cos \alpha_0 (1 + \lambda_0)}{k_0 \cos \alpha (1 + \lambda_1)} \right]^{1/2} \quad (3.34)$$

在法向入射的极限情况下,  $\cos \alpha = \cos \alpha_0 = 1$ , 我们有

$$\frac{A}{A_0} = \left[ \frac{k (1 + \lambda_0)}{k_0 (1 + \lambda_1)} \right]^{1/2} \quad (3.35)$$

而在很浅的水中,  $\cos \alpha \rightarrow 1$ ,  $C_g \approx C \approx \sqrt{gh}$ ,

$$\frac{A}{A_0} \approx (C_{g0} \cos \alpha_0)^{1/2} (gh)^{-1/4} \quad (3.36)$$

可以看出, 振幅随着深度的减小而增加. 这种对深度的  $-1/4$  次幂的依赖关系称为 Green 定律. 这是一个一般性的结果, 对于波数缓变情况也可以用 WKB 方法得到. 与浅水波色散关系  $k \approx \omega(gh)^{-1/2}$  相结合, 可知局部的波的斜度随深度减小而增加的规律是

$$kA \propto h^{-3/4}$$

注意, 当深度充分小时, 作为线性化理论基础的小振幅假定不再成立, 非线性效应变得重要起来了. 另外, 对于一个常斜率的海滩, 当水充分浅时, 作为 WKB 方法的基础性假定

$$\left| \frac{dh}{dx} / kh \right| \ll 1$$

成了问题. 最后, 在近海岸处波发生破碎, 产生了一个处于湍流状态的拍岸浪区, 理论分析很困难. 法向入射下的方程 (3.35), 在拍岸浪区以前的平坦海滩上大致得到了实验验证 (Eaglesen, 1956).

### §3.3.2 直焦散线附近的情况

如前所述, 焦散线附近的情况有些特殊, 上边的分析不适用; 但是, 对于直的焦散线情况, 射线近似比较容易修正. 现在, 我们令对应于  $\bar{x} = 0$  的  $\bar{y}$  轴为焦散线, 入射射线和反射射线都在其左侧. 在  $\bar{x} = 0$  附近, 可以取近似

$$k^2 \simeq K^2 - \gamma\bar{x}, \quad (\gamma > 0) \quad (3.37)$$

这里假定  $\bar{x} = 0$  处  $dk/dx \neq 0$ , 且为已知的. 于是  $\mathbf{k}$  的  $x$  分量为

$$k_1 = (-\gamma\bar{x})^{1/2} \quad (3.38)$$

且

$$\int k_1 d\bar{x} = \frac{2}{3} \gamma^{1/2} (-\bar{x})^{3/2} \quad (3.39)$$

按照射线近似 (3.35), 我们得到

$$A = A_0 \left( \frac{C_g k_1}{k} \right)_0^{1/2} \left( \frac{K}{C_g} \right)_{\bar{x}=0}^{1/2} (-\gamma\bar{x})^{-1/4} \equiv \beta (-\gamma\bar{x})^{-1/4} \quad (3.40)$$

焦散线左侧的自由面是

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \beta (-\gamma\bar{x})^{-1/4} e^{K\bar{y}/\mu} \left\{ \exp \left[ i \frac{2}{3} \frac{\gamma^{1/2}}{\mu} (-\bar{x})^{3/2} \right] \right. \\ \left. + R \exp \left[ -i \frac{2}{3} \frac{\gamma^{1/2}}{\mu} (-\bar{x})^{3/2} \right] \right\} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

括号中的第一项对应于入射波, 第二项对应于反射波, 其复振幅  $R$  待定. 由上述结果, 可以看出, 当  $\bar{x} \rightarrow 0$  时, 振幅无限地增大. 因此, 必须给出焦散线附近的局部理论改进, 必须保留振幅关于  $\bar{x}$  的最高阶导数. 我们假定, 形式上

$$\Phi = \frac{-igX}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \exp \left( iK \frac{\bar{y}}{\mu} - i\omega \frac{\bar{t}}{\mu} \right) \quad (3.42)$$

其中  $X = X(\bar{x})$  待定. 把上式代入方程 (3.3), 有

$$\mu^2 X_{\bar{x}\bar{x}} + (k^2 - K^2)X \simeq 0 \quad (3.43)$$

这时  $(k^2 - K^2)$  在  $\bar{x}$  附近改变符号,  $\bar{x} < 0$  时为正的,  $\bar{x} > 0$  时为负的. 方程 (3.43) 的解在  $\bar{x} < 0$  处为振荡的, 在  $\bar{x} > 0$  处为单调的. 在数学物理中  $\bar{x} = 0$  称为转向点. 应用关系 (3.37), 方程 (3.43) 变成

$$\mu^2 X_{\bar{x}\bar{x}} - \gamma \bar{x} X = 0 \quad (3.44)$$

这在  $\bar{x} = O(\mu^{2/3})$ , 即  $x = O(\mu^{-2/3})$  内是良好的近似. 引进

$$Z = \gamma^{1/3} \bar{x} \mu^{-2/3} \quad (3.45)$$

方程 (3.44) 就变成 Airy 方程

$$X_{ZZ} - ZX = 0 \quad (3.46)$$

其通解是

$$X = a\text{Ai}(Z) + b\text{Bi}(Z) \quad (3.47)$$

Airy 函数  $\text{Ai}(Z)$  和  $\text{Bi}(Z)$  具有以下渐近形式

$$\begin{cases} \text{Ai}(Z) \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} Z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} Z^{3/2}\right), & Z \sim \infty \\ \text{Ai}(Z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-Z)^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3} (-Z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right], & Z \sim -\infty \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\begin{cases} \text{Bi}(Z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} Z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} Z^{3/2}\right), & Z \sim \infty \\ \text{Bi}(Z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-Z)^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3} (-Z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right], & Z \sim -\infty \end{cases} \quad (3.49)$$

如果在  $\bar{x} = O(\mu^{2/3}) > 0$  的区域内不存在别的焦散线或固体边界, 则由 (3.49) 可知, 必须丢弃解  $\text{Bi}(Z)$ , 因此

$$\eta = a\text{Ai}(z) e^{iK\bar{y}/\mu} \quad (3.50)$$

系数  $a$  和前面的反射波振幅  $R$ , 必须由  $-Z \gg 1$  把方程 (3.50) 与 (3.41) 匹配后决定. 应用方程 (3.48), 上式改写为

$$\begin{cases} \eta \simeq \frac{a}{2i\sqrt{\pi}} \left(-\frac{\gamma^{1/3}}{\mu^{2/3}} \bar{x}\right)^{-1/4} e^{iK\bar{y}/\mu} \left\{ \exp\left[i\frac{2}{3} \frac{\gamma^{1/2}}{\mu} (-\bar{x})^{3/2} + \frac{i\pi}{4}\right] \right. \\ \left. - \exp\left[-i\frac{2}{3} \frac{\gamma^{1/2}}{\mu} (-\bar{x})^{3/2} - \frac{i\pi}{4}\right] \right\}, & -\gamma^{1/3} \mu^{-2/3} \bar{x} \sim -\infty \end{cases} \quad (3.51)$$

令方程 (3.41) 与方程 (3.51) 相等, 就得到

$$\begin{cases} a &= 2\sqrt{\pi} i e^{i\pi/4} \beta (\gamma\mu)^{-1/6} \\ R &= e^{i\pi/2} \end{cases} \quad (3.52)$$

对于已知的  $k(x)$  和给定的在  $x_0$  处的入射波来说,  $\beta$  是已知的, 系数  $a$  可以立即求得. 值得注意的是, 现在, 最大振幅是有限的, 出现在达到焦散线之前的地方. 反射波和入射波的振幅相同, 但有  $\pi/2$  的相位差.

对于有海沟的情况, 可能出现两条焦散线 (见图 3.4); 如果焦散线的间隔不太大, 左焦散线的剩余效应 ( $\text{Ai}(Z)$  的尾部) 对右焦散线起作用, 这个波会穿过右焦散线, 诱生透射波. 详细分析涉及对右焦散线的处理, 同时用上  $\text{Ai}$  和  $\text{Bi}$  函数.  $d(k^2)/dx = 0$  但  $d^2(k^2)/dx^2 \neq 0$  的情况比较复杂, 原则上可以用相同的方法处理.

本小节的近似, 是粘性流体力学中熟识的边界层方法. 也可以不分区进行匹配, 寻求处处一致有效的单一表达式. 这种理论在其它物理学分支中研究弯曲的焦散线时提出 (Ludwig, 1966; Nayfeh, 1973), 并且已经应用到水波分析 (Chao, 1971). 对于简单的几何位形和充分小的振幅的情况, 已有一些实验证实了这种理论 (Chao & Pierson, 1972).

### §3.4 等深线为圆周的情况

实际上, 海底的位形经常是二维的, 即水深  $h = h(x, y)$ . 研究这种位形实际意义更大. 现在, 我们考察其中一种理想的模型——等深线为圆周的情况. 有关水波的这类问题, 最早由 Aithur 研究过 (1946).

#### §3.4.1 射线的几何位形

对于现在考虑的情况, 用极坐标  $(r, \theta)$  表示水深:  $h = h(r)$ , 因此波矢的大小也只是  $r$  的函数:  $k = k(r)$ . 为了得到射线的 Euler 方程, 我们从 Fermat 原理出发, 取如下积分的极值

$$L = \int k(r) \sqrt{1 + r^2 \theta'^2} dr \quad (3.53)$$

其中  $\theta' \equiv d\theta/dr$ . 注意到, 在极坐标下泛函  $\int F(r, \theta, \theta') dr$  的 Euler 方程的一般形式是 [?]

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta'} \right) = 0$$

我们有泛函 (3.53) 的 Euler 方程

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta'} (k \sqrt{1 + r^2 \theta'^2}) \right] = 0 \quad (3.54)$$

可以看出, 沿着一射线

$$\frac{k r^2 \theta'}{1 + r^2 \theta'^2} = \text{const} = \kappa \quad (3.55)$$

其中  $\kappa$  为表征该射线的常数. 从中可以解出  $\theta'$ :

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\pm |\kappa|}{r \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \quad (3.56)$$

形式上, 积分这个方程, 得到

$$\theta - \theta_0 = \pm |\kappa| \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \quad (3.57)$$

其中  $(r_0, \theta_0)$  为射线通过的已知点.

现在, 我们来看看常数  $\kappa$  的物理意义. 借助于图 3.5, 方程 (3.55) 可以改写成

$$\kappa = k r \frac{r d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = k r \frac{r d\theta}{ds} = k r \sin \alpha \quad (3.58)$$

其中,  $\alpha$  是射线与等深线的交点上射线与等深线法矢量的夹角. 若在  $(r_0, \theta_0)$  点, 入射角为  $\alpha_0$ , 则

$$\kappa = k_0 r_0 \sin \alpha_0 \quad (3.59)$$

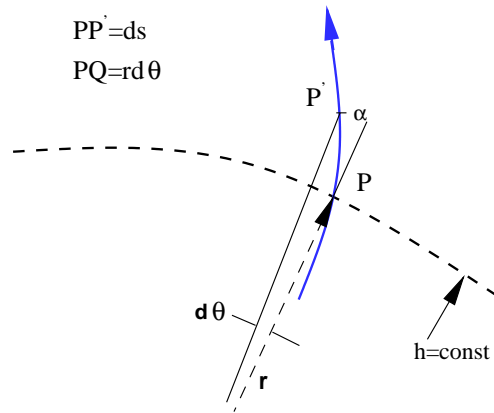


图 3.5: 射线和等深线

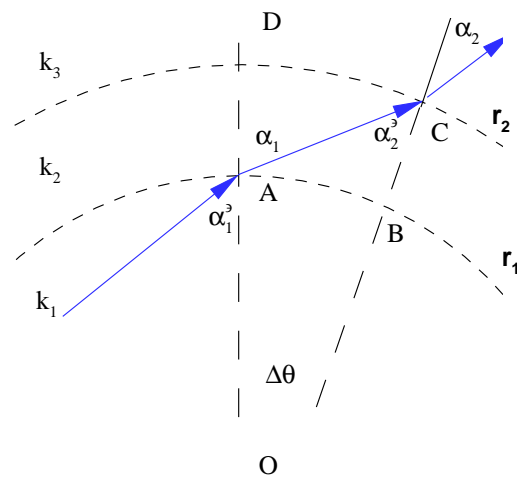


图 3.6: 圆台阶形海底

因此, 常数  $\kappa$  是由射线的初始位置和初始方向确定的. 所以沿着一射线,

$$\kappa = kr \sin \alpha = k_0 r_0 \sin \alpha_0 \quad (3.60)$$

这就是等深线为圆周情况下的 Snell 定律. 与直线情况不同的是, 现在  $r$  作为附加因子出现在 Snell 定律中. 为加深理解, 现在我们对有轴对称台阶形海底的情况作一些初等的讨论. 为此, 我们假设

$$k = k_i = \text{const}, \quad r_{i-1} \leq r < r_i, \quad i = 1, 2, 3$$

考虑一条通过 (1)(2)(3) 区的射线 (见图 3.6), 在 (i) 区, 该射线以  $\alpha_{i-1}$  离开间断线  $r = r_{i-1}$ , 以  $\alpha'_i$  角入射到  $r = r_i$  上, 而在这两点之间射线为直线段. 把 Snell 定律应用到 (1) 与 (2) 区的界线  $r = r_1$  处, 我们得到

$$k_1 \sin \alpha'_1 = k_2 \sin \alpha_1 \quad (3.61)$$

要注意  $\alpha_1 \neq \alpha'_2$ ; 事实上, 由图 3.6 容易看出

$$\sin \alpha_1 = \frac{CD}{AC} = \frac{r_2 \Delta \theta}{AC}, \quad \sin \alpha'_2 = \frac{AB}{AC} = \frac{r_1 \Delta \theta}{AC} \quad (3.62)$$

因此

$$r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha'_2 \quad (3.63)$$

把上式代入方程 (3.61), 得到

$$k_1 r_1 \sin \alpha'_1 (= k_2 r_1 \sin \alpha_1) = k_2 r_2 \sin \alpha'_2 \quad (3.64)$$

显然, 同样的论证适用于其它一系列连续的环形, 从而我们有

$$k_n r_n \sin \alpha'_n = \text{const}$$

这是方程 (3.60) 在不连续情况下的表达式. 所以  $r$  的出现是由等深线的弯曲引起的.

现在, 我们回到方程 (3.57), 显然, 射线只可能存在于  $k^2 r^2 > \kappa^2$  的区域, 在临界半径  $r_*$  处

$$k^2 r^2 = \kappa^2, \quad (r = r_*) \quad (3.65)$$

相应的  $\theta$  角为  $\theta_*$ , 由下式确定

$$\theta_* - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^{r_*} \frac{|\kappa| dr}{r \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \quad (3.66)$$

由方程 (3.56) 可知, 在  $(r_*, \theta_*)$  点,  $dr/d\theta = 0$ ; 射线要么接近于原点, 要么离原点最远. 通过考察  $dr/d\theta$  的符号, 一般地, 可以适当选定公式中的正负号, 下面举例说明.

再推导一下波峰线 (等相线) 的方程. 设射线为  $r = f(\theta)$ , 等相线为  $r = g(\theta)$ , 由于它们是彼此正交的, 因此

$$\nabla(r - f(\theta)) \cdot \nabla(r - g(\theta)) = 0$$

即

$$g' \cdot f' = -r^2$$

因为根据方程 (3.56)

$$f'(\theta) = \pm \frac{r}{\kappa} \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}$$

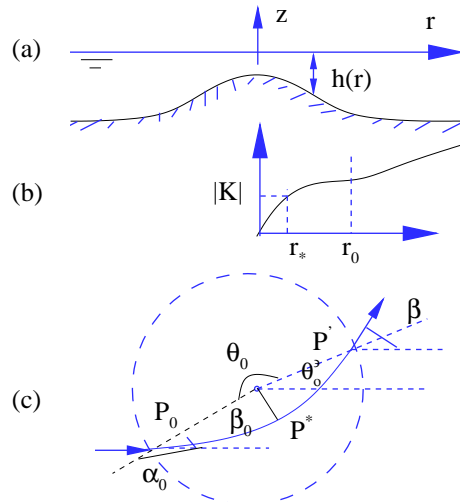


图 3.7: 沉没的沙洲 (a) 地形侧视图; (b)  $kr$  随  $r$  的变化; (c) 射线的几何位形

因此, 等相线的微分方程是

$$g' = \frac{dr}{d\theta} = \mp \frac{\kappa r}{\sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \quad (3.67)$$

相应的积分形式是

$$\kappa\theta \pm \int \frac{dr}{r} \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2} = \text{const} \quad (3.68)$$

为了理解上述结果的物理含义, 以下考察几类  $k(r)$ :

**[例 1]**  $0 < kr < \infty$ ,  $k(r)$  随  $r$  单调变化 (见图 3.7)

我们知道在很浅的水中,  $\omega/k \simeq \sqrt{gh}$ , 因此当  $\omega$  一定时, 必定有  $k \propto h^{-1/2}$ ; 当  $r \rightarrow 0$  时, 只要  $rh^{-1/2}$ , 就有  $kr \rightarrow 0$ . 沉没在水中的圆形沙洲就属于这一情况. 假设  $P_0(r_0, \theta_0)$  点为射线的出发点, 则有

$$\theta - \theta_0 = -|\kappa| \int_{r_0}^r \frac{dr}{r\sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \quad (3.69)$$

其中因为  $d\theta/dr < 0$ , 积分号前取负号; 在到达临界点  $P^*$  (该点的  $r_*$  为临界半径) 前, 此式适用; 超过临界点, 射线由下式确定

$$\theta - \theta_0 = -|\kappa| \int_{r_0}^r \frac{dr}{r\sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \quad (3.70)$$

这里积分号前取正号. 显然射线关于矢径  $\theta = \theta_*$  对称, 我们可以把射线的两支合写成

$$|\theta - \theta_*| = \int_{r_*}^r \frac{|\kappa| dr}{r\sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \quad (3.71)$$

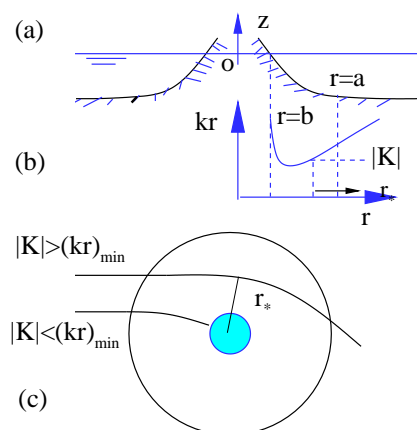


图 3.8: 圆形岛. (a) 地形侧视图; (b)  $kr$  随  $r$  的变化; (c) 射线的几何位形

它们的几何位形如图 3.7 所示. 显然,  $r = r_*$  是矢径的最小值.

假设有一个平面波从  $x = -\infty$  射向一圆形沙洲;  $r \geq r_0$  时海底是水平的, 故  $k = k_0$ ; 入射波原来平行于  $x$  轴. 那些在条带  $|y| \leq r_0$  之外的入射射线与圆周  $r = r_0$  不相交, 因而直线前进, 不发生偏转; 原来在条带  $-r_0 < y < 0$  内的射线进入沙洲时, 与矢径夹成  $\alpha_0$  角, 它先折向圆心, 在过最小值  $r_*$  之后, 折离圆心; 因而必定对称于矢径  $\theta = \theta_*$ , 离开沙洲时, 外行射线与分离点矢径的夹角为  $\pi - \alpha_0$  (见图 3.7). 全射线的总偏转角为  $\beta$ , 则显见

$$\beta - \theta'_0 = \pi - \alpha_0$$

其中  $\theta'_0$  为射线离开沙洲那点的方向角

$$\theta'_0 - \theta_* = \int_{r_*}^{r_0} \frac{|\kappa| dr}{r \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \quad (3.72)$$

类似地, 从条带  $0 < y < r_0$  进入沙洲的射线先折向沙洲中心, 而后离开中心. 于是, 在沙洲的背风侧, 从  $x$  轴两侧来的射线彼此相交, 伴随着这些射线的行波彼此干涉. 特别地, 在正  $x$  轴上的任意点, 鉴于对称性, 总的振幅是单根射线情形的两倍; 不在  $x$  轴上的点处, 相交射线的干涉可能使振幅加大, 也可能使振幅减小, 取决于波的相位.

现在, 考虑在  $x$  轴的另一侧的射线, 例如  $-r_0 < y < 0$  的一侧. 由于对  $\alpha_0$  的两个极端值:  $\alpha_0 = \pi$  (迎面入射) 和  $\alpha_0 = \pi/2$  (掠入射), 射线不发生偏转, 即  $\beta = 0$ , 而对于中间的  $\alpha_0$  值,  $\beta > 0$ . 因此  $\beta$  一定有一个最大值; 对于入射到沙洲上半侧的场合, 出现的情况类似 (只是  $\beta$  取负值). 所以,  $x$  轴一侧的射线束除了与另一侧的射线相交外, 还会与本侧的射线相交. 鉴于方程 (3.16), 当相邻射线相交时, 射线管截面为零, 波幅趋于无穷大, 这里的近似就失效了.



**[例 2]**  $kr$  先减小到最小值而后增大的情况

对于海岸线在  $r = b$  处的圆形岛, 情况就是这样. 假设  $r - b \rightarrow 0$  时,  $h \rightarrow 0$ , 则由色散关系可知, 当  $k \rightarrow h^{-1/2}$  时,  $kr \rightarrow bh^{-1/2}$ . 在大  $r$  处,  $kr \rightarrow k_0 r$ . 对于所有与外圆  $r = a$  相交的入射射线,  $|\kappa| < k_0 a$ . 那些与岛的轴充分接近 (即  $|y_0| = |r_0 \sin \alpha_0|$  充分小) 的射线,  $\kappa^2 < (kr_{\min})^2$ , 将最终以破碎的形式到达海岸. 但是, 那些离轴较远的射线, 满足  $(kr_{\min})^2 < \kappa < (k_0 a)^2$ , 将被岛排开, 到达不了海岸. 临界射线的入射角  $\alpha_0 = \alpha_0^c$ , 满足

$$|\sin \alpha_0^c| = (kr)_{\min} / k_0 r_0$$

这种射线的折射现象, 可以把海浪的部分能量集中到岛上; 如果岛刚露出水面, 能量就会集中到岛定附近的小区域; 因此, 有人设想在海上建筑人工岛, 作为一种集能措施, 当然, 实现起来相当困难. 绕射到岛后的那部分射线也会发生干涉现象. 因此, 有经验的渔民知道, 海上起风暴时, 海岛背风的正后方, 并不是可靠的避风之处.

**[例 3]** 俘获在环形海脊上的波

如果水深变化如图 3.9 所示, 则在有限的  $r$  处  $kr$  可能达到局部最大值. 如果一射线从  $(r_0, \theta_0)$  出发,  $\alpha_0 > \pi$ , 则在达到  $r = r_1$ ,  $\theta = \theta_1'$  之前, 射线由下式给定

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{|\kappa| dr}{r \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}}$$

从而使  $dr/d\theta > 0$ ; 然后, 射线弯折回较大的  $r$ , 并有

$$\theta - \theta_1' = \int_{r_1}^r \frac{-|\kappa| dr}{r \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}}$$

就这样, 射线按反时针方向前进, 在两个焦散圆周  $r = r_1$  和  $r = r_2$  之间起伏波动. 射线关于矢径  $\theta = \theta_1', \theta_2', \dots$  是对称的. 很清楚, 在每个角度周期

$$\Delta\theta = 2|\kappa| \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}}$$

之后, 射线位形发生重复. 如果  $\Delta\theta$  是  $2\pi$  的有理数倍, 则射线回到出发点, 即形成一条封闭曲线, 因此, 条件

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{n}{m}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

决定了被俘获在海脊上的自由振动的“本征值”. 直接由气象原因 (如风) 产生的波或瞬变波入射时, 就可能产生这些模式, 并发生共振. 它们往往是建在海底土岗上的海洋建筑失事的一种潜在危险. 例如, 暴风引起的这类海浪, 有可能把海底钻井的保护柱顶起来.

### §3.4.2 振幅变化

现在, 我们考虑入射到圆形折射区  $r \leq r_0$  的平面波的射线间隔因子. 设入射射线平行于  $x$  轴. 首先, 从图 3.7, 我们注意到

$$\theta_0 = \pi + \beta_0$$

其中  $\beta_0 = \pi - \alpha_0$ . 根据方程 (3.57), 我们有

$$\begin{cases} \theta &= \pi + \beta_0 \pm \int_{r_0}^r \frac{|\kappa| dr}{r \sqrt{k^2 r^2 - \kappa^2}} \\ |\kappa| &= k_0 r_0 |\sin \alpha_0| = k_0 r_0 |\sin \beta_0| \end{cases} \quad (3.73)$$

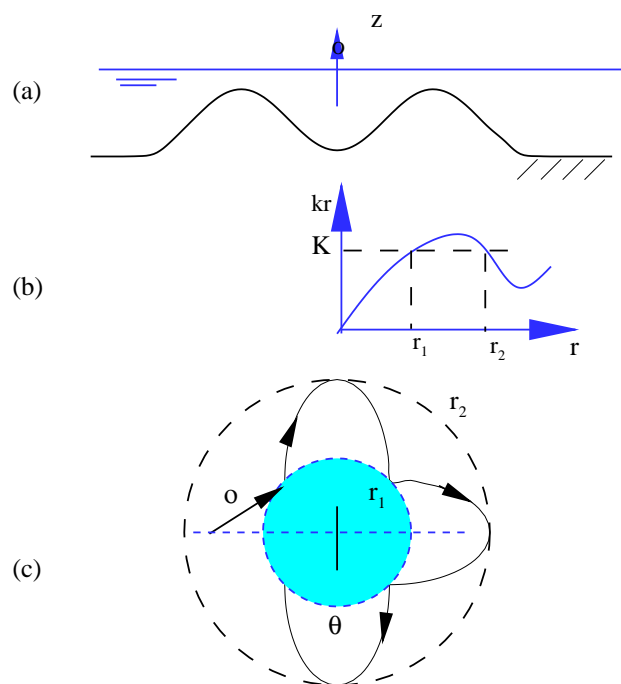


图 3.9: 俘获在环形海脊上的波. (a) 地形侧视图; (b)  $kr$  随  $r$  的变化; (c) 射线的几何位形

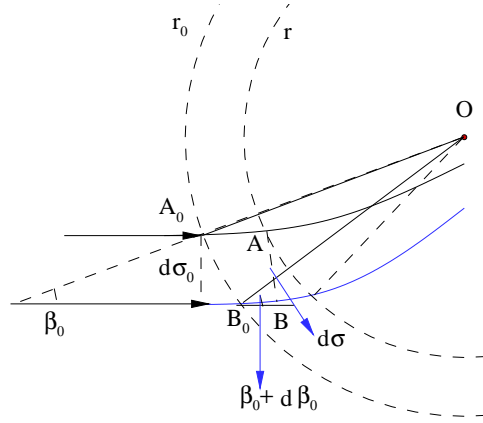


图 3.10: 圆形等深线情况下的射线管几何位形

每一条被折射的射线由其出发点  $(r_0, \theta_0)$  表征. 考虑两条具有入射角  $\beta_0$  和  $\beta_0 + d\beta_0$  的相邻射线, 如图 3.10 所示, 在  $r < r_0$  的任一圆周上,

$$d\sigma = \overline{AB} \cos \beta = r \Delta\theta \cos \beta = r \cos \beta d\beta_0 \left( \frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} \right)_{r=\text{const}}$$

因为  $\Delta\theta$  是沿着半径为  $r$  的圆周度量的. 在初始圆周上,  $r = r_0$ ,  $\Delta\theta = \Delta\beta_0$ ,

$$d\sigma_0 = \overline{A_0 B_0} \cos \beta_0 = r_0 d\beta_0 \cos \beta_0$$

因此, 射线的间隔因子为

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{r \cos \beta}{r_0 \cos \beta_0} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} \right)_{r=\text{const}}$$

由于  $kr \sin \beta = \kappa = \text{const}$ ,

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left( \frac{\kappa}{kr} \right)^2}$$

因此, 我们得到

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \left\{ r \sqrt{1 - (\kappa/kr)^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} \right)_{r=\text{const}} \right\} \{r_0 \cos \beta_0\}^{-1} \quad (3.74)$$

其中,  $\partial \theta / \partial \beta_0$  可以从方程 (3.73) 求导数得到.

### §3.4.3 一个圆形岛

对于这种情况, 我们取

$$kr = \begin{cases} k_0 a \frac{\ln(a/b)}{\ln(r/b)}, & b < r < a \\ k_0 r, & a < r \end{cases}$$

因此, 圆岛的海岸线在  $r = b$  处, 岛趾在  $r = a$  处.  $kh$  和  $kr$  的变化曲线如图 3.11(a)-(b) 所示. 海岸附近水很浅, 当  $r \rightarrow b$  时, 有

$$h \sim k^{-2} \sim r^2 \ln^2(r/b), \quad dh/dr \sim 0$$

所以, 海滩很平坦, 可见, 在这种情况下, 所有进入岛趾的射线都与海岸线垂直相交. 射线方程很容易积分. 射线方程是

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int_a^b \frac{k_0 a |\sin \alpha_0| \ln(r/b) d \ln(r/b)}{\sqrt{(k_0 a)^2 \ln^2(a/b) - (k_0 a)^2 \sin^2 \alpha_0 \ln^2(r/b)}} \quad (3.75)$$

其中, “+”号对应于从第二象限进入岛区的射线, “-”号对应于从第三象限进入岛区的射线. 令

$$D = \ln(a/b) / \sin \beta_0, \quad \rho = \ln(r/b) \quad (3.76)$$

改写方程 (3.75), 进行积分, 我们得到

$$\begin{cases} \pm(\theta - \theta_0) &= \int_{\ln(a/b)}^{\ln(r/b)} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{D^2 - \rho^2}} \\ &= \sqrt{D^2 - \ln^2(a/b)} - \sqrt{D^2 - \ln^2(r/b)} \end{cases} \quad (3.77)$$

它等价于

$$\ln(r/b) = \left\{ D^2 - \left[ \pm(\theta - \theta_0) - \sqrt{D^2 - \ln^2(a/b)} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

两端除以  $\ln(a/b)$ , 应用定义 (3.76), 我们得到

$$\frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} = \left\{ \csc^2 \beta_0 - \left[ \pm \frac{\theta - \theta_0}{\ln(a/b)} - \cot \beta_0 \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad \theta_0 = \pi + \beta_0 \quad (3.78)$$

相应的曲线见图 3.11(c).

设  $(b, \theta_b)$  是从第三象限进入岛区的最外边一条射线 ( $\beta_0 = \pi/2$ ,  $\theta_0 = 3\pi/2$ ) 与海岸线的交点. 由于  $\sin \beta_0 = 1$ , 根据方程 (3.77), 有

$$\theta_b - \frac{3\pi}{2} = \ln(a/b), \quad \text{即} \quad \theta_b = \frac{3\pi}{2} + \ln(a/b)$$

类似地, 从第二象限进入岛区的最外边一条射线与海岸线交于  $(b, \theta'_b)$ ,  $\theta'_b$  为

$$\theta'_b = \frac{\pi}{2} - \ln(a/b)$$

如果  $\ln(a/b) < \pi/2$ , 则存在一段海岸线

$$r = b, \quad -\left(\frac{\pi}{2} - \ln(a/b)\right) < \theta < \frac{\pi}{2} - \ln(a/b)$$

在那里, 入射波被屏蔽掉了; 这段海岸被 Arthur 称为背风岸.

如果  $\ln(a/b) > \frac{\pi}{2}$ , 则在岛的背风侧, 从  $x$  轴一侧来的射线会与从  $x$  轴另一侧来的射线相交, 通过迭加, 并适当计及相位, 可以算出总的波幅. 当  $\ln(a/b) = \frac{\pi}{2}$ , 即  $a/b \simeq 4.81$  时, 从  $x$  轴一侧来的最外边的两条射线, 交于海岸的  $\theta = 0$  处, 背风岸就不复存在了.

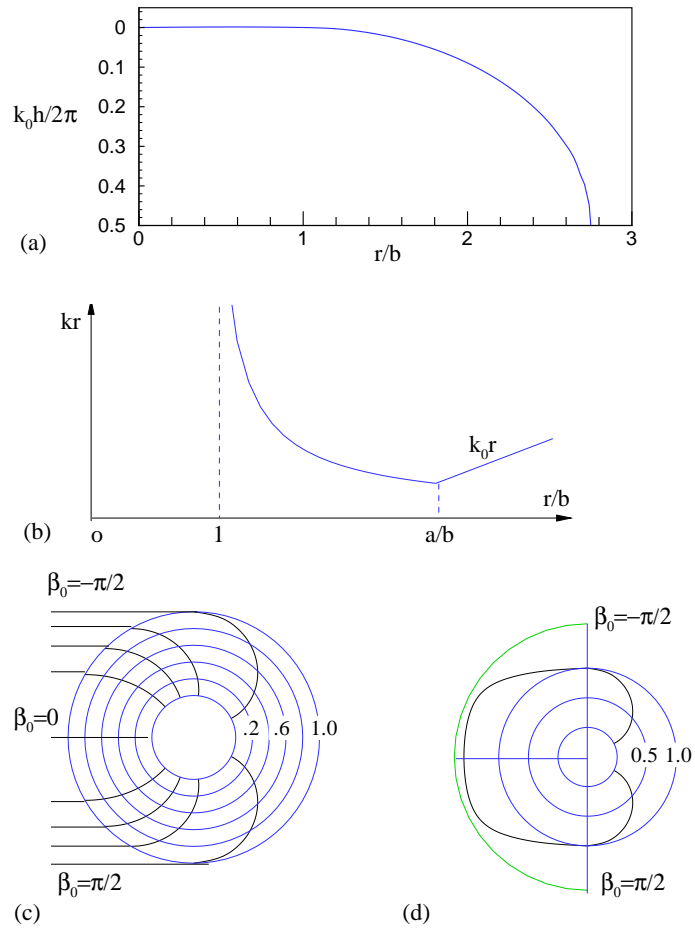


图 3.11: 圆形岛 (Pocinki). (a) 海底剖面; (b)  $kr \propto r$  曲线; (c) 射线几何位形; (d) 海岸  $r = b$  处  $(d\sigma_0/d\sigma)^{1/2}$  的极线图

为了得到间隔因子, 我们再次考察从第三象限进入岛区的射线. 按照方程 (3.74) 的要求, 对方程 (3.77) 求关于  $\beta_0$  的偏导数, 先算出

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} (D^2 - \ln^2(r/b))^{1/2} = D \frac{\partial D}{\partial \beta_0} (D^2 - \ln^2(r/b))^{-1/2}$$

因此

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} = 1 - D \frac{\partial D}{\partial \beta_0} \left[ (D^2 - \ln^2(a/b))^{-1/2} - (D^2 - \ln^2(r/b))^{-1/2} \right]$$

根据方程 (3.76), 我们有

$$\frac{\partial D}{\partial \beta_0} = -\cos \beta_0 \sin^{-2} \beta_0 \ln(a/b)$$

因此

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} = \left\{ 1 + \frac{\ln(a/b)}{\sin^2 \beta_0} \left[ 1 - \frac{\cos \beta_0}{\sqrt{1 - R^2 \sin^2 \beta_0}} \right] \right\} \quad (3.79)$$

其中

$$R \equiv \ln(r/b) / \ln(a/b)$$

因此, 射线的间隔因子是

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{r \cos \beta}{a \cos \beta_0} \frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} = \frac{r \sqrt{1 - (k_0 a)^2 \sin^2 \beta_0 / (kr)^2}}{a \cos \beta_0} \frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} \quad (3.80)$$

其中  $\partial \theta / \partial \beta_0$  由方程 (3.79) 给定.  $r = b$  处  $(d\sigma_0/d\sigma)^{1/2}$  的极线图, 如图 3.11(d) 所示.

需要指出, 以上处理方法, 具有“半逆”的性质, 因为我们假定了  $k$  的某种便于求解的形式, 而深度变化必须由色散关系求得. 因此, 对于不同的频率, 相同的  $k$  会对应于不同的深度. 正问题的提法是, 给定  $\omega$  和  $h(\mathbf{x})$  来求射线和振幅, 一般地, 必须采用数值方法求解. 对于直的或圆的等深线情况, 数值求解并不困难. 对于一般的等深线, Skovgaard, Johnson 和 Bertelsen (1976) 提出了确定射线和波幅的计算方法, 其中还附带考虑了海底的摩擦效应.

#### §3.4.4 缓变海底情况下绕射和折射相结合的近似方程

射线近似的优点, 是把一个三维问题归结为许多沿射线管的一维问题. 但是, 必须对横穿一射线的变化进行详细考虑时, 问题至少是局部二维的. 还有一些情况, 问题本质上就是二维的, 例如, 波入射到缓变海底上的铅垂柱体的情况. 二维效应与绕射密切相关. 因此, 需要给出一种近似, 以分析深度缓慢变化, 且计及迅速的水平变化的情况.

在常深度的情况下, 速度势可以写成

$$\phi = -\frac{i g \eta}{\omega} f \quad (3.81)$$

其中

$$f = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \quad \omega^2 = gk \tanh kh \quad (3.82)$$

根据  $\phi$  满足的 Laplace 方程可知,  $\eta(x, y)$  满足二维的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0 \quad (3.83)$$

这是一个描述绕射现象的方程. 因此, 对于缓变深度的情况, 认为方程 (3.81), (3.82) 仍然适用, 只是  $k$  和  $h$  取的是局部的值, 这种看法是合理的. 基于这种思想, Berkhoff(1972) 推导了  $\eta(x, y)$  的一个相当简单的方程, 不少作者用不同的方法也导出了这个方程 (Schonfeld, 1972; Johnson & Brink-Kjaer, 1973, Smith & Sprinks, 1975; Lozano & Meyer, 1976). 现在, 我们给出 Smith 和 Sprinks 的论证.

$\phi$  和  $f$  的精确的控制方程是

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \nabla^2 \phi = 0, & -h \leq z \leq 0, & \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0, & z = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = -h \cdot \nabla \phi, & z = -h \end{cases} \quad (3.84)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f = 0, & -h \leq z \leq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} f = 0, & z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0, & z = -h \end{cases} \quad (3.85)$$

对  $\phi$  和  $f$  应用 Green 公式,

$$\int_{-h}^0 dz \left[ \phi \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - f \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = \left[ \phi \frac{\partial f}{\partial z} - f \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{-h}^0$$

代入方程 (3.84) 和 (3.85), 我们得到

$$\int_{-h}^0 dz [\phi(k^2 f) - f(-\nabla^2 \phi)] = 0 - \left[ 0 - f \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{-h} = -(f \nabla h \cdot \nabla \phi)_{-h} \quad (3.86)$$

应用  $\phi$  和  $f$  的定义 (3.81) 和 (3.82), 我们得到

$$\begin{cases} \nabla \phi = \frac{-ig}{\omega} \left( f \nabla \eta + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla h \right) \\ \nabla^2 \phi = \frac{-ig}{\omega} \left[ f \nabla^2 \eta + 2 \frac{\partial f}{\partial h} \nabla \eta \cdot \nabla h \right. \\ \left. \eta \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h \right] \end{cases}$$

因此, 方程 (3.86) 可以改写成

$$\begin{cases} \int_{-h}^0 \left\{ f^2 \nabla^2 \eta + 2f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla \eta \cdot \nabla h + f \eta \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + f \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h + k^2 f^2 \eta \right\} dz \\ = -(\nabla h \cdot \nabla \eta) f^2 \Big|_{-h} - f \eta (\nabla h)^2 \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{-h} \end{cases}$$

应用 Leibniz 法则

$$D \int_b^a f dz = \int_b^a Df dz + (Da)[f]_{z=a} - (Db)[f]_{z=b}$$

左端的头两项与右端的第一项可以合并, 得到

$$\begin{cases} \nabla \cdot \int_{-h}^0 f^2 \nabla \eta dz + \int_{-h}^0 k^2 f^2 \eta dz \\ = -f \eta (\nabla)^2 \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{-h} - \int_{-h}^0 f \eta \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 dz - \int_{-h}^0 f \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h dz \end{cases}$$

根据缓变海底的假定, 由方程 (3.1) 可知,  $\nabla h/kh = O(\mu) \ll 1$ . 再考虑到  $\nabla \eta/k\eta = O(1)$ , 我们发现右端各项与左端之比为  $O(\mu^2)$ , 可以略去. 求积分, 并利用

$$\int_0^{kh} \cosh^2 \xi d\xi = \frac{1}{4}(\sinh 2kh + 2kh)$$

我们得到

$$\nabla \cdot (F\nabla \eta) + \omega^2 G\eta = 0 \quad (3.87)$$

其中

$$\begin{cases} F = CC_g = \frac{1}{2}gh \frac{\tanh kh}{kh} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \\ G = \frac{C_g}{C} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \end{cases} \quad (3.88)$$

注意到近似关系  $\nabla \eta/k\eta = O(1)$ , 方程 (3.87) 的另一种形式是

$$\nabla \cdot \left( CC_g \eta \frac{\mathbf{k}}{k} \right) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0 \quad (3.89)$$

Smith & Sprinks(1975) 进一步估计了所谓的非传播模式 (evanescent modes), 它们代表局部效应, 量级是  $O(\mu)$ , 因而可以忽略. 他们指出, 尽管方程 (3.87) 的误差为  $O(\mu^2)$ , 但解只能精确到  $O(\mu)$ , 因此, 波传播了  $O(1/\mu)$  的距离之后, 相位的累积误差可达  $O(\mu)$ .

对于常深度的情况, 方程 (3.87) 化成 Helmholtz 方程 (3.83). 对于缓变小深度情况 ( $kh \ll 1$ ), 方程 (3.87) 化成

$$\nabla \cdot (h\nabla \eta) + \frac{\omega^2}{g} \eta = 0 \quad (3.90)$$

因此, 只要海底斜率很小, 方程 (3.87)-(3.94) 对整个波长范围提供一种插补 (interpolation).

需要指出, 方程 (3.93) 还需要适当的边界条件. 由于解析解很困难, 求解它要用数值方法.

为了揭示方程 (3.87) 的物理含义, Herchenroder 引进了

$$\eta = Ae^{iS} \quad (3.91)$$

其中,  $A, S$  是实函数. 经过实部和虚部的分离, 可以得到

$$\begin{cases} AF\nabla \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \nabla(AF) + F\mathbf{K} \cdot \nabla A = 0 \\ -FA|\mathbf{K}|^2 + F\nabla^2 A + \nabla A \cdot \nabla F + \omega^2 GA = 0 \end{cases} \quad (3.92)$$

其中

$$\mathbf{K} = \nabla S \quad (3.93)$$

因此, 容易证明

$$\nabla \cdot (FA^2\mathbf{K}) = 0 \quad (3.94)$$

$$|\mathbf{K}|^2 = |\mathbf{k}|^2 + (FA)^{-1} \nabla(F\nabla A) \quad (3.95)$$

由方程 (3.93) 可知

$$\nabla \times \mathbf{K} = 0 \quad (3.96)$$

原则上, 从方程 (3.94)-(3.96) 可以解出  $A$  和  $\mathbf{K}$ .



在  $A$  变化非常缓慢的区域内,

$$\nabla A/kA = O(\nabla h/kh) = O(\mu) \quad (3.97)$$

方程 (3.95) 近似为

$$|\mathbf{K}|^2 = |\mathbf{k}|^2 + O(\mu^2) \quad (3.98)$$

而方程 (3.94) 则近似为

$$\nabla \cdot (C_g A^2) = 0 \quad (3.99)$$

因此, 射线近似是方程 (3.87) 的极限情况. 然而, 方程 (3.87) 可以用于焦散线的邻域. 现在, 我们以  $h = h(x)$ , 且某直线  $x = \text{const}$  为一焦散线的情况来说明这一点. 因为  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ , 因此, 由方程 (3.94) 和 (3.96), 我们得到

$$\begin{cases} K_2 & = \text{const} \\ FA^2 K_1 & = \text{const} = (FA^2 K_1)_0 \end{cases} \quad (3.100)$$

根据方程 (3.95)

$$K_1^2 + K_2^2 = k^2 + \frac{1}{A} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln F}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (3.101)$$

代入方程 (3.100), 我们得到

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln F}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \left\{ k^2 - K_2^2 - \left[ \frac{(FA^2 K_1)_0}{FA^2} \right]^2 \right\} A = 0 \quad (3.102)$$

在焦散线附近,  $A$  和  $\partial A/\partial x$  都很大, 方程 (3.102) 的主要部分为

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (k^2 - K_2^2)A = 0 \quad (3.103)$$

这个方程描述了焦散线邻域内的绕射效应, 与方程 (3.43) 相同.

用数值方法求解时, 若用方程 (3.87), 为了达到较高的精度, 要求把一个波长分成一些充分小的网格, 当地形有变化的区域很大时, 计算昂贵费时. 因此, Herchenroder 认为, 可以用方程 (3.98), (3.99), 在较粗的网格情况下来解折射问题, 对于折射和绕射问题, 用方程 (3.94)-(3.96) 比用方程 (3.87) 更好一些, 特别是在远离绕射显著的区域 (如焦散线, 焦点等) 时, 网格可取得很稀疏. 对于  $A = 0$  的邻域, 处理起来要谨慎 (见方程 (3.95) 或 (3.102)). 具体的数值方法还有待发展.

## 参考文献

- [1] Chu, V.C. & C.C. Mei(1970). On slowly varying stokes waves. *J. Fluid Mech.* **41**: 873-887.
- [2] Luneberg, R.K.(1964). *Mathematical Theory of Optics*, University of California Press, Los Angeles.
- [3] Ludwig, D.(1966). Uniform asymptotic expansions at a caustic. *Comm. Pure. Appl. Math.* **19**: 215-250.
- [4] Pocinki, L.S.(1950). The application of conformal transformations to ocean wave refraction problem. *Trans. Am. Geophys. Union* **31**: 856-860.
- [5] Skovgaard, O.I., G. Jonsson,& J.A. Bertelsen(1976). Computation of wave heights due to refraction and friction. *J. of Waterways Harbors, and Coastal Eng. Div. ASCE*, **102**: 100-105.



## 第四章 深度变化较大时的无穷小振幅长波

由于水波的色散性,长波传播得最快;许多水波本身的波长就已经很长(例如地震律波),经过远距离的传播之后,先导波的波长就更长了.海浪入射到港湾或者由于其它原因的激发,可能产生港湾共振,频率最低的模式波长正比于港湾的直径(5公里乃至10公里).因此研究长波有重要的实际意义.

如果波传播进入某个区域,该区域内一个波长上水深的相对变化十分显著,则会出现波的散射现象,这时反射波变得相当可观了.简单的射线理论是忽略反射的,因此,不适合这种情况.在开始研究比较复杂的色散波的散射之前,需要考察一下浅水波中长波类似问题,其中色散和铅垂方向的变化是不重要的.为了数学上便于处理,我们主要处理深度间断变化的情况.变深度情况的一个有趣的现象是波的俘获,即在某一频率范围内的波实际上被限制在一部分海洋面上.在倾斜的海滩,大陆架和海脊上,都存在有实际意义的长波俘获问题.现在,我们只介绍均匀地倾斜的海滩上的边缘波.此外,考察散射矩阵的若干普遍性质.需要指出,海底连续变化情况可解析求解的问题为数甚少,运算复杂,一般来说需要用近似方法或数值方法求解.

### §4.1 线性化长波理论的提法

#### §4.1.1 控制方程

在常深度情况下,对长波来说,  $kh \ll 1$ , 因此,如果波幅与深度之比很小

$$\frac{A}{h} \ll 1, \quad \text{或者} \quad \frac{|\zeta|}{h} \ll 1 \quad (4.1)$$

则线性化近似适用.在变深度的情况下,若  $h(x, y)$  的变化尺度为波长的量级,则线性化近似仍可以使用.在常深度水中,无穷小振幅长波内的水的运动基本上是水平的,铅垂方向的变化可以忽略,压力是流体静压.有限振幅的长波情况也是这样.因此,长波运动近似地为二维的.在条件(4.1)下,质量守恒方程是

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) \simeq 0 \quad (4.2)$$

其中,  $\mathbf{u} = (u, v)$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ . 动量守恒方程是

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (4.3)$$

总压为流体的静压

$$P = \rho g(\zeta - z) \quad (4.4)$$

动量方程形式变为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla(g\zeta) \quad (4.5)$$

从方程(4.2)和(4.5)中消去  $\mathbf{u}$ , 有

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \nabla \cdot (gh\nabla\zeta) \quad (4.6)$$

这是一个变系数的双曲型偏微分方程, 与声波的方程几乎一样. 特别地, 当  $h = \text{const}$  时, 它化成

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C^2 \nabla^2 \zeta = 0, \quad C^2 = gh \quad (4.7)$$

这是最简单的波动方程. 在浅水中, 可以认为波动存在于整个水层中.

如果波是角频率为  $\omega$  的正弦波, 则可以分离时空变量如下:

$$\begin{cases} \zeta &= \eta(x, y) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{v}(x, y) e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (4.8)$$

根据方程 (4.2), (4.5), (4.6), 我们有

$$\begin{cases} i\omega\eta = \nabla \cdot (h\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} = \frac{-ig}{\omega} \nabla \eta \\ \nabla \cdot (h\nabla \eta) + \frac{\omega^2}{g} \eta = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

在常深度的情况下, 我们有 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0, \quad k = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} \quad (4.10)$$

如果侧向边界是刚性壁面, 则边界条件是壁上的法向速度为零, 即

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.11)$$

根据方程 (4.5), (4.8) 和 (4.9), 我们得到

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \quad (4.12)$$

当侧向边界为铅垂刚性壁时, 方程 (4.12) 意味着壁面上自由面高度不是最大就是最小. 不过, 如果壁面是堆石防波堤的壁, 水可以渗透进固壁, 并发生可观的耗散, 则边界条件依赖于耗散 (或反射) 的总量, 而后者又是解的一部分, 所以问题实质是非线性的. 对于倾斜的海滩, 也会出现类似的困难. 到了水最浅的部分, 短波会破碎, 形成湍流, 造成能量耗散, 风生波情况 (频率  $\sim 0.1/\text{sec}$ ) 就是这样. 对于充分长的波, 破碎现象不显著, 例如地震律波就是这样. 因此我们假定, 对于所讨论的长波, 在海滩边缘无破碎, 能量不会耗散. 我们可以把海滩边缘的边界条件定为

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{或} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \quad (4.13)$$

当然, 无穷远处也应加适当的条件.

现在, 我们从普遍的线性化理论, 取长波近似, 严格地推导出方程 (4.6). 推理的过程仿效 Friedrichs(1948) 对非线性长波的讨论. 根据物理上的了解, 按如下尺度取无量纲变量

$$\begin{cases} (x', y') = k(x, y), & z' = z/h_0, & h' = h/h_0 \\ t' = (k\sqrt{gh_0})t, & \zeta' = \zeta/A_0, & \Phi = \frac{1}{k} \frac{A_0}{h_0} \sqrt{gh_0} \phi \end{cases} \quad (4.14)$$

这里  $\omega \sim \sqrt{gh_0}k$ . 为简便起见, 以下省略无量纲变量的 "''" 号, 给出线性化的无量纲方程:

$$\begin{cases} \mu^2 \nabla^2 \phi + \phi_{zz} = 0, & -h < z < 0 \\ \mu^2 \phi_{tt} + \phi_z = 0, & z = 0 \\ \phi_z + \mu^2 \nabla h \cdot \nabla \phi = 0, & z = -h(x, y) \end{cases} \quad (4.15)$$

其中,  $\mu = kh_0 \ll 1$ ,  $\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  为水平梯度因子.

引入级数

$$\phi = \phi_0 + \mu^2 \phi_2 + \mu^4 \phi_4 + \cdots \quad (4.16)$$

对  $O(\mu^0)$  阶, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} = 0, & -h < z < 0 \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial z} = 0, & z = 0, -h \end{cases} \quad (4.17)$$

因此

$$\phi_0 = \phi_0(x, y, t) \quad (4.18)$$

$\phi_0$  所满足的方程待定. 对  $O(\mu^2)$  阶, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = -\nabla^2 \phi_0, & -h < z < 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2}, & z = 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\nabla h \cdot \nabla \phi_0, & z = -h \end{cases} \quad (4.19)$$

借助于 Green 公式

$$\int_{-h}^0 \left[ \phi_0 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} - \phi_2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \right] = \left[ \phi_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \phi_2 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right]_{-h}^0 \quad (4.20)$$

我们得到  $\phi_2$  的可解性条件, 即  $\phi_0$  应当满足的方程

$$-h \nabla^2 \phi_0 = -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} + \nabla h \cdot \nabla \phi_0 \quad (4.21)$$

它可以改写成

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} = \nabla \cdot (h \nabla \phi_0) \quad (4.22)$$

回到原来的变量, 并应用线性化的 Bernoulli 方程  $g\zeta = \Phi_t$ , 就可以从上式推导出方程 (4.6).

#### §4.1.2 矩形截面的长渠道中的准一维波

对于矩形截面长渠道来说, 宽度远小于纵向尺寸, 可以预期, 各量的横向变化远小于纵向变化. 直观地看, 这是因为窄渠道的侧壁上法向流量为零, 这个边界条件意味着  $\zeta$  的横向变化可以忽略. 于是, 运动由一维方程描述, 大致推导如下.

设  $x$  为纵轴,  $y$  为横轴,  $b(x)$  为宽度,  $h(x)$  为深度,  $y = a_1(x), a_2(x)$  为两岸, 于是

$$b = a_2 - a_1, \quad \text{过水断面面积} = A = hb \quad (4.23)$$

现在, 我们把连续性方程 (4.2) 从  $a_1$  到  $a_2$  进行积分, 得

$$\frac{\partial b\zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{a_1}^{a_2} hudy + \left[ h \left( v - u \frac{da}{dx} \right) \right]_{a_1}^{a_2} = 0 \quad (4.24)$$

其中, 用到了 Leibniz 法则. 由于  $v - u \frac{da}{dx}$  在  $y = a_1(x)$  和  $y = a_2(x)$  处为零, 因此, 上式末端项为零, 连续性方程变成

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial Au}{\partial x} = 0 \quad (4.25)$$

忽略横向速度以及  $\zeta, u$  的横向变化, 动量方程近似为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (4.26)$$

合并方程 (4.25) 和 (4.26), 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{b}{g} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \quad (4.27)$$

对于正弦波  $\zeta = \eta e^{-i\omega t}$ , 控制方程是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{b\omega^2}{g} \eta = 0 \quad (4.28)$$

这是熟知的 Sturm-Lieuville 型方程. 需要指出, 这里我们认为波长与渠道的纵向尺寸是同量级的.

## 习题

(4.1) 试用 Friedrichs 的方法, 通过摄动分析导出方程 (4.27).

### §4.1.3 辐射条件的进一步说明

在前边, 我们已经指出, 对于稳恒的正弦波问题, 必须加上辐射条件, 即局部扰动必定向外传播的条件. 我们已经从初值问题出发, 认为稳态是  $t \rightarrow \infty$  的极限, 进行了论证. 另外一种方法是坚持稳态问题的提法, 但引进小阻尼, 它可以是实际存在的, 也可以是虚设的, 然后要求简谐解在无穷远处为零. 当最后使上述的阻尼为零时, 最终结果也满足辐射条件. 人为地引入虚设的阻尼的方法, 是 Rayleigh 提出的, 原来针对一般的波动. 下面所述的仅是其一例.

在浅水中, 可以设想底部的摩擦是阻尼的物理根源, 取摩擦力正比于流速, 即为  $2\varepsilon \mathbf{u}$ , 其中  $\varepsilon$  是正的小系数. 由于这种摩擦力耗散能量, 无穷远处应无波浪存在. 这时, 动量方程变成

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g \nabla \zeta - 2\varepsilon \mathbf{u} \quad (4.29)$$

把它与连续性方程 (4.2) 合并, 我们得到有线性阻尼项的波动方程

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \nabla \cdot (gh \nabla \zeta) - 2\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (4.30)$$

对于简谐运动来说, 方程 (4.30) 变成

$$\nabla \cdot (gh\nabla\eta) + (\omega^2 + 2i\varepsilon\omega)\eta = 0 \quad (4.31)$$

它可以近似地写成

$$\nabla \cdot (gh\nabla\eta) + (\omega^2 + i\varepsilon)^2\eta = 0 \quad (4.32)$$

边界条件是在无穷远处  $\eta$  必须有界. 于是, 最终的稳态是其解当  $\varepsilon \rightarrow 0_+$  时的极限.

引入阻尼后, 数学上的提法是  $\eta$  满足

$$\nabla \cdot (gh\nabla\eta) + \omega'^2\eta = 0 \quad (4.33)$$

其中

$$\omega' = \omega + i\varepsilon \quad (4.34)$$

是带有正的小虚部的复频率.

现在, 考虑波被一局部的障碍物散射的一维问题. 远处的深度为常数, 散射波应满足

$$\frac{\partial^2\eta^s}{\partial x^2} + \frac{\omega'^2}{gh}\eta^s = 0 \quad (4.35)$$

其通解是

$$\eta^s = ae^{ik'|x|} + be^{-ik'|x|}$$

其中

$$k' = k + i\varepsilon(gh)^{-1/2}, \quad k = \omega(gh)^{-1/2} \quad (4.36)$$

显然, 为了使解在  $x \rightarrow \infty$  时有界, 必须令  $b = 0$ . 然后, 取  $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限, 散射波变成

$$\eta^s = a^{ik|x|}, \quad \zeta^s = a^{ik|x| - \omega t}, \quad k|x| \gg 1 \quad (4.37)$$

这意味着局部性扰动产生的散射波是外行波.

于是, 无穷远处边界条件的另一种提法是: "局部性扰动产生的波一定是向外传播的." 这种条件称为辐射条件. 容易验证, 也可以把辐射条件写成

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \mp ik \right) \eta^s \rightarrow 0, \quad kx \rightarrow \pm\infty \quad (4.38)$$

在局部性障碍物引起二维散射的情况下,  $\eta^s$  在常深度的远处满足

$$\nabla^2\eta^s + k'^2\eta^s = 0 \quad (4.39)$$

在极坐标下, 通过分离变量可知, 其通解为如下各项之迭加

$$\begin{Bmatrix} H_n^{(1)}(k'r) \\ H_n^{(2)}(k'r) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix}$$

由于 Hankel 函数的渐近性态为

$$\begin{Bmatrix} H_n^{(1)}(k'r) \\ H_n^{(2)}(k'r) \end{Bmatrix} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k'r}} \exp \left[ \pm i \left( k'r - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \right], \quad (|k'r| \gg 1) \quad (4.40)$$



而  $k'$  是有正实部的, 为了保证  $r \rightarrow \infty$  时解的有界性, 含  $H_n^{(2)}$  的项不允许存在, 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 散射波的通解可以写成

$$\eta^s = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta \beta_n \sin n\theta) H_n^{(1)}(kr) \quad (4.41)$$

当  $kr \gg 1$  时,  $\eta^s$  的渐近性态是

$$\begin{cases} \eta^s \simeq \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) e^{-\frac{in\pi}{2}} \right] \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \\ \equiv A(\theta) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \\ \zeta^s \simeq A(\theta) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \omega t - \frac{\pi}{4})} \end{cases} \quad (4.42)$$

这又是一种外行波. 所以, 方程 (4.42) 是有界障碍物的二维散射情况下的辐射条件, 它也可以写成

$$\sqrt{kr} \left( \frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \eta^s \rightarrow 0, \quad kr \gg 1 \quad (4.43)$$

这里需要强调指出, 条件 (4.43) 要比仅仅要求无穷远处  $\eta^s \rightarrow 0$  的条件强得多.

上述关于辐射条件的说明, 还为由简谐解建立瞬变解提示了一个简单的途径. 如果扰动是在某一有限的时刻开始, 则  $t \rightarrow -\infty$  时,  $\zeta \rightarrow 0$ ; 有阻尼时, 也可以预期  $t \rightarrow \infty$  时,  $\zeta \rightarrow 0$ . 于是可以用 Fourier 变换

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad (4.44)$$

方程 (4.30) 的 Fourier 变换, 正是方程 (4.31) 的边值问题, 恰好也是受阻尼的简谐扰动  $\eta(\mathbf{x}, \omega')$  的边值问题. 因此, 瞬变扰动可以由如下的逆变换求得

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mathbf{x}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \quad (4.45)$$

这相当于受阻尼简谐解的线性迭加. 由于  $\omega' = \omega + i\varepsilon$ , 方程 (4.45) 可以改写成

$$\begin{cases} \zeta(\mathbf{x}, t) = e^{+\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mathbf{x}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \\ = e^{+\varepsilon t} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \eta(\mathbf{x}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \end{cases} \quad (4.46)$$

无粘解只不过是  $\varepsilon \rightarrow 0$  时的极限, 这里认为方程 (4.46) 中的 Fourier 积分, 取的是沿复  $\omega'$  平面稍高于实轴的一路径. 现在, 既然我们已经达到最终目标, 我们就可以忘却人为的阻尼, 就说:  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  是简谐解的一个 Fourier 积分 (简谐解满足辐射条件)

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.47)$$

其中积分路径必须稍高于  $\omega$  平面的实轴.

本节的思想, 可以推广到任意  $kh$  下的三维情形.

### §4.2 深度有间断的一维情况：法向入射波的散射

在港口建筑防波堤时，为了保持生态不变性，经常使防波堤不露出水面；当海底有海脊或陆架时，也会出现台阶形的地形变化。在这些情况下，计算入射波的反射和透射有重要意义。作为最简单的模型，可考虑水深的一维变化， $h = h(x)$ ，而波是法向入射的

$$\eta^I = A^I e^{ikx}$$

这时，经过计算可得， $y$  轴的右边和左边的解分别为

$$\begin{cases} \eta = \eta^I + \eta^T = T A^I e^{ikx}, & x \gg 1 \\ \eta = \eta^I + \eta^R = A^I e^{ikx} + R A^I e^{-ikx}, & -x \gg 1 \end{cases}$$

其中， $T$  为透射系数， $R$  为反射系数，是工程中最感兴趣的数值。现在，我们考察只有一个台阶的一维情况，且只考虑法向入射。

#### §4.2.1 一个台阶情况下水波法向入射问题的解

现在，我们假设在  $x = 0$  处海洋深度有间断变化：当  $x < 0$  时， $h = h_1$ ；当  $x > 0$  时， $h = h_2$ ；其中  $h_1$  和  $h_2$  是不相等的常数。频率为  $\omega$  的两个入射波，分别从  $x \sim \pm\infty$  射来，显然，每个波都有一些能量透射过台阶，另一些能量反射回去，从而产生背离台阶而传播的散射波。

在  $x = 0$  的两侧，波满足

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x} \zeta = 0 \quad (4.49)$$

这里，当  $x < 0$  时， $(\zeta, u, h) = (\zeta_1, u_1, h_1)$ ；当  $x > 0$  时， $(\zeta, u, h) = (\zeta_2, u_2, h_2)$ 。现在，必须求出  $x = 0$  处的匹配条件（连接条件）。我们暂时假定，方程 (4.48), (4.49) 在越过深度间断线  $x = 0$  时也成立。并可以关于  $x$ ，从  $x = 0_-$  积分到  $x = 0_+$ 。因为积分的区间是无穷小的，而  $\partial \zeta / \partial t$  和  $\partial u / \partial t$  应为有限，因此，方程 (4.48) 和 (4.49) 中的第一项对积分没有贡献，我们可以得到

$$\begin{cases} [hu]_{x=0_-}^{x=0_+} = 0, & \text{或} & \lim_{x \rightarrow 0_-} h_1 u_1 = \lim_{x \rightarrow 0_+} h_2 u_2 \\ [\zeta]_{x=0_-}^{x=0_+} = 0, & \text{或} & \lim_{x \rightarrow 0_-} \zeta_1 = \lim_{x \rightarrow 0_+} \zeta_2 \end{cases} \quad (4.50)$$

这些条件，给出了过间断面时两侧流量  $hu$ ，水面高度  $\zeta$  的关系。

对于简谐运动， $\zeta = \eta(x)e^{-i\omega t}$ ， $u = v(x)e^{-i\omega t}$ ，应用方程 (a-316)，发现

$$\frac{d^2 \eta_m}{dx^2} + k_m^2 \eta_m = 0, \quad (m = 1, 2) \quad (4.51)$$

其中

$$k_m = \omega / \sqrt{gh_m} \quad (4.52)$$

于是，速度的空间部分满足

$$\mathbf{v}_m = -\frac{ig}{\omega} \frac{d\eta_m}{dx} \quad (4.53)$$

在衔接处的匹配条件为

$$\eta_1 = \eta_2, \quad h_1 \frac{d\eta_1}{dx} = h_2 \frac{d\eta_2}{dx} \quad (4.54)$$

为了使问题的提法完整,还必须加上辐射条件,即入射波产生的扰动只向外传播.于是,如果只有右侧(或左侧)来的入射波,则在相反侧一定只有左行波(或右行波).为使问题一般化,假定两侧的无穷远处都发出入射波  $A_- e^{ik_1 x}$  和  $B_+ e^{-ik_2 x}$ , 则通解有如下形式:

$$\begin{cases} \eta_1 = A_- e^{ik_1 x} + B_- e^{-ik_1 x}, & (x < 0) \\ \eta_2 = B_+ e^{-ik_2 x} + A_+ e^{ik_2 x}, & (x > 0) \end{cases} \quad (4.55)$$

入射波的振幅  $A_-$  和  $B_+$  是已知的, 散射波的振幅待定. 应用匹配条件 (4.54), 我们得到

$$\begin{cases} A_- + B_- = A_+ + B_+ \\ k_1 h_1 (A_- - B_-) = k_2 h_2 (A_+ - B_+) \end{cases}$$

容易解出

$$\begin{cases} B_- = \frac{(k_1 h_1 - k_2 h_2) A_- + 2k_2 h_2 B_+}{k_1 h_1 + k_2 h_2} \\ A_+ = \frac{2k_1 h_1 A_- - (k_1 h_1 - k_2 h_2) B_+}{k_1 h_1 + k_2 h_2} \end{cases} \quad (4.56)$$

相应的矩阵形式是

$$\{A^s\} = [S] \{A^I\} \quad (4.57)$$

其中

$$\{A^I\} = \begin{Bmatrix} A_- \\ B_+ \end{Bmatrix}, \quad \{A^s\} = \begin{Bmatrix} A_+ \\ B_- \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\begin{cases} [S] = \begin{bmatrix} T_1 & R_2 \\ R_1 & T_2 \end{bmatrix} \\ = (k_1 h_1 + k_2 h_2)^{-1} \begin{pmatrix} 2k_1 h_1 & -(k_1 h_1 - k_2 h_2) \\ k_1 h_1 - k_2 h_2 & 2k_2 h_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.59)$$

矩阵  $[S]$  称为散射矩阵.

为了解  $T_1, T_2, R_1, R_2$  的意义, 我们假设只有来自左侧的入射波, 因此,  $A_- \neq 0, B_+ = 0$ . 显见,

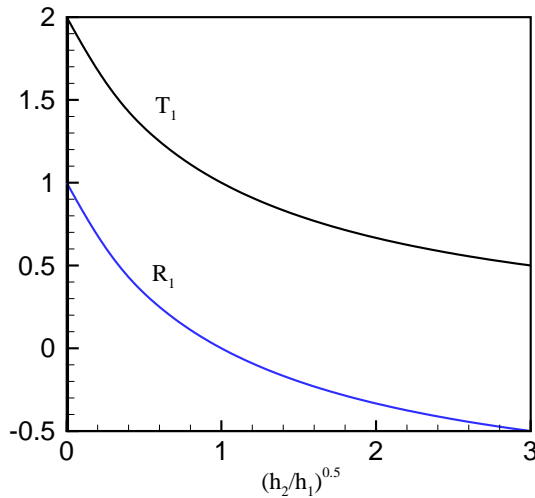
$$\frac{A_+}{A_-} = T_1 = \frac{2k_1 h_1}{k_1 h_1 + k_2 h_2} \quad (4.60)$$

$$\frac{B_-}{A_-} = R_1 = \frac{k_1 h_1 - k_2 h_2}{k_1 h_1 + k_2 h_2} \quad (4.61)$$

于是,  $T_1$  和  $R_1$  可分别定义成入射波来自  $h = h_1$  侧时的透射系数和反射系数.  $T_2$  和  $R_2$  可类似地定义成来自  $h_2$  侧的入射波的透射系数和反射系数. 注意到  $k_m h_m = \omega \sqrt{h_m/g}$ , 我们得到

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} \\ R_1 = \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} = \frac{1 - \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} \end{cases} \quad (4.62)$$

$T_1$  和  $R_1$  随深度比的变化如图 4.1 所示. 注意, 当入射波来自深水侧时, 反射波的相位不变, 但入射波来自较浅的那一侧时, 反射波的相位变化  $\pi$ . 可以证明散射波(反射波和透射波)所传输的能量等于入射波所传输的能量. 当陆架很浅,  $h_2/h_1 \ll 1$  时,

图 4.1: 波法向入射台阶形陆架情况下的透射系数  $T_1$  和反射系数  $R_1$ .

$$T_1 = 2(1 - \sqrt{h_2/h_1}), \quad R_1 = 1 - 2\sqrt{h_2/h_1} \quad (4.63)$$

这时反射系数  $R_1 \simeq 1$ , 因此, 入射波和反射波之和实质上是一个驻波, 在  $x = 0$  处是振幅为  $2A^I$  的波谷. 必须指出, 对于足够小的  $h_2$ , 至此为止, 我们忽略了的非线性效应可能是十分重要的. 虽然由于深度  $h_2$  的减小, 透射波的振幅增加到入射波的两倍, 但是, 因为能流速率  $T_1^2 \cdot C_g \propto \sqrt{h_2}$ , 所以通过的能量却很小. 在  $h_2/h_1 \gg 1$  的极端情况下, 反射系数  $R_1 = -1$ , 因此  $x < 0$  处的波也是一个驻波, 只是  $x = 0$  处为波节.

#### §4.2.2 连接点匹配条件合理性的证实

直观地看, 匹配条件是合理的. 但是, 它们是根据方程 (4.48) 和 (4.49) 推导出来的, 这两个方程仅当铅垂运动与水平运动相比可以忽略,  $\partial/\partial x$  很小时才成立, 然而在台阶的邻域内这些假定不成立. 那么, 上一节中的理论是否有效呢? Batholomeuz(1958) 在他的文章中解答了这一问题. 他从  $kh$  为任意的问题提法出发, 严格地证明了上一节的结果是  $k_m h_m \rightarrow 0$  时的正确的渐近极限. 他的论证相当长, 涉及一些很复杂的数学方法. 现在, 我们给出一种较简单的论证, 所用的数学就是所谓的匹配渐近方法.

首先, 我们把物理区域按照主要作用的尺寸分成远场和近场. 例如, 在远离连接点的入射侧, 长度尺度是波长  $1/k_1$ , 因此

$$\eta_1 = A(e^{ik_1 x} + R e^{-ik_1 x}) \quad (4.64)$$

恰当地描述了波动. 这个  $O(k_1^{-1})$  的区域是一个远场. 在远场的观测者看来, 台阶的邻域很小, 以致于只要用 (4.64) 的 Taylor 展开的头几项, 就能充分好地给出那里自由面的近似描述. 因此,

$$\eta_1 \simeq A[1 + R + (1 - R)ik_1 x] + O((k_1 x)^2), \quad (k_1 x \rightarrow 0) \quad (4.65)$$

对于在波的透射侧的远场的观测者, 波由

$$\eta_2 = AT e^{ik_2 x} \quad (4.66)$$

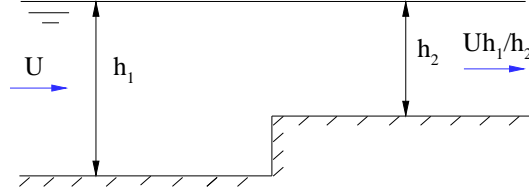


图 4.2: 一台阶形陆架的近场

描述, 它在台阶的邻域内趋于

$$\eta_2 \simeq AT(1 + ik_2x) + O((k_2x)^2), \quad (k_2x \rightarrow 0) \quad (4.67)$$

浅水槽中的 Bernoulli 方程是

$$\eta = -\frac{ig}{\omega} \eta \quad (4.68)$$

因此

$$\phi_1^{\text{far}} = \frac{-ig}{\omega} A[1 + R + (1 - R)ik_1x], \quad (k_1x \rightarrow 0) \quad (4.69)$$

$$\phi_2^{\text{far}} = \frac{-ig}{\omega} AT[1 + ik_2x], \quad (k_2x \rightarrow 0) \quad (4.70)$$

台阶的邻域构成一个近场, 那里的特征尺度是当地深度, 运动是二维的. 台阶上的运动方程和边界条件是

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (4.71)$$

$$\phi_n = 0 \quad (4.72)$$

尽管自由面上准确的线性化边界条件是

$$\phi_z - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0$$

但这两项之比是

$$\frac{\omega^2 \phi}{g} / \phi_z = O\left(\frac{\omega^2 h^2}{g}\right) = O(k^2 h^2)$$

因此, 自由面条件近似为

$$\phi_z \simeq 0, \quad z = 0 \quad (4.73)$$

其中的误差为  $O((kh)^2)$ . 这在物理上意味着近场观测者忘却了长尺度波的存在, 只见到一些起伏, 每一瞬时似乎有一股流流经有台阶的限定的渠道, 如图 4.2 所示. 用共形映照法或者其它方法, 原则上可以求得这个简化的势流问题的解.

在远场解和近场解中, 都有若干待定系数. 匹配渐近方法的下一步是使远场解和近场解在中间区域 (即重叠区域) 光滑地连接起来, 这个中间区域在远场观测者看来, 很接近连接点, 在近场观测者看来又远离连接点; 换句话说, 令

$$\phi^{\text{far}}|_{kx \ll 1} = \phi^{\text{near}}|_{x/h \gg 1} + O((kh)^2) \quad (4.74)$$

在进行匹配之前, 先写出  $\phi^{\text{near}}$  的远场近似 (即内解的外极限):

$$\begin{cases} \phi^{\text{near}} = C - DUh_1 + Ux, & x/h_1 \sim -\infty \\ \phi^{\text{near}} = C + DUh_1 + U\frac{h_1}{h_2}x, & x/h_2 \sim \infty \end{cases} \quad (4.75)$$

要特别注意,  $x \sim \pm\infty$  处的附加常数相差  $2DUh_1$ ; 上式中有三个待定系数  $C, D, U$ , 其中  $D$  称作阻塞常数 (block constant), 它与  $U$  之间有一定的关系, 现推导如下. 根据连续性, 在任何  $x$  处, 有

$$Uh_1 = \int_h^0 \phi_x dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 \phi dz + \phi(x, -h) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.76)$$

对上式从  $x_1 (< 0)$  到  $x_2 (> 0)$  积分, 其中  $-x_1/h_1 \gg 1, x_2/h_2 \gg 1$ , 我们得到

$$\left[ \int_{-h}^0 \phi dz \right]_{x_1}^{x_2} = Uh_1(x_2 - x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \phi(x, -h) \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (4.77)$$

由于在  $x_1$  和  $x_2$  处方程 (4.75) 适用, 因此, 上式左端可以写成

$$C(h_2 - h_1) + DUh_1(h_2 + h_1) + Uh_1(x_2 - x_1)$$

而右端可以写成

$$Uh_1(x_2 - x_1) + C(h_2 - h_1) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial x} [\phi(x, -h) + C] dx$$

把它们代入方程 (4.77), 我们有

$$D = -\frac{1}{h_1 + h_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial h}{\partial x} [\phi(x, -h) + C] / Uh_1 \quad (4.78)$$

因为  $\phi + C$  一定是  $Uh_1$  的量级, 故  $D$  是量级为 1 的无量纲数, 仅取决于近场的几何位形. 对于矩形台阶的情况, 下一节中江得出  $D$  的显式值.

### 习题

(4.2) 设一船的轮廓线方程为  $z = -H(x)$ , 试证, 方程 (4.78) 可以推广成

$$Uh_1 D = -\frac{1}{h_1 + h_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} [\phi(x, -h) + C] + \frac{\partial H}{\partial x} [\phi(x, -H) + C] \right\}$$

顺便指出, 阻塞系数的概念首先是在船舶研究中提出来的.

假设近场已知, 因而  $D$  也已知 (用  $C$  和  $U$  表示). 现在, 把方程 (a-382) 与方程 (4.69), (4.70) 进行匹配. 令  $x$  的同次幂相等, 我们得到

$$C - Uh_1 D = \frac{-igA}{\omega} (1 + R)$$

$$U = \frac{-igA}{\omega} (1 - R) ik_1$$

$$C + Uh_1 D = \frac{-igA}{\omega} T$$

$$U \frac{h_1}{h_2} = \frac{-igA}{\omega} T i k_2$$

从这些关系中, 容易解出  $R, T, C$  和  $U$ , 结果是

$$R = -\frac{1 - b + 2iDk_1h_1}{1 + b - 2iDk_1h_1} \quad (4.79)$$

$$T = \frac{2b}{1 + b - 2iDk_1h_1} \quad (4.80)$$

$$Uh_1 = \frac{-igA}{\omega} i k_2 h_2 T \quad (4.81)$$

$$C = \frac{-igA}{\omega} \frac{2b - iDk_1h_1}{1 + b - 2iDk_1h_1} \quad (4.82)$$

其中

$$b = k_1 h_1 / k_2 h_2 \quad (4.83)$$

因为  $D$  是实数, 量级为 1, 故在  $O((kh)^2)$  的误差范围内, 它仅影响  $R, T, U, C$  的相位, 对它们大小的影响可以忽略. 这个结论与 Batholomeuz(1958) 的结论一致, Tuck(1976) 以上述方法求得. 因此, 在上述误差范围内,  $R, T$  的大小与上节结果一致, 简单的匹配要求方程 (4.54) 的合理性得到证实. 这种证实只适用于特殊情形, 当用于斜入射情形时就会出现问題.

### §4.2.3 矩形台阶情况下的近场

边界突然变化区域的近场, 作为定常势流的经典问题, 一般要数值求解. 但是, 对于矩形台阶这种特殊情形, 可以用复变函数理论解析求解. 为此, 我们引入复变量  $Z = x + jy$  和复势  $W(Z)$ ,  $W$  的实部为速度势, 即

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re}_j W(Z)$$

注意这里的虚数单位记作  $j$ , 以便区别于考虑时间变化时用过的  $i$ . 尽管  $i, j$  都是  $\sqrt{-1}$ , 但是当它们一起出现时, 一个相当于另一个来说看作实数. 特别是, 实速度势表示成

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \operatorname{Re}_i \operatorname{Re}_j W(Z) e^{-i\omega t} = \operatorname{Re}_i e^{-i\omega t} \operatorname{Re}_j (\phi + j\psi) \\ &= \operatorname{Re}_i e^{-i\omega t} \phi = \operatorname{Re}_i e^{-i\omega t} (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \phi_1 \cos \omega t + \phi_2 \sin \omega t \end{aligned} \right.$$

这里  $\phi_1$  和  $\phi_2$  关于  $i$  和  $j$  都是实函数.

现在, 我们把  $Z$  平面上的条带用 Schwarz-Christoffel 公式映照到上半个  $\zeta$  平面 (见图 4.3):

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \frac{K}{\zeta} \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta - c^2}} \quad (4.84)$$

显然, 复势  $W = \phi + j\psi$  是由  $\zeta$  平面上原点强度为  $Uh_1$  的源产生,

$$W = \frac{Uh_1}{\pi} \ln \zeta + \text{const} \quad (4.85)$$

为了确定方程 (4.84) 中的  $K$  和  $c^2$ , 我们注意到复速度为

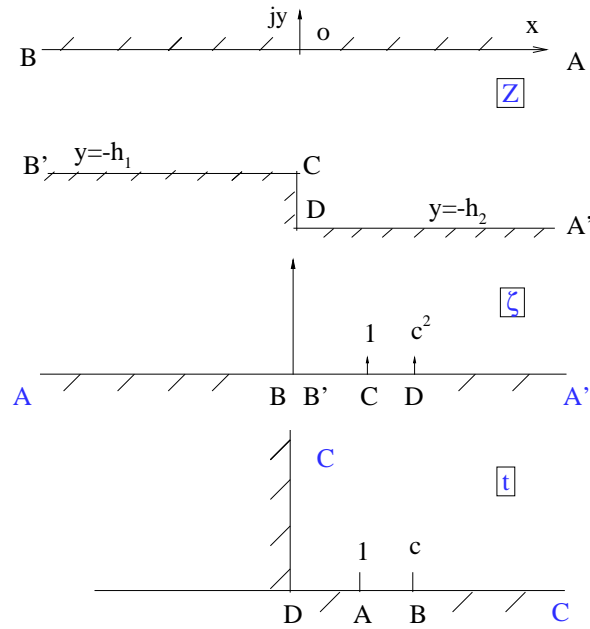


图 4.3: 台阶情况下的保角映照

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{dW/d\zeta}{d\zeta/dZ} = \frac{Uh_1}{\pi K} \sqrt{\frac{\zeta - c^2}{\zeta - 1}} \quad (4.86)$$

在  $A$  附近,  $\zeta \sim \infty$ ,  $dW/dZ \simeq Uh_1/\pi K = Uh_1/h_2$ . 因此

$$K = h_2/\pi$$

在  $B$  附近,  $\zeta \sim 0$ ,  $dW/dZ \simeq Uh_1c/\pi K = U$ . 因此

$$c = h_2/h_1$$

为了求方程 (4.84) 的积分, 由下述变换引入  $t$  平面

$$\zeta = \frac{t^2 - c^2}{t^2 - 1}, \quad \text{即} \quad t = \sqrt{\frac{\zeta - c^2}{\zeta - 1}} \quad (4.87)$$

它把上半个  $\zeta$  平面, 映照到  $t$  平面的第一象限, 如图 4.3 所示. 联立方程 (4.84), 我们得到

$$Z + jh_1 = \frac{h_2}{\pi} \left( \frac{1}{c} \ln \frac{t - c}{t + c} - \ln \frac{t - 1}{t + 1} \right) \quad (4.88)$$

这里选定常数  $jh_1$  是为了使  $Z$  平面与  $t$  平面上的  $C$  点有如图所示的映照关系.

把方程 (4.87) 代入方程 (4.85), 得

$$W = \frac{Uh_1}{\pi} \ln \frac{t^2 - c^2}{t^2 - 1} \quad (4.89)$$



对于第一象限给定的  $t$ , 可以由方程 (4.88) 求得  $Z$ , 再由方程 (4.89) 求得对应的  $W$ . 这样, 就求得了近场的解.

现在求  $A$  和  $B$  的邻域内的渐近近似. 令  $t$  从左边接近  $B$  点, 我们有

$$\begin{cases} Z + jh & \simeq \frac{h_2}{\pi} \left[ \frac{1}{c} \ln(t-c) - \frac{1}{c} \ln 2c - \ln \frac{c-1}{c+1} \right] \\ W & \simeq \frac{Uh_1}{\pi} \left[ \ln(t-c) + \ln \frac{2c}{c^2-1} \right] \end{cases}$$

消去  $\ln(t-c)$  后得到

$$W \simeq UZ + \frac{Uh_1}{\pi} \left[ j\pi + \ln 2c + c \ln \frac{c-1}{c+1} + \ln \frac{2c}{c^2-1} \right] \quad (4.90)$$

令  $t$  从右边接近  $A$  点, 我们有

$$\begin{cases} Z + jh_1 & \simeq \frac{h_2}{\pi} \left[ \frac{1}{c} \left( \ln \frac{c-1}{c+1} + j\pi \right) - \ln(t-1) + \ln 2 \right] \\ W & \simeq \frac{Uh_1}{\pi} [\ln(c^2-1) + j\pi - \ln 2 - \ln(t-1)] \end{cases}$$

消去  $\ln(t-1)$ , 得到

$$W \simeq \frac{Uh_1}{h_2} Z + \frac{Uh_1}{\pi} \left[ \ln(1-c^2) - 2 \ln 2 + j\pi - \frac{1}{c} \ln \frac{c-1}{c+1} \right] \quad (4.91)$$

现在可以令方程 (4.90) 与方程 (4.91) 的附加常数相减, 我们得到

$$2D = \frac{Uh_1}{\pi} \left[ \frac{c^2+1}{c} \ln \frac{c+1}{c-1} - 2 \ln \frac{4c}{c^2-1} \right] \quad (4.92)$$

这个结果由 Tuck(1976) 给出, 证实了上一节中对  $D$  所作的量级估计.

应当指出, 可以求得解析解的机会很少. 对于

$$h(x) = \begin{cases} -h_1, & x < 0 \\ x^2 - h_1, & x > 0 \end{cases}$$

的情形 (即抛物线分布), 已由 Rayleigh 在声波问题中解得.

## 习题

(4.3) 考虑在  $x < x_1$  区域内深度为  $h_1$  的陆架, 它与  $x > x_2$  区域内深度为  $h_2$  的大洋相连, 在过渡区  $x_1 < x < x_2$  内, 深度为  $h = ax^2$ , 其中  $h_1 = ax_1^2$ ,  $h_2 = ax_2^2$ , 而且  $(x_2 - x_1) \gg h_1, h_2$ . 有一列长周期波从大洋方面法向入射到大陆架. 试证散射系数为

$$\begin{cases} T &= \frac{ib}{\mu^{1/2}\Delta} \\ R &= i \sinh\left(\frac{b}{2} \ln \frac{1}{\mu}\right) \exp\left[-2i\left(\frac{\omega^2}{ga}\right)^{1/2}\right] / \Delta \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} b &= \left(1 - 4\frac{\omega^2}{ga}\right)^{1/2}, \quad \mu = x_1/x_2 \\ \Delta &= 2\left(\frac{\omega^2}{ga}\right)^{1/2} \sinh\left(\frac{b}{2} \ln \frac{1}{\mu}\right) + ib \cosh\left(\frac{b}{2} \ln \frac{1}{\mu}\right) \end{cases}$$

把结果画成图, 考察  $\omega^2/ga$  和  $\mu$  的效应 (Kajiura 1961).

### §4.3 等斜率海滩上的边缘波

现在, 考虑斜率不变的直的长海滩 (Eckart 1951), 把它作为深度连续变化的一种特殊情况. 取平均海岸线为  $y$  轴, 水在  $x > 0$  的区域内, 海底可以用下式描述

$$z = -h = -sx, \quad x > 0, \quad s = \text{const} \quad (4.93)$$

问题中的各系数与  $y$  和  $t$  无关, 我们可以尝试如下形式的解

$$\zeta = \eta(x)e^{i(\beta t - \omega t)} \quad (4.94)$$

因此, 根据方程 (4.9), 我们有

$$x\eta'' + \eta' + \left(\frac{\omega^2}{sg} - \beta^2 x\right)\eta = 0 \quad (4.95)$$

作变换

$$\xi = 2\beta x, \quad \eta = e^{-\xi/2} f(\xi) \quad (4.96)$$

方程 (4.95) 可以写成

$$\xi f'' + (1 - \xi)f' + \left[\frac{\omega^2}{2\beta sg} - \frac{1}{2}\right]f = 0 \quad (4.97)$$

这是合流超几何方程的一类, 称为 Kummer 方程. 一般地, 有两个齐次解, 其中一个在海岸线  $\xi = 0$  上有奇异性, 必须摒弃.  $\eta$  在  $\xi = 0$  处有限, 当  $\xi \rightarrow \infty$  时为零的非平凡解, 在如下条件下存在:

$$\frac{\omega^2}{2\beta sg} = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.98)$$

它对应于一个离散本征值谱. 本征函数正比于 Laguerre 多项式

$$f_n \propto \mathcal{L}_n(\xi) \quad (4.99)$$

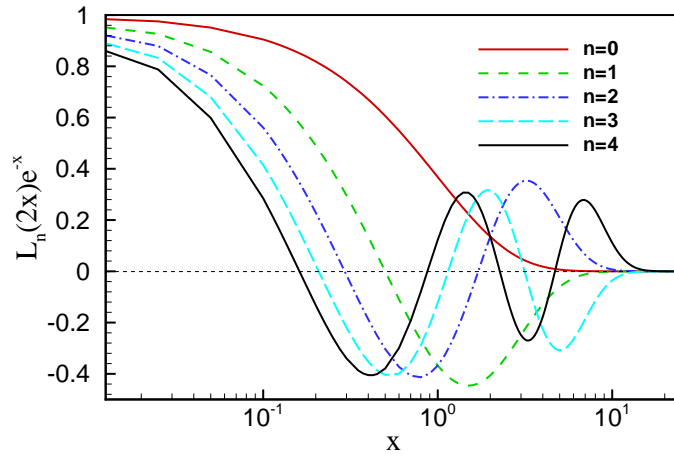


图 4.4: 边缘波的浅水波解对离岸距离的依赖关系

$$\begin{cases} \mathcal{L}_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \xi^n - \frac{n^2}{1!} \xi^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} \xi^{n-2} \right. \\ \left. - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!} \xi^{n-3} + \dots + (-1)^n n! \right] \end{cases} \quad (4.100)$$

例如:  $\mathcal{L}_0(\xi) = 1$ ,  $\mathcal{L}_1(\xi) = 1 - \xi$ ,  $\mathcal{L}_2 = 1 - 2\xi + \frac{1}{2}\xi^2$ . 头几个模式画在图 4.4 中. 可见, 较高的模式在离岸方向衰减得较快. 因为这些模式仅在近岸处有可观的振幅, 所以称为边缘波.

边缘波在沿岸海洋学中颇引人注意, 这是由于最大振幅, 最大浪峰出现在海岸上. 另外, 据信, 边缘波是近岸处离岸流的成因, 那时出现了较短的破碎; 这种离岸流挟带泥沙, 造成了海滩嘴. 在较大的海滩角, 类似的边缘波很早就被 Stokes 发现了 (Stokes 1947); Ursell(1952) 发现了完全的边缘波波谱, 其中包括离散谱和连续谱. 与量子力学中的现象作类比, 边缘波相当于约束态.

追究激发边缘波的原因大致有三种: 风, 次谐共振效应和长串短浪涌. 大尺度的边缘波 (典型波长 200 英里, 周期 6 小时, 振幅三英尺) 可由水面上的风应力激发. 特别是, Munk, Snodgrass 和 Carrier(1956), Greenspan(1958) 研究了平行于海岸行进的风暴中的压力偏差效应, 他们的结果与风暴潮有关联. 较小尺度的边缘波可以由次谐共振的非线性机制激发 (Guza & Bowen 1976; Minzoni & Whitham 1977), 我们以后再讨论. 周期为 1-5 分钟的中尺度边缘波, 可由一长串短浪涌群通过一种非线性机制激发.

## §4.4 基于有限元的数值方法

### §4.4.1 引言

沿海地区的地形一般是复杂的. 为了预示海水的响应, 需要有一种可处理任意几何位形和深度情形的方法. 有限元方法特别适合于满足这种需要, 因为利用不同大小和形状的有限元素来划分不规则区域, 比较简单易行. 在结构力学中, 有限元方法取得了巨大成功, 后来把这一方法作了修正, 用来处理各种各样的水波问题, 也收到了成效. 进一步的改进仍然是需要的, 但是, 对于海洋工程的大规模实际设计和规划的直接应用, 有限元方法的潜力已

经是显然的. 这里, 我们描述有限元方法在长波问题中的应用, 着重指出这种方法的基本要领.

用有限元方法解线性边值问题, 至少有两种不同的处理方法, 即变分表示法和 Galerkin 弱表示法. 变分表示法较为经典, 包括的步骤如下:

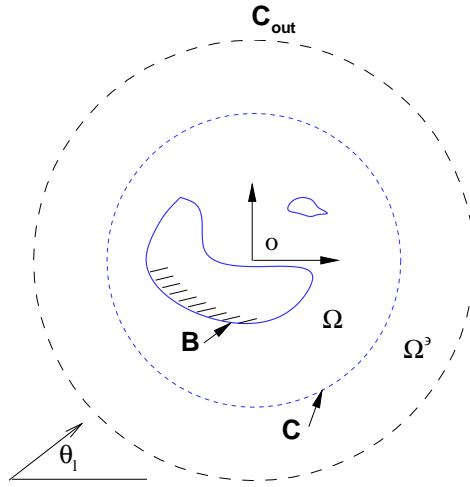
- 把边值问题表示成一个变分原理, 其中一个泛函是驻定的;
- 把求解区域离散化成有限个元素 (通常的三角形, 四边形等等);
- 选择近似表示有限个元素内的解的插值函数 (线性插值, 二次插值等等), 插值函数内含有未知系数;
- 对每个元素, 进行必要的微分和积分, 把泛函表示成未知系数的双线性形式;
- 把各元素的双线性形式汇集起来, 从而使整个泛函表示成一个总体的双线性形式;
- 对每个未知系数取泛函的极值, 得到一个这些系数的线性代数方程组;
- 解这个方程组, 求出这些系数;
- 计算物理上感兴趣的量.

变分原理并不总是很容易导出的, 也不是所有物理问题都存在的. 一种较为一般和简捷的方法, 是所谓的 Galerkin 弱表示法. 以后, 在讨论有铅垂变化的二维和三维问题中加以讨论和应用. 对我们感兴趣的问题来说, 可以证明, 变分表示法与弱表示法等价. 这两种表示法中, 涉及的导数的阶数都比原来的微分方程中出现的导数阶数低, 因此, 可以采用可微次数较低的插值函数类 (因而较为一般的函数类).

一般的结构力学问题涉及有限范围的区域 (例如, 板, 壳, 机器部件, 飞机机身等); 而流体力学问题的区域经常是理论上为无穷大的区域. 当然, 可以设法采用一个大而有限的边界, 把无穷远处的边界条件加在该边界上; 在这个有限的区域内, 完成了数值求解过程之后, 引进一个新的更远的边界, 重复进行计算; 这个过程可以继续下去, 直到区域的进一步扩张对解只产生可以忽略的修正为止. 对于波动问题来说, 为了达到一定的精确度, 外边界至少离开物体几个波长的距离, 而为了有较好的分辨率, 每个波长内, 应该有充分多的格点. 因此, 如果要研究的波长范围很大, 那么, 必须对每个窄范围的波长采用各不相同的网格, 或者取最大的波长所要求的单个的大区域, 按最短的波所要求的分成很细的网格. 显然, 这两种做法都是不经济的.

Berkhoff(1972) 在研究波被海岛的绕射 (其中除海岛的邻近外水深不变) 时, 把流体用一个圆周分成两个区域, 该圆周包围海岛, 但处在常深度区内; 仅仅把圆周区域分割成有限个元素, 圆外区域的解用沿圆周连续分布的源表示. 源解是解析的, 精确地满足控制方程和无穷远处的边界条件. 不过, 沿圆周的源强是未知的, 必须通过要求圆周上压力和法向速度连续, 与圆内问题一起解出. 于是, 在不同区域内, 采用不同类型的插值函数, 因此, 这种方法可以称为杂交元法 (hybrid element method, HEM). 按照 Tong, Pian & Lasry(1973) 的说法, 有解析的插值函数的元素可称为超元素 (superelement).

在有限元与超元素之间加上压力和法向速度的连续性条件方面, 有相当大的自由度. 一种最佳选择是把匹配条件安排成变分原理中的自然边界条件. 这样, 在数值计算的过程中,

图 4.5: 内区  $\Omega$  和外区  $\Omega'$  的圆形交界  $C$ .

它们自动地满足. 这种变分处理, 已经成功地用于二维散射和辐射问题 (Chen & Mei 1974; Bai & Yeung, 1974). 二维船波问题 (Mei & Chen, 1976), 三维散射问题 (Yue, Chen & Mei, 1976, 1977) 以及有关流体与结构的相互作用问题 (Mei, Foda & Tong, 1979). 下边, 介绍 Chen & Mei 的处理方法.

#### §4.4.2 变分原理

假定复杂的地形 (如大型结构, 弯曲的海岸线, 变化的深度) 局限在一封闭的周线  $C$  (常取作圆周) 内, 如图 4.5 所示.  $C$  之外深度处处不变, 流体区域记作  $\Omega'$ ;  $C$  之内的流体区域记作  $\Omega$ . 入射波沿着  $\theta_I$  方向:

$$\begin{cases} \eta^I &= A e^{i k r \cos(\theta - \theta_I)} \\ &= A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (i)^n J_n(kr) \cos n(\theta - \theta_I) \end{cases} \quad (4.101)$$

在  $\Omega'$  内, 散射波  $\eta^{s'}$  必须满足 Helmholtz 方程和辐射条件, 可以用 Fourier-Bessel 展开, 精确地表示成

$$\eta^{s'} = \alpha_0 H_0^{(1)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(kr) (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \quad (4.102)$$

展开系数  $\alpha_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $\beta_n (n = 1, 2, \dots)$  待定.  $\Omega'$  内总的位移记成  $\eta' (= \eta^I + \eta^{s'})$ . 区域  $\Omega'$  为超元素.

$\Omega$  内对应的位移为  $\eta$ . 横越  $C$  时, 压力和法向速度必须连续.

$$\eta = \eta', \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial \eta'}{\partial r}, \quad (\text{在 } C \text{ 上}) \quad (4.103)$$

现在, 需要证明, 如下泛函的极值问题:

$$\begin{cases} J(\eta, \eta') = \int \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ h(\nabla\eta)^2 - \frac{\omega^2}{g}\eta^2 \right] dA \\ \quad + \int_C h \left[ \left( \frac{1}{2}\eta'^s - \eta^s \right) \frac{\partial\eta'}{\partial r} - \frac{1}{2}\eta'^s \frac{\partial\eta^I}{\partial r} \right] ds \end{cases} \quad (4.104)$$

等价于确定  $Q$  内的  $\eta$  和  $\Omega'$  内的  $\eta'^s$  的边值问题 (上式中  $\eta^s \equiv \eta - \eta^I$ ). 为了证明这个等价性, 取  $J$  的一次变分

$$\begin{cases} \delta J = \int \int_{\Omega} \left[ h\nabla\eta \cdot \nabla\delta\eta - \frac{\omega^2}{g}\eta\delta\eta \right] dA \\ \quad + \int_C h \left[ \left( \frac{1}{2}\delta\eta'^s - \delta\eta^s \right) \frac{\partial\eta'}{\partial r} + \left( \frac{1}{2}\eta' - \eta^s \right) \frac{\partial\delta\eta'}{\partial r} - \frac{1}{2}\delta\eta' \frac{\partial\eta^I}{\partial r} \right] ds \end{cases}$$

通过分部积分, 应用 Gauss 定理, 上式右端第一项可以写成

$$\begin{cases} \int \int_{\Omega} h\nabla\eta \cdot \nabla\delta\eta dA = \int \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\delta\eta h\nabla\eta) - \delta\eta \nabla \cdot (h\nabla\eta)] dA \\ = - \int \int_{\Omega} \delta\eta \nabla \cdot (h\nabla\eta) dA + \int_C h\delta\eta \frac{\partial\eta}{\partial r} ds + \int_B h\delta\eta \frac{\partial\eta}{\partial n} ds \end{cases}$$

由于  $\eta^I$  已知,  $\delta\eta^I = 0$ , 而且

$$\delta\eta'^s = \delta\eta', \quad \delta\eta^s = \delta\eta$$

因此, 我们得到

$$\begin{cases} \delta J = - \int \int_{\Omega} \delta\eta \left[ \nabla \cdot (h\nabla\eta) + \frac{\omega^2}{g}\eta \right] dA + \int_C h \left[ \left( \frac{1}{2}\delta\eta' - \delta\eta \right) \frac{\partial\eta'}{\partial r} \right. \\ \quad \left. + \left( \frac{1}{2}\eta'^s - \eta^s \right) \frac{\partial\delta\eta}{\partial r} - \frac{1}{2}\delta\eta' \frac{\partial\eta^I}{\partial r} + \delta\eta \frac{\partial\eta}{\partial r} \right] + \int_B \delta\eta h \frac{\partial\eta}{\partial n} ds \\ = - \int \int_{\Omega} \delta\eta \left[ \nabla \cdot (h\nabla\eta) + \frac{\omega^2}{g}\eta \right] dA + \int_C h \left[ \delta\eta \left( \frac{\partial\eta}{\partial r} - \frac{\partial\eta'}{\partial r} \right) - \frac{\partial\delta\eta'}{\partial r} (\eta^s - \eta'^s) \right] ds \\ \quad + \frac{1}{2} \int_C h \left[ \delta\eta' \frac{\partial\eta'^s}{\partial r} - \eta'^s \frac{\partial\delta\eta'}{\partial r} \right] ds + \int_B h\delta\eta \frac{\partial\eta}{\partial n} ds \end{cases} \quad (4.105)$$

第三个积分等于

$$I(C) = \frac{h}{2} \int_C \left[ \delta\eta'^s \frac{\partial\eta'^s}{\partial r} - \eta'^s \frac{\partial\delta\eta'^s}{\partial r} \right] ds$$

把 Green 公式应用于  $\Omega'$  区域内的  $\eta'^s$  和  $\delta\eta'^s$ , 应用  $\eta'^s$  和  $\eta'^s$  都精确地满足 Helmholtz 方程这一事实, 可知如果把  $C$  换成大半径的圆  $C_{out}$ , 上述积分的值不变. 沿着  $C_{out}$ ,  $\eta'^s$  和  $\delta\eta'^s$  都满足辐射条件 (4.42), 因此  $I(C_{out}) = 0$ , 意味着

$$I(C) = 0$$

再看方程 (4.105), 如果方程 (4.9), (4.13) 和 (4.103) 得到满足, 则

$$\delta J = 0 \quad (4.106)$$

反过来, 如果  $\delta J = 0$ , 则  $\eta$  在  $\Omega$  内必须满足方程 (4.9), 在  $B$  上必须满足方程 (4.13), 在  $C$  上必须满足方程 (4.103). 到此, 上述等价性得到论证. 驻定泛函涉及  $\Omega$  内和  $\Omega$  的边界上的积分; 现在可以用它作为求得  $\Omega$  内近似解的基础, 有限元方法原则上只是这样求解的一种可能途径.

## §4.4.3 有限元近似

现在, 我们通过把  $\Omega$  内的水面分成有限个元素, 对方程 (4.104) 中的积分进行离散化. 元素的尺度应远小于典型波长和当地地形变化的尺度. 可以采用多种形状的有限元素: 三角形, 四边形等等, 每个元素可以有等于或多于该元素顶点的结点. 因为, 方程 (4.104) 的被积函数中只含  $\eta$  的一阶导数, 因此, 只要求在有限元素区域内  $\eta$  的连续性. 尽管一般较高阶的插值函数可保证相邻元素间有较高的光滑程度, 每个元素可含较多的未知系数且在同样的有限元素数目下, 解达到较高的精确度. 我们这里只运用最简单的三结点三角元素, 每个元素内,  $\eta$  近似地取为线性插值函数

$$\eta^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e \eta_i^e = \{N^e\}_{1 \times 3}^T \{\eta^e\}_{3 \times 1} \quad (4.107)$$

其中  $\{ \}$  表示列矢量, 上标  $T$  表示转置, 因此  $\{ \}^T$  表示行矢量; 显然

$$\begin{cases} \{\eta^e\}^T &= (\eta_1^e, \eta_2^e, \eta_3^e) \\ \{N^e\}^T &= (N_1^e, N_2^e, N_3^e) \end{cases} \quad (4.108)$$

而且

$$\begin{cases} N_i^e &= (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta^e, \quad (i = 1, 2, 3) \\ a_1 &= x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e, \quad b_1 = y_2^e - y_3^e, \quad c_1 = x_3^e - x_2^e \\ \Delta^e &= \text{元素 } e \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} \end{cases} \quad (4.109)$$

其它系数  $a_2, a_3, b_2, b_3,$  和  $c_2, c_3$  可以由下标置换得到.  $x_i, y_i$  和  $\eta_i^e$  分别代表在结点  $i$  处的  $x, y$  坐标和  $\eta^e$  的值. 如果在一个波长内底部深度变化不大, 而波长又比元素的尺度大几倍, 那么在元素内取深度为  $h$  的局部平均值  $h^e$  是合理的. 如果深度变化不大, 则可以象式 (4.107) 那样线性插值地得到  $h^e(x, y)$ . 求方程 (

refa-411) 中的面积分, 我们得到

$$\begin{cases} I_1 &= \int \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ h(\nabla \eta)^2 - \frac{\omega^2}{g} \eta^2 \right] dA \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \Omega} \{\eta^e\}_{1 \times 3}^T [K_1^e]_{3 \times 3} \{\eta^e\}_{3 \times 1} \end{cases} \quad (4.110)$$

其中当元素  $e$  上  $h^e = \text{const}$  时, 元素刚度矩阵  $[K_1^e]$  的分量是

$$[K_1^e]_{i,j} = h^e \int \int_e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_\alpha} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_\alpha} dx dy - \frac{\omega^2}{g} \int \int_e N_i^e N_j^e dx dy \quad (4.111)$$

当  $h^e(x, y)$  在每个元素  $e$  上取如下的线性插值时:

$$h^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e h_i^e = \{N^e\}_{1 \times 3}^T \{h^e\}_{3 \times 1} \quad (4.112)$$

(其中  $h_i^e$  为结点  $i$  处的水深), 我们得到

$$[K_1^e]_{i,j} = h_\beta^e \int \int_e N_\beta^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_\alpha} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_\alpha} dx dy - \frac{\omega^2}{g} \int \int_e N_i^e N_j^e dx dy \quad (4.113)$$

把方程 (4.109) 代入方程 (4.111) 和 (4.113), 在任一三角形元素  $e$  上的积分可以计算出来:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \int_e N_i^e N_j^e dx dy = \begin{cases} \frac{1}{6} \Delta^e, & (i = j) \\ \frac{1}{12} \Delta^e & (i \neq j) \end{cases} \\ \int \int_e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_\alpha} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_\alpha} dx dy = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i b_j + c_i c_j) \\ h_\beta^e \int \int_e N_\beta^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_\alpha} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_\alpha} dx dy = h_\beta^e \frac{1}{12\Delta^e} (b_i b_j + c_i c_j) \end{array} \right. \quad (4.114)$$

元素刚度矩阵  $K_1^e$  是对称矩阵. 现在把所有的元素结点位移收集起来, 定义一个有  $E$  个分量的总体位移矢量  $\{\eta\}$ , 这里  $E$  是  $Q$  内和  $Q$  的边界上的结点的总数. 在这样做时, 必须把元素结点重复编号, 已计及同一结点可能属于若干相邻的元素这一事实. 这时必须把元素刚度矩阵也汇总, 结果给出一个总体刚度矩阵  $[K_1]$ . 由于所有元素的  $K_1^e$  是对称矩阵,  $[K_1]$  也是对称矩阵. 最后,  $I_1$  写成

$$I_1 = \frac{1}{2} \{\eta\}_{1 \times E}^T [K_1] \{\eta\}_{E \times 1} \quad (4.115)$$

方程 (4.104) 中的线积分可写成

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_C h \left[ \left( \frac{1}{2} \eta'^s - \eta^s \right) \frac{\partial \eta^I}{\partial r} - \frac{1}{2} \eta'^s \frac{\partial \eta^I}{\partial r} \right] ds \\ = \int_C h \frac{1}{2} \eta'^s \frac{\partial \eta'^s}{\partial n} ds - \int_C h (\eta - \eta^I) \frac{\partial \eta'^s}{\partial n} ds \\ \quad - \int_C h (\eta - \eta^I) \frac{\partial \eta^I}{\partial n} ds \\ = \frac{1}{2} \int_C h \eta'^s \frac{\partial \eta'^s}{\partial n} ds \cdots I_2 \\ \quad - \int_C h \eta \frac{\partial \eta'^s}{\partial n} ds \cdots I_3 \\ \quad - \int_C h \eta \frac{\partial \eta^I}{\partial n} ds \cdots I_4 \\ \quad + \int_C h \eta^I \frac{\partial \eta'^s}{\partial n} ds \cdots I_5 \\ \quad + \int_C h \eta^I \frac{\partial \eta^I}{\partial n} ds \cdots I_6 \end{array} \right. \quad (4.116)$$

为简单起见, 假定  $C$  是半径为  $R$  的圆周. 把方程 (4.102) 代入方程 (4.116), 我们可以解析地求得线积分  $I_2$

$$I_2 = \frac{\pi}{2} k R h \left\{ 2\alpha_0^2 H_0 H_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) H_n H_n' \right\}$$

其中

$$H_n = H_n^{(1)}(kR), \quad H_n' = \left[ \frac{d}{d(kr)} H_n^{(1)}(kr) \right]_{r=R}$$

注意, 我们已经假定  $C$  上和  $C$  外  $h$  为常数. 为了进行数值计算, 我们把级数 (4.101) 和 (4.102) 在第  $m$  项截断, 因此,  $I_2$  中的级数也取  $m$  项. 定义列矢量  $\{\mu\}_{1 \times M}$  使得

$$\{\mu\}_{1 \times M}^T = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_m, \beta_m\}$$



其中  $M = 1 + 2m$ , 并定义对角矩阵

$$[K_2]_{M \times M} = (\pi k R h) \text{diag}\{2H'_0 H_0, H'_1 H_1, H'_1 H_1, \dots, H'_m H_m, H'_m H_m\}$$

积分  $I_2$  可写成

$$I_2 = \frac{1}{2} \{\mu\}_{1 \times M}^T [K_2]_{M \times M} \{\mu\}_{M \times 1} \quad (4.117)$$

为了计算积分  $I_3$  和  $I_4$ , 定义  $\eta$  在  $C$  上的子集  $\{\hat{\eta}\}$

$$\{\hat{\eta}\}_{1 \times P}^T = \{\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_P\}$$

把  $C$  上的积分, 近似地取作沿着直线段  $\hat{\eta}_P \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_{P-1} \hat{\eta}_P$  的积分,  $\eta$  取线性插值,  $\eta^s$  取每一线段  $j$  的中点  $\theta = \theta_j$  上的值. 令第  $j$  个线段的长度为  $L_j$ ,  $\hat{\eta}_0 = \hat{\eta}_P$ , 容易得到

$$\left\{ \begin{array}{l} I_3 \simeq -\frac{1}{2}(kh) \sum_{j=1}^P L_j (\hat{\eta}_{j-1} + \hat{\eta}_j) \\ \cdot \left[ \alpha_0 H'_0 + \sum_{n=1}^m H'_n (\alpha_n \cos n\theta_j + \beta_n \sin n\theta_j) \right] \end{array} \right.$$

它可以写成矩阵形式

$$I_3 = \{\hat{\eta}\}_{1 \times P}^T [K_3] \{\mu\}_{M \times 1} \quad (4.118)$$

其中  $K_3$  是  $P \times M$  矩阵

$$\left\{ [K_3] = -\frac{1}{2}(kh) \begin{pmatrix} 2H'_0 L_1, \dots & H'_n (\cos n\theta_P + \cos n\theta_1) L_1, & H'_n (\sin n\theta_P + \sin n\theta_1) L_1, \dots \\ 2H'_0 L_2, \dots & H'_n (\cos n\theta_1 + \cos n\theta_2) L_2, & H'_n (\sin n\theta_1 + \sin n\theta_2) L_2, \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2H'_0 L_P, \dots & H'_n (\cos n\theta_{P-1} + \cos n\theta_P) L_P, & H'_n (\sin n\theta_{P-1} + \sin n\theta_P) L_P, \dots \end{pmatrix} \right. \quad (4.119)$$

其中  $n = 1, 2, \dots, m$ . 注意, 类似地, 我们可以求得积分  $I_4$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_4 = -\frac{1}{2}(kh) \sum_{j=1}^P L_j (\hat{\eta}_{j-1} + \hat{\eta}_j) \\ \cdot [i \cos(\theta - \theta_I)] \exp[ikR \cos(\theta_j - \theta_I)] \\ = -\{Q_4\}_{1 \times P}^T \{\hat{\eta}\}_{P \times 1} \end{array} \right. \quad (4.120)$$

其中,

$$\begin{aligned} \{Q_4\}^T &= \frac{1}{2} kh \{(q_P + q_1) L_1, (q_1 + q_2) L_2, \dots, (q_{P-1} + q_P) L_P\}, \\ q_j &= i \cos(\theta_j - \theta_I) \exp[ikR \cos(\theta_j - \theta_I)], \quad (j = 1, 2, \dots, P) \end{aligned}$$

积分  $I_5$  可以解析地计算出来

$$I_5 = -\{Q_5\}_{1 \times M} \{\mu\}_{M \times 1} \quad (4.121)$$

其中

$$\{Q_5\}_{1 \times M}^T = 2\pi R k h \{J_0 H'_0, \dots, i^m J_m H'_m \cos m\theta_l, i^m J_m H'_m \sin m\theta_l\}$$

$I_6$  是一个已知常数, 取极值时不起作用, 因此不必算出.

综上所述, 得到泛函

$$\begin{cases} J = \frac{1}{2}\{\eta\}^T[K_1]\{\eta\} + \frac{1}{2}\{\mu\}^T[K_2]\{\mu\} + \{\hat{\eta}\}^T[K_3]\{\mu\} \\ - \{Q_4\}^T\{\hat{\eta}\} - \{Q_5\}^T\{\mu\} \end{cases} \quad (4.122)$$

由于  $J$  是驻定的, 故要求

$$\frac{\partial J}{\partial \eta_j} = 0, (j = 1, 2, \dots, E), \quad \frac{\partial J}{\partial \mu_j} = 0 (j = 1, 2, \dots, M)$$

由此导得一个线性代数方程组

$$\begin{cases} [K_1]\{\eta\} + [K_3]\{\mu\} = \{Q_4\} \\ [K_2]\{\mu\} + [K_3]^T\{\hat{\eta}\} = \{Q_5\} \end{cases} \quad (4.123)$$

现在引进总体未知矢量  $\{\psi\}$  和总体装入矢量  $\{Q\}$ :

$$\{\psi\} = \begin{pmatrix} \{\eta\} \\ \{\mu\} \end{pmatrix}, \quad \{Q\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \{Q_4\} \\ \{Q_5\} \end{pmatrix}$$

其中

$$\{\eta\} = \begin{pmatrix} \{\eta\} \\ \{\hat{\eta}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{不在 } C \text{ 上的结点} \\ \text{在 } C \text{ 上的结点} \end{pmatrix}$$

进而定义总体刚度矩阵

$$[K]_{N \times N} = \begin{bmatrix} [K_1] & [0] \\ [0] & [K_3]_{M \times P} \\ [0] & [K_3]_{M \times P}^T & [K_2]_{M \times M} \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

其中  $N = E + M$ , 于是方程 (4.123) 可以进一步归并成

$$[K]\{\psi\} = \{Q\} \quad (4.125)$$

这是一个要在计算机上求解的  $\{\psi\}$  的矩阵方程.  $[K_1]$  是实矩阵,  $[K_2]$ ,  $[K_3]$  和  $Q$  则是复矩阵, 因此  $\{\psi\}$  是复矢量. 注意, 总体刚度矩阵  $[K]$  是对称矩阵, 这意味着只需要把它的元素的一半储存到计算机中.

经过直观推断和数值实验 (其中有几种情况与解析解作了对比), 对选择有限元素的大小方面找到了如下的经验法则:

- 元素的大小应处处小于波长的 10%.
- 在大曲率边界曲线的邻域内, 元素应远小于曲率半径, 否则会产生局部的而不是总体的误差. 在任何具体的计算中, 超元素所需要的数目  $M$  是容易决定的,  $M$  通常随波的变短而增加.



## 参考文献

- [1] Bartholomeuz, E.F.(1958). The reflection of long waves at a step. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **54**: 106-118.
- [2] Milne-Thomson, M.N.(1967). *Theoretical Hydrodynamics*, 5th ed., Mac-Millan, New York.
- [3] Chen, H.S. & C.C. Mei(1974). Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea. *Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn.* Office of Naval Research, 573-594.
- [4] Mei, C.C., A. Foda, & P. Tong(1979). Exact and hybrid-element solutions for the vibration of a thin elastic structure seated on the sea bottom. *Appl. Ocean Res.* **1**: 79-88.



## 第五章 由长波入射诱发的港湾振动

### §5.1 引言

港湾是通过一个或几个开口与大海相连的部分封闭水域。海湾一般沿海岸构建，其中的受屏障区域有的由天然的曲折岸形成，有的由从海岸突向海面的防波堤构成，有的则两者兼而有之，如图 5.1 所示。

虽然存在可以诱发港湾内显著振动的形形色色的机制，但研究得最多的影响着许多港湾的是地震律波引起的港湾振动。地震律波的典型周期是几分钟到一个小时，它由遥远的地震产生。如果地震律波的总持续时间充分长，则在港湾内诱发的振动可能持续数天，结果使船舶的缆绳断掉，护舷材损坏，停泊或装卸时失事，入港导航时遇险等等。有时来船必须逗留在港湾之外，直到振动平息下来为止，从而要为停泊延期付出昂贵的代价。

港湾振动与声学电学和光学的共振腔中的振动相似，如果外来波浪的频率与港湾的固有频率一致，就会发生共振；但由于港湾地形一般比较复杂，研究起来比较困难，有人通过模型试验和数值模拟计算进行分析，但是费时费钱。若能通过简单模型给出解析理论，把握港湾共振的主要特征，则是很有意义的。本章着重叙述这方面的内容。

为了了解物理机制的梗概，我们考虑入港口在长的直海岸线上的港湾。向岸的波部分被海岸反射，部分被海岸吸收，但有一小部分绕射过入港口进入港湾，反复地被内边界反射。这种反射波的能量有些可能逸出港湾，再次辐射到海洋中，而有些则逗留在港湾内。如果入射波列持续时间很长，而入射波的频率接近于封闭港池的驻波频率，则港池内会出现共振，因此，较弱的入射波可能在港湾内诱发起大的响应，这也是外海海面看来较为平静而港湾内却有轩然大波的原因。

共振时的振幅峰值受下列一些机制的限制：

- 辐射阻尼，伴随着能量从入海口逸向海洋而产生；
- 港池边界附近和入港口附近的摩擦损失；
- 由浅海滩上波的破碎产生的损失；
- 能量转移到高次谐波的有限振幅效应。

在这些机制中，辐射阻尼为人们在理论上了解的最多，最先有 Miles 和 Munk(1961) 在一篇开创性的文章中处理过，所研究的是矩形港湾。摩擦损失出现在港口边界上和港口的防波堤尖端附近，一般难于估算，而且随着边界性质的不同而有种种变化；要进行可靠的估算必须有实验数据，而且由于有尺度效应，这种数据难于由模型试验得到。波的破碎是一种多数伴随着缓和的海滩上的风生波的现象，现阶段从理论上还处理不了，幸而，对于很长的地震律波来说，破碎现象通常无关紧要。

本章中，我们不谈摩擦损失和破碎损失，仅谈及辐射阻尼的作用。叙述了问题的提法之后，分别讨论港湾振动问题的三要素：港池中的驻波；辐射阻尼的概念；通过狭缝的绕射。然后，对于正弦波入射常深度的有各种简单的平面形状港湾的情形，研究海洋-港湾耦合的完整问题；接着对狭湾情形讨论瞬变波问题。最后，把叙述过的一般的杂交元方法加以修正，讨论有任意深度分布和形状的港湾内的振动。

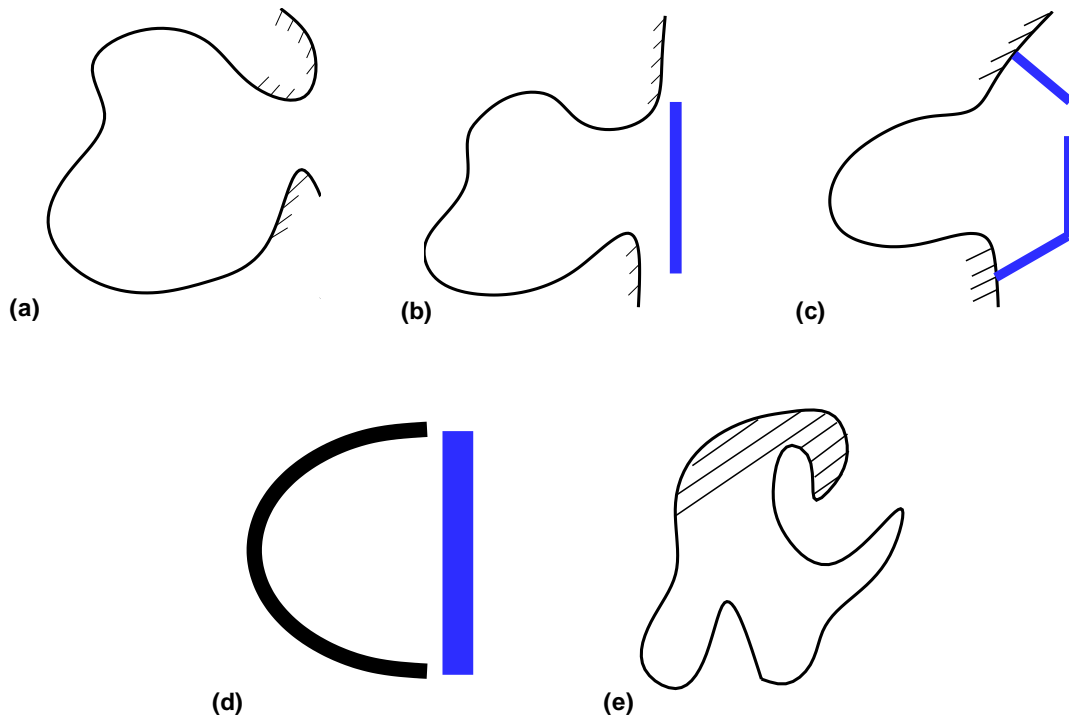


图 5.1: 各种港湾位形. (a) 天然入港口; (b) 有离岸的防波堤的入港口; (c) 有突出的防波堤的入港口; (d) 人造离岸港湾; (e) 在离岸岛屿上的港湾.

### §5.2 港湾振动问题的提法

为了简单起见, 对流体运动作如下假定: (i) 无粘流体; (ii) 无旋流体; (iii) 无穷小波幅; (iv) 波长远大于深度; (v) 侧向边界是全反射的, 且处处垂直于海平面. 对于瞬变波来说, 位移满足场方程

$$g\nabla \cdot (h\nabla\zeta) = \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

以及侧壁上无流量条件

$$h\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0 \quad (5.2)$$

对于简谐运动来说, 自由面位移的空间振幅  $\eta$  满足场方程

$$\nabla \cdot (h\nabla\eta) + \frac{\omega^2}{g}\eta = 0 \quad (5.3)$$

以及侧壁上的无流量条件

$$h\frac{\partial\eta}{\partial n} = 0 \quad (5.4)$$

对于常深度情形, 方程 (5.1) 化为经典的波动方程, 而式 (5.3) 化为 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\eta + k^2\eta = 0 \quad (5.5)$$

其中  $k^2 = \omega^2/gh$ .

如果远离港湾处的地形是简单的, 则正弦运动情形的辐射条件可以显式写出. 考虑在全反射海岸线上的港湾, 令  $\Omega$  表示包括港湾及其附近全部复杂地形的区域,  $\bar{\Omega}$  表示海洋的其余部分, 其中  $h = \text{const}$ , 海岸线  $\bar{B}$  为直线 (图 5.2), 入射平面波可表示成

$$\eta^I = A \exp[ik(x \cos \theta_I + y \sin \theta_I)] \quad (5.6)$$

其中  $A$ ,  $k$  和入射方向  $\theta_I$  已知. 在海洋  $\bar{\Omega}$  中的整个波系可分成

$$\eta = \eta^I + \eta^{I'} + \eta^S \quad (5.7)$$

其中,  $\eta^{I'}$  表示没有海港附近局部地形时直海岸产生的反射波, 而  $\eta^S$  表示由上述局部地形散射的和由入港口处活塞作用 (即水出入港口) 所辐射的波. 取  $y$  轴重合于海岸的直线部分  $\bar{B}$ ; 反射波为

$$\eta^{I'} = A \exp[ik(-x \cos \theta_I + y \sin \theta_I)] \quad (5.8)$$

因此, 在  $x = 0$  线 (它包含  $\bar{B}$ ) 上

$$\frac{\partial}{\partial x}(\eta^I + \eta^{I'}) = 0 \quad (5.9)$$

于是, 沿着直海岸线, 辐射 - 散射波不可能有法向通量

$$\frac{\partial}{\partial x}\eta^S = 0, \bar{B} \text{ 上} \quad (5.10)$$

而且在远处必须是外行波, 以即满足

$$\sqrt{kr} \left( \frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \rightarrow 0, \quad kr \rightarrow \infty \quad (5.11)$$



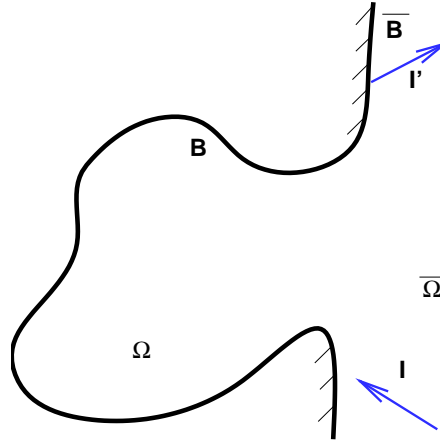


图 5.2: 全反射海岸线上的港湾.

对于(岛和群岛上的)离开大陆的港湾,当与海岸的距离为波长的许多倍时,可以把式(5.7)中的 $\eta^I$ 略去.对于其它海岸位形或 $\bar{\Omega}$ 中非不变深度的情形, $\eta^I$ 和 $\eta^{I'}$ 的显式描述可能十分困难.

注意,当在 $\Omega$ 和 $\bar{\Omega}$ 中的水深处为常数时,在界壁全为铅垂的情况下,对于任意的 $kh$ ,三维速度势可写成

$$\phi(x, y, z) = -\frac{ig\eta}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (5.12)$$

$\eta$ 也满足水平的Helmholtz方程,只是 $\omega$ 和 $k$ 的关系为 $\omega^2 = gk \tanh kh$ .因为所有的界壁都是铅垂的,所以其法矢量在水平面上,侧壁上的边界条件为 $\partial\eta/\partial n = 0$ .因此,长波和短波的边值问题形式上相同.这种数学上的类似使我们可以深水中进行港湾实验,从而比较容易地避免非线性效应.

### §5.3 简单形状常深度封闭港池中的固有模式

在讨论港湾之前,最好先研究一下封闭港池中驻波的典型特性.为了简单起见,我们假定水深为常数.现在 $\eta$ 可取为实函数, $\eta$ 的边值问题为齐次方程(5.5)和齐次边界条件(5.4),仅当 $k$ 等于某些本征值时有非凡解;相应的 $\omega$ 称作固有频率(或本征频率);相应的 $\eta$ 称作固有模式(或本征模式).下面我们讨论两个简单的例子.

#### §5.3.1 矩形港池

设港池的侧边界为 $x = 0, a; y = 0, b$ .由分离变量法得到方程(5.5)的解为

$$\eta = A \cos \alpha x \cos \beta y \quad (5.13)$$

其中

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2 \quad (5.14)$$

现在, 边界条件 (5.4) 式为

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0(x=0, a), \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0(y=0, b) \quad (5.15)$$

从而要求

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta = \frac{m\pi}{b} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.16)$$

本征值为

$$k = k_{nm} = \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.17)$$

而本征解 (固有模式) 可由两个指标  $(n, m)$  确定为

$$\eta_{nm} = A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (5.18)$$

固有周期一般为

$$T_{nm} = 2\pi/\omega_{nm} \quad (5.19)$$

其中  $\omega_{nm}$  与  $k_{nm}$  通过如下的色散关系相联系

$$\omega_{nm}^2 = ghk_{nm}^2 \quad (5.20)$$

若  $a > b$ , 则最低模式  $(n=1, m=0)$  具有最低频率和最长周期, 且被称为基模 (主模式). 相应的运动是一维的.

如果矩形的两边之比是一有理数, 即  $a = pL, b = qL$  ( $p, q$  为整数), 则

$$k_{nm} = \left[ \left( \frac{n}{p} \right)^2 + \left( \frac{m}{q} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\pi}{L} \quad (5.21)$$

这时, 对任何两个模式  $(n_1, m_1), (n_2, m_2)$ , 只要

$$\frac{n_1}{m_2} = \frac{n_2}{m_1} = \frac{p}{q} \quad (5.22)$$

就有相同的本征值, 这种情形称作模式的退化.

现在, 我们来说明模式  $(n, m) = (1, 1)$  的空间结构, 这时有

$$\eta_{11} = A_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \quad (5.23)$$

在边界  $x=0, a$  和  $y=0, b$  上, 振幅达极大值; 而沿直线  $x=a/2$  或  $y=b/2$  振幅为零, 这两条线称为波节线, 它们把港池分成四个小矩形, 在每一给定瞬时, 两相邻小矩形水面位移方向相反, 如果有两个区域水面在平均水平面之上, 则另外两个区域水面在平均水面之下. 图 5.3 中画出了水面的等高线.

对于较高的模式  $(n, m)$ , 有沿着  $x = \frac{pi}{2}a, \frac{3pi}{2}a, \dots, (n - \frac{1}{2})\pi a$  的  $n$  条波节线和沿着  $y = \frac{pi}{2}b, \frac{3pi}{2}b, \dots, (m - 1/2)\pi b$  的  $m$  条波节线, 自由面被这些节线划分成  $(n+1) \times (m+1)$  个小矩形.

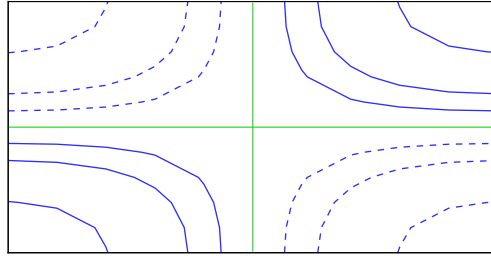


图 5.3: 矩形港池中固有模式 (1,1) 的自由面等高线.

### §5.3.2 圆形港池

设港池的半径为  $a$ ; 可选用极坐标  $(r, \theta)$ , 坐标原点在圆心. 控制方程 Helmholtz 方程可写成

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + k^2 \eta = 0$$

在侧壁 ( $r = a$ ) 上, 径向速度 (即法向速度) 为零

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 \quad (r = a) \quad (5.24)$$

用分离变量法的 Helmholtz 方程的解为

$$\eta = J_m(kr)(A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \quad (5.25)$$

其中  $A_m, B_m$  为任意常数. 为了满足边界条件 (5.24), 必须令

$$J'_m(kr)|_{r=a} = J'_m(ka) = 0 \quad (5.26)$$

由于  $J_m(Z)$  是有无限多个零点的振荡函数, 把  $J'_m$  的第  $n$  个零点记作  $j'_{mn} : J'_m(j'_{mn}) = 0$ , 我们得到相应的本征值

$$k_{mn} = j'_{mn}/a, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.27)$$

相应的本征解 (固有模式) 为

$$\eta_{mn} = J_m(k_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) \quad (5.28)$$

为了举例说明特定模式的结构, 对固定的  $n, m$ , 考虑自由面的变化

$$\eta_{mn} = J_m(k_{mn}r) \cos m\theta$$

显然, 当  $m\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2(m-1)\pi$  时,  $\cos m\theta = 1$ ; 当  $m\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2m-1)\pi$  时,  $\cos m\theta = -1$ ; 于是,  $\theta = 0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \dots, \frac{2m-1}{m}\pi$  是波腹线, 在那里, 沿一定  $r$  的圆周上, 自由面位移最大. 另一方面,

$$\theta = \frac{\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m}, \frac{5\pi}{2m}, \dots, \frac{4m-1}{2m}\pi$$

$J'_m(Z)$  的零点  $j'_{mn}$  的值

$n$	$m$					
	0	1	2	3	4	5
1	0	1.84118	3.05424	4.20119	5.31755	6.42562
2	3.83171	5.33144	6.70713	8.01524	9.28240	10.51986
3	7.01559	8.53632	9.96947	11.34592	12.18190	13.98719
4	10.17246	11.70600	13.17037	14.58525	15.96411	17.31284

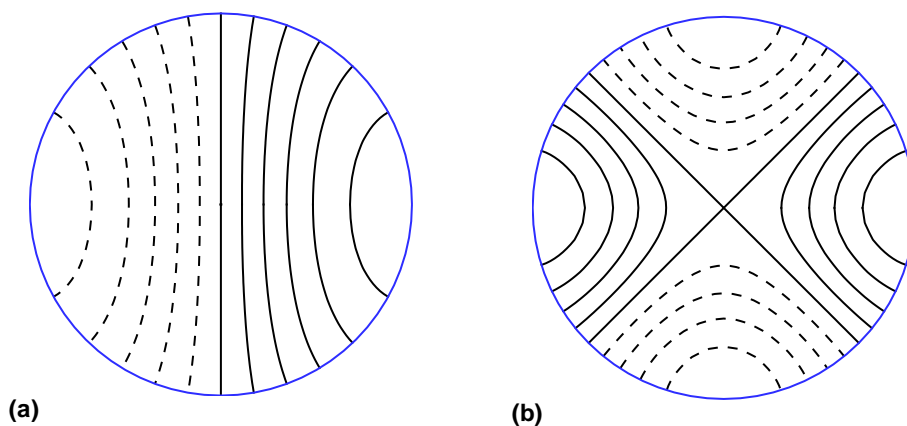


图 5.4: 圆形港池中两个固有模式的等高线. (a)  $J_1(k_{11}r) \cos \theta$ ; (b)  $J_2(K_{21}r) \cos 2\theta$ .

为波节线，在这些线上，自由面位移为零。类似地，对一定的  $\theta$ ， $J_m(k_{mn}r)$  随  $r$  而变化，事实上，在  $r < a$  的范围内， $J_m(k_{mn}r)$  正好过零点  $n - 1$  次，因此有  $(n - 1)$  个波节环，（这是常微分方程理论中一般的 Sturm 振荡定理的特例）。图 5.4 举例说明了自由面升降的分区。

$J'_m(Z)$  的零点可从 Abramowitz 和 Stegun(1972) 的手册中查到，摘列如表中所示，这些零点按大小排列所对应的指数为

$$(m, n) = (0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2), (3, 1), (4, 1), (1, 2).$$

容易证实，由于要求质量守恒，在完全封闭的港池中模式  $(0, 0)$  不可能存在。

### §5.4 辐射阻尼的概念：一个模型

波在无界介质中绕射有一个重要特征：即使介质是守恒性的，从有限区域发出的振荡也要受到阻尼。这种阻尼由能量被外行波带到无穷远处而产生，称作辐射阻尼。为了获得有关

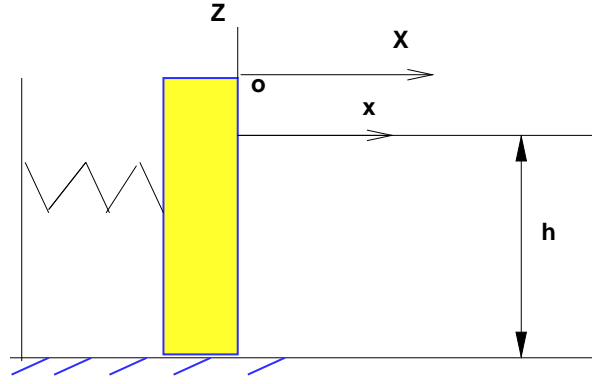


图 5.5: 抵抗水压的弹簧支承的质量.

辐射阻尼的概念, 我们介绍一个由 Carrier(1970) 提出的很有意思的模型, 它具有一个与行波耦合的振动系统的典型物理特征.

考虑具有均匀深度  $h$  和宽度  $b$  的半无限长渠道 (见图 5.5). 在  $x=0$  处有一个质量为  $M$  的闸门, 它可以沿渠道无摩擦地滑动. 闸门由一个弹性常数为  $K$  的弹簧支承. 为简单起见, 假定  $x=0$  处不漏水, 我们想求的是: 当从  $x \sim +\infty$  处有一个振幅为  $A$ , 频率为  $\omega$  的浅水波入射时, 闸门的位移  $Xe^{-i\omega t}$ .

$$\begin{cases} \zeta = \eta e^{-i\omega t} & = A(e^{-ikx} + R e^{ikx})e^{-i\omega t} \\ & = A[e^{-ikx} + e^{ikx} + (R-1)e^{ikx}]e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (5.29)$$

其中方括号中的第二项代表闸门固定时的反射波, 它与入射波 (第一项) 合成一个驻波, 第三项代表由闸门的感生运动所产生的辐射波.

闸门的运动方程是

$$-M\omega^2 X = -KX - pbh \quad (5.30)$$

其中  $p$  是  $x=0$  处单位面积所承受的流体动压.

$$p = \rho g \eta = \rho g(1+R) \quad (5.31)$$

代入式 (5.30), 得

$$A(1+R) = -\frac{K - M\omega^2}{\rho gbh} X \quad (5.32)$$

在  $x=0$  处流体的速度  $u(0) = -\frac{ig}{\omega} \eta_x(0)$  必须等于闸门速度  $-i\omega X$ , 即

$$u(0) = \frac{gkA}{\omega}(-1+R) = -i\omega X \quad (5.33)$$

容易由式 (5.32), (5.33) 导得

$$\begin{cases} \frac{X}{2A} & = \frac{\rho gbh}{-K + M\omega^2 + i\frac{\omega^2}{k}\rho bh} \\ & = \frac{\rho gbh}{-K + M\omega^2 + i\omega\sqrt{gh}(\rho bh)} \end{cases} \quad (5.34)$$

辐射波的振幅为

$$R - 1 = -2i\omega \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{X}{2A} \quad (5.35)$$

现在可以把式 (5.34) 与寻常的质量弹簧 - 阻尼器系统作一比较. 除了一个比例常数外, 式 (5.34) 中的分母可称作阻抗. 现在, 阻抗的虚部 (正比于  $\rho bh$ ) 起了阻尼的作用. 为了认识到这一点, 考虑不受外力的系统.  $A = 0$  时, (5.34) 式仍可描述非平凡的自由振动, 只要保持其分母为零, 即

$$-K + M\omega^2 + i\omega\sqrt{gh}(\rho bh) = 0 \quad (5.36)$$

这是一个本征条件, 具有复  $\omega$  解

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\sqrt{gh}\rho bh/2M)^2} - i\sqrt{gh}\rho bh/2M \quad (5.37)$$

其中,  $\omega_0^2 = K/M$ . 把任意  $\omega$  代入时间因子  $\exp(-i\omega t)$ , 可见振荡以如下速率指数衰减:

$$\frac{1}{2}\sqrt{gh}\rho bh/M \quad (5.38)$$

为了进一步追究这一阻尼的物理根源, 计算辐射波所作的功率在一个周期上的平均值

$$\begin{cases} \bar{E}_{\text{rad}} &= \frac{1}{2}\text{Re}[p_{\text{rad}}u^*]_{x=0}bh \\ &= \frac{1}{2}bh\text{Re}[\rho g A(R-1)(-i\omega A^*)] \\ &= \frac{1}{2}\rho \frac{\omega^3}{k} |X|^2 = \frac{1}{2}\rho bh(\omega^2\sqrt{gh})|X|^2 \end{cases}$$

其中用了式 (5.33) 和  $\omega = \sqrt{gh}k$ . 这个恒正的量显然仅与阻尼有关 ( $\propto \rho bh$ ), 因此, 这个阻尼是由辐射波对流体作功率产生的. 所以, 我们把式 (5.34) 中的分母的虚部称为辐射阻尼.

式 (5.34) 给出的响应  $X/2A$  可写成  $\omega$  的函数

$$\frac{X}{2A} = \left(\frac{\rho g bh}{M}\right) \left(\omega^2 - \frac{K}{M} + i\omega\sqrt{gh}\rho bh/M\right)^{-1} \quad (5.39)$$

也可以写成  $k$  的函数

$$\frac{X}{2A} = \left(\frac{\rho b}{M}\right) \left(k^2 - \frac{K}{Mgh} + ik\rho bh/M\right)^{-1} \quad (5.40)$$

在复平面  $k$  上存在两个极点

$$\pm\tilde{k} + i\hat{k} \quad (5.41)$$

其中

$$\tilde{k} = k_0 \left[ 1 - \left(\frac{\rho bh^2}{M}\right)^2 \frac{Mg}{4Kh} \right]^{1/2},$$

$$k_0 \equiv \frac{\omega_0}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{K}{M}} \frac{1}{\sqrt{gh}} \quad (5.42)$$

$$\hat{k} = -\rho bh/2M < 0 \quad (5.43)$$

于是, 式 (5.40) 变成

$$\frac{X}{2A} = \left(\frac{\rho b}{M}\right) (k - \tilde{k} - i\hat{k})^{-1} (k + \tilde{k} - i\hat{k})^{-1} \quad (5.44)$$

在小阻尼的情况下, 两个极点在实轴之下的近处. 在物理问题中,  $\omega$  和  $k$  都是正的实数; 只有极点  $\tilde{k} + i\hat{k}$  有物理意义, 在它的附近,  $|X|$  很大, 式 (5.44) 可近似地写成

$$\frac{X}{2A} \simeq \left[ \left( \frac{\rho b}{M} \right) \frac{1}{2\tilde{k}} \right] (k - \tilde{k} - i\hat{k})^{-1} \quad (5.45)$$

$|X/2A|^2$  的最大值为

$$\max |X/2A|^2 = (\tilde{k}h)^{-2} \simeq (k_0h)^{-2} \quad (5.46)$$

它在  $k \simeq \tilde{k}$  附近达到. 当  $k - \tilde{k} = \pm \hat{k}$  时, 响应的平方降至峰值的一半; 所以  $|\hat{k}|$  是响应曲线 ( $|X/2A|^2 \sim k$ ) 的宽度的度量. 与电路理论中一样, 可以定义品质因子  $Q$

$$Q = -\frac{\hat{k}}{\tilde{k}} \simeq \frac{\rho b h}{2M} \sqrt{\frac{M}{K}} \sqrt{gh} \quad (5.47)$$

随着辐射阻尼  $\hat{k}$  的减小,  $Q$  减小, 响应曲线的峰高增大而宽度减小. 从而曲线变得尖锐起来. 与式 (5.38) 相比, 可知  $Q\omega_0$  对应于自由振动的衰减速率.

### §5.5 通过狭缝的绕射

入港口经常是沿着一条长而薄的防波堤的孔道开口, 其宽度 ( $2a$ ) 远小于波长,  $ka \ll 1$ . 显然, 研究波通过这种开口的传播是有意义的. 为了简单起见, 假定防波堤很薄, 且是铅垂的全反射的, 水深为常数, 因此, 这个问题, 完全可与声学中的响应问题类比.

参考图 5.6, 我们考虑从  $x > 0$  方向的法向入射. 在入射侧  $x > 0$ , 整个波系由入射波, 自固壁的反射波和沿狭缝的流体运动所产生的扰动组成. 在透射侧  $x < 0$ , 只存在沿狭缝的流体运动产生的扰动. 狭缝起了隔流板上的活塞的作用, 它把波辐射到两侧的无穷远处.

虽然这个边值问题可用积分方程方法近似求解 (狭缝宽度可为任意的), 但在这里我们将运用匹配渐近展开法, 它特别适用于宽度远小于波长的情况 (Buckwald, 1971).

这个方法的直观概念已经在前面介绍过了. 简言之, 当一物理问题的各个区域受迥然相异的尺度制约时, 我们按各个局部尺度近似简化方程和边界条件, 寻求各个区域内有效的解. 一区域内的解通常不满足另一区域中的边界条件, 产生了不确定性; 我们要求这些解在某个中间区域光滑地匹配起来, 从而消除这种不确定性, 得到所要求的阶数的解.

这里, 两个不同的尺度是波长  $2\pi/k$  和缝宽  $2a$ , 它们的比值  $ka \ll 1$ .

把离开狭缝几个波长的区域定义为远场, 那里

$$kr = O(1) \quad (5.48)$$

显然  $1/k$  是合适的尺度, Helmholtz 方程中所有项同等重要. 在远离狭缝处, 辐射波必须满足 Helmholtz 方程和辐射条件. 然而, 对于远场观测者来说, 狭缝是原点附近的一个很小的区域, 辐射波可由原点处有奇性 (点源, 偶极子等) 的解得到

$$\eta_{\pm}^R = \frac{\omega Q^{\pm}}{2g} H_0^{(1)}(kr) + \frac{\omega \mu^{\pm}}{2g} H_1^{(1)}(kr) \sin \theta + \dots, \quad x > 0, \quad \text{or } x < 0 \quad (5.49)$$

而狭缝两侧的总的远场解为

$$\begin{cases} \eta_+ = 2A \cos kx + \eta_+^R & x > 0 \\ \eta_- = \eta_-^R & x < 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

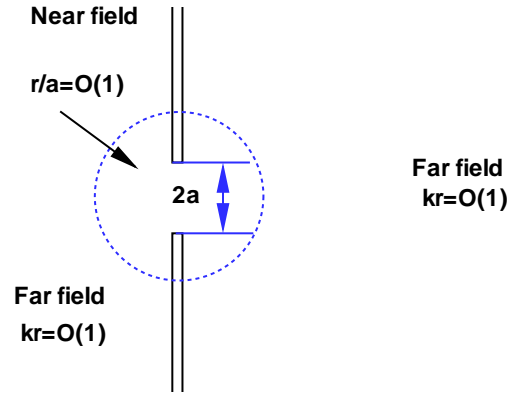


图 5.6: 两防波堤之间的狭缝

由级数 (5.49) 的第一项算得绕原点的小半径半圆周的流量

$$\text{流量} = \lim_{r \rightarrow 0} \pi r \left( \frac{-ig \omega Q^\pm}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr) \right) = Q^\pm \quad (x > 0, \quad x < 0)$$

因此, (5.49) 式的第一项代表到半平面  $x > 0$ , 和  $x < 0$  的流量为  $Q^\pm$  的一个源.

在狭缝附近, 长度尺度为缝宽; 因而可定义

$$\frac{r}{a} = O(1) \quad (5.51)$$

处为近场. 在这个区域内

$$\frac{k^2 \eta}{\nabla^2 \eta} = O((ka)^2) \quad (5.52)$$

因此流动实质上由 Laplace 方程制约:

$$\nabla^2 \eta \simeq 0 \quad (5.53)$$

其中相对误差是  $O((ka)^2)$ . 在固壁上必须满足无流量条件. 现在辐射条件无关紧要, 可以弃去. 式 (5.53) 和无流量条件规定了一个势问题, 时间仅为参数. 因为  $\eta$  是一个调和函数, 可取为解析函数  $W(Z) = W(x + jy)$  的实部, 即

$$\eta = \text{Re}_j W(Z) \quad (5.54)$$

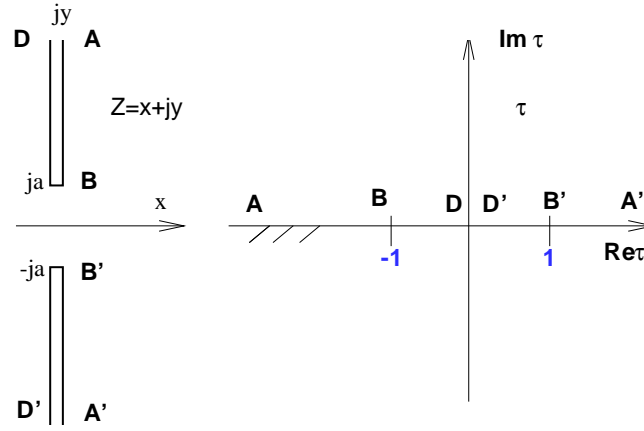
求解上述问题就化为寻求  $Z$  平面上的解析函数, 在固壁上满足

$$\text{Im}_j W(Z) = \text{const} \quad (5.55)$$

对于简单的几何位形, 最有效的解法是保角映射法. 在现在的情况下, 我们采用如下变换 (它是机翼理论中的 Joukowski 变换稍加改变的形式):

$$Z = -\frac{ja}{2} \left( \tau + \frac{1}{\tau} \right) \quad (5.56)$$



图 5.7: 近场的从  $Z$  平面上半  $\tau$  平面的映射

它把两防波堤外的区域映射到上半个  $\tau$  平面 (见图 5.7), 把固壁  $ABD$  映射到  $\tau$  平面的负实轴,  $A'B'D'$  映射到正实轴. 为了满足  $\text{Im}_j W = 0$  (在  $A'B'D'$  上) 和  $\text{Im}_j W = \text{const}$  (在  $ABD$  上), 我们取

$$\begin{cases} W(Z) = C + M \ln \tau + C_1 \tau + C_2 \tau^2 + \cdots \\ \quad \quad \quad + C_{-1} \tau^{-1} + C_{-2} \tau^{-2} + \cdots \end{cases} \quad (5.57)$$

其中个系数关于  $j$  为实数, 但关于  $i$  可为复数. 式 (5.49) 中的系数  $Q^\pm, \mu^\pm$  以及式 (5.57) 中的系数  $C, M, C_1$ , 和  $C_{-1}$  等可由近场和远场的匹配求得.

我们要求, 在中间区域中, 近场解要与远场解光滑地匹配连接起来; 这个中间区域在远场观测者看来接近于原点 ( $kr \ll 1$ ), 在近场观测者看来, 接近于无穷远 ( $r/a \gg 1$ ). 对于  $kr \ll 1$ , 整个远场解的内展开式为

$$\begin{cases} \eta_+ = 2A + \frac{i\omega Q^+}{g} \left[ -\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma kr}{2} \right] \\ \quad - \frac{\omega \mu^+}{2g} \frac{1}{r} \sin \theta + O[(kr)^2 \ln(kr)], \quad x > 0 \end{cases} \quad (5.58)$$

$$\begin{cases} \eta_- = \frac{i\omega Q^-}{g} \left[ -\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma kr}{2} \right] \\ \quad - \frac{\omega \mu^-}{2g} \frac{1}{r} \sin \theta + O[(kr)^2 \ln(kr)], \quad x < 0 \end{cases} \quad (5.59)$$

其中  $\ln \gamma = 0.5772157$  为欧拉常数.

现在来求  $r/a \gg 1$  时近场解的近似式. 注意, 在  $x > 0$  侧,  $|Z|/a \gg 1$  的区域在  $\tau$  平面上对应于  $|\tau| \gg 1$ , 因此由式 (5.56) 得

$$\tau = \frac{2jZ}{a} \left[ 1 + O\left(\left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\right) \right] \quad (5.60)$$

把它代入式 (5.57), 得到  $x > 0, r/a \gg 1$  时近场  $\eta$  的外展开式

$$\begin{cases} \eta_+ \simeq \text{Re}_j W \simeq \text{Re}_j \left\{ C + M \ln \frac{2jZ}{a} + C_1 \frac{2jZ}{a} + \cdots + C_{-1} \frac{a}{2jZ} + \cdots \right\} \\ \quad = C + M \ln \frac{2r}{a} - C_1 \frac{2y}{a} - C_{-1} \frac{a}{2r} \sin \theta + \cdots \end{cases} \quad (5.61)$$

另一方面, 在  $x < 0$  侧,  $|Z|/a \gg 1$  的区域对应于  $\tau$  平面上原点附近的区域, 因此, 由式 (5.56) 得

$$\tau = \frac{a}{2jZ} \left[ 1 + O\left(\left(\frac{Z}{a}\right)^{-2}\right) \right] \quad (5.62)$$

这时, 近场  $\eta$  的外展开式为

$$\begin{cases} \eta_- \simeq \operatorname{Re}_j W & \simeq \operatorname{Re}_j \left\{ C + M \ln \frac{a}{2jZ} + C_1 \frac{a}{2jZ} + \cdots + C_{-1} \frac{2jZ}{a} + \cdots \right\} \\ & = C - M \ln \frac{2r}{a} - C_1 \frac{a}{2r} \sin \theta - C_{-1} \frac{2y}{a} + \cdots \end{cases} \quad (5.63)$$

现在令式 (5.58) 与式 (5.61) 相等来匹配  $\eta_+$ , 使同类项的系数相等, 得如下的代数关系:

$$\begin{cases} (\text{const}): & 2A + \frac{i\omega Q^+}{g} \left[ -\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right] = C + M \ln \frac{2}{a} \\ (\ln r): & \frac{i\omega Q^+}{\pi g} = M \\ (y): & C_1 = 0 \\ \left(\frac{1}{r} \sin \theta\right): & C_{-1} = \omega \mu^+ / ga \end{cases} \quad (5.64)$$

类似地, 令式 (5.59) 与式 (5.63) 相等来匹配, 得到

$$\begin{cases} (\text{const}): & \frac{i\omega Q^-}{g} \left( -\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right) = C - M \ln \frac{2}{a} \\ (\ln r): & \frac{i\omega Q^-}{\pi g} = -M \\ (y): & C_{-1} = 0 \\ \left(\frac{1}{r} \sin \theta\right): & C_1 = \omega \mu_- / ga \end{cases} \quad (5.65)$$

立即可见, 偶极子的强度为零

$$\mu^+ = \mu^- = 0 \quad (5.66)$$

可以证明高阶复极子的强度也为零, 因此, 首阶近似下, 只有源是重要的, 而且有

$$C_1 = C_{-1} = 0 \quad (5.67)$$

还可证明,  $C_n (n = \pm 2, \pm 3, \dots)$  也为零, 因而在现在讨论的准确度下, 内解中  $\tau$  的非零次幂不比引进. 这些事实在今后的分析中将不加证明而加以引用.

现在只剩下四个未知常数  $C, Q^\pm, M$ ; 容易解得

$$\begin{cases} -\frac{i\omega Q^+}{g} = \frac{i\omega Q^-}{g} = \frac{A}{-\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma ka}{4}} \\ M = \frac{i\omega Q^+}{\pi g} = -\frac{i\omega Q^-}{\pi g} \\ C = A \end{cases} \quad (5.68)$$

把式 (5.68) 代入式 (5.49) 得

$$\eta_\pm^R = \frac{\pm i \frac{A}{2}}{-\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma ka}{4}} H_0^{(1)}(kr) \quad (5.69)$$

$ka$	1	0.1	0.01	0.0001
$ \sigma $	0.8890	0.4506	0.2786	0.1995

由此式可知, 在远场中, 相当于有一个简单的源向各个方向均匀地辐射出波. 对大  $kr$  展开 Hankel 函数, 得到

$$\eta_{\pm}^R = \pm A\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\pi/4} \quad (5.70)$$

其中

$$\sigma = \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma ka}{4}\right)^{-1} \quad (5.71)$$

应当注意, 当  $q$  趋于零时,  $(-\ln q)$  很缓慢地趋于无穷大, 例如, 当  $q = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  时,  $-\ln q = 2, 4.6, 6.9$ ; 因此, 对  $ka$  的实际取值范围,  $-\ln \frac{\gamma ka}{4}$  并不那么大, 当  $ka$  减小时,  $|\sigma|$  缓慢地趋于零, 如表中所示.  $ka$  很小的情况下仍有波传播, 这一事实是势流理论的典型结果, 应该被真实流体的粘性效应和顶端的分离效应所修正; 亦即在实际情况下, 开口很小时不应有辐射波.

在现在的近似下, 近场解主要有两项: 一个常数项和一个正比于  $\ln r$  的项. 物理上看, 前者代表自由面的均匀升降; 后者表示狭缝对一侧起源的作用, 对另一侧起汇的作用, 源汇的强度相同.

应当提到, 对任意的  $ka$ , 绕射问题可用一些基于积分方程方法的近似方法求解. 当  $ka$  增大时, 辐射波幅  $\sigma$  对  $\theta$  有较为复杂的依赖关系, 而不象  $ka \ll 1$  时那样有轴对称性了. 以后将看到, 当波长至少与港湾尺寸相当时, 港湾内才会出现明显的共振, 而当港湾尺度通常远远超过入港口的宽度, 这里我们对狭缝问题不在进一步讨论.

## §5.6 狭长运河和港湾引起的散射

### §5.6.1 一般解

现在我们来考虑一条通向海洋的狭长运河, 宽度为  $2a$ , 如图 5.8. 对于长波 ( $ka \ll 1$ ) 和常深度的情况, 运河的内部远场只可能是一维的. 所以, 运河中的远场一般解为

$$\eta_c = B e^{-ikx} + D e^{ikx} \quad (5.72)$$

远场近似的内展开式为

$$\eta_c = (B + D) + ik(-B + D)x + O[(kx)^2], \quad (k|x| \ll 1) \quad (5.73)$$

海洋中的远场解与上节中的一样

$$\eta_0 \simeq 2A \cos kx + \frac{\omega Q}{2g} H_0^{(1)}(kr) \quad (5.74)$$

其内展开式为

$$\eta_0 = 2A + \frac{\omega Q}{2g} \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma kr}{2}\right) + O(kr), \quad (kr \ll 1) \quad (5.75)$$

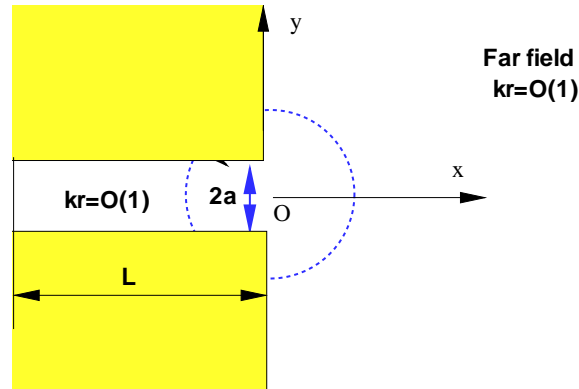


图 5.8: 狭长的海湾或运河

近场问题是流过直角河口的势流问题 (参看图 5.9). 利用 Schwarz-Christoffel 变换, 复  $Z$  平面中的物理区域可以映射到  $\tau$  平面的上半部 (Kober, 1957, p155), 此变换是

$$Z = \frac{2a}{\pi} \left\{ -j\sqrt{\tau^2 - 1} + \ln \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1} + j} \right\} \quad (5.76)$$

映射如图 5.9 所示. 为保证单值性, 定义平方根  $\sqrt{\tau^2 - 1}$  时在  $\tau$  平面上沿实轴  $-1 \leq \text{Re}\tau \leq 1$  处有一割线, 分支选取得使  $|\tau| \rightarrow \infty$  时  $\sqrt{\tau^2 - 1} \rightarrow \tau$ . 定义对数函数  $\ln \tau$  时割线取为正实轴.

同上节一样, 近场近似式为

$$\eta = \text{Re}_j W(\tau) = \text{Re}_j (M \ln \tau + C) \quad (5.77)$$

其中  $M, C$  关于  $j$  为实数, 其外展开式应区分两侧 ( $x > 0, x < 0$ ) 作计算. 在海洋侧 ( $x > 0$ ), 大  $|Z|/a$  对应于大  $|\tau|$  (参看图 5.9), 可把式 (5.76) 展开成

$$\begin{cases} Z = \frac{2a}{\pi} \left( -j\tau + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \\ -j\tau = \frac{\pi Z}{2a} \left[ 1 + O\left(\left(\frac{a}{Z}\right)^2\right) \right], \quad x > 0 \end{cases} \quad (5.78)$$

代入式 (5.77), 得近场的外展开式

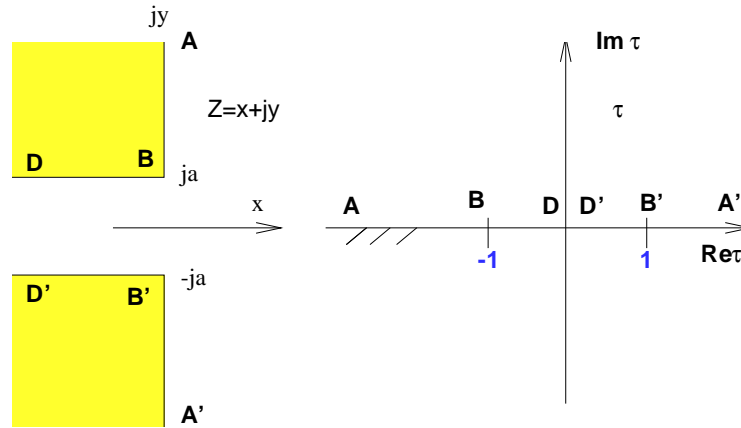
$$\eta \simeq \text{Re} M \ln \frac{j\pi Z}{2a} + C = M \ln \frac{\pi r}{2a} + C, \quad x > 0 \quad (5.79)$$

在运河 (海湾) 侧, 大  $|Z|/a$  对应于小  $|\tau|$ . 根据式 (5.76), 我们有

$$\begin{cases} \frac{\pi Z}{2a} = 1 + \ln \tau - \ln 2j + O(\tau^2) \\ \tau \simeq \frac{2j}{e} e^{\pi Z / 2a}, \quad -x/a \gg 1 \end{cases} \quad (5.80)$$

因此

$$\ln \tau \simeq \frac{\pi Z}{2a} - \ln \frac{e}{2j} \quad (5.81)$$

图 5.9: 近场的从  $Z$  平面到上半  $\tau$  平面的映射

当  $x/a \rightarrow -\infty$  时, 误差以指数律减小. 所以, 近场的外展开式为

$$\eta \simeq M \frac{\pi x}{2a} - M \ln \frac{e}{2} + C, \quad x < 0 \quad (5.82)$$

在运河侧匹配内外解, 根据式 (5.73) 和 (5.82), 得

$$\begin{cases} B + D = C - M \ln \frac{e}{2} \\ ik(-B + D) = \frac{\pi M}{2a} \end{cases} \quad (5.83)$$

类似地, 在海洋侧, 匹配式 (5.75) 和 (5.79), 得

$$\begin{cases} 2A + \frac{\omega}{2g} Q \left( 1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right) = C + M \ln \frac{\pi}{2a} \\ \frac{i\omega Q}{\pi g} = M \end{cases} \quad (5.84)$$

至此, 得到关于五个未知数 ( $B, C, D, M, Q$ ) 的四个代数方程 ( $A$  是已知的), 还需要一个条件, 它依赖于运河远端的约束条件. 物理上感兴趣的有如下几种可能性:

- 波散射进无限长的渠道, 远端无反射波. 由于只可能有左行波, 取  $D = 0$ , 运河内的远场解为

$$\eta_c = B e^{ikx} \quad (5.85)$$

- 波从运河的远端入射, 传播到海洋. 这时所需要的条件是  $D$  给定而  $A = 0$ .
- 波散射进长度为  $L$  的长海湾, 其远端  $x = -L$  为全反射的. 这时加上了条件

$$\frac{\partial \eta_c}{\partial x} = 0 \quad (x = -L) \quad (5.86)$$

合适的外解是

$$\eta_c = E \cos k(x + L) \quad (5.87)$$

其中取了

$$B = \frac{1}{2}Ee^{-ikL}, \quad D = \frac{1}{2}Ee^{ikL} \quad (5.88)$$

相应的内展开式为

$$\eta_c = E[\cos kL + kx \sin kL] + O[(kx)^2] \quad (5.89)$$

现在可对每种情形求解未知系数的代数方程. 例如, 在远端无反射波的情况下, 得到

$$\frac{\omega Q}{2g} = \frac{2ka}{1 + ka + \frac{i2ka}{\pi} \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e}} A \quad (5.90)$$

$$B = \frac{-2}{1 + ka + \frac{i2ka}{\pi} \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e}} A \quad (5.91)$$

$C$  还是仅与近场解有关, 不予写出. 式 (5.90) 给出了把波辐射回无界海洋的源的强度, 式 (5.91) 给出了透射波的振幅.

### §5.6.2 狭海湾

有关有限长度的狭海湾的问题, 具有海湾共振的许多普遍特征, 因此这里给予详细分析. 这一问题首先由 Miles 和 Munk(1961) 处理过; Ünlüata 和 Mei(1973) 用匹配渐近法作了描述.

联立式 (5.83-5.84) 和式 (5.88), 得海湾响应

$$\eta_c = \frac{2 \cos k(x+L)}{\cos kL + \frac{2ka}{\pi} (\sin kL) \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e} - ika \sin kL} A \quad (5.92)$$

以及流出海湾口的流量

$$\frac{\omega Q}{2g} = \frac{-i2ka \sin kL}{\cos kL + \frac{2ka}{\pi} (\sin kL) \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e} - ika \sin kL} A \quad (5.93)$$

这里需要指出, 式 (5.92) 的  $\eta_c$  指的是远离海湾口的远场运动, 该处与海湾口的距离远大于宽度  $2a$  但远小于波长. 可定义相对于驻波振幅  $2A$  的放大因子  $\sigma$ :

$$\sigma = \left[ \cos kL + \frac{2ka}{\pi} (\sin kL) \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e} - ika \sin kL \right]^{-1} \quad (5.94)$$

从而有

$$\eta_c = 2A\sigma \cos k(x+L) \quad (5.95)$$

$|\sigma| \sim kL$  的图线称作响应曲线, 其中  $ka$  作为一个参数.

由于  $ka \ll 1$ , 响应曲线在  $\cos kL$  的零点, 即

$$kL \approx k_n L = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.96)$$

附近有峰值. 因为式 (5.94) 中有小项  $O(ka)$ , 故所有共振峰所在的位置与上面的粗估值稍有偏离. 通过如下步骤可得较好的近似结果, 令

$$k = k_n + \Delta$$

关于小  $\Delta$  作展开

$$\cos kL = -L\Delta \sin k_n L + O(\Delta^2), \quad \sin kL = \sin k_n L + O(\Delta^2) \quad (5.97)$$

因此, 在第  $n$  个共振峰附近有

$$\begin{cases} \sigma & \cong \left[ -\sin k_n L \left( L\Delta - \frac{2k_n a}{\pi} \ln \frac{2\gamma k_n a}{\pi e} + ik_n a \right) \right]^{-1} \\ & \cong \{(-1)^{n+1} [(k - \tilde{k}_n)L + ik_n a]\}^{-1} \end{cases} \quad (5.98)$$

其中

$$\tilde{k}_n \equiv k_n \left( 1 + \frac{2a}{\pi L} \ln \frac{2\gamma k_n a}{\pi e} \right) \quad (5.99)$$

它与模型例子的结果 (5.45) 相仿, 显然共振峰在  $k = \tilde{k}_n$  处, 它的偏移为

$$\tilde{k}_n - k_n = \frac{2k_n a}{\pi L} \ln \frac{2\gamma k_n a}{\pi e} < 0 \quad (5.100)$$

在共振峰附近, 放大因子的平方为

$$|\sigma|^2 = [|(k_n - \tilde{k}_n)L|^2 + (k_n a)^2]^{-1} \quad (5.101)$$

而峰值为

$$\max |\sigma| = \frac{1}{k_n a} = \frac{1}{(n + 1/2)\pi a/L} \quad (5.102)$$

随着模式编号  $n$  的增大, 相继的共振峰值减小.

对于模式  $n$ ,  $\sigma \sim kL$  曲线图大致关于峰值轴  $k = \tilde{k}_n$  对称. 在

$$(k - \tilde{k}_n)L = \pm k_n a$$

时,  $|\sigma|$  的值减半. 因而  $k_n a$  既是峰高的度量, 也是共振曲线半宽度的度量. 在港湾中的波形大致正比于

$$\cos(n + 1/2)\pi(x/L + 1)$$

在最低模式  $n = 0$ , 海湾长度约为波长的  $1/4$ , 入口很接近于第一个波节点. 比较一下有相同长度  $L$  但不同宽度  $2a$  的两个海湾, 较窄的港湾有较小的偏移  $(\tilde{k}_n - k_n)L$  和尖而较高的共振峰; 这就是说, 在同样的入射波浪下, 港湾越窄, 波浪越大. 在  $ka \rightarrow \infty$  的极限下, 辐射阻尼降低到零, 共振峰变成无穷大; 由于这时在响应曲线图中, 共振峰的宽度也随之趋于零, 所以要激发起港湾共振, 入射波必须恰好调到峰值所对应的频率, 调谐稍有偏离, 响应就大大减小.

共振响应随着港湾变窄而增大这一特征并不总是与实际经验相符, 这被 Miles 和 Munk(1961) 称为 "港湾佯谬". 这一佯谬与流体力学中的 D'Alembert 佯谬有相仿之处; 因为港湾变窄时摩擦效应变得越来越重要, 非线性效应也应予以考虑, 计及这两个效应之后, 这种佯谬就不复成问题了.

由式 (5.93) 可见, 入港口的每单位深度的流量  $Q$  (它实质上是辐射波的振幅) 在达到共振峰值时也达到极大值. 这个  $Q$  的极大值可令分母的实部为零得到, 因而有

$$\max |Q| = \frac{2Ag}{\omega_n}$$

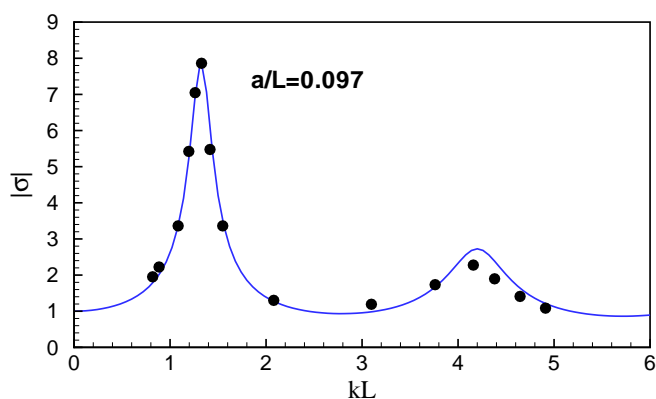


图 5.10: 放大因子  $|\sigma|$  (完全开口矩形港湾): ●●● Lee(1971) 的实验 ( $h=0.844\text{ft}$ )

其中  $\omega_n = k_n \sqrt{gh}$ . 对于较高的模式, 共振流量也较小.

理论结果 (5.94) 与在相当深的水中的实验作了比较, 两者一般相当一致 (参看图 5.10). 在  $1/4$  波长模式的峰值附近存在差异, 表明在这种情况下, 实验中的摩擦损失是重要的.

### 习题

- (5.1) 两条狭长的直运河垂直于同一海岸, 试研究两运河的相互影响. 考虑入射角为任意的情况. (可参看 Mei & Foda, 1979)
- (5.2) 一条半圆形窄运河, 其宽度为  $2a$ , 两端都在同一直海岸上的开口, 考虑入射角为任意的情况下运河内的振动.

## §5.7 有狭窄入口的矩形港湾

对于两水平尺度相当的港湾, 除了上节所述的物理特性外, 还有一种新的振荡模式, 其中港内自由面一齐升起或降落. 这在声学中是一种人们所熟悉的现象, 可通过简单的分析加以演化证实. 参看图 5.11, 我们考虑一个表面积为  $S$  的水域, 它通过一条长为  $L$ , 宽为  $a$  ( $L \gg a$ ) 的渠道与无限大的海洋相连. 设在  $A$  处的自由面振幅为  $\eta$ , 渠道中流体的速度为  $U$ . 质量守恒要求

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} S = -Uah \quad (5.103)$$

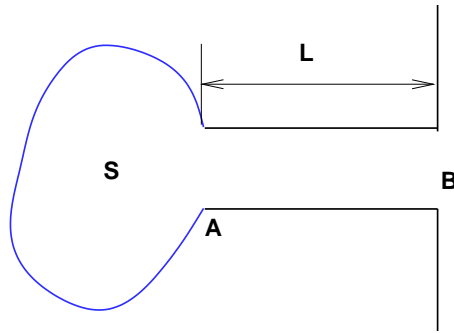
当水域  $S$  内发生共振时, 河口  $B$  处的  $\eta$  相对来说较小,  $A$  和  $B$  之间的压力梯度近似地为

$$-\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_A - p_B}{L} = \frac{\rho g \eta}{L} \quad (5.104)$$

渠道中水的动量方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{g\eta}{L} \quad (5.105)$$



图 5.11: 通过渠道与海洋相连的表面积为  $S$  的水域

合并质量守恒方程和动量守恒方程, 消去  $U$ , 得

$$S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + gh \frac{a}{L} \eta = 0 \quad (5.106)$$

它与质量弹簧系统很相象, 有一个固有模式, 其固有频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{gha}{SL}}$$

在无量纲形式下, 相应的特征波数为  $k\sqrt{S} = \sqrt{a/L}$ , 其值很小. 这种振动模式在声学中称为 Helmholtz 模式, 在港湾工程文献中称为抽运模式 (pumping mode). 很显然, Helmholtz 模式的存在与有限大小的港湾面积密切相关. 注意, 上节中的狭海湾振动对应于无质量的弹簧的振动, 所以不存在 Helmholtz 模式. 当  $S$  很大时, 港湾作整体的缓慢的上下振动.

现在我们研究有狭窄入口的矩形港池, 这个例子最早由 Miles 和 Munk(1961) 研究过, Garret(1970) 作了修正. 下面的叙述以 Ünlüala 和 Mei(1973) 的工作为基础. 设港湾的两边长分别为  $B$  和  $L$ , (由与直海岸相连的薄而直的防波堤形成), 狭缝宽远小于波长, 即  $ka \ll 1$  (参看图 5.12).

为简单起见, 假设波浪法向入射, 于是港湾外的外解仍由式 (5.74) 给出

$$\eta_0 = 2A \cos kx - \frac{i\omega}{g} Q_0 \left[ \frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr) \right], \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (5.107)$$

其中坐标原点选在入港口的中心. 为方便起见, 重写这个外解的内展开式如下:

$$\begin{cases} \eta_0 = 2A + I \frac{\omega}{g} \left( -\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right) \\ \quad + i \frac{\omega}{g\pi} Q_0 \ln r + O(kr \ln kr) \end{cases} \quad (5.108)$$

内解是过一狭缝的势流, 有如下的两项内展开式 [参看 (5.63), (5.65)]

$$\eta_E = C \mp M \ln \frac{a}{2} + M \begin{pmatrix} \ln r & x > 0 \\ -\ln r_1 & x < 0 (x_1 > 0) \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

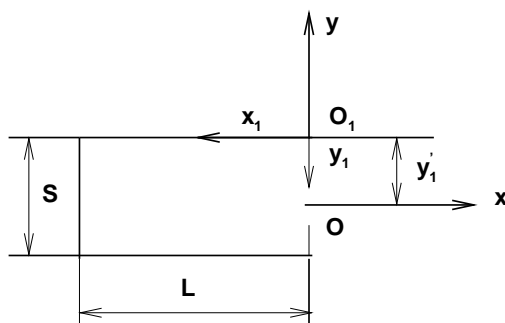


图 5.12: 直海岸后的矩形港池

( $r_1, x_1$  的定义见下). 为了描述港湾内部的情况, 最好用原点在港湾角上的另一坐标系  $O_1x_1y_1$  (参看图 5.12),

$$\begin{cases} x = -x_1, y = y_1' - y_1 \\ r_1^2 = x_1^2 + (y_1 - y_1')^2 \end{cases} \quad (5.110)$$

港湾入口的中心在  $y_1 = y_1'$  处.

### §5.7.1 用匹配渐近展开法得到的解

港湾内用坐标系  $O_1x_1y_1$  描述, 但为了简便, 下面省略下标 ( )<sub>1</sub>.

在首阶近似下, 港湾内的外解是由  $x = 0, y = y'$  点的脉动源 (源强  $Q_H$  未知) 产生的场.

设  $G(x, y; y')$  是下述问题的解

$$\begin{cases} \nabla^2 G + k^2 G = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < L, y = 0, B \\ \frac{\partial G}{\partial x} = \begin{cases} 0 & x = L \\ \delta(y - y') & x = 0 \end{cases} \quad 0 < y < B \end{cases} \quad (5.111)$$

因为  $G$  代表在  $x = 0, y = y'$  点有单位流量的点源时的解, 故有

$$\eta_H = \frac{i\omega}{g} Q_H G(x, y; y') \quad (5.112)$$

这是所求的港湾内的外解.  $G$  是一种 Green 函数, 其解在附录中导出, 这里引用结果

$$G(x, y; y') = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) Y_n(y') \quad (5.113)$$

其中

$$\begin{cases} X_n(x) = \frac{\varepsilon_n \cos K_n(x - L)}{K_n B \sin K_n L} \\ Y_n(y) = \cos(n\pi y/B) \\ K_n = [k^2 - (n\pi/B)^2]^{1/2} \\ \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{cases} \quad (5.114)$$

求内展开式比较费事, 有奇点的函数的 Fourier 展开的级数的收敛性总是不好,  $G$  的级数 (5.113) 也是这样, 当  $n$  很大时,

$$K_n \sim i \left( \frac{n\pi}{B} \right)$$

$$\frac{\varepsilon_n \cos K_n(x_L)}{K_n B \sin K_n L} = \frac{2 \cosh n\pi(x-L)/B}{n\pi \sinh n\pi L/B} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{2}{n\pi} e^{-n\pi x/B} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

第  $n$  项正比于  $1/n$ , 级数收敛得很慢. 通常用的加速收敛的技巧是求级数

$$\tilde{G} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{n\pi} \right) e^{-n\pi x/B} Y_n(y) Y_n(y') \quad (5.115)$$

的和, 把它写成封闭的形式, 剩下的级数为

$$X_0 Y_0(y) Y_0(y') + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ X_n + \frac{2}{n\pi} e^{-n\pi x/B} \right] Y_n(y) Y_n(y') \quad (5.116)$$

其中的项对于大  $n$  来说正比于  $1/n^3$ , 因而收敛得快多了. 可证明式 (5.115) 的求和可以进行, 结果是 (参见附录)

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi} \ln |1 - e^{-Z_s}|^2 |1 - e^{-Z'_s}|^2 \quad (5.117)$$

这里

$$\begin{cases} Z_s = \frac{\pi}{B} [x + j(y - y')] \\ Z'_s = \frac{\pi}{B} [x + j(y + y')] \end{cases} \quad (5.118)$$

注意,  $|Z_s|$  正比于场点  $(x, y)$  到源点  $(0, y')$  的距离,  $|Z'_s|$  正比于场点  $(x, y)$  到源点的镜像  $(0, -y')$  的距离. 令

$$r = [x^2 + (y - y')^2]^{1/2}$$

在很接近入口处,  $r/B \ll 1$ , 因此  $|Z_s| \ll 1$ . 因为

$$\begin{cases} Z'_s = Z_s + 2j\pi y'/B \\ 1 - e^{-Z_s} = Z_s [1 + O(Z_s)] \\ 1 - e^{-Z'_s} = (1 - e^{-2j\pi y'/B}) [1 + O(Z_s)] \end{cases} \quad (5.119)$$

因此, 我们有

$$\begin{cases} |1 - e^{-Z_s}|^2 = \left( \frac{\pi r}{B} \right)^2 \left[ 1 + O\left( \frac{r}{B} \right) \right] \\ |1 - e^{-Z'_s}|^2 = 4 \sin^2 \frac{\pi y'}{B} \left[ 1 + O\left( \frac{r}{B} \right) \right] \end{cases} \quad (5.120)$$

把式 (5.120) 代入式 (5.117), 得

$$\tilde{G} = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{2\pi r}{B} \sin \frac{\pi y'}{B} \right) + O\left( \frac{r}{B} \right) \quad (5.121)$$

当  $r \rightarrow 0$  时, 它有对数奇性. 由式 (5.121) 可知, 过  $x > 0$  侧绕源点的无穷小半圆周的流量是 1. 因此,  $\tilde{G}$  代表 Green 函数的整个奇性部分, 剩下的级数 (5.116) 在源点  $r = 0$  一定是正则的. 因此,  $G$  的内展开式的首项为

$$G(x, y; y') \simeq \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{2\pi r}{B} \sin \frac{\pi y'}{B} \right) + F \quad (5.122)$$

其中  $F$  是剩余级数 (5.116) 在源点的值

$$F = \frac{\cos kL}{kB \sin kL} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon_n \cos K_n L}{K_n B \sin K_n L} + \frac{2}{n\pi} \right) Y_n(y') Y_n(y') \quad (5.123)$$

最后得到港湾内部的外解的内展开式

$$\eta_H \simeq i \frac{\omega}{g} Q_H \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{2\pi}{B} \sin \frac{\pi y'}{B} \right) + F \right] + i \frac{\omega}{g} \frac{Q_H}{\pi} \ln r \quad (5.124)$$

现在可以进行匹配了. 在海洋一侧,  $x > 0 (x_1 < 0)$ , 式 (5.108) 和 (5.109) 中的常数项必须匹配起来, 得到两个方程

$$C - M \ln \frac{a}{2} = 2A + i \frac{\omega}{g} Q_0 \left( -\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right) \quad (5.125)$$

$$M = i \frac{\omega}{g} \frac{Q_0}{\pi} \quad (5.126)$$

同样地, 在港湾一侧,  $x < 0 (x_1 > 0)$ , 把式 (5.124) 和 (5.109) 相匹配, 得

$$C + M \ln \frac{a}{2} = i \frac{\omega}{g} Q_H \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{2\pi}{B} \sin \frac{\pi y'}{B} \right) + F \right] \quad (5.127)$$

$$-M = i \frac{\omega}{g} \frac{Q_H}{\pi} \quad (5.128)$$

从四个代数方程 (5.125)-(5.128) 很容易解出未知数  $C, Q_0, Q_H$  和  $M$ . 立即可得的结果是  $Q_0 = Q_H$ , 从连续性的角度看, 这个结果是在预料之中的. 最为重要的结果是

$$i \frac{\omega}{g} Q_0 = -i \frac{\omega}{g} Q_H = -2A \left[ -\frac{i}{2} + F - I \right]^{-1} \quad (5.129)$$

其中

$$I = \frac{1}{\pi} \ln \left[ \frac{4B}{\pi \gamma k a^2 \sin \pi y' / B} \right] \quad (5.130)$$

最后得到港湾内的远场解

$$\eta_H = \frac{-A}{-\frac{i}{2} + F - I} \sum_n X_n(x) Y_n(y) Y_n(y') \quad (5.131)$$

用此式, 可在几乎所有的点对港湾响应进行数值计算, 离入港口一个波长左右的小区域内例外.

### §5.7.2 共振谱和非 Helmholtz 模式的响应

为了更好地理解下面要给出的数值结果的物理含义, 有必要定性地考察式 (5.129) 和 (5.131).

当入射波数  $k$  接近于封闭港池的一个固有模式的波数

$$k_{nm} = \left[ \left( \frac{n\pi}{B} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

时, 可望发生共振. 把  $k$  在  $k_{nm}$  附近展开

$$k = k_{nm} + \Delta \quad (5.132)$$

现设

$$\Delta/k_{nm} \ll 1 \quad (5.133)$$

由式 (5.114) 得

$$\begin{cases} K_n L = L \left[ (k_{nm} + \Delta)^2 - \left( \frac{n\pi}{B} \right)^2 \right]^{1/2} \\ \simeq \begin{cases} m\pi + (k_{nm} L^2 \Delta)/m\pi, & n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ L\sqrt{2k_{n0}\Delta}, & n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.134)$$

注意, 对这些值,  $\sin K_n L$  接近于零, 在  $G$  和  $F$  的级数中, 第  $n$  项远大于其余各项. 仅保留主要项,  $F$  的级数近似地取为

$$\begin{cases} F \simeq \frac{\varepsilon_n \cos K_n L}{K_n B \sin K_n L} \cos^2 \frac{n\pi y'}{B} \simeq \frac{c}{\Delta} \\ c = \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{2k_{nm} B L} \cos^2 \frac{n\pi y'}{B} \end{cases} \quad (5.135)$$

这里假设  $n$  与  $m$  不同时为零, 而  $G$  则近似地取为

$$X_n(x)Y_n(y)Y_n(y') \simeq \frac{c}{\Delta} \frac{\cos m\pi(x-L)/L}{\cos m\pi} Y_n(y)Y_n(y') \quad (5.136)$$

于是港湾响应 (5.131) 变成

$$\eta_H \simeq \frac{-2A}{-\frac{i}{2} + \frac{c}{\Delta} - I(k_{nm})} \frac{c}{\Delta} \frac{\cos m\pi(x-L)/L}{\cos m\pi} Y_n(y)Y_n(y') \quad (5.137)$$

式中

$$I(k_{nm}) = [I(k)]_{k=k_{nm}} \quad (5.138)$$

当  $k_{nm}a$  变小时,  $I(k_{nm})$  对数地增大. 值得指出的是, 当  $\Delta = 0$  时, 亦即  $k = k_{nm}$  时, 式 (5.137) 的右端趋近于

$$-2A \frac{\cos m\pi(x-L)/L}{\cos m\pi} Y_n(y)Y_n(y') \quad (5.139)$$

它并不太大. 因此, 共振模式与相应的封闭港池的固有模式不重合, 也就是说, 港湾共振并不是恰好在  $k = k_{nm}$  时发生. 按如下方式定义模式  $(n, m)$  的放大因子  $\sigma$ :

$$\begin{cases} \frac{\eta_H}{2A} = \sigma \frac{\cos m\pi(x-L)/L}{\cos m\pi} Y_n(y)Y_n(y') \\ \sigma = \frac{c/I}{\Delta - c/I + i\Delta/2I} \end{cases} \quad (5.140)$$

式 (5.141) 与模型例子 (5.45) 有相同的形式, 所以  $i\Delta/2I$  项伴随着辐射阻尼, 它现在依赖对频率的偏移  $\Delta$ . 考虑模式放大因子的平方

$$|\sigma|^2 = \frac{(c/I)^2}{(\Delta - c/I)^2 + (\Delta/2I)^2} \quad (5.141)$$

当

$$\Delta = \Delta_{\text{peak}} = \frac{c/I}{1 + 1/4I^2} \simeq \frac{c}{I} \quad (5.142)$$

时式 (5.141) 的分母达到极小值, 因此, 共振波数  $\tilde{k}_{nm}$  稍大于固有值  $k_{nm}$ ,

$$\tilde{k}_{nm} \simeq k_{nm} + \frac{c}{I} \quad (5.143)$$

当入港口宽度减小时, 修正值  $c/I$  随之减小.  $|\sigma|^2$  的峰值为

$$\max |\sigma|^2 \simeq 4I^2 \quad (5.144)$$

容易验证, 当

$$\Delta \simeq \frac{c}{I} \pm \frac{c}{2I^2} \quad (5.145)$$

时, 平方响应降低到峰值之半, 因而在  $|\sigma|^2 \sim k$  曲线图上,  $c/2I^2$  实质上是共振峰的半宽度. 根据  $I$  的定义, 入港口宽度的减小引起  $I$  的增加, 从而引起  $\max |\sigma|$  的增加和共振峰半宽度的减小. 因此, 使入港口变窄, 会减小把入射波准确地调谐到共振的机会, 然而一旦得到准确调谐, 峰值响应就提高了. 这个结果与港湾设计者的直观推论相矛盾了, 它们一般让入港口变窄来达到防护的目的; 这就是港湾伴谬的特征. 注意, 在共振峰变尖的过程中, 响应曲线之下的面积近似的为

$$\max |\sigma|^2 \cdot \frac{c}{2I^2} \simeq 2c \quad (5.146)$$

它与入港口的宽度无关, 且对于较高的模式 (较大的  $n$  或  $m$ ) 有较小的值 (Garret, 1970).

通过考察辐射阻尼 (它对应于式 (5.140) 中的  $i\Delta/I$  项), 也可解释港湾伴谬的数学推导. 共振时辐射阻尼正比于  $c/2I^2$ , 随着  $a$  的减小而迅速地趋于零, 从而使能量逸出港湾的困难增大, 振幅放大就随之加剧了.

合并式 (5.135) 和 (5.129), 得到共振峰附近流出港口的单位深度的流量

$$\frac{i\omega Q_0}{g} = \frac{2A}{I - c/I + i/2} \quad (5.147)$$

注意, 当入港口宽度  $a$  趋于零时,  $k = k_{nm}$ ,  $Q_0 = 0$ , 因而压力通过入港口传递出去, 而质量却不传递. 共振时, 共振流量为  $i4A$ , 入港口处对应的流速为

$$|U_E| = \left| \frac{Q_0}{2a} \right| = \frac{2gA}{\omega_{nm}a} = \frac{gAT_{nm}}{\pi a} \quad (5.148)$$

其中  $\omega_{nm}$  为共振频率,  $\omega_{nm} = \sqrt{gk}k_{nm}$ ,  $T_{nm}$  为对应的周期. 作为一个数值例子, 取  $a = 200\text{m}$ ,  $A = 0.2\text{m}$ ,  $T_{nm} = 10\text{min}$ , 则有

$$U_E = 6\text{m/sec}$$

估计防波堤的当地厚度为  $10\text{m}$ , 最大的当地 Reynolds 数为  $6 \times 10^7$ ; 因为流动是振动型的, 瞬时 Reynolds 数在振动过程中从  $0$  变到  $O(10^8)$ . 因此, 一定有旋涡泻落和湍流产生的可观的能量损失. 式 (5.148) 还表明,  $|U_E|$  反比于入港口宽度  $a$ , 这意味着, 入港口宽度越小, 真实流体效应越为重要.

至此, 我们讨论了  $n$  和  $m$  不同时为零的非 Helmholtz 模式.

### §5.7.3 Helmholtz 模式

前面的分析不适合  $n = m = 0$  的情况. 因为  $X_0$  和  $Y_0$  是常数, 所以整个水域的自由面一齐起伏, 这对应于 Helmholtz 模式即抽运模式.

根据式 (5.114), 得

$$\Delta = k, \quad K_n = k = \Delta \quad (5.149)$$

此式代替了式 (5.134),  $F$  和  $G$  的级数主项为  $n = 0$  的项, 港湾响应为

$$\eta_H = \frac{2A}{I - 1/k^2 BL + i/2 k^2 BL} \quad (5.150)$$

共振波数  $\tilde{k}_{00}$  由如下的超越方程近似地确定:

$$\frac{1}{k^2 BL} = I(k), \quad \text{即 } k^2 BL = \frac{1}{I(k)} \rightarrow k = \tilde{k}_{00} \quad (5.151)$$

当  $a$  减小时,  $I$  增大, 因此,  $k = \tilde{k}_{00}$  减小. 放大因子的平方为

$$|\sigma|^2 = \frac{(1/k^2 BL)^2}{(1/k^2 BL - I)^2 + 1/4} \quad (5.152)$$

当式 (5.151) 满足时, 得到  $|\sigma|^2$  的近似峰值  $4I^2$ . 当

$$1/K^2 BL - I = 1/4, \quad \text{即 } k - \tilde{k}_{00} = \pm \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{BLI^3}} \quad (5.153)$$

时,  $|\sigma|^2$  达到峰值的一半, 从而得到半宽度. 当  $a$  减小时,  $\max |\sigma|^2$  增大, 半宽度减小. 不过,  $|\sigma|^2 - k$  曲线之下的面积正比于

$$4I^2 \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{BLI^3}} = \sqrt{\frac{I}{BL}} \quad (5.154)$$

它随着  $a$  的减小而缓慢增大, 因而 Helmholtz 模式港湾佯谬的严重性甚于非 Helmholtz 模式的情形, 这表明这时的入港口摩擦损失的重要性更大, 必须予以考虑.

### §5.7.4 数值结果和实验结果

Ünlüata 和 Mei(1973) 对一大范围的波数, 从式 (5.131) 算得了方形港湾的响应; 这些结果与 Miles(1971) 用别的近似分析方法所得的结果一致. 他们研究了两种入口宽度,  $a$  减小的效应与前边分析的一致.

Miles(1971) 和 Lee(1971) 研究了圆形港湾, 得出了近似的解析结果. Lee 还作了实验, 其结果与线性理论非常相符. 唯一有显著差异之处出现在最低共振峰附近, 那儿摩擦力看来是重要的. 应该指出, Lee 的实验是在很深的水中做的 ( $kh \gg 1$ ), 与长波理论作比较的根据是当  $h$  为常数, 侧壁为铅直时线性理论的相似性. 不过, 在实验室中, 浅水里的非线性不容易避免, 可以期望, 浅水实验与线性化长波理论之间会有很大差异.

### §5.7.5 入口有限长度效应

Carrier, Shaw 和 Miyata(1971) 在分析单一港池的港湾时发现, 入港水道的有限长度或入港处防波堤的有限厚度所产生的效应定性上等同于薄壁口岸的宽度的缩小. 考虑连接处的

厚度为  $2d$  与宽度为  $2a$  同量级的情形, 这时, 连接处近场的 Laplace 方程的解可由 Schwarz-Christoffel 变换得到, 其结果由 Davey(1944) 以椭圆积分的形式给出, 并由 Guiney 等人 (1972) 用于研究深水波通过狭缝的传播. Ünlüata 和 Mei(1973) 在讨论港湾振动时, Tuck(1974) 在考察波通过小孔的传播时指出, 所有对薄壁缝得到的结果都可用于厚壁缝, 只要引进有效宽度  $a_e$  来代替实际宽度  $a$  就行了.  $a_e$  与  $a$  的关系如下:

$$a_e/a = 2pv^{1/2}, \quad d/a = -\frac{p}{2}(K'v'^2 - 2K; -2E') \quad (5.155)$$

其中

$$\begin{cases} p = (2E - v'^2 K)^{-1}, v' = \sqrt{1 - v^2} \\ E = E(v) \text{ 第一类全椭圆积分} \\ K = K(v) \text{ 第二类全椭圆积分} \\ E' = E(v') \\ K' = K(v') \end{cases} \quad (5.156)$$

导出式 (5.155) 的步骤相当繁杂, 可参看 Ünlüata 和 Mei(1973). 这里只提一下,  $a_e/a$  随  $d/a$  单调下降, 对大的  $d/a$ , 式 (5.155) 可以用如下的显式近似代替

$$\frac{a_e}{a} \simeq \frac{8}{\pi} \exp \left[ - \left( \frac{\pi d}{2a} + 1 \right) \right] \quad (5.157)$$

当  $d/a > 0.5$  时, 这个结果非常精确.

前面我们通过一些简单的模型分析了港湾振动, 特别是港湾共振现象. 这对港湾工程有重大的实际意义, 例如, 在设计防波堤时, 如果  $ka = O(1)$ , 向各个角度开口, 情况就很不同, 如果正开在波浪的高峰处, 港内波浪就会很大. 海岸附近的大陆架地形复杂, 本身也有共振现象, 会有边缘波存在, 入港后再有共振, 港内就会“无风起浪”. 因而, 在港口设计时, 必须对沿海风浪资料, 原有港湾地形, 防波堤产生的效应等等作详尽的分析研究. 要得到这些定量的资料, 单靠简单的模型是不够的, 往往需要借助于数值分析.





## 参考文献

- [1] Miles, J.W., & W. Munk(1961). Harbor Paradox. *J. Waterways Harbors Div. Proc. ASCE* **87**: 111-130.
- [2] Carrier, G.F.(1970). The dynamics of tsunamis. *Mathematical Problems in the Geophysical Science. I. Geophysical Fluid Dynamics*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 157-181.
- [3] Buchwald, V.T.(1971). The diffraction of tides by a narrow channel. *J. Fluid Mech.* **46**: 501-511.
- [4] Ünlüöala, Ü. & C.C. Mei(1973). Long wave excitation in harbors: an analytical study. Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology Technical Report 171.
- [5] Carrier, G.F., R.P. Shaw, & M. Miyata(1971). The response of narrow mouthed harbors in a straight coastline to periodic incident waves. *J. Appl. Mech.* **38E-2**: 335-344.



## 第六章 浮体动力学, 大尺度物体引起的波绕射和辐射

### §6.1 引言

轮船、驳船、浮筒、浮坞、防波堤、水下支撑的石油钻机等海洋结构物, 它们的安全和性能取决于对波浪的响应. 当海面平静时, 物体在重力、浮力和外部约束力的作用下保持平衡. 但是, 当海面有波浪时, 因为足够大的物体会使波产生绕射(散射), 入射波的部分动量被物体吸收, 物体受到动力作用. 如果约束不够牢固, 物体会发生振动, 引起向外传播的波. 当物体运动有加速度时, 周围的流体会在物体上产生反作用力. 这时, 物体、约束和周围的流体运动在动力学上是耦合的. 一般地, 物体的运动决定于绕射所产生的力, 流体的反作用力和约束力; 流体和约束的反作用力则又依赖于物体自身的运动.

现在的海底石油勘探中, 经常在浅海使用重型结构物, 把它们固定在海底, 既当储油器又当海面上钻井平台的支撑物. 这些结构物附近海床是否稳定, 结构物的安全和性能直接受到波浪压力的影响. 一般地, 海上结构物的设计会涉及到水、结构物和海床这三个因素的相互作用, 情况太复杂. 因此, 这里只讨论水和物体的相互作用.

必须先弄清物体尺度大小问题. 讨论波与物体相互作用问题时, 至少存在三个长度尺度: 物体的特征尺度  $a$ , 波长  $2\pi/k$ , 波幅  $A$ . 因此, 我们可以有两个长度尺度比:  $ka$  和  $A/a$ . 当  $ka \geq O(1)$  时, 我们可以把物体看成大尺度的, 这时因为出现波的绕射, 波的传播模式被物体改变了. 轮船, 水下储油器等属于这类物体. 当  $ka \ll 1$  时, 物体是小尺度的, 例如钻井构件, 它产生的波绕射不太重要. 在大物体的弯曲部位, 局部速度梯度增大, 粘性效应增大. 当  $A/a$  足够大时, 流动发生分离, 产生下泻旋涡, 引起型阻. 对于  $A/a \ll 1$  和  $ka = O(1)$  的情况, 可以用无粘线性化绕射理论进行分析. 这种理论现在已经得到充分发展, 并为许多实验所证实. 而  $A/a \geq O(1)$ , 和  $ka \ll 1$  对应的情况已经成为精心实验研究的课题, 但纯理论描述却较难.  $A/a \geq O(1)$  和  $ka = O(1)$  对应的情况, 涉及到陡波的绕射和分离, 是最难的, 研究得最少的领域.

大尺度浮体或者水下建筑的设计, 要求经得住狂涛骇浪(典型的波幅约为 15m). 但是, 由于非线性问题求解困难, 理论上对大幅波的绕射知之甚少. 而小振幅波与物体的相互作用研究, 进展很大, 已经成功地应用于船舶和海洋工程. 对于有关的论述可参看 Wehausen 和 Laitong(1960) 的经典工作. Wehausen(1971) 已经整理了瞬变波和随机波绕射的基本结果. 本章采用他们的部分论述, 并述及近年来提出的另外一些课题.

### §6.2 受约束浮体的线性化运动方程

物体与其周围水的运动, 决定了物体表面被水浸润部分的大小. 在浸润表面  $S_b$  上, 要满足运动学和动力学条件.

#### §6.2.1 运动学条件

把浸润表面  $S_b$  的瞬时位置用  $z = f(x, y, t)$  表示, 则根据法向速度连续, 我们有

$$\Phi_x f_x + \Phi_y f_y + f_t = \Phi_z, \quad z = f(x, y, t) \quad (6.1)$$

对于小振幅运动情况, 物体的运动特征可以用波的斜度  $\epsilon = kA$  衡量. 因此, 我们把  $f$  展开为  $\epsilon$  的幂级数如下:

$$z = f^{(0)}(x, y) + \epsilon f^{(1)}(x, y, t) + \epsilon^2 f^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad (6.2)$$

其中  $f^{(0)}(x, y)$  对应于  $S_b$  的静止位置, 即  $S_b^{(0)}$ . 类似地, 速度势也可以展开为

$$\Phi = \epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots \quad (6.3)$$

由于假设了物体作小振幅运动, 我们可以把在  $S_b$  上求值的函数在  $S_b^{(0)}$  附近展开. 取到  $O(\epsilon)$  阶, 式 (6.1) 给出

$$\Phi_x^{(1)} f_x^{(0)} + \Phi_y^{(1)} f_y^{(0)} + f_t^{(1)} = \Phi_z^{(1)}, \quad z = f^{(0)}(x, y, t) \quad (6.4)$$

现在必须找出  $f^{(1)}$ . 为此, 我们令刚体的转动中心为  $Q$ , 其坐标为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^{(0)} + \epsilon \mathbf{X}^{(1)}(t) + \epsilon^2 \mathbf{X}^{(2)}(t) + \dots \quad (6.5)$$

$$\mathbf{X} = (X, Y, Z)$$

其中,  $\mathbf{X}^{(0)}$  是  $Q$  的静止位置, 与  $t$  无关. 一般地, 我们不要求  $Q$  与物体的质心重合. 我们引入固定在物体上的坐标系  $\bar{\mathbf{x}}$ , 且当物体处在静止时,  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ . 如果物体的角位移是  $\epsilon \theta^{(1)}(t)$ , 它在平行于  $x, y$  和  $z$  轴的分量分别为  $\epsilon \alpha, \epsilon \beta$  和  $\epsilon \gamma$ , 则物体上任何一点的 Lagrange 坐标  $\mathbf{x}(t)$  与  $\bar{\mathbf{x}}$  的关系为 (准确到一阶)

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \epsilon [\mathbf{X}^{(1)} + \theta^{(1)} \times (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)})] + O(\epsilon^2) \quad (6.6)$$

在相同的精度下, 上式可以写成

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \epsilon [\mathbf{X}^{(1)} + \theta^{(1)} \times (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)})] + O(\epsilon^2) \quad (6.7)$$

写成分量形式

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - \epsilon [X^{(1)} + \beta(z - Z^{(0)}) - \gamma(y - Y^{(0)})] \\ \bar{y} &= y - \epsilon [Y^{(1)} + \gamma(x - X^{(0)}) - \alpha(z - Z^{(0)})] \\ \bar{z} &= z - \epsilon [Z^{(1)} + \alpha(y - Y^{(0)}) - \beta(x - X^{(0)})] \end{aligned}$$

由于静止时  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ , 因此

$$\bar{z} = f^{(0)}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (6.8)$$

把方程 (6.7) 代入到方程 (6.8), 并在表面  $S_b^{(0)}$  附近展开, 与方程 (6.2) 进行比较, 我们得到

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= Z^{(1)} + \alpha(y - Y^{(0)}) - \beta(x - X^{(0)}) \\ &\quad - f_x^{(0)} [X^{(1)} + \beta(z - Z^{(0)}) - \gamma(y - Y^{(0)})] \\ &\quad - f_y^{(0)} [Y^{(1)} + \gamma(x - X^{(0)}) - \alpha(z - Z^{(0)})] \end{aligned} \quad (6.9)$$

最后, 把方程 (6.4) 和方程 (6.9) 联立起来, 我们得到运动学条件:

$$-\Phi_x^{(1)} f_x^{(0)} - \Phi_y^{(1)} f_y^{(0)} + \Phi_z^{(1)} = -f_x^{(0)} [X_t^{(1)} + \beta_t(z - Z^{(0)}) - \gamma_t(y - Y^{(0)})]$$

$$\begin{aligned}
& -f_y^{(0)}[Y_t^{(1)} + \gamma_t(x - X^{(0)}) - \alpha_t(z - Z^{(0)})] \\
& + [Z_t^{(1)} + \alpha_t(y - Y^{(0)}) - \beta_t(x - X^{(0)})]
\end{aligned} \quad (6.10)$$

考虑到  $S_b^{(0)}$  上任一点指向物体内部的法向矢量  $\mathbf{n}$  可以表示为

$$\mathbf{n} = (-f_x^{(0)}, f_y^{(0)}, 1)[1 + (f_x^{(0)})^2 + (f_y^{(0)})^2]^{-1/2} \quad (6.11)$$

方程 (6.10) 可以改写为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} &= \mathbf{X}_t^{(1)} \cdot \mathbf{n} + [\theta_t^{(1)} \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(0)})] \cdot \mathbf{n} \\
&= \mathbf{X}_t^{(1)} \cdot \mathbf{n} + \theta_t^{(1)} \cdot [(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(0)}) \times \mathbf{n}]
\end{aligned} \quad (6.12)$$

取六维广义位移矢量  $\{X_\alpha\}$  和广义法向矢量  $\{n_\alpha\}$  如下:

$$\{X_\alpha\}^T = \{X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}, \alpha, \beta, \gamma\} = \{\mathbf{X}^{(1)}, \theta^{(1)}\}, \quad \{n_\alpha\} = \{\mathbf{n}, (\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(0)}) \times \mathbf{n}\} \quad (6.13)$$

其中

$$\begin{aligned}
n_4 &= -[n_2(z - Z^{(0)}) - n_3(y - Y^{(0)})] \\
n_5 &= -[n_3(x - X^{(0)}) - n_1(z - Y^{(0)})] \\
n_6 &= -[n_1(y - Y^{(0)}) - n_2(x - X^{(0)})]
\end{aligned}$$

$\{ \}$  表示列矢量,  $\{ \}^T$  表示它的转置矢量, 下标  $\alpha$  从 1 变到 6, 于是, 方程 (6.12) 变成

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} = \sum_{\alpha=1}^6 (X_\alpha)_t n_\alpha = \{X\}_t^T \{n\} \quad (6.14)$$

## 习题

(6.1) 证明: 精确到  $\epsilon^2$  阶, 运动学边界条件的修正是

$$\begin{aligned}
\Phi_x^{(2)} f_x^{(0)} + \Phi_y^{(2)} f_y^{(0)} + f_t^{(0)} &= \Phi_z^{(2)} - (\Phi_x^{(1)} f_x^{(1)} + \Phi_y^{(1)} f_y^{(1)}) \\
&+ f^{(1)}(\Phi_{zz}^{(1)} - \Phi_{xx}^{(1)} f_x^{(0)} - \Phi_{yy}^{(1)} f_y^{(0)})
\end{aligned}$$

但是, 要得到  $f^{(2)}$  必须修正方程 (6.6), 它只在转动很小时成立. 对于有限转动的情况, 要用 Euler 角的概念. (Goldstein 1950, 第四章.)

### §6.2.2 线动量守恒

我们把质量为  $M$  的浮体的质心位置用  $\mathbf{x}^c$  表示, 浮体的一部分可以高出水面, 线动量守恒要求

$$M\mathbf{x}_{tt}^c = \int_{S_b} P\mathbf{n}dS - Mge_3 + \mathbf{F} \quad (6.15)$$

其中  $S_b$  是浮体的瞬时浸润表面,  $\mathbf{F}$  是来自外部支撑物 (如缆绳, 受力支架等) 的约束力 (包括静力部分和动力部分),

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}^{(0)} + \epsilon \mathbf{F}^{(1)} + \dots \quad (6.16)$$

准确到一阶, 把方程 (6.7) 应用到  $\mathbf{x}^c$ ,

$$\mathbf{x}^c = \bar{\mathbf{x}}^c + \epsilon[\mathbf{X}^{(1)} + \theta^{(1)} \times (\bar{\mathbf{x}}^c - \mathbf{X}^{(0)})] + O(\epsilon^2)$$

方程 (6.15) 的左端变为

$$M\mathbf{x}_{tt}^c = \epsilon M[\mathbf{X}_{tt}^{(1)} + \theta_{tt}^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}^c - \mathbf{X}^{(0)})] + O(\epsilon^2) \quad (6.17)$$

把线性化 Bernoulli 方程

$$P = -\rho g f - \epsilon \rho \Phi_t^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (6.18)$$

应用到方程 (6.15) 右端的第一个积分中, 积分的第二项给出

$$-\epsilon \int_{S_b^{(0)}} \rho \Phi_t^{(1)} \mathbf{n} dS + O(\epsilon^2) \quad (6.19)$$

其中  $S_b$  已经近似地取为  $S_b^{(0)}$ . 现在我们考虑浮力项  $-\rho g f$ . 假设物体的水平截面随深度减小 (对于复杂几何形状的浮体, 所有最后结论仍然有效). 在某一时刻, 物体表面  $S_b$  上

$$\mathbf{n} dS = (-f_x, -f_y, 1) dx dy$$

整个  $S_b$  上的积分可以变为由  $S_b$  截出的水面的一部分  $S_A$  上的积分, 如图所示.

浮力的垂直分量为

$$-\rho g \int_{S_b} f n_3 dS = -\rho g \int_{S_A} (f^{(0)} + \epsilon f^{(1)}) dx dy$$

考虑到  $S_A$  与它的平衡位置  $S_A^{(0)}$  之差为  $O(\epsilon)$ , 在平衡的水面上  $f^{(0)} = 0$ , 因此, 用  $S_A^{(0)}$  替换  $S_A$  带来的误差为  $O(\epsilon^2)$ . 由于

$$\int_{S_A^{(0)}} f_x^{(0)} dx dy = \oint_{\Gamma} [f^{(0)}]_{x^-}^{x^+} dy$$

其中  $\Gamma$  是  $S_A^{(0)}$  的周线 (吃水线),  $x_+, x_-$  是等  $y$  线与  $\Gamma$  的交点. 在  $\Gamma$  上,  $f^{(0)} = 0$ , 上式右端的积分为零, 根据方程 (6.9), 我们有

$$\begin{aligned} -\rho g \int_{S_b} f n_3 dS &= -\rho g \int_{S_A^{(0)}} f^{(0)} dx dy \\ -\epsilon \rho g \int_{S_A^{(0)}} [Z^{(1)} + \alpha(y - Y^{(0)}) - \beta(x - X^{(0)})] dx dy &+ O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.20)$$

上式右端第一个积分正是物体浸在水下部分的体积  $V^{(0)}$ , 又称为静排水量. 联立方程 (6.17), (6.19), (6.20) 和 (6.20), 可以得出各阶的方程. 零阶量方程是

$$Mg = \rho g V^{(0)} + F_3^{(0)} \quad (6.21)$$

这正是阿基米德定律.

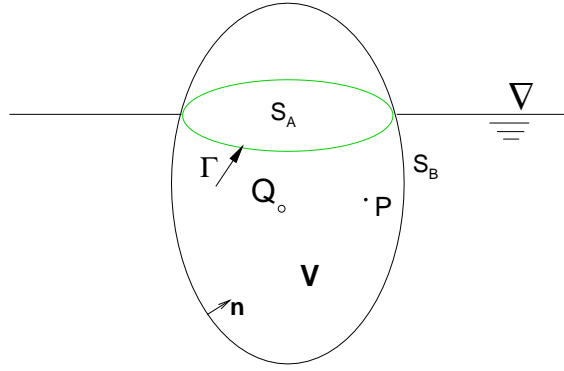


图 6.1: 浮体

$z$  方向一阶线性化动量方程为

$$\begin{aligned} & M[Z_{tt}^{(1)} + \alpha_{tt}(\bar{y}^c - Y^{(0)}) - \beta_{tt}(\bar{x}^c - X^{(0)})] \\ &= -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_3 dS + F_3^{(1)} - \rho g(I_2^A \alpha - I_1^A \beta + Z^{(1)} A^{(0)}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

其中  $A^{(0)}$  是  $S_A^{(0)}$  的面积,  $I_1^A$  和  $I_2^A$  是  $S_A^{(0)}$  的惯性矩,

$$I_1^A = \int_{S_A^{(0)}} (x - X^{(0)}) dx dy, \quad I_2^A = \int_{S_A^{(0)}} (y - Y^{(0)}) dx dy \quad (6.23)$$

当浮体完全浸润在水中时,  $S_A^{(0)} = 0$ , 浮体的动力平衡不受浮力影响. 考虑到

$$\rho g \int_{S_b} f n_1 dS = -\rho g \int_{S_b} f f_x dx dy = -\rho g \oint_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} f^2 \right)_{x_-}^{x_+} dy = O(\epsilon^2)$$

$$\rho g \int_{S_b} f n_2 dS = -\rho g \int_{S_b} f f_y dx dy = -\rho g \oint_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} f^2 \right)_{y_-}^{y_+} dx = O(\epsilon^2)$$

浮力在水平方向的效应可以忽略. 根据方程 (6.15), 在一阶近似下, 我们有  $x$  和  $y$  方向的线性化动量方程

$$M[X_{tt}^{(1)} + \beta_{tt}(\bar{x}^c - X^{(0)}) - \gamma_{tt}(\bar{y}^c - Y^{(0)})] = -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_1 dS + F_1^{(1)} \quad (2.22b)$$

$$M[Y_{tt}^{(1)} + \gamma_{tt}(\bar{x}^c - X^{(0)}) - \alpha_{tt}(\bar{y}^c - Y^{(0)})] = -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_2 dS + F_2^{(1)} \quad (2.22c)$$

零阶的水平动量平衡总是满足的.



## §6.2.3 角动量守恒

设  $V_b$  是整个浮体的体积, 取通过固定原点  $O$  的一个轴, 物体广义这个轴的角动量  $\mathbf{L}$  的变化率是

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_b} \mathbf{x} \times \mathbf{x}_{tt} dm = \int_{V_b} \mathbf{x} \times \mathbf{x}_{tt} dm$$

(因为  $\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_t = 0$ ). 物体的角动量守恒要求

$$\int_{V_b} \mathbf{x} \times \mathbf{x}_{tt} = \int_{S_b} \mathbf{x} \times P \mathbf{n} dS + \mathbf{x}^c \times (-Mg\mathbf{e}_3) + \mathbf{T} \quad (6.24)$$

其中  $\mathbf{T}$  表示外力的约束力矩. 考虑到

$$\int_{V_b} \mathbf{x} dm = M\mathbf{x}^c \quad (6.25)$$

线性化动量方程 (6.15) 可替换为

$$\int_{V_b} \mathbf{x}_{tt} dm = \int_{S_b} P \mathbf{n} dS - Mg\mathbf{e}_3 + \mathbf{F} \quad (6.26)$$

方程 (6.24) 减去  $\mathbf{X}$  与方程 (6.26) 的叉乘积, 注意到  $\mathbf{X} \times \mathbf{F} = -\mathbf{F} \times \mathbf{X}$ , 我们得到相对于转动中心  $Q$  的角动量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}^Q}{dt} &= \int_{V_b} (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \times \mathbf{x}_{tt} dm = \\ &= \int_{S_b} (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \times P \mathbf{n} dS + (\mathbf{x}^c - \mathbf{X}) \times (-Mg\mathbf{e}_3) + (\mathbf{T} + \mathbf{F} \times \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (6.27)$$

先考虑零阶平衡, 方程 (6.27) 的左端消失, 右端的约束力矩为

$$\mathbf{T} + \mathbf{F} \times \mathbf{X} = (\mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)} \times \mathbf{X}^{(0)}) + \epsilon(\mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{F}^{(1)} \times \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)} \times \mathbf{X}^{(1)}) + O(\epsilon^2)$$

为方便起见, 我们记

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathbf{T} + \mathbf{F} \times \mathbf{X}, \quad \mathcal{T}^{(0)} = \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)} \times \mathbf{X}^{(0)} \\ \mathbf{T} + \mathbf{F} \times \mathbf{X} &= \mathcal{T}^{(0)} + \epsilon\mathcal{T}^{(1)} + \epsilon\mathbf{T}^{(0)} \times \mathbf{X}^{(1)} \end{aligned} \quad (6.28)$$

把方程 (6.28) 代入 (6.27), 可见零阶量满足

$$-\rho g \int_{S_b^{(0)}} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)}) \times \mathbf{n} f^{(0)} dS + (\bar{\mathbf{x}}^c - \mathbf{X}^{(0)}) \times (-Mg\mathbf{e}_3) + \mathcal{T}^{(0)} = 0 \quad (6.29)$$

在静止表面  $S_b^{(0)}$  上, 上式积分中的  $\bar{\mathbf{x}}$  可以用  $\mathbf{x}$  替代. 利用导出方程 (6.20) 时的论证, 我们可以把上式第一个积分中的  $x$  分量写成

$$-\rho g \left[ \int_{S_A^{(0)}} (y - Y^{(0)}) f^{(0)} dx dy + \int_{S_A^{(0)}} f^{(0)} (f^{(0)} - Z^{(0)}) f_y^{(0)} dx dy \right]$$

通过对  $y$  的分部积分, 上式第二个积分为零. 考虑到  $f^{(0)} = -\int_{f^{(0)}}^0 dz$ , 上式第一个积分可以写成

$$\rho g \int_{V^{(0)}} (y - Y^{(0)}) dx dy dz \equiv \rho g I_2^V = \rho g V^{(0)} (y^V - Y^{(0)}) \quad (6.30)$$

其中  $V^{(0)}$  是浸润在水中的那部分物体体积,  $I_2^V$  是关于平面  $y = Y^{(0)}$  的一次矩,  $y^V$  是浮心的  $y$  坐标. 因此, 从方程 (6.29), 我们有

$$\rho g I_2^V - Mg(\bar{y}^c - Y^{(0)}) + \mathcal{T}_1^{(0)} = 0 \quad (6.31)$$

类似地, 我们定义  $I_1^V$  和  $x^V$  如下:

$$\rho g I_1^V \equiv \rho g V^{(0)}(x^V - X^{(0)}) \equiv \rho g \int_V^{(0)} (x - X^{(0)}) dx dy dz \quad (6.32)$$

得到  $y$  分量的方程

$$-\rho g I_1^V + Mg(\bar{x}^c - X^{(0)}) + \mathcal{T}_2^{(0)} = 0 \quad (6.33)$$

如果没有外部约束,  $\mathcal{T}^{(0)} = 0$ , 则我们有  $Mg = \rho V^{(0)}$ , 从方程 (6.31) 和 (6.33) 可以得出  $\bar{x}^c = x^V$ ,  $\bar{y}^c = y^V$ , 这说明质心和浮心必定在一条铅垂线上. 可以验证, 方程 (6.29) 中积分的  $z$  分量恒等于零, 对应的静平衡条件是

$$\mathcal{T}_3^{(0)} = 0 \quad (6.34)$$

现在考虑  $O(\epsilon)$  阶. 方程 (6.27) 的左端用  $\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)}$  替代  $\mathbf{x} - \mathbf{X}$ , 根据方程 (6.6),

$$\mathbf{x}_{tt} = \epsilon[\mathbf{X}_{tt}^{(1)} + \theta_{tt}^{(1)} \times (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)})]$$

方程 (6.27) 变成

$$\frac{\partial \mathbf{L}^Q}{dt} = \epsilon \left\{ \left[ \int_{V_b} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)}) dm \right] \times \mathbf{X}_{tt}^{(1)} + \theta_{tt}^{(1)} \int_{V_b} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)})^2 dm - \int_{V_b} [\theta_{tt}^1 (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)})] (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)}) dm \right\} \quad (6.35)$$

我们定义一次、二次惯性矩如下:

$$\begin{cases} I_1^b &= \int_{V_b} (\bar{x} - X^{(0)}) dm \equiv M(\bar{x}^c - X^{(0)}) \\ I_{11}^b &= \int_{V_b} (\bar{x} - X^{(0)})^2 dm \\ I_{12}^b &= \int_{V_b} (\bar{x} - X^{(0)})(\bar{y} - Y^{(0)}) dm \\ I_{13}^b &= \int_{V_b} (\bar{x} - X^{(0)})(\bar{z} - Z^{(0)}) dm \end{cases} \quad (6.36)$$

类似地, 我们可以定义其余的惯性矩  $I_2, I_{21}, I_{22}, I_{23}$ , 以及  $I_3, I_{31}, I_{32}, I_{33}$ , 因此, 我们有方程 (6.27) 左端的分量形式:

$$\begin{cases} \frac{dL_1^Q}{dt} &= \epsilon \{ I_2^b Z_{tt}^{(1)} - I_3^b Y_{tt}^{(1)} + (I_{22}^b + I_{33}^b) \alpha_{tt} - I_{21}^b \beta_{tt} - I_{31}^b \gamma_{tt} \} \\ \frac{dL_2^Q}{dt} &= \epsilon \{ I_3^b X_{tt}^{(1)} - I_1^b Z_{tt}^{(1)} + (I_{33}^b + I_{11}^b) \beta_{tt} - I_{32}^b \gamma_{tt} - I_{12}^b \alpha_{tt} \} \\ \frac{dL_3^Q}{dt} &= \epsilon \{ I_1^b Y_{tt}^{(1)} - I_2^b X_{tt}^{(1)} + (I_{11}^b + I_{22}^b) \gamma_{tt} - I_{13}^b \alpha_{tt} - I_{23}^b \beta_{tt} \} \end{cases} \quad (6.37)$$

其中没有零阶项.

方程 (6.27) 的右端为

$$\begin{aligned}
& -\epsilon \int_{S_b^{(0)}} \rho \Phi_t^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(0)}) \times \mathbf{n} dS - \rho g \left\{ \int_{S_b} f(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \times \mathbf{n} dS - \int_{S_b^{(0)}} f^{(0)}(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(0)}) \times \mathbf{n} dS \right\} \\
& + \epsilon [\theta^{(1)} \times (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{X}^{(0)})] \times (-Mg\mathbf{e}_3) + \epsilon (\mathcal{T}^{(1)} + \mathbf{F}^{(0)} \times \mathbf{X}^{(1)}) \quad (6.38)
\end{aligned}$$

这些项分别代表各种物理力矩: 第一项来自流体动力, 第二项来自浮力, 第三项来自惯性力, 第四项来自约束力. 下面我们分别讨论这些力矩.

流体动力力矩. 利用广义法向矢量 (6.13), 流体动力力矩的分量可以写为

$$-\epsilon \int_{S_b^{(0)}} \rho \Phi_t^{(1)} n_\alpha dS, \quad \alpha = 4, 5, 6 \quad (6.39)$$

浮力力矩. 写为分量形式

$$\begin{aligned}
-\rho g \int_{S_b} f(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \times \mathbf{n} dS &= -\rho g \int_{S_b} f \{ [(y-Y)n_3 - (z-Z)n_2] \mathbf{e}_1 + [(z-Z)n_1 - (x-X)n_3] \mathbf{e}_2 \\
&+ [(x-X)n_2 - (y-Y)n_1] \mathbf{e}_3 \} dS = \\
&= -\rho g \int_{S_A} f \{ [(y-Y) + (f-Z)f_y] \mathbf{e}_1 + [-(f-Z)f_x - (x-X)] \mathbf{e}_2 + [-(x-X)f_y + (y-Y)f_x] \mathbf{e}_3 \} dx dy
\end{aligned}$$

对含  $f_x, f_y$  的项进行分部积分, 考虑到在  $S_A$  的周线上  $f = \epsilon f^{(1)}$ , 这些项为  $O(\epsilon^2)$ , 因此我们有

$$-\rho g \int_{S_b} f(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \times \mathbf{n} dS = -\rho g \int_{S_A} [f(y-Y)\mathbf{e}_1 - f(x-X)\mathbf{e}_2] dx dy \quad (6.40)$$

显然, 方程 (6.38) 的  $\{ \}$  中的第二个积分与 (6.40) 相似. 根据方程 (6.9), 方程 (6.38) 中的  $x$  分量为

$$\begin{aligned}
-\rho g \left[ \int_{S_A} f(y-Y) dx dy + \int_{S_A^{(0)}} f^{(0)}(y-Y^{(0)}) dx dy \right] &= -\epsilon \rho g \int_{S_A^{(0)}} [f^{(1)}(y-Y^{(0)}) - f^{(0)}Y^{(1)}] dx dy \\
&- \epsilon \rho g \int_{S_A^{(0)}} [Z^{(1)} + \alpha(y-Y^{(0)}) - \beta(x-X^{(0)})](y-Y^{(0)}) dx dy \\
&+ \epsilon \rho g \int_{S_A^{(0)}} f_x^{(0)} [X^{(1)} + \beta(z-Z^{(0)}) - \gamma(y-Y^{(0)})](y-Y^{(0)}) dx dy \\
&+ \epsilon \rho g \int_{S_A^{(0)}} f_y^{(0)} [Y^{(1)} + \gamma(x-X^{(0)}) - \alpha(z-Z^{(0)})](y-Y^{(0)}) dx dy \\
&+ \int_{S_A^{(0)}} f^{(0)} Y^{(1)} dx dy
\end{aligned}$$

分部积分后, 上式的第二个积分为零, 第三个积分分部积分后再与第四个积分合并变成

$$-\epsilon \rho g \int_{S_A^{(0)}} f^{(0)} [\gamma(x-X^{(0)}) - \alpha(z-Z^{(0)})] dx dy$$

$$= +\epsilon\rho g \int_{V^{(0)}} [\gamma(x - X^{(0)}) - \alpha(z - Z^{(0)})] dx dy dz$$

其中利用了  $f^{(0)} = -\int_{f^{(0)}}^0 dz$ . 引入一次、二次矩如下:

$$\begin{cases} I_1^A = \int_{S_A^{(0)}} (x - X^{(0)}) dx dy, & I_2^A = \int_{S_A^{(0)}} (y - Y^{(0)}) dx dy \\ I_{22}^A = \int_{S_A^{(0)}} (y - Y^{(0)})^2 dx dy, & I_{12}^A = \int_{S_A^{(0)}} (x - X^{(0)})(y - Y^{(0)}) \\ I_1^V = \int_{V^{(0)}} (x - X^{(0)}) dx dy dz, & I_2^V = \int_{V^{(0)}} (y - Y^{(0)}) dx dy dz \end{cases} \quad (6.41)$$

我们得到浮力力矩的  $x$  分量

$$-\epsilon\rho g [Z^{(1)} I_2^A + \alpha I_{22}^A - \beta I_{12}^A - \gamma I_1^V + \alpha I_3^V] \quad (6.42)$$

类似地, 可以得到它的  $y$  分量

$$-\epsilon\rho g [Z^{(1)} I_1^A + \alpha I_{21}^A - \beta I_{11}^A - \beta I_3^V + \gamma I_2^V] \quad (6.43)$$

它的  $z$  分量为零.

惯性力矩. 求出方程 (6.38) 的三重矢量积, 得到

$$\begin{aligned} & (-Mg)[\gamma(\bar{x}^c - X^{(0)}) - \alpha(\bar{z}^c - Z^{(0)})] \mathbf{e}_1 \\ & + (Mg)[\beta(\bar{z}^c - Z^{(0)}) - \gamma(\bar{y}^c - Y^{(0)})] \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (6.44)$$

约束力矩. 它的形式为

$$\begin{aligned} & (\mathcal{T}_1^1 + F_2^{(0)} Z^{(1)} - F_3^{(0)} Y^{(1)}) \mathbf{e}_1 \\ & + (\mathcal{T}_2^1 + F_3 X^{(1)} - F_1^{(0)} Z^{(1)}) \mathbf{e}_2 \\ & + (\mathcal{T}_3^1 + F_1 Y^{(1)} - F_2^{(0)} X^{(1)}) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.45)$$

于是, 根据方程 (6.37)-(6.39), (6.42)-(6.45), 角动量守恒方程可以写为  $x$  分量

$$\begin{cases} I_2^b Z_{tt}^{(1)} - I_3^b Y_{tt}^{(1)} + (I_{22}^b + I_{33}^b) \alpha_{tt} - I_{21}^b \beta_{tt} - I_{13}^b \gamma_{tt} \\ = -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_4 dS - \rho g \{ Z^{(1)} I_2^A + \alpha (I_{22}^A + I_3^V) - \beta I_{12}^A - \gamma I_1^V \} \\ + Mg [\alpha (\bar{z}^c - Z^{(0)}) - g (\bar{x}^c - X^{(0)})] \\ + \mathcal{T}_1^{(1)} + F_2^{(0)} Z^{(1)} - F_3^{(0)} Y^{(1)} \end{cases} \quad (6.46)$$

$y$  分量

$$\begin{cases} I_3^b X_{tt}^{(1)} - I_1^b Z_{tt}^{(1)} + (I_{33}^b + I_{11}^b) \beta_{tt} - I_{32}^b \gamma_{tt} - I_{12}^b \alpha_{tt} \\ = -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_5 dS - \rho g \{ Z^{(1)} I_1^A + \alpha I_{21}^A + \beta (-I_{11}^V - I_3^V) + \gamma I_2^V \} \\ + Mg [\beta (\bar{z}^c - Z^{(0)}) - g (\bar{y}^c - Y^{(0)})] \\ + \mathcal{T}_2^{(1)} + F_3^{(0)} X^{(1)} - F_1^{(0)} Z^{(1)} \end{cases} \quad (6.46b)$$

$z$  分量

$$\begin{cases} I_1^b Y_{tt}^{(1)} - I_2^b X_{tt}^{(1)} + (I_{22}^b + I_{11}^b)\gamma_{tt} - I_{13}^b \alpha_{tt} - I_{23}^b \beta_{tt} \\ = -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_6 dS \\ + T_3^{(1)} + F_1^{(0)} Y^{(1)} - F_2^{(0)} X^{(1)} \end{cases} \quad (6.46c)$$

方程 (6.22) 和 (6.46) 可以作为流体问题的动力学边界条件.

#### §6.2.4 矩阵形式的浮体动力学方程

采用广义坐标 (6.13), 方程组 (6.22) 和 (6.46) 可以写成矩阵形式

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{X}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{X}}\} = \rho \int_{S_b^{(0)}} dS \Phi_t^{(1)} \{\mathbf{n}\} + \{\mathcal{F}\} \quad (6.47)$$

其中  $\{\mathcal{F}\}$  是广义的动约束力

$$\{\mathbf{F}^{(1)}, \mathcal{T}^{(1)} + \mathbf{F}^{(0)} \times \mathbf{X}^{(1)}\}^T \quad (6.48)$$

用方程 (6.26), 质量矩阵可以写为

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & N_3 & -N_2 \\ 0 & M & 0 & -N_3 & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & M & N_2 & -N_1 & 0 \\ 0 & -N_3 & N_2 & I_{22}^b + I_{33}^b & -I_{21}^b & -I_{13}^b \\ N_3 & 0 & -N_1 & -I_{12}^b & I_{11}^b + I_{33}^b & -I_{32}^b \\ -N_2 & N_1 & 0 & -I_{13}^b & -I_{23}^b & I_{22}^b + I_{11}^b \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

其中  $N_1 = M(\bar{x}^c - X^{(0)})$ ,  $N_2 = M(\bar{y}^c - Y^{(0)})$ ,  $N_3 = M(\bar{z}^c - Z^{(0)})$ . 浮力恢复力矩阵是  $[\mathbf{C}]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g A & \rho g I_2^A & -\rho g I_1^A & 0 \\ 0 & F_3^{(0)} & \rho g I_2^A - F_2^{(0)} & \begin{pmatrix} -\rho g (I_{22}^A + I_3^V) \\ -N_3 g \end{pmatrix} & -\rho g I_1^A & \begin{pmatrix} -\rho g I_1^V \\ +N_1 g \end{pmatrix} \\ -F_3^{(0)} & 0 & -\rho g I_1^A + F_1^{(0)} & \rho g I_{21}^A & \begin{pmatrix} \rho g (I_{11}^A + I_3^V) \\ -N_3 g \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\rho g I_2^V \\ +N_2 g \end{pmatrix} \\ F_2^{(0)} & -F_1^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

可见矩阵  $\mathbf{M}$  是对称的, 如果质心和转动中心重合, 则  $N_1 = N_2 = N_3$ , 矩阵  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{C}$  的许多元素恒等于零. 此外, 如果没有约束力,  $\mathbf{F}^{(0)} = 0$ , 由方程 (6.31) 和 (6.33) 可知,  $I_1^V = I_2^V = 0$ , 这时,  $\mathbf{C}$  也对称. 在弹性约束情况下, 约束力和力矩可以看成是  $X^{(1)}$  和  $\theta^{(1)}$  的线性函数.

#### 二维极限情况

考虑波对一个长的水平柱体的绕射问题. 在  $y$  方向取单位长度, 流体的运动在  $x-z$  平面内描述. 柱体有三个自由度, 它允许在  $x$  和  $z$  方向的平动和绕  $y$  轴的转动. 有关的广义坐标是 1,3,5. 取右手坐标系, 顺时针方向为正的 ( $y$  指向纸的背面).

线性化动量方程是

$$\begin{cases} MX_{tt}^{(1)} + N_3\beta_{tt} &= -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_1 dS + F_1^{(1)} \\ MZ_{tt}^{(1)} - N_1\beta_{tt} &= -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_3 dS + F_3^{(1)} + \rho g I_1^A \beta - \rho g Z^{(1)} A \end{cases} \quad (6.51)$$

关于  $y$  轴转动的角动量方程是

$$\begin{aligned} I_3^b X_{tt}^{(1)} - I_1^b Z_{tt}^{(1)} + (I_{33}^b + I_{11}^b)\beta_{tt} &= -\rho \int_{S_b^{(0)}} \Phi_t^{(1)} n_5 dS \\ &+ \rho g [Z^{(1)} I_1^A - \beta(I_{11}^A + I_3^V) + N_3 g \beta] \\ &+ T_2^{(1)} + F_3^{(0)} X^{(1)} - F_1^{(0)} Z^{(1)} \end{aligned} \quad (6.52)$$

其中

$$\begin{cases} I_1^A = \int_{S_A^{(0)}} (x - X^{(0)}) dx, & I_1^b = \int_{V_b} (x - X^{(0)}) dm \\ I_{11}^A = \int_{S_A^{(0)}} (x - X^{(0)})^2 dx, & I_{11}^b = \int_{V_b} (x - X^{(0)})^2 dm \\ I_3^V = \int_{V^{(0)}} (z - Z^{(0)}) dx dz \end{cases} \quad (6.53)$$

出现在方程 (6.51) 中的  $A$  是吃水线的长度, 即柱体在  $x$  轴占的线段,  $V^{(0)}$  是柱体在水下部分的截面积,  $V_b$  是柱体的整个截面积. 对应的矩阵方程是

$$\begin{aligned} &[\mathbf{M}] \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ Z^{(1)} \\ \beta \end{pmatrix} + [\mathbf{C}] \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ Z^{(1)} \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= -\rho \int_{S_b^{(0)}} dS \Phi_t^{(1)} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_3 \\ n_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ T_2^{(1)} + F_3^{(0)} X_1^{(1)} - F_1^{(0)} X_3^{(1)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.54)$$

其中

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M & 0 & N_3 \\ 0 & M & -N_1 \\ N_3 & -N_1 & I_{11}^b + I_{33}^b \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho g A & -\rho g I_1^A \\ -F_3^{(0)} & -\rho g I_1^A + F_1^{(0)} & \begin{pmatrix} \rho g (I_{11}^A + I_3^V) \\ -N_3 g \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

其中的惯性项按单位柱长度计算.

上面所用的是形式推导, 目的是为了防止漏掉任何一阶项. 对于比较简单的二维情况, 也可重新直观地考虑某些项. 考虑转动  $\beta$  所产生的力矩. 参照图 6.2, 对于边界元  $dS$  来说, 正的 (顺时针方向的)  $\beta$  将使铅垂方向的浮力数值增加

$$-\rho g (\theta^{(1)} \times (\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(0)})) \cdot \mathbf{n} dS = -\beta [(z - Z^{(0)}) n_1 - (x - X^{(0)}) n_3] \rho g dS \quad (6.57)$$

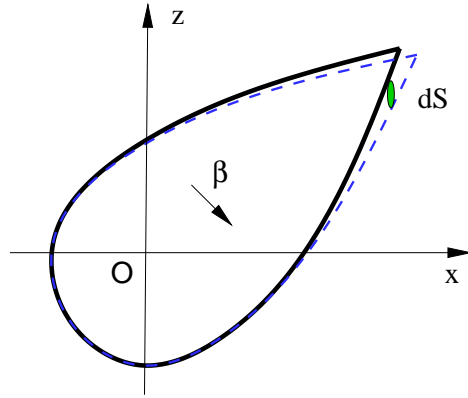


图 6.2: 二维浮体

所以总的恢复力矩为

$$-\rho g \beta \int_{S_B^0} [(z - Z^{(0)})n_1 - (x - X^{(0)})n_3](x - X^{(0)})dS \quad (6.58)$$

由于  $n_1 dS = dz$ ,  $n_3 dS = -dx$ , 所以上式变为

$$-\rho g \beta \left[ \int_{S_B^0} (z - Z^{(0)})(x - X^{(0)})dz + \int_{S_b^{(0)}} (x - X^{(0)})^2 dx \right] \quad (6.59)$$

由于  $(x - X^{(0)}) = \int_{x^{(0)}}^x dx$ , 可把式 (6.59) 的第一, 第二个积分分别改写成

$$\begin{cases} \int_{V^{(0)}} (z - Z^{(0)})dx dz = I_3^V \\ \int_{S_B^{(0)}} (x - X^{(0)})^2 dx = I_{11}^A \end{cases} \quad (6.60)$$

式 (6.59) 与 (6.52) 的  $\beta$  项一致, 且  $I_3^V, I_{11}^A$  可由初等的考虑导出. 为简洁起见, 以后将略去上标 (0), (1).

## §6.3 简谐运动

### §6.3.1 分解为绕射和辐射问题

主要是研究对于简谐激励的频率响应. 以下按照 (Haskind, 1944) 的方法, 把水动力学和物体力学分开. 我们引入复振幅

$$\{\Phi, \dot{X}_a\}^T = \text{Re}\{[\phi, V_\alpha]^T e^{-i\omega t}\} \quad (6.61)$$

这里  $\phi$  是速度势的振幅,  $\Phi = \text{Re}\phi e^{-i\omega t}$ ,  $V_\alpha$  表示物体广义速度的振幅. 把  $\phi$  分解为

$$\phi = \phi^D + \sum_{\alpha} V_\alpha \phi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad (6.62)$$

$\phi^D$  由以下方程和边界条件得出

$$\nabla^2 \phi^D = 0, \quad (\text{在流体中}) \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial t} - \frac{\omega^2}{g} \phi^D = 0, \quad (\text{在自由表面 } S_f \text{ 上 } (z = 0)) \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial z} = 0, \quad (\text{在海底 } B_0 \text{ 上 } z = -h) \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial n} = 0, \quad (\text{在物体表面 } S_b \text{ 上}) \quad (6.66)$$

$$\phi^D - \phi^I = 0, \quad (\text{在无穷远处, 波向外传播}) \quad (6.67)$$

这里  $\phi^I$  是入射波的势,  $\phi^D$  是入射波中物体固定不动时的绕射势. 采用方程 (6.13) 定义的广义矢量, 我们规定  $\phi_\alpha$  满足方程 (6.63)-(6.65), 以及

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} = n_\alpha, \quad (\text{在 } S_b \text{ 上}) \quad (6.68)$$

$$\phi_\alpha, \quad (\text{在无穷远处向外传播}) \quad (6.69)$$

显然, 总的速度势  $\phi$  满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{\alpha} V_\alpha n_\alpha, \quad (\text{在 } S_b \text{ 上}) \quad (6.70)$$

因此,  $\Phi = \text{Re}\phi e^{-i\omega t}$  满足方程 (6.4). 每一个  $\phi_\alpha$  对应于物体速度为 1 时强迫运动的广义模式, 是辐射势.

分解之后的问题  $\phi^D$  和  $\phi_\alpha$  只涉及水动力学问题, 可以先单独求解, 然后把求得的解应用于方程 (6.47) 或者 (6.54), 来确定物体的运动. 实际上, 求解  $\phi^D$  和  $\phi_\alpha$  通常是整个问题中最困难的.

对于很大的物体, 由波浪产生的变形是值得重视的问题. 若问题表面的运动可分解为实数值的简谐模式, 则对广义法向矢量  $n_\alpha$  进行解释之后, 仍然可以进行分解.

一般地, 我们总是假设远离物体的地方, 海底是水平的, 深度为  $h$ . 如果在  $\theta = \theta_1$  的方向有一入射波, 则对应的势为

$$\phi^I = -\frac{-gA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{ikr \cos(\theta-\theta_1)} \quad (6.71)$$



## §6.3.2 激励力和恢复力、任意形状物体的附加质量和辐射阻尼

我们现在引入适合于任意形状物体的某些一般的定义. 作用在物体上的广义力的第  $\alpha$  个分量

$$\bar{F}_\alpha = \int_{S_b} P n_\alpha dS = \text{Re}(F_\alpha e^{-i\omega t}) \quad (6.72)$$

这里

$$F_\alpha = i\rho\omega \int_{S_b} \phi n_\alpha dS \quad (6.73)$$

代入方程 (6.62), 我们有

$$\begin{aligned} F_\alpha &= i\rho\omega \int_{S_b} \phi^D n_\alpha dS = \sum_{\beta} i\rho\omega V_\beta \int_{S_b} \phi_\beta n_\alpha dS \\ &= F_\alpha^D + \sum_{\beta} V_\beta f_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (6.74)$$

列矢量

$$F_\alpha^D = i\rho\omega \int_{S_b} \phi^D n_\alpha dS \quad (6.75)$$

是绕射引起的作用在驻定物体上的激励力. 矩阵

$$[f_{\beta\alpha}]: \quad f_{\beta\alpha} = i\rho\omega \int_{S_b} \phi_\beta n_\alpha dS \quad (6.76)$$

称为恢复力矩阵. 分量  $f_{\beta\alpha}$  是简谐模式  $\beta$  引起的在  $\alpha$  方向的水力学反作用. 只考虑  $\beta$  模式的影响时, 恢复力为

$$\begin{cases} \text{Re}(V_\beta f_{\beta\alpha} e^{-i\omega t}) = \text{Re}[(\text{Re}f_{\beta\alpha} + i\text{Im}f_{\beta\alpha})V_{bt}e^{-i\omega t}] \\ = \text{Re} \left[ \left( i\rho\omega \int_{S_b} \text{Re}\phi_\beta n_\alpha dS - \rho\omega \int_{S_b} \text{Im}\phi_\beta n_\alpha dS \right) \cdot V_\beta e^{-i\omega t} \right] \\ = - \left( \rho \int_{S_b} \text{Re}\phi_\beta n_\alpha dS \right) \text{Re} \frac{d}{dt} (V_\beta e^{-i\omega t}) - \left( \rho\omega \int_{S_b} \text{Im}\phi_\beta n_\alpha dS \right) \text{Re}(V_\beta e^{-i\omega t}) \\ = - \left( \rho \int_{S_b} \text{Re}\phi_\beta n_\alpha dS \right) \ddot{X}_\beta - \left( \rho\omega \int_{S_b} \text{Im}\phi_{bt} n_\alpha \right) \dot{X}_\beta \end{cases} \quad (6.77)$$

上式中的第一个积分正比于物体的加速度, 是水力学惯性力, 因此, 我们称矩阵

$$[\mu]: \quad \mu_{\beta\alpha} = \rho \int_{S_b} \text{Re}\phi_\beta n_\alpha dS = \frac{1}{\omega} \text{Im}f_{\beta\alpha} \quad (6.78)$$

为附加质量矩阵. 方程 (6.77) 中的第二个积分正比于物体的速度, 我们称

$$[\lambda]: \quad \lambda_{\beta\alpha} = \rho\omega \int_{S_b} \text{Im}\phi_\beta n_\alpha dS = -\text{Re}f_{\beta\alpha} \quad (6.79)$$

为辐射阻尼矩阵. 后边我们将对此加以说明. 所有六个模式产生的反作用力可以用这些矩阵表示成

$$\bar{F}_\alpha^R = - \sum_{\beta} \mu_{\beta\alpha} \ddot{X}_\beta - \sum_{\beta} \lambda_{\beta\alpha} \dot{X}_\beta, \quad \bar{F}_\alpha = \bar{F}_\alpha^D + \bar{F}_\alpha^R \quad (6.80)$$

我们考虑物体一个周期内对流体所作的功的平均速率

$$\bar{E} = -\sum_{\alpha} \overline{F_{\alpha}^R \dot{X}_{\beta}} = \sum_{\alpha, \beta} \mu_{\beta\alpha} \overline{\ddot{X}_{\beta} \dot{X}_{\alpha}} + \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\beta\alpha} \overline{\dot{X}_{\beta} \dot{X}_{\alpha}} \quad (6.81)$$

因为  $\mu_{\beta\alpha} = \mu_{\alpha\beta}$  (以后证明), 上式第一项可写为

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \mu_{\beta\alpha} (\overline{\ddot{X}_{\beta} \dot{X}_{\alpha}} + \overline{\ddot{X}_{\alpha} \dot{X}_{\beta}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \mu_{\beta\alpha} \overline{\frac{d}{dt} (\dot{X}_{\beta} \dot{X}_{\alpha})} = 0 \quad (6.82)$$

在一个周期内这一项的贡献为零. 因此

$$\bar{E} = \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\beta\alpha} \overline{\dot{X}_{\beta} \dot{X}_{\alpha}} \quad (6.83)$$

说明振动物体往外输送的能量与  $[\lambda]$  有关, 故称之为辐射阻尼.

根据这些定义, 物体的矩阵方程 (6.47) 可以写为

$$[-\omega^2([\mathbf{M}] + [\mu]) + [\mathbf{C}] - i\omega[\lambda]]\{\xi\} = \{\mathbf{F}^D\} + \{\mathbf{F}\} \quad (6.84)$$

其中  $\{\xi\}$  是  $\{\mathbf{X}\}$  的振幅

$$\{\mathbf{X}\} = \text{Re}\{\{\xi\}e^{-i\omega t}\} \quad (6.85)$$

这里  $[\mathbf{M}]$  和  $[\mathbf{C}]$  可以从浮体平衡时的几何性质求出,  $[\mu]$ ,  $[\lambda]$  和  $\{\mathbf{F}^D\}$  由水动力学边值问题的解给出. 因此, 如果知道约束力, 由方程 (6.84) 就可以求出  $\{\xi\}$ . 例如, 对于自由浮体,  $\{\mathbf{F}\} \equiv 0$ ; 对于缆绳或者弹性铁塔,  $\{\mathbf{F}\}$  与支架的耦合可以用方程组来描述, 这时需要把它与  $\{\xi\}$  一起求解.

## §6.4 常深度情况下的速度势

### §6.4.1 远离物体处

假设海底只是在有限的距离内是不平的. 因此在某一有限大小的圆柱以外我们可以假设有常深度,  $h = \text{Const}$ . 这时, 用本征函数的展开式可以解析表达速度势的一般解. 我们先考虑二维情况. 用分离变量法  $\phi = \psi(x)f(z)$ , 容易证明  $\psi(x) = e^{\pm ikx}$ , 而且

$$f'' - k^2 f = 0, \quad -h < z < 0 \quad (6.86)$$

$$f' - \sigma f = 0, \quad z = 0, \quad \sigma = \omega^2/g \quad (6.87)$$

$$f' = 0, \quad z = -h \quad (6.88)$$

这是 Sturm-Liouville 型本征值问题, 其解正比于  $\cosh k(z+h)$ ,  $k$  的本征值条件就是通常的色散关系

$$\sigma = k \tanh kh, \quad \sigma = \omega^2/g \quad (6.89)$$

方程 (6.89) 可以通过图解来考察. 如图 6.3(a) 所示, 方程 (6.89) 有一对实根. 这两个根  $\pm k$  对应于同一个本征函数, 因此只需考察一个正的实根. 我们引入归一化的本征函数

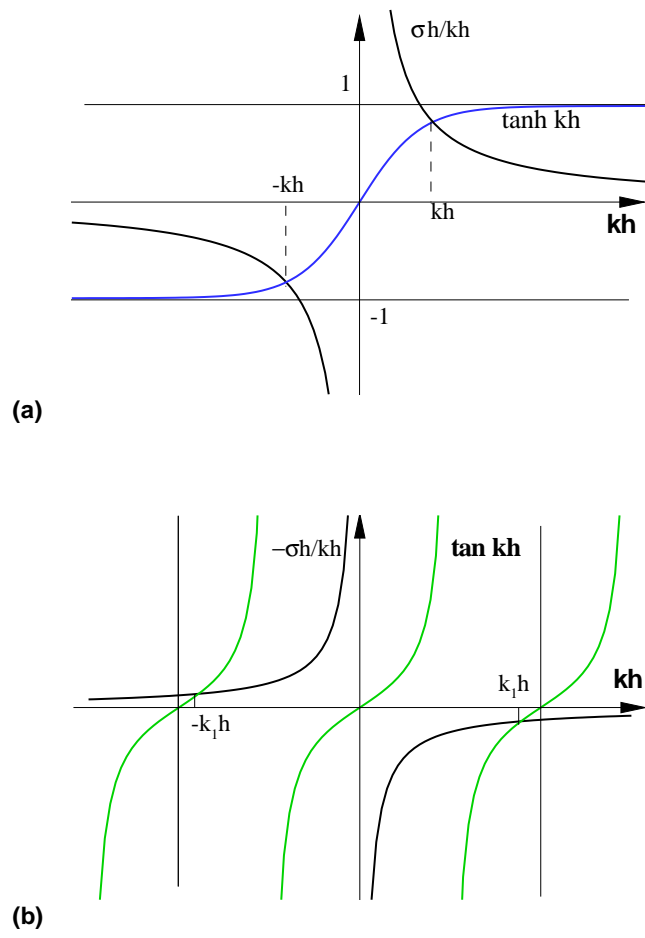


图 6.3: 色散关系的解. (a) 实数解; (b) 虚数解

$$f_0(z) = \frac{\sqrt{2} \cosh k(z+h)}{(h + \sigma^{-1} \sinh^2 kh)^{1/2}}, \quad \int_{-h}^0 f_0^2(z) dz = 1 \quad (6.90)$$

另外, 我们还有虚数本征值  $k = i\kappa$ , 对应于

$$\sigma = -\kappa \tan \kappa h \quad (6.91)$$

的实数解. 它们是图 6.3(b) 上的  $\tan \kappa h$  与  $-\sigma h/\kappa h$  的交点. 因为  $\tan \kappa h$  有无穷多支, 所以有无穷多个离散的根  $\kappa = \pm k_n$ . 同样地, 只需考察正根  $k_n$ . 因为

$$\frac{\pi}{2} < k_1 h < \pi, \quad \frac{3\pi}{2} < k_2 h < 2\pi, \dots, \\ \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi < k_n h < n\pi \quad (6.92)$$

随着  $n$  的增加,  $k_n h$  接近于  $n\pi$ . 相应的归一化本征函数是

$$f_n(z) = \frac{\sqrt{2} \cos k_n(z+h)}{(h - \sigma^{-1} \sin^2 k_n h)^{1/2}}, \quad \int_{-h}^0 f_n^2(z) dz = 1 \quad (6.93)$$

利用本征值条件 (6.89) 或者 (6.91), 通过直接积分就可以证明: 不同的本征函数相互正交,

$$\int_{-h}^0 f_m(z) f_n(z) dz = \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.94)$$

集合  $\{f_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  是完备的 (Kriesel, 1949). 因此区间  $[-h, 0]$  上的任何一个函数  $G(z)$  可以用关于  $\{f_n\}$  的 Fourier 级数表示. 于是, 我们可以用

$$\phi(x, z) = a_0 f_0(z) e^{\pm ikx} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m f_m(z) e^{\mp k_m x}, \quad x \in (x_+, \infty), \quad \text{or} \quad x \in (-\infty, x_-) \quad (6.95)$$

表示辐射波或者散射波的势. 第一项对应于传播模式, 而级数项称为非传播模式, 只在局部是重要的.

现在我们考察柱坐标下的三维情况. 柱坐标下的 Laplace 方程是

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.96)$$

对应的实的、虚的本征值的解是

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} H_m^{(1)}(kr) \\ H_m^{(2)}(kr) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} f_0(z), & m = 0, 1, 2, \dots \\ \begin{pmatrix} I_m(k_n r) \\ K_m(k_n r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} f_n(z), & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.97)$$

这里  $H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$  分别是第一类、第二类 Hankel 函数,  $I_m, K_m$  分别是第一类、第二类修正的 Bessel 函数, 下标  $m$  表示阶数. 势函数在无穷远处满足辐射条件的最一般的表达式为

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_m H_m^{(1)}(kr) (\alpha_{0m} \cos m\theta + \beta_{0m} \sin m\theta) f_0(z) + \\ & + \sum_m \sum_n K_m(k_n r) (\alpha_{nm} \cos m\theta + \beta_{nm} \sin m\theta) f_n(z) \end{aligned} \quad (6.98)$$

因为  $K_m(k_n r)$  随  $r$  指数衰减, 因此, 与  $K_m(k_n r)$  有关的项是非传播模式.

一般地, 根据方程 (6.95) 和方程 (6.98), 辐射条件可以表示为以下更明确的数学形式.

二维情况. 对于  $\phi = \phi' \equiv \phi^D - \phi^I$  或者  $\phi_\alpha$ ,

$$\phi \rightarrow -\frac{igA_\pm \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{\pm ikx}, \quad \text{当 } kx \rightarrow \pm\infty \text{ 时} \quad (6.99)$$

或者, 等价地

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \mp ik\phi \rightarrow 0, \quad \text{当 } kx \rightarrow \pm\infty \text{ 时} \quad (6.100)$$

三维情况. 应用  $H_m^{(1)}$  的渐近公式,  $\phi$  可写为

$$\begin{aligned} \phi &\sim -\frac{g}{\omega} \sum_m H_m^{(1)}(kr) (\alpha'_{0m} \cos m\theta + \beta'_{0m} \sin m\theta) \cdot \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ &\sim \left\{ \sum_m (\alpha'_{0m} \cos m\theta + \beta'_{0m} \sin m\theta) e^{\frac{-im\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} \right\} \\ &\quad \cdot \left[ -\frac{ig}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\frac{\pi}{4}} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \right] \end{aligned} \quad (6.101)$$

若令  $\mathcal{A}(\theta) = \left\{ \sum_m (\alpha'_{0m} \cos m\theta + \beta'_{0m} \sin m\theta) e^{\frac{-im\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} \right\}$ , 则我们有

$$\phi \sim \frac{-ig\mathcal{A}(\theta)}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\frac{\pi}{4}} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \quad kr \rightarrow \infty \quad (6.102)$$

这里  $\mathcal{A}(\theta)$  表示径向传播的波随角度的变化. 辐射条件的另一种表示方法是

$$\sqrt{kr} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) \rightarrow 0, \quad kr \rightarrow \infty \quad (6.103)$$

它恰好与浅水波的情况相同.

## 习题

- (6.2) 在常深度海洋中, 沿  $y$  等间距固定放置一排对称物体, 对称轴与  $x$  轴平行. 一平面波列沿  $x$  轴方向入射. 试叙述问题的提法, 求出反射侧和透射侧的速度势的一般表达式, 给出传播模式和非传播模式的形式, 说明间距对传播模式数目的影响

### §6.4.2 整个流体区域

应用 Green 定理和 Green 函数, 我们可以给出整个流体区域的形式解. 对于二阶可微函数  $f$  和  $g$ , 相应的 Green 定理是

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS \quad (6.104)$$

这里  $\Omega$  是封闭的区域,  $\partial\Omega$  是其边界,  $\mathbf{n}$  是  $\partial\Omega$  的单位法向矢量, 指向  $\Omega$  的外部.

Green 函数  $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$  定义为单位强度的源在点  $\mathbf{x}_0$  的振动所产生的在任意一点  $\mathbf{x}$  的势. 决定  $G$  的条件如下:

二维情况. 取  $\mathbf{x} = (x, z)$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_0, z_0)$ , 则

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)G = \delta(x-x_0)\delta(z-z_0), \quad \text{在区域中} \quad (6.105)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \sigma G = 0, \quad \sigma = \omega^2/g, \quad \text{当 } z = 0 \quad (6.106)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad \text{当 } z = -h \quad (6.107)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} \mp ikG = 0, \quad \text{当 } k|x-x_0| \rightarrow \infty \quad (6.108)$$

三维情况. 取  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , 这时方程 (6.105) 和 (6.108) 替换为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)G = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \quad \text{在区域中} \quad (6.109)$$

$$\sqrt{kr} \left(\frac{\partial G}{\partial r} \mp ikG\right) \rightarrow 0, \quad kr \rightarrow \infty \quad (6.110)$$

但是方程 (6.106)-(6.107) 形式不变. 我们先把 Green 定理辐射势或者散射势和 Green 函数, 即  $f = \phi$ , 而  $\phi = \phi^R$  或者  $\phi^S$ ,  $g = G$ . 考察三维情况. 令  $\Omega$  为控制体积,  $\partial\Omega$  由自由表面  $S_f$ , 物体表面  $S_b$ , 海底  $B_0$  和包围物体的半径很大的铅垂圆柱侧面  $S_\infty$ . 为简单起见, 假设海底到处是水平的, 根据方程 (6.104),

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi) d\Omega \\ &= \left\{ \int_{S_f} + \int_{S_b} + \int_{B_0} + \int_{S_\infty} \right\} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

应用  $\phi$  和  $G$  满足的方程和  $\delta$  函数的性质, 上式的左端简化为  $\phi(\mathbf{x}_0)$ . 应用  $\phi$  和  $G$  的边界条件, 可见在  $S_f, B_0$ , 和  $S_\infty$  上的积分为零, 因此, 我们有

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \int_{S_b} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS, \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega, \notin S_b \quad (6.111)$$

应用 Green 函数的对称性,

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0|\mathbf{x}) \quad (6.112)$$

把方程 (6.111) 中的  $\mathbf{x}_0$  与  $\mathbf{x}$  进行交换, 我们得到

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{S_b} \left( \phi(\mathbf{x}_0) \frac{\partial G}{\partial n_0} - G \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0)}{\partial n_0} \right) dS, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \notin S_b \quad (6.113)$$

因此, 只要  $\phi$  和  $\partial\phi/\partial n$  在物体表面上的值已知, 就可以知道任何地方的  $\phi(\mathbf{x})$ . 实际上,  $\phi(\mathbf{x}_0)$  事先不知道, 物体表面上只给出法向速度  $\partial\phi/\partial n$ . 因此, 方程 (6.113) 只是给出了  $\phi$  的一种形式.

为了给出当  $kr \gg 1$  时  $\phi$  的渐近表达式, 需要  $G$  的显式表达式. 在三维情况下, 根据本章的附录,  $G$  的一种形式如下:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = & -\frac{i}{2} \frac{\sigma^2 - k^2}{h(k^2 - \sigma^2) + \sigma} \cosh k(z_0 + h) \\ & \cdot \cosh k(z + h) H_0^{(1)}(kR) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 + \sigma^2}{h(k_n^2 + \sigma^2) - \sigma} \\ & \cdot \cos k_n(z_0 + h) \cos k_n(z + h) K_0(k_n R) \end{aligned} \quad (6.114)$$

这里

$$R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$$

当  $kR \gg 1$  时, 只要保留传播模式就够了,  $G$  替换为

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) \cong C_0 \cosh k(z + h) \cosh k(z_0 + h) \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{ikR - i\pi/4} \quad (6.115)$$

其中  $C_0$  是一个常系数

$$C_0 = \frac{(-i/2)(\sigma^2 - k^2)}{h(k^2 - \sigma^2) + \sigma} \quad (6.116)$$

应用极坐标

$$(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta), \quad (x_0, y_0) = r_0(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$$

当  $r \gg r_0$  时, 把  $R$  近似为

$$R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)]^{1/2} \cong r - r_0 \cos(\theta - \theta_0)$$

我们有

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) \cong & C_0 \cosh k(z + h) \cosh k(z_0 + h) \\ & \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{ikr} e^{-ikr_0 \cos(\theta - \theta_0)} e^{-i\pi/4} \end{aligned} \quad (6.117)$$

把上式代入方程 (6.113), 我们得到

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) \cong & C_0 \cosh^2 kh \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{ikr - i\pi/4} \\ & \cdot \int_{S_b} \left[ \left( \phi \frac{\partial}{\partial n_0} - \frac{\partial \phi}{\partial n_0} \right) \frac{\cosh k(z_0 + h)}{\cosh kh} e^{-ikr_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right] dS \end{aligned} \quad (6.118)$$

上式可以改写为

$$\phi \cong \frac{-igA(\theta)}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{ikr - i\pi/4} \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \quad (6.119)$$

其中

$$A(\theta) = \frac{i\omega}{g} C_0 \cosh^2 kh \int_{S_b} \left[ \left( \phi \frac{\partial}{\partial n_0} - \frac{\partial \phi}{\partial n_0} \right) \right]$$

$$\frac{\cosh k(z_0 + h)}{\cosh kh} e^{-ikr_0 \cos(\theta - \theta_0)} \Big] dS \quad (6.120)$$

当物面上  $\phi$  和  $\partial\phi/\partial n$  已知时, 通过积分就可以得到  $[\mathcal{A}](\theta)$ .

在二维情况下, Green 函数可以表示为

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = & -\frac{i}{k} \left( h + \frac{1}{\sigma} \sinh^2 kh \right)^{-1} e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z_0 + h) \\ & \cdot \cosh k(z + h) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \left( h + \frac{-1}{\sigma} \sin^2 k_n h \right)^{-1} \\ & \cdot e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z_0 + h) \cos k_n(z + h) \end{aligned} \quad (6.121)$$

推导见附录. 当  $|k\mathbf{x}| \gg 1$  时, 保留传播模式即可, 方程 (6.113) 可写为

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) \cong & -\frac{i}{k} \frac{\cosh^2 kh e^{\pm ikx}}{h + \sinh^2 kh/\sigma} \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \\ & \int_{S_b} \left[ \left( \phi \frac{\partial}{\partial n_0} - \frac{\partial \phi}{\partial n_0} \right) e^{\mp kx_0} \frac{\cosh k(z_0 + h)}{\cosh kh} \right] dS \end{aligned} \quad (6.122)$$

当  $x \rightarrow \infty$  时, 波幅为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\pm} = & \frac{\omega}{gk} \frac{\cosh^2 kh}{h + \sinh^2 kh/\sigma} \int_{S_b} \left[ \left( \phi \frac{\partial}{\partial n_0} - \frac{\partial \phi}{\partial n_0} \right) \right. \\ & \left. e^{\mp ikx_0} \frac{\cosh k(z_0 + h)}{\cosh kh} \right] dS \end{aligned} \quad (6.123)$$

## §6.5 铅垂圆柱产生的散射

一般地, 我们取从  $x = -\infty$  来的入射波. 对于铅垂圆柱的散射情况, 应用正交性质 (6.94), 可以证明非传播模式都为零. 因此, 我们可以把势写为

$$\phi = -\frac{ig}{\omega} \eta(x, y) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \quad (6.124)$$

这里  $\eta$  表示自由面位移, 满足二维 Helmholtz 方程. 入射波的自由面是

$$\eta^I = A e^{ikx} = A e^{ikr \cos \theta} = A \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (i)^m J_m(kr) \cos m\theta \quad (6.125)$$

对于铅垂圆柱的波散射情况, 总的自由面位移是

$$\eta = A \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (i)^m \left\{ J_m(kr) - H_m(kr) \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \right\} \cos m\theta \quad (6.126)$$

其中  $H_m \equiv H_m^{(1)}$ ,  $H'_m(s) = \frac{d}{ds} H_m$ .

动压为

$$P(r, \theta, z) = i\omega\rho\phi = \rho g \eta \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} \quad (6.127)$$



根据方程 (6.126), 圆柱上任意一点的压力是

$$P(a, \theta, z) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (i)^m \left\{ J_m(ka) - H_m(ka) \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \right\} \cos m\theta \quad (6.128)$$

考虑到恒等式

$$J_m(z)H'_m(z) - J'_m(z)H_m(z) = \frac{2i}{\pi z}$$

压力计算式 (6.128) 变成

$$P(a, \theta, z) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(i)^m \epsilon_m \cos m\theta}{\pi ka H'_m(ka)} \quad (6.129)$$

该级数也表示圆柱面上归一化的自由面位移. 当  $ka$  较小时, 圆柱面上压力比较均匀; 当  $ka$  较大时, 压力变化比较复杂, 如图 6.4 所示. 在圆柱的单位高度的水平薄层上, 沿波的传播方向的力为

$$\frac{dF_x}{dz} = -a \int_0^{2\pi} P(a, \theta, z) \cos \theta d\theta$$

代入方程 (6.128), 应用余弦函数的正交性质, 可知方程 (6.129) 的级数中只留下  $m=1$  的项, 因此我们有

$$\frac{dF_x}{dz} = \frac{4A}{ka} \frac{\rho g a}{H'_1(ka)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (6.130)$$

作用在圆柱上的水平合力是

$$F_x = \int_{-h}^0 \frac{dF_x}{dz} dz = \frac{4\rho g A a h}{ka H'_1(ka)} \frac{\tanh kh}{kh} \quad (6.131)$$

其最大值在  $ka=1$  附近.

## §6.6 简谐波绕射和辐射的一些恒等式

与多数波动问题相同, 水波问题的物理量之间也存在一些恒等式. 这些恒等式可以增进我们对问题的理解, 也可用于校对解析理论或者数值方法的正确性. 这些恒等式的应用, 有时还可以减少对实际问题的计算量. 当深度为常数时, 这些恒等式早就被人们认识 (Wehausen, 1971). 它们可以通过在 Green 公式

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS$$

中, 把  $f, g$  取为  $\phi^D, \phi_\alpha$  的不同组合而得出. 我们假设  $f, g$  为任意两个速度势  $\phi, \psi$ , 故 Green 公式中的体积分恒等于零. 当  $\partial\Omega$  是由自由表面  $S_f$ , 物面  $S_b$ , 海底  $B_0$  和半径很大的铅垂圆柱侧面  $S_\infty$  的组合时, 由于海底  $B_0$  对面积分没有贡献, 且根据自由面条件, 自由面对面积分也无贡献. 因此, 我们有

$$\int_{S_b + S_\infty} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (6.132)$$

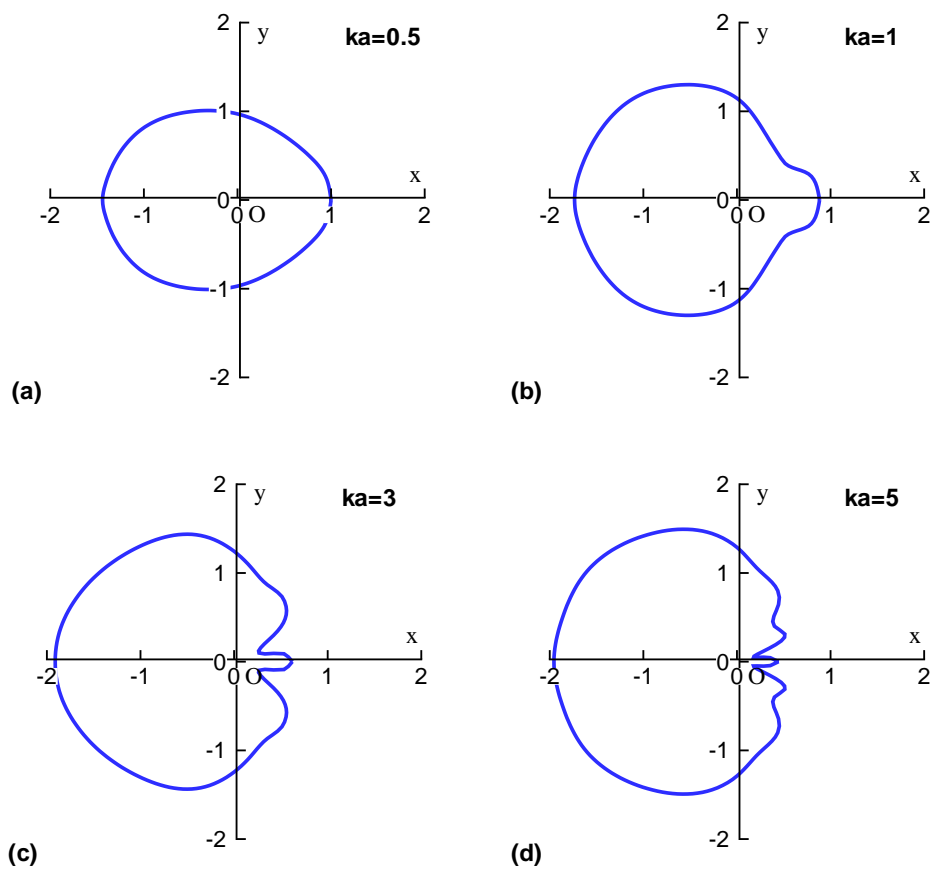


图 6.4: 圆柱上压力的极分布. (a)  $ka = 0.5$ ; (b)  $ka = 1$ ; (c)  $ka = 3$ ; (d)  $ka = 5$ .

令  $\psi^*$  满足  $\psi$  满足的方程的共轭方程, 取  $f = \phi, g = \psi^*$ , 我们得到

$$\int_{S_b+S_\infty} \left( \phi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} - \psi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (6.133)$$

假设在无穷远处,  $\phi$  和  $\psi$  是外行波, 则方程 (6.132) 中在圆柱面  $S_\infty$  的积分消失. 根据辐射条件 (6.103), 我们有

$$\int_{S_\infty} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (6.134)$$

因此,

$$\int_{S_b} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (6.135)$$

### §6.6.1 能量辐射和渐近性质

现在, 我们取简谐模式的辐射势  $\phi = \phi_\alpha, \psi = \phi_\beta$ , 它们满足方程 (6.103). 根据方程 (6.135) 和物面的边界条件可以得到

$$\int_{S_b} \phi_\beta n_\alpha dS = \int_{S_b} \phi_\alpha n_\beta dS \quad (6.136)$$

根据方程 (6.75), (6.78) 和 (6.79) 给出的定义, 应用方程 (6.136) 我们得到

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}, \quad f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha} \quad (6.137)$$

即阻尼矩阵, 附加质量矩阵和恢复力矩阵必须是对称的. 可以证明阻尼矩阵是半正定的, 其对角线元素非负. 应用

$$\phi^R = \sum V_\alpha \phi_\alpha$$

物体对水做功的平均速率可以写为

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ (i\omega\rho) \int_{S_b} \phi^R \left( \frac{\partial \phi^R}{\partial n} \right)^* dS \right] \\ &= \frac{1}{2} \omega\rho \operatorname{Im} \int_{S_b} \phi^R \left( \frac{\partial \phi^R}{\partial n} \right)^* dS \\ &= \frac{1}{2} \omega\rho \frac{1}{2i} \int_{S_b} \left[ \phi^R \left( \frac{\partial \phi^R}{\partial n} \right)^* - (\phi^R)^* \left( \frac{\partial \phi^R}{\partial n} \right) \right] dS \end{aligned}$$

根据方程 (6.133),  $S_b$  的积分等于  $S_\infty$  的积分的负值, 因此

$$\bar{E} = \frac{i\omega\rho}{4} \int_{S_\infty} \left[ \phi^R \left( \frac{\partial \phi^R}{\partial n} \right)^* - (\phi^R)^* \left( \frac{\partial \phi^R}{\partial n} \right) \right] dS \quad (6.138)$$

根据  $\phi^R$  的渐近表达式 (6.102), 取其共轭, 然后代入以上积分, 我们有

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{i\omega\rho}{4} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^0 \left( -\frac{ig}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \right)^2 2ik |\mathcal{A}^R(\theta)|^2 \\ &\quad \cdot \frac{\cosh^2 k(z+h)}{\cosh^2 kh} r d\theta dz \geq 0 \end{aligned} \quad (6.139)$$

该式说明如果物体由外界强迫运动, 则能量只能从物体传向水. 等号对应于特定频率, 这时振动物体不辐射任何能量.  $\overline{E}$  的非负, 意味着  $[\lambda]$  是半正定的.

令  $\phi = \phi_\alpha$ ,  $\psi^* = \phi_\beta^*$ , 由方程 (6.133), 我们得到

$$\int_{S_b} (\phi_\alpha n_\beta - \phi_\beta^* n_\alpha) dS = - \int_{S_\infty} \left( \phi_\alpha \frac{\partial \phi_\beta^*}{\partial n} - \phi_\beta^* \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} \right) dS$$

应用对称关系式 (6.136), 上式左端简化为

$$2i \operatorname{Im} \int_{S_b} \phi_\alpha n_\beta dS = \frac{2i \lambda_{\alpha\beta}}{\rho\omega}$$

因此, 应用辐射条件得

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta} &= -\frac{\rho\omega}{2i} \int_{S_\infty} \left\{ \phi_\alpha \frac{\partial \phi_\beta^*}{\partial n} - \phi_\beta^* \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} \right\} dS \\ &= \rho\omega k \int_{S_\infty} \phi_\alpha \phi_\beta^* dS \end{aligned} \quad (6.140)$$

当  $\alpha = \beta$  时, 我们得到

$$\lambda_{\alpha\alpha} = -\rho\omega \operatorname{Im} \int_{S_\infty} \phi_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha^*}{\partial n} dS = \rho\omega k \int_{S_\infty} |\phi_\alpha|^2 dS > 0 \quad (6.141)$$

说明阻尼矩阵可以用远场振幅表示.

### 二维情况

根据方程 (6.99),  $\phi_\alpha$  的渐近性质是

$$\phi_\alpha \sim \frac{ig\mathcal{A}_\alpha^\pm}{\omega} e^{\pm ikx} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (6.142)$$

这里  $\mathcal{A}_\alpha^\pm$  具有时间的量纲. 方程 (6.140) 的右端是由  $x \rightarrow \pm\infty$  时  $S_\infty^\pm$  上的两个积分组成的, 把上式直接代入后可得

$$\lambda_{\alpha\beta} = \rho g C_g (\mathcal{A}_\alpha^- \mathcal{A}_\beta^{*-} + \mathcal{A}_\alpha^+ \mathcal{A}_\beta^{+*}) \quad (6.143)$$

### 三维情况

根据方程 (6.102), 我们得到  $\phi_\alpha$  的渐近性质如下:

$$\phi_\alpha \sim \frac{ig\mathcal{A}_\alpha(\theta)}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\pi/4}, \quad r \rightarrow \infty \quad (6.144)$$

根据方程 (6.140), 我们有

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi k} \rho g C_g \int_0^{2\pi} \mathcal{A}_\alpha(\theta) \mathcal{A}_\beta^*(\theta) d\theta \quad (6.145)$$

## §6.6.2 两个绕射问题之间的关系

假设  $\phi = \phi^{(1)}$ ,  $\psi = \phi^{(2)}$ , 它们分别代表两个入射角不同的绕射问题的速度势. 如果物面没有法向速度, 则方程 (6.132) 中  $S_b$  上的积分消失, 我们有

$$\int_{S_\infty} \left( \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} - \phi^{(2)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (6.146)$$

类似地,

$$\int_{S_\infty} \left( \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)*}}{\partial n} - \phi^{(2)*} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (6.147)$$

在方程 (6.147) 中, 取  $\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \phi$ , 我们有

$$\text{Im} \int_{S_\infty} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} dS = 0 \quad (6.148)$$

上式左端正比于压力在  $S_\infty$  上所作的功. 因此方程 (6.148) 说明能量守恒. 当速度势取其远场性质时, 情况如下:

## 二维情况

令  $\phi^{(1)}$  是从左向右的入射波产生的速度势, 而  $\phi^{(2)}$  是从右向左的入射波产生的速度势, 它们的渐近性质是

$$\phi^{(1)} \sim \begin{pmatrix} (e^{ikx} + R_1 e^{-ikx}) \\ T_1 e^{ikx} \end{pmatrix} \cdot \left( -\frac{igA}{\omega} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \quad \begin{matrix} x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{matrix} \quad (6.149)$$

$$\phi^{(2)} \sim \begin{pmatrix} T_2 e^{-ikx} \\ (e^{-ikx} + R_2 e^{ikx}) \end{pmatrix} \cdot \left( -\frac{igA}{\omega} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \quad \begin{matrix} x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{matrix} \quad (6.150)$$

设  $S_\infty^\pm$  是  $x \rightarrow \pm\infty$  时的两条铅垂线, 则在  $S_\infty^\pm$  上, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial n} = \pm \frac{\partial}{\partial x}$$

把方程 (6.149), (6.150) 代入方程 (6.146), 经过简化后得到

$$T_1 = T_2 \quad (6.151)$$

说明透射系数与入射波的方向无关. 根据方程 (6.147), 经过类似的运算, 我们得到

$$R_1 T_2^* + R_2^* T_1 = 0 \quad (6.152)$$

对于单个绕射问题, 根据方程 (6.148), 我们有

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (6.153)$$

应用方程 (6.151) 和 (6.152), 我们得到

$$|R_1| = |R_2| \quad (6.154)$$

假设透射和反射系数的相位角分别为  $\delta_j^T, \delta_j^R, (j = 1, 2)$

$$T_j = |T_j|e^{i\delta_j^T}, \quad R_j = |R_j|e^{i\delta_j^R}, \quad j = 1, 2 \quad (6.155)$$

应用方程 (6.151) 和 (6.152), 我们得到

$$\delta_1^T = \delta_2^T \quad (6.156)$$

$$\delta_1^R + \delta_2^R = \delta_1^T + \delta_2^T \pm \pi \quad (6.157)$$

如果物体是对称的,  $\delta_1^R = \delta_2^R, \delta_1^T = \delta_2^T$ , 因此

$$\delta_1^R = \delta_1^T \pm \pi/2 \quad (6.158)$$

三维情况

远场速度势为

$$\phi^{(l)} \cong -\frac{igA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} \left[ e^{ikr \cos(\theta-\theta_l)} + \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \mathcal{A}_l^s(\theta) e^{ikr-i\pi/4} \right], \quad l = 1, 2 \quad (6.159)$$

其中  $\mathcal{A}_l^s$  表示归一化的散射波振幅, 它是由  $\theta_l$  方向的入射波产生的. 根据方程 (6.159), 方程 (6.148) 的左端为

$$2i \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h}^0 dz \frac{\cosh^2 k(z+h)}{\cosh^2 kh} \left( \frac{gA}{\omega} \right)^2 r \left[ e^{ikr \cos(\theta-\theta_l)} + \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \mathcal{A}_l^s e^{ikr-i\pi/4} \right] \\ \left[ -ik \cos(\theta-\theta_l) e^{-ikr \cos(\theta-\theta_l)} - ik \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \mathcal{A}_l^{s*} e^{-ikr+i\pi/4} \right]$$

省略在积分号外边的常数因子, 我们得到

$$-\operatorname{Im}i \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \frac{2}{\pi} |\mathcal{A}_l^s(\theta)|^2 + kr \cos(\theta-\theta_l) \right. \\ \left. + \left( \frac{2}{\pi} kr \right)^{1/2} \mathcal{A}_l^s \cos(\theta-\theta_l) e^{ikr[1-\cos(\theta-\theta_l)]-i\pi/4} \right. \\ \left. + \left( \frac{2}{\pi} kr \right)^{1/2} \mathcal{A}_l^{s*} e^{-ikr[1-\cos(\theta-\theta_l)]+i\pi/4} \right\} = 0 \quad (6.160)$$

正比于  $kr$  的项因周期性而消失. 应用  $\operatorname{Im}if = \operatorname{Im}if^*$ , 第四项可以与第三项合并, 得出

$$e^{-i\pi/4} \left( \frac{2}{\pi} kr \right)^{1/2} \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{A}_l^s e^{ikr[1-\cos(\theta-\theta_l)]} [1 + \cos(\theta-\theta_l)] \quad (6.161)$$

当  $kr \gg 1$  时, 我们可以用驻相法求其近似值. 在区间  $[0, 2\pi]$  内, 驻相点是方程

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [1 - \cos(\theta - \theta_l)] = \sin(\theta - \theta_l) = 0,$$

的根.

$$\theta = \theta_l, \quad \theta = \theta_l + \pi \quad (6.162)$$

在第一个驻相点邻域内, 方程 (6.161) 中的被积函数近似为

$$e^{ikr(\theta-\theta_l)^2/2} \cdot 2\mathcal{A}_l^s(\theta_l) \quad (6.163)$$

方程 (6.161) 的积分限近似地取为  $(-\infty, \infty)$ , 得到积分为

$$\mathcal{A}_l^s(\theta_l) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr\theta^2/2} d\theta = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{i\pi/4} \mathcal{A}_l^s(\theta_l), \quad kr \gg 1 \quad (6.164)$$

而在第二个驻相点附近, 方程 (6.161) 中的被积函数消失, 最后方程 (6.160) 简化为

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{A}_l^s(\theta)|^2 d\theta = -2\text{Re}\mathcal{A}_l^s(\theta_l) \quad (6.165)$$

这个方程是 Maruo(1960) 首先导出的, 在量子力学和其他物理学中被称作 光学定理.  $|\mathcal{A}_l^s(\theta)|^2 d\theta$  可以用来衡量  $(\theta, \theta + d\theta)$  内散射的能量, 故方程 (6.165) 体现了总的能量散射. 它表明了散射的总能量可以从前进方向散射波的振幅得到, 这在实验中有明显的意义.

类似地, 我们分析方程 (6.146). 考虑到

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \mathcal{A}_1^s(\theta) e^{-i\pi/4} (1 - \cos(\theta - \theta_2)) e^{ikr(1+\cos(\theta-\theta_2))} d\theta \\ &= 2\sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \mathcal{A}_1^s(\theta_2 + \pi), \quad kr \gg 1 \end{aligned} \quad (6.166)$$

我们得到

$$\mathcal{A}_1^s(\theta_2 + \pi) = \mathcal{A}_2^s(\theta_1 + \pi) \quad (6.167)$$

该式表明: 沿第二个入射波方向的第一个散射波的振幅, 等于沿第一个入射波方向的第二个散射波的振幅. 与二维情况下透射系数的关系 (6.151) 一致, 当  $\theta_1 = 0, \theta_2 = -\pi$  时,  $\mathcal{A}_1^s(0) = \mathcal{A}_2^s(\pi)$ .

根据方程 (6.147), 可以导出

$$-\pi[\mathcal{A}_1^s(\theta_2) + \mathcal{A}_2^{s*}(\theta_1)] = \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{A}_1^s(\theta) \mathcal{A}_2^{s*}(\theta) \quad (6.168)$$

方程 (6.165) 恰好是上式的特殊情况.

### 习题

(6.3) 一个二维刚体受从  $x = -\infty$  来的入射波  $A$  激发, 产生振动, 试证明:

$$\left| R + \frac{A_-}{A} \right|^2 + \left| T + \frac{A_+}{A} \right|^2 = 1$$

其中  $R, T$  是刚体保持固定时波的反射和透射系数,  $A_+, A_-$  分别是透射波在  $x = +\infty, x = -\infty$  处的波幅.

(6.4)考虑一个海底, 深度从一个常数变到另一个常数, 即

$$h(x) \rightarrow \begin{cases} h_+, x \rightarrow +\infty \\ h_-, x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

试给出一个波列从左侧入射时, 在过渡段两侧,  $\phi$  的远场表达式. 试确定反射系数  $R$  和透射系数  $T$ , 给出  $R, T$  和能量的关系.

### §6.6.3 一个绕射和一个人射问题

按定义 (6.75), 由于波的绕射产生的作用在固定物体上的广义力的第  $\alpha$  个分量,

$$\begin{aligned} F_\alpha^D &= i\rho\omega \int_{S_b} \phi^D n_\alpha dS = i\rho\omega \int_{S_b} (\phi^I + \phi^s) n_\alpha dS \\ &= i\rho\omega \int_{S_b} (\phi^I + \phi^s) \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (6.169)$$

其中我们应用了关系 (6.68). 考虑到  $\phi^s$  和  $\phi_\alpha$  在无穷远处往外传播, 应用关系 (6.135), 我们得到

$$F_\alpha^D = i\rho\omega \int_{S_b} \left( \phi^I \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} + \phi_\alpha \frac{\partial \phi^s}{\partial n} \right) dS \quad (6.170)$$

应用关系  $\phi^D = \phi^I + \phi^s$ , 和方程 (6.66), 可得

$$\begin{aligned} F_\alpha^D &= i\rho\omega \int_{S_b} \left( \phi^I \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} - \phi_\alpha \frac{\partial \phi^I}{\partial n} \right) dS \\ &= -i\rho\omega \int_{S_\infty} \left( \phi^I \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} - \phi_\alpha \frac{\partial \phi^I}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (6.171)$$

在方程 (6.171) 的推导中我们应用了关系 (6.132). 方程 (6.171) 称为 Haskind-Hanaoka 定理, 首先由 Haskind(1957) 和 Hanaoka(1959) 各自独立导出, 并被 Newman(1960) 推广. 它表明了广义激励力的第  $\alpha$  个分量与物体的第  $\alpha$  个简谐模式的辐射势之间的关系. 应用渐近性质, 我们可以导出以下关系:

$$\text{二维情况: } F_\alpha^D = -2\rho g A A_\alpha^- C_g \quad (6.172)$$

$$\text{三维情况: } F_\alpha^D = -\frac{4}{k} \rho g A A_\alpha(\theta_l + \pi) C_g \quad (6.173)$$

说明物体受到的激励力与入射波反方向的波幅有关.

### 习题

(6.5)应用方程 (6.145) 和 (6.173), 试证明三维情况下阻尼系数和激励力之间的关系是:

$$\lambda_{\alpha\alpha} = \frac{k}{8\pi\rho g C_g |A|^2} \int_0^{2\pi} |F_\alpha^D(\theta)|^2 d\theta \quad (6.174)$$



波的散射与辐射之间的关系不很明显. 假设在物面  $S_b$  上的法向速度的相位处处相同, 通过调整时间坐标, 我们可以使得在  $S_b$  上

$$\frac{\partial \phi^R}{\partial n} = V_n = \text{实数}, \text{ 或者 } \frac{\partial}{\partial n}(\phi^R - \phi^{R*}) = 0 \quad (6.175)$$

$\phi^D = \phi^I + \phi^s$  满足  $S_b$  上同样的条件, 应用方程 (6.132), 我们有

$$\int_{S_\infty} \left[ (\phi^R - \phi^{R*}) \frac{\partial}{\partial n}(\phi^I + \phi^s) - (\phi^I + \phi^s) \frac{\partial}{\partial n}(\phi^R - \phi^{R*}) \right] dS = 0 \quad (6.176)$$

对于  $\phi^R$  和  $\phi^s$ , 应用方程 (6.134), 上式可以简化为

$$\int_{S_\infty} \left[ (\phi^R - \phi^{R*}) \frac{\partial \phi^I}{\partial n} - \phi^I \frac{\partial}{\partial n}(\phi^R - \phi^{R*}) \right] dS = \int_{S_\infty} \left( \phi^{R*} \frac{\partial \phi^s}{\partial n} - \phi^s \frac{\partial \phi^{R*}}{\partial n} \right) dS \quad (6.177)$$

它给出了  $\phi^R$  和  $\phi^s$  在远场的关系.

### 二维情况

应用方程 (6.176), (6.142), 容易得到 Bessho-Newman 关系:

$$\mathcal{A}_- - R\mathcal{A}_-^* - T\mathcal{A}_+^* = 0 \quad (6.178)$$

当物体关于铅垂平面对称时, 物体运动既有起伏 (对称模式), 也有横摇或横摆 (反对称模式). 对于对称模式,

$$\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}_- = |\mathcal{A}_s| e^{i\delta_s} \quad (6.179)$$

对于反对称模式

$$\mathcal{A}_+ = -\mathcal{A}_- = |\mathcal{A}_a| e^{i\delta_a} \quad (6.180)$$

联立方程 (6.179), (6.180) 和 (6.178), 得到

$$R + T = e^{2i\delta_s}, \quad R - T = e^{2i\delta_a} \quad (6.181)$$

对于横摇或横摆, 它们的辐射波相位必须满足

$$\delta_1 = \delta_5 \pm \pi \quad (6.182)$$

对于同一物体、同样的海底情况, 解两个辐射问题之后, 我们可得到散射系数  $R$  和  $T$ .

因为存在 Haskind-Hanaoka 关系, 为得到辐射和散射问题的解, 我们只要单独解辐射问题就可以了.

### 三维情况

应用  $\phi^s$  和  $\phi^R$  的渐近关系 (6.144), 方程 (6.177) 右端是

$$C2i \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{A}^s(\theta) \mathcal{A}^{R*}(\theta) \quad (6.183)$$

这里  $C$  是一个常数. 方程 (6.177) 的左端的项

$$\int_{S_b} \left( \phi^R \frac{\partial \phi^I}{\partial n} - \phi^I \frac{\partial \phi^R}{\partial n} \right) dS = Ci\sqrt{kr} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{A}^R [1 - \cos(\theta - \theta_I)]$$

$$\cdot e^{ikr[1+\cos(\theta-\theta_I)]} = C4i\mathcal{A}^R(\theta_I + \pi) \quad (6.184)$$

同样地, 应用方程 (6.166) 得到

$$\int_{S_b} \left( \phi^{R*} \frac{\partial \phi^I}{\partial n} - \phi^I \frac{\partial \phi^{R*}}{\partial n} \right) dS = C4i\mathcal{A}^{R*}(\theta_I) \quad (6.185)$$

最后, 根据关系 (6.177), 我们得到三维 Bessho-Newman 关系

$$-\mathcal{A}^{R*}(\theta_I) + \mathcal{A}^R(\theta_I + \pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{A}^{R*} \mathcal{A}^s d\theta \quad (6.186)$$

现在考察物体关于  $z$  轴旋转对称的情况. 一般地, 我们令  $\theta_I = 0$ , 现在物体运动存在三种模式: 横摇, 起伏和横摆, 表示为

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\alpha = \text{Constant} \cdot \cos \theta, & \alpha = 1, 5 \\ \mathcal{A}_3 = \text{Constant} \end{cases} \quad (6.187)$$

取  $\mathcal{A}^R = \mathcal{A}_1(0) \cos \theta$ , 根据方程 (6.186) 导出

$$-\mathcal{A}_1^*(0) - \mathcal{A}_1(0) = \frac{1}{\pi} \mathcal{A}_1^*(0) \int_0^{2\pi} \mathcal{A}^s \cos \theta d\theta \quad (6.188)$$

或者

$$-1 - \mathcal{A}_1(0)/\mathcal{A}_1^*(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{A}^s \cos \theta d\theta \quad (6.189)$$

用  $\mathcal{A}_5(0)$  替换  $\mathcal{A}_1(0)$ , 可得类似的公式. 因此我们有

$$\mathcal{A}_1(0)/\mathcal{A}_1^*(0) = \mathcal{A}_5(0)/\mathcal{A}_5^*(0) \quad (6.190)$$

若  $\mathcal{A}_\alpha(0) = |\mathcal{A}_\alpha(0)|e^{i\delta_\alpha}$ , 从关系 (6.190) 我们得出

$$\delta_1 = \delta_5 \quad (6.191)$$

即横摇和横摆的相位角相同. 这一点首先由 Garrett(1970) 针对圆柱情况加以证明, 然后被 Newman(1976) 用以上方法推广. 根据关系 (6.173), 横摆激励力和横摆激励力矩的相位也必须相同.

对于起伏模式,  $\mathcal{A}^R = \mathcal{A}_3$ , 应用关系 (6.186) 得到

$$e^{2i\delta_3} - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{A}^s(\theta) d\theta \quad (6.192)$$

必须说明: 所有这些一般的恒等式已经推广到  $N$  个物体的情况 (Srokosz, 1980). 它们是各种解之间的关系, 因为所有这些绕射、辐射问题的类型相同, 故存在这些恒等式.

## §6.7 有限元方法的变分原理

绕射问题的计算有两种数值方法: 有限元方法和积分方法. 本节简单讨论有限元方法的变分原理. 主要思想是: 在物体附近用有限元近似, 在其余各处用解析解.

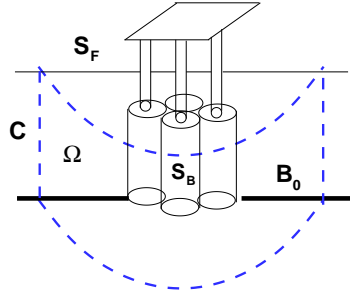


图 6.5: 计算区域及边界

参考图 6.5, 设所有物体和不规则海底局限于有限大小的铅垂柱体  $C$  内, 在  $C$  外, 海洋深度为常数.  $C$  外的物理量加一短划线, 表示与  $C$  内的物理量之间的差别. 设  $\bar{\phi}$  满足 Laplace 方程, 满足自由面  $\bar{S}_f$ 、海底  $\bar{B}_0$  上的边界条件, 和无穷远处的辐射条件. 因为还没有规定条件, 所以在  $C$  上  $\bar{\phi}$  还是未知的, 形式上可以用各种方法表示. 一种方法是应用 Green 函数, 用分部在  $C$  上的强度待定的源的迭加而得到  $\bar{\phi}$ ; 另一种方法是如同关系 (6.95) 或者 (6.98), 应用带未知系数的本征函数的展开式. 这里采用后者.

现在我们证明以下的泛函

$$\begin{aligned}
 J(\phi, \bar{\phi}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 d\Omega - \frac{\omega^2}{2g} \int_{S_f} \phi^2 dS \\
 &\quad - \int_{S_b} V \phi dS + \int_C \left( \frac{1}{2} \bar{\phi} - \phi \right) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} dS
 \end{aligned} \tag{6.193}$$

的极值问题等同于原来的边值问题. 令泛函的一阶变分为零, 可得

$$\begin{aligned}
 \delta J = 0 &= \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla (\delta \phi) d\Omega - \frac{\omega^2}{g} \int_{S_f} \phi \delta \phi dS \\
 &\quad - \int_{S_b} V \delta \phi dS + \int_C (\bar{\phi} - \phi) \frac{\delta \bar{\phi}}{\partial n} dS \\
 &\quad - \int_C \delta \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} dS + \frac{1}{2} \int_C \left( \delta \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} - \bar{\phi} \frac{\partial \delta \bar{\phi}}{\partial n} \right) dS
 \end{aligned} \tag{6.194}$$

在区域  $\bar{\Omega}$  上, 对  $\bar{\phi}$  和  $\delta \bar{\phi}$  应用关系 (6.135), 考虑到  $\delta \bar{\phi}$  与  $\bar{\phi}$  满足的条件相同, 可以得出

$$\int_C \left( \bar{\phi} \frac{\partial \delta \bar{\phi}}{\partial n} - \delta \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right) dS = 0$$

考虑到在  $C$  上  $\phi = \bar{\phi}$ , 和以下分部积分结果

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla (\delta \phi) d\Omega = \int_{S_f + S_b + B_o + C} \delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \delta \phi \nabla^2 \phi d\Omega$$

我们有

$$\begin{aligned} \delta J = 0 = & - \int_{\Omega} \delta \phi \nabla^2 \phi d\Omega + \int_{S_f} \delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\omega^2}{g} \phi \right) dS \\ & + \int_{B_o} \delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \int_{S_b} \delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} - V \right) dS \\ & + \int_C (\bar{\phi} - \phi) \frac{\partial \delta \bar{\phi}}{\partial n} dS + \int_C \delta \bar{\phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (6.195)$$

对于任意的  $\delta \phi$  和  $\delta \bar{\phi}$ , 使  $\delta J = 0$  的充要条件是:  $\phi$  满足 Laplace 方程, 满足在  $S_f, B_o, S_b$  和  $C$  上的边界条件. 这样,  $J$  的极值问题就等价于辐射势的边值问题.

问题 (6.194) 也可以表述为: 求  $\phi \in H^1(\Omega)$  (Sobolev 空间) 和  $\bar{\phi} \in C^\infty(\Omega)$ , 使得对于每一个  $\psi = \delta \phi \in H^1(\Omega)$ , 有

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi d\Omega + \frac{\omega^2}{g} \int_{S_f} \phi \psi dS \\ & + \int_{S_b} V \psi dS + \int_C \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \psi dS = 0 \end{aligned} \quad (6.196)$$

并使得对于每一个  $\bar{\psi} \equiv \delta \bar{\phi} \in C^\infty(\Omega)$ , 成立

$$\int_C (\phi - \bar{\phi}) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} dS = 0 \quad (6.197)$$

方程 (6.196) 和 (6.197) 构成了问题的弱表示法.

因此, 选择  $\psi = \phi^*$ , 方程 (6.196) 给出

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 d\Omega + \frac{\omega^2}{g} \int_{S_f} |\phi|^2 dS \\ & + \int_{S_b} V \phi^* dS + \int_C \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \phi^* dS = 0 \end{aligned} \quad (6.198)$$

因为前两个积分是实数, 我们得到

$$\text{Im} \int_{S_b} V \phi^* dS = -\text{Im} \int_C \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \phi^* dS \quad (6.199)$$

如果选择  $\bar{\psi} = \partial \bar{\phi}^* / \partial n$ , 则方程 (6.197) 给出

$$\int_C \phi \frac{\partial \bar{\phi}^*}{\partial n} dS = \int_C \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}^*}{\partial n} dS \quad (6.200)$$

对上式取复共轭, 代入关系 (6.199) 导出

$$\text{Im} \int_{S_b} V \phi^* dS = -\text{Im} \int_C \bar{\phi}^* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} dS \quad (6.201)$$

上式的物理意义在于表明了物体做功的速率等于能量通过柱体  $C$  的速率. 说明这种有限元方法保持了能量守恒. 三维物体的激励力也可以用相同的方法计算 (Yue, 1976).

## 习题

(6.6)进一步说明变分原理 (6.193) 和绕射问题的泛函

$$J(\phi, \bar{\phi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 d\Omega - \frac{\omega^2}{2g} \int_{S_f} \phi^2 dS \\ + \int_C \left[ \left( \frac{1}{2} \bar{\phi}^s - \phi^s \right) \frac{\partial \bar{\phi}^s}{\partial n} - \bar{\phi}^s \frac{\partial \phi^l}{\partial n} \right] dS$$

能正确代替对应的边值问题. 把整个流体区域取作  $\bar{\Omega}$ , 导出圆柱问题的关系式 (6.126).

## §6.8 水波能量的浮体吸收

在深水中, 正弦平面波列的一个波长内的能流是

$$\frac{1}{2} \rho g A^2 C_g = \rho g^2 A^2 T / 8\pi$$

应用这个关系, 可以把周期为 10 秒的波浪的可用功率列表如下

波幅 A(m)	波浪功率 KW/m
0.5	10
1	40
5	1000

如果  $A = 1\text{m}$ , 则沿 25 公里的海岸, 波浪能的总功率约为  $10^9\text{W}$ , 相当于典型的普通电厂的功率. 考虑到波能的方向性, 季节性和地点变化, 以上这个估计应当打折扣. 海洋能量的吸收机理有应用潜力, 它可用于荒岛, 遥控灯塔, 海水淡化的小规模能源, 乐观些可以并入大电网. 对波浪电站的经济效益判定和环境影响的研究还不成熟, 但考虑到技术上的潜力和发展远景, 某些国家已经开始进行认真探索 (Lunde & Falkemo, 1979).

在多数设计中, 换能器 (涡轮机或发电机) 直接与结构物连在一起. 总的几何形状影响波 - 物体的相互作用, 按照总的几何形状, 这些设计可以分为三种类型. 对于平面入射波, 有横浪吸能器, 全向吸能器 (点式吸能器) 和逆浪吸能器. 横浪 (逆浪) 吸能器是长轴平行 (垂直) 于入射波峰的细长装置. 点式吸能器可以是一个浮标或一个共振水箱, 与主要的波长相比, 它们的直径都很小.

## 横浪吸能器

考虑一个对称于铅垂面的二维柱体, 在横截面里它允许起伏或者横摆. 柱体固定时的反射和透射系数分别是  $R$  和  $T$ . 柱体的起伏或横摆运动关于  $z$  轴是对称或反对称的, 相应的归一化辐射波在无穷远处的振幅是  $(\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_a)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ;  $(\mathcal{A}_s, -\mathcal{A}_a)$ ,  $x \rightarrow -\infty$ . 如果能使  $R + \mathcal{A}_s - \mathcal{A}_a = 0$ ,  $T + \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_a = 0$ , 则所有入射波的能量就都被吸收了.

对于截面形状为倾斜的泪滴形凸轮, Salter 证明了一个横摆模式就能产生足够高的效率. 部分原因在于, 对于足够短的波或者半径足够大的柱体,  $T \approx 0$ ,  $|R| \doteq 1$ . 摇摆的凸轮头部直, 尾部圆, 它向入射的一侧辐射的波要比透射一侧辐射的波大些. 为了吸收大部分的入射波能, 可以控制  $A_-$  的相位和数值, 使  $R + A_-$  保持很小. 这种装置具有鸟嘴状的尖头和圆尾, 且作摇摆运动, 已经取名为鸭子.

如果把一个浮动的筏子的一端与海岸铰接, 在铰接处安装一个换能器, 适当地控制筏子的大小和运动, 也可以转移入射波能. 代替固定铰接, 几个筏子可以铰接成一组, 只在关节处锚定, 则从相邻两个筏子绕铰接的相对转动中也可以吸收能量. 这是 Hagen(1975) 和 Cockerell 的二维筏子组的设想 (Wooley & Platts, 1975). Evans 等人 (1979) 的研究表明, 用带绞盘的一对绷紧的锚绳, 栓住浮动的圆柱, 通过控制圆柱的运动, 可以使所有的入射波能被吸收.

有的设计还包括吸收能量的风动装置. 例如, 英国国家工程实验室的振动水罐, 有一排锚定在海底的充气浮筒, 这些充气浮筒内部是气水舱, 通过自由面下边在波入射的那一侧的缝隙与海水相通. 如果气水舱的尺寸合适, 内部的水面会发生共振, 产生高压的空气, 以驱动导管内的涡轮机.

#### 点式吸能器

锚定在海底的铅垂的小型柱状浮标就是一个点式吸能器, 对它的研究开展的最多 (Budal & Falnes, 1975; Falnes & Budal, 1978). 浮标运动时对锚绳或杆做功. 控制合适时, 它可以从波峰宽度大于其直径的波浪中吸收能量.

以等间距排列在一条直线上的浮标, 当间距小于一个波长时, 其效率会受到影响. 假如每个浮标都是轴对称的, 且其运动模式只有一个, 则浮标可以吸收相邻两个浮标之间入射波能量的一半. 若有两个运动模式, 好的情况下浮标可以全部吸收入射波能量.

#### 逆浪吸能器

逆浪吸能器的轴线垂直于波峰的方向. Hagen 和 Cockerell 设计的把几个筏子用绞链连起来的浮筏系统, 可以从绕绞链的相对转动中吸收波能. Masuda(1979) 改装的一条船, 船的龙骨上有开口通海洋, 沿长轴有一组船舱, 每个舱里有一个涡轮机, 由振动的水柱驱动. M.J. French(1979) 提出在细长的浮动框架上, 装上柔软的气袋. 波经过之后, 压缩气袋使空气在连有涡轮机的管道上循环. 这些设计的差别体现在波能转换方法上.

当转换器是放置在海上的主要结构物的一部分时, 能量储存和把能量输送到陆地要化多大代价是个问题. 为降低造价, Mehlem 和 Stamnes(1979) 提出水下透镜的设想, 把一组透镜沿着平行于入射波峰的直线放置. 每个透镜能产生小的反射波, 而对透射波可以产生不同的相位滞后, 使透射波波峰变圆, 向装有换能器的焦点传播. 透镜的横向尺度与其它的横浪设计, 大小差不多. 对几种简单情况, 我们可以进行分析.

### §6.8.1 二维横浪吸能器: Salter 凸轮

我们考虑一个波对无穷长凸轮的波向入射问题, 设凸轮具有刚性轴, 其平均位置用  $(\bar{X}, \bar{Z})$  表示, 平动用  $\xi_1, \xi_3$  表示, 绕轴的转动用  $\xi_5$  表示.

这个问题可以用方程 (6.81) 描述, 但换能器对它有反作用力, 假设这个力可以表示成

$$(\omega^2 \mu'_{\alpha\beta} - C'_{\alpha\beta} + i\omega \lambda'_{\alpha\beta}) \xi_{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 3, 5 \quad (6.202)$$

$\mu'_{\alpha\beta}, C'_{\alpha\beta}, \lambda'_{\alpha\beta}$  分别表示惯性、弹性和阻尼的一部分. 带撇号的矩阵是换能器的特征. 当  $\xi_\beta$  产生的  $\alpha$  方向的力存在时, 矩阵的对角线以外的元素也不为零. 一般地, 凸轮的运动模式与换能器的运动模式是耦合的, 凸轮的运动方程是

$$[-\omega^2(M_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta} + \mu'_{\alpha\beta}) + (C_{\alpha\beta} + C'_{\alpha\beta}) - i\omega(\lambda_{\alpha\beta} + \lambda'_{\alpha\beta})]\xi_\beta = F_\alpha^D + \mathcal{F}_\alpha \quad (6.203)$$

其中  $F_\alpha^D$  是由绕射产生的激励力,  $\mathcal{F}_\alpha$  是轴的约束力.

轴固定时,  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ , 只有一个转动自由度  $\xi_5$ . 把凸轮与轴之间的磨擦放到  $\lambda'_{\alpha\beta}$  中去, 则  $\mathcal{F}_5 = 0$ , 这时方程 (6.203) 简化为

$$[-\omega^2\overline{M}_{55} + \overline{C}_{55} - i\omega(\lambda_{55} + \lambda'_{55})]\xi_5 = F_5^D \quad (6.204)$$

其中  $\overline{M}_{55} = M_{55} + \mu_{55} + \mu'_{55}$ ,  $\overline{C}_{55} = C_{55} + C'_{55}$ . 把  $\xi_5$  代入剩下的动量方程

$$[-\omega^2(M_{\alpha 5} + \mu_{\alpha 5} + \mu'_{\alpha 5}) + (C_{\alpha 5} + C'_{\alpha 5}) - i\omega(\lambda_{\alpha 5} + \lambda'_{\alpha 5})]\xi_5 = F_\alpha^D + \mathcal{F}_\alpha \quad (6.205)$$

就可决定约束力  $\mathcal{F}_\alpha$ , 它是轴给凸轮的作用力.

方程 (6.205) 形式上与描述简谐振动的方程相同, 显然, 吸收的能量是

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\lambda'_{55}\omega^2|\xi_5|^2 = \frac{1}{2}\frac{\lambda'_{55}\omega^2|F_5^D|^2}{(\overline{C}_{55} - \overline{M}_{55}\omega^2)^2 + (\lambda_{55} + \lambda'_{55})^2\omega^2} \quad (6.206)$$

这是从波浪中转移过来的总功率, 包括有用功率, 磨擦损失, 转换损失等无用功率. 对于固定的入射波频率和凸轮形状,  $\mu_{55}, \lambda_{55}, F_5^D$  是固定的. 假设凸轮的惯性  $\overline{M}_{55}$  和衰减率  $\lambda'_{55}$  可调, 为保证输出功率最大, 要求

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial \lambda'_{55}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{E}}{\partial (\overline{C}_{55} - \overline{M}_{55}\omega^2)} = 0 \quad (6.207)$$

由此推出的最佳准则是

$$\overline{C}_{55} - \overline{M}_{55}\omega^2 = 0 \quad (6.208)$$

$$\lambda'_{55} = \lambda_{55} \quad (6.209)$$

根据第一个准则, 凸轮必须调整到共振状态, 在直觉上这是合理的. 第二个准则要求有效抽取的速率等于有效辐射衰减的速率, 这不容易预料. 把方程 (6.208), (6.209) 代入 (6.206), 我们得到最佳功率

$$\overline{E}_{\text{opt}} = |F_5^D|^2 / 8\lambda_{55} \quad (6.210)$$

应用关系 (6.143) 和关系 (6.172), 则最佳功率可以用单位振动产生的远场振幅  $\mathcal{A}^\pm$  表示

$$\overline{E}_{\text{opt}} = \frac{\frac{1}{2}\rho g A^2 C_g}{(1 + |\mathcal{A}^+|^2 / |\mathcal{A}^-|^2)} \quad (6.211)$$

上式的分子是单位长度入射波的功率通量, 因此, 最佳效率为

$$E_{ff}^{\text{opt}} = (1 + |\mathcal{A}^+|^2 / |\mathcal{A}^-|^2)^{-1} \quad (6.212)$$

该式给出了凸轮从波浪中提取能量的最大可能效率. 由于依赖  $\mathcal{A}^\pm$ , 它是凸轮几何形状的函数. 对于有铅垂对称轴的物体,

$$|\mathcal{A}^+| = |\mathcal{A}^-|,$$

最大效率小于 1/2. 当  $|A^+|/|A^-|$  减少时, 最佳效率增加到 1. 这可以由反对称凸轮达到, 带有圆尾和倾斜头部的 Salter 凸轮无疑符合这一要求.

用数值方法求解散射和辐射问题, 可以求出阻尼系数和附加质量系数. 当水深为凸轮尾部半径的四倍时, 对 Salter 模型凸轮剖面的研究, Mynett, Serman 和 Mei(1978) 得到了对应于各种抽取速率的效率曲线. 研究表明: 如果凸轮很小, 对于给定的设计频率, 使共振发生在  $\Lambda\omega = \omega\sqrt{a/g} < 0.5$ , 则效率曲线的峰值低且带宽很窄. 曲线的尖锐程度与辐射阻尼的迅速衰减有关. 具有一个自由度的 Salter 凸轮的效率极好.

固定在轴上的凸轮的主要缺点是必须承受很大的波浪力. 共振时, 单位长度的凸轮受到的水平和铅垂力的量级是  $5\rho g a A$ . 设  $a = 10\text{m}$ ,  $A = 1\text{m}$ ,  $\rho g = 10^4\text{kg/m}^3$ , 这个力的峰值约为 500 吨 / 米. 对于有类似的轴的横浪吸能器, 这么大的力是在意略之中的, 说明在结构物支撑方面要化很大代价.

现在的设想是用活动支撑, 且应用每一个运动模式来产生能量. 这要求设计一个相当复杂的自动控制系统, 使它可以根椐海浪波谱的变化来改变吸能器的阻抗, 提高吸能器的效率.

### §6.8.2 三维吸能器

这里给出 Newman(1976,1979) 和 Budal(1977) 关于三维吸能器最佳效率的一些结果. 考虑到吸能器提取的功率必须对于动压对吸能器做功的速率, 应用关系 (6.133) 和 (6.138), 我们有

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \int_{S_b} p \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{i\rho\omega}{4} \int_{S_b} \left( \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \\ &= -\frac{i\rho\omega}{4} \int_{S_\infty} \left( \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS\end{aligned}\quad (6.213)$$

把总的速度势分解为入射势, 散射势和辐射势,

$$\phi = \phi^I + \phi^s + \phi^R \quad (6.214)$$

再定义  $A$  为总的外行波的振幅因子, 则

$$\phi^s + \phi^R = -\frac{igAA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr-i\pi/4)} \quad (6.215)$$

应用驻相法, 我们得到

$$\bar{E} = \frac{\rho g A^2}{k} C_g \left\{ \frac{-1}{\pi} \int_0^{2\pi} |A(\theta)|^2 d\theta - 2\text{Re}A(0) \right\} \quad (6.216)$$

这是广义的光学定理. 吸收宽度定义为吸收的功率与单位波峰宽度内入射功率之比,

$$W = \bar{E} \left( \frac{1}{2} \rho g A^2 C_g \right)^{-1} \quad (6.217)$$

因此, 无量纲的比值

$$kW = \frac{-2}{\pi} \int_0^{2\pi} |A(\theta)|^2 d\theta - 4\text{Re}A(0) \quad (6.218)$$



是效率的度量. 效率最大时, 必须使总的外行波在前进方向  $\theta = 0$  达到最大值.

Newman 已经证明, 只利用辐射势就可以表示  $\bar{E}$  和  $kW$ . 为了预测铰接筏子或可变形物体的性能, 他假设: 一般地, 物体表面的法向速度可以表示为实简谐模式  $f_\alpha(x, y, z)$  在  $S_b$  上的值之和,

$$\frac{\partial \phi^R}{\partial n} = A \sum_{\alpha} V_{\alpha} f_{\alpha}(x, y, z), \quad \text{在 } S_b \text{ 上} \quad (6.219)$$

其中  $V_{\alpha}$  为复常数, 于是总的速度势可以分解为

$$\Phi = A e^{-i\omega t} \left( \phi^D + \sum_{\alpha} V_{\alpha} \phi_{\alpha} \right) \quad (6.220)$$

其中, 在  $S_b$  上我们有

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial n} = 0 \quad (6.221)$$

$$\frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial n} = f_{\alpha} \quad (6.222)$$

被抽取的功率是

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int_{S_b} p \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ (i\omega\rho) \int_{S_b} \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \omega \rho A^2 \text{Re} \int_{S_b} \left( \phi^D + \sum_{\alpha} V_{\alpha} \phi_{\alpha} \right) \cdot \left( \sum_{\beta} V_{\beta} f_{\beta} \right) dS \\ &= \frac{1}{2} \rho \omega A^2 \text{Re} \left\{ i \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* \int_{S_b} \phi^D f_{\alpha} dS + i \sum_{\alpha} \sum_{\beta} V_{\alpha} V_{\beta}^* \int_{S_b} \phi_{\alpha} f_{\beta} dS \right\} \end{aligned} \quad (6.223)$$

对于上式的第一个级数, 应用关系 (6.169) 和 (6.221), 以及渐近  $\phi^D$  性质, 我们有

$$\int_{S_b} \phi^D f_{\alpha} dS = \frac{4ig}{\omega k} C_g A_{\alpha}(\pi) \quad (6.224)$$

考虑到恢复力矩的对称性,

$$\int_{S_b} \phi_{\alpha} f_{\beta} dS = \int_{S_b} \phi_{\beta} f_{\alpha} dS \quad (6.225)$$

方程 (6.223) 的二重级数写为

$$\text{Re} i \sum_{\alpha} \sum_{\beta} V_{\alpha} V_{\beta}^* \int_{S_b} \phi_{\alpha} f_{\beta} dS = -\text{Re} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} V_{\alpha} V_{\beta}^* \left( \text{Im} \int_{S_b} \phi_{\alpha} f_{\beta} dS \right)$$

应用方程 (6.222) 和 (6.225), 我们有

$$\begin{aligned} \text{Im} \int_{S_b} \phi_{\alpha} f_{\beta} dS &= \frac{1}{2i} \text{Im} \int_{S_b} \left( \phi_{\alpha} \frac{\phi_{\beta}^*}{\partial n} - \phi_{\beta}^* \frac{\phi_{\alpha}}{\partial n} \right) dS \\ &= \frac{1}{2i} \text{Im} \int_{S_{\infty}} \left( \phi_{\alpha} \frac{\phi_{\beta}^*}{\partial r} - \phi_{\beta}^* \frac{\phi_{\alpha}}{\partial r} \right) dS \end{aligned}$$

$$= \frac{2gC_g}{\pi\omega k} \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{A}_\alpha(\theta) \mathcal{A}_\beta^*(\theta)$$

上式与关系 (6.145) 一致. 因此

$$\operatorname{Re} i \sum_\alpha \sum_\beta V_\alpha V_\beta^* \int_{S_b} \phi_\alpha f_\beta dS = -2 \frac{gC_g}{\pi\omega k} \int_0^{2\pi} d\theta \left| \sum_\alpha V_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta) \right|^2 \quad (6.226)$$

应用方程 (6.225) 和 (6.226), 抽取的功率写为

$$\bar{E} = -\frac{1}{2} \rho g A^2 (C_g/k) \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \left| \sum_\alpha V_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta) \right|^2 + \operatorname{Re} 4 \sum_\alpha V_\alpha \mathcal{A}_\alpha^*(\pi) \right\} \quad (6.227)$$

它只用到了辐射势. 相应的效率为

$$kW = - \int_0^{2\pi} d\theta \left| \sum_\alpha V_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta) \right|^2 - \operatorname{Re} 4 \sum_\alpha V_\alpha \mathcal{A}_\alpha^*(\pi) \quad (6.228)$$

如果只有一个自由度, 可以取消方程 (6.159) 中的求和号. 为使效率最大, 第二项必须是负的,

$$V_\alpha \mathcal{A}_\alpha^* = -|V_\alpha| |\mathcal{A}_\alpha(\pi)|$$

效率的最大值是

$$(kW)_{\text{opt}} = \frac{2\pi |\mathcal{A}_\alpha(\pi)|^2}{\int_0^{2\pi} d\theta |V_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta)|^2} \quad (6.229)$$

发生在

$$V_\alpha = \frac{\pi |\mathcal{A}_\alpha(\pi)|^2}{\int_0^{2\pi} d\theta |V_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta)|^2} \quad (6.230)$$

这再次表明, 在入射波的反方向使辐射波会聚, 能增加效率.

#### 全向吸能器

现在考虑一个全向吸能器, 它是一个关于铅垂轴对称的刚体, 有对应于  $\alpha = 1, 3, 5$  的三个运动模式. 把方程 (6.187) 代入 (6.227), 可得

$$\begin{aligned} \bar{E} = & -\frac{1}{2} \rho g A^2 (C_g/k) \{ |V_1 \mathcal{A}_1(0) + V_5 \mathcal{A}_5(0)|^2 \\ & + 2|V_3 \mathcal{A}_3(0)|^2 + 2\operatorname{Re}[V_1 \mathcal{A}_1(0) + V_5 \mathcal{A}_5(0)] \\ & - 2\operatorname{Re}[V_3 \mathcal{A}_3(0)] \} \end{aligned} \quad (6.231)$$

为了使  $\bar{E}$  最大, 必须调整运动, 使  $V_1 \mathcal{A}_1(0) + V_5 \mathcal{A}_5(0)$  为正的实值, 而  $V_3 \mathcal{A}_3(0)$  为负实值, 最佳状态是

$$V_1 \mathcal{A}_1(0) + V_5 \mathcal{A}_5(0) = 1, \quad V_3 \mathcal{A}_3(0) = -\frac{1}{2}$$

相应的最佳吸收功率和效率是

$$\bar{E}_{\text{opt}} = \frac{3}{2k} \rho g A C_g \quad (6.232)$$

$$kW_{\text{opt}} = 3 \quad (6.233)$$

说明当三个模式都是最佳状态时, 吸收宽度约为  $\lambda/2$ , 而且与物体的大小无关. 如果轴对称的浮标只有起伏运动, 从方程 (6.229) 容易看出  $kW_{\text{opt}} = 1$ , 它只是当三个模式都用时达到的最大值的  $1/3$ . 用另一种方法也能证实这个结果. 把入射平面波展开为

$$Ae^{ikx} = A \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n J_n(kr) \cos n\theta$$

在远场, 它的第  $n$  个分波模式可以写为

$$\cos n\theta \frac{A}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left\{ \exp \left[ i \left( kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \exp \left[ -i \left( kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

它由外行波和内行波两部分组成. 如果物体只有起伏运动, 它诱导的流体运动只能是轴对称的. 通过适当调整, 辐射波可以与散射波的 ( $n=0$ ) 模式组合, 以抵消入射波中外行波部分的零模式. 入射波中零模式的会聚对吸收是有用的. 通过包围物体的圆柱面的能流速率显然是  $\rho f A^2 C_g / (2k)$ , 这表明吸收宽度是  $W = 1/k$ . 但是, 如果物体只能横摆或横摇, 则辐射波中只有正比于  $\cos \theta$  的部分, 可以用来抵消  $n=1$  的分波的外行部分, 于是从会聚部分得到的能流是  $(\rho g A^2 C_g) / k$ , 而  $W = 2/k$ .

最佳效率值不依赖浮标的大小, 表明小浮标与大浮标一样有效. 但是, 因为小物体在长波中只有起伏, 一个小浮标要达到这样的最佳值, 它本身要有很大的振幅. 实际上, 从方程 (6.173) 可以看出,  $\mathcal{A}_3(0)$  可以用激励力  $F_3^D$  表示

$$\mathcal{A}_3(0) = -\frac{k}{4} F_3^D (\rho g C_g A)^{-1} \quad (6.234)$$

对于小浮标, 绕射可以忽略, 物体周围压力的空间变化也可以忽略,  $F_3^D$  可以写为

$$F_3^D \cong \rho g A \pi a^2 \quad (6.235)$$

其中  $a$  是浮标在水平面处的半径. 把上式代入关系 (6.234) 和 (6.230), 我们有

$$\mathcal{A}_3 = -\pi k a^2 / 4 C_g \quad (6.236)$$

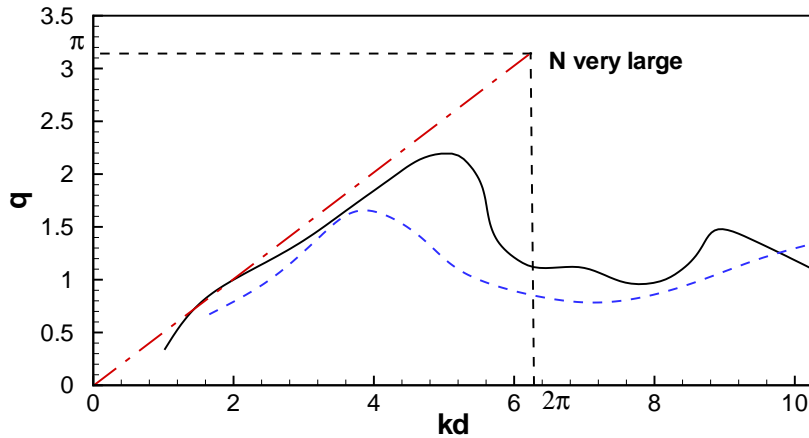
$$AV_3 = \frac{2}{\pi} \frac{A C_g}{a k a} \quad (6.237)$$

因此在最佳效率时, 为了减少  $ka$ , 起伏速度  $AV_3$  必然变得很大. 另外, 从关系 (6.145), 可以写出辐射阻尼系数的计算公式如下:

$$\lambda_{33} = \rho g a^4 k / 4 C_g \quad (6.238)$$

它随  $ka$  的减小而减小, 意味着只有起伏运动的小浮标的共振曲线必然是很尖锐的. 因此, 必须设法对每一个频率都要把作起伏运动的小浮标调整到最佳状态, 为此, 必须变化浮标的质量和弹簧的弹性, 而这是不现实的. 但是, Fanels 和 Budal(1978), Budal 等人 (1979) 已经证实存在有效的替代方法: 使小浮标的共振频率远远超过入射波频率. 通过引进一个电路, 控制浮标使它交替地制动或自由, 浮标的起伏速度与激励力大致同相位, 使它能作最大大功.

可以在浮标前测得波高, 并同时发回信号, 以实现最佳相位控制.

图 6.6: 干扰因子  $q$ 

Budal(1979) 还详细研究了  $N$  个浮标情况. 假设  $N$  个浮标中心等间距排成一行, 入射波相对于中心线的倾角为  $\alpha$ . 他还假设所有浮标只有起伏运动, 而且振幅相同, 相位不同. 当  $kd = O(1)$  ( $d$  是浮标间距) 时, 用弱干扰近似, 他发现总的俘获宽度是

$$kW = Nq \quad (6.239)$$

其中干扰因子  $q$  是

$$q = \left[ 1 + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N (N-n) \cos(nkd \sin \alpha) J(nkd) \right]^{-1} \quad (6.240)$$

当  $d \rightarrow \infty$  时,  $q \rightarrow 1$ . 总的俘获宽度是  $N$  个浮标的俘获宽度之和. 图 6.6 画出了  $N = 2, 10, \infty$  时在垂直入射 ( $\alpha = 0$ ) 情况下的干扰因子. 显然, 适当安排小浮标可使俘获宽度增大. 当  $N \rightarrow \infty$  时, Budal 得到

$$W = (Nd \cos \alpha)/2, \quad kd < 2\pi/(1 + \sin \alpha)$$

因此, 一排浮标吸收的功率是投影在长度  $L \cos \alpha = Nd \cos \alpha$  上的入射功率的一半. 他进一步研究了平行的几排浮标的情况, 并指出, 在投影长度上的所有入射功率都能被吸收.

逆浪吸能器: Hagen-Cockerell 筏

对前后对称的细长的 Hagen-Cockerell 筏的最佳效率, Newman(1979) 进行了深入研究. 假设  $x$  轴与长度为  $l$  的细长的纵轴重合. 一般地, 筏子的铅垂位移  $Z$  可以分解为几个模式  $f_\alpha(x)$  之和,

$$Z(x, t) = A \sum_{\alpha} Z_{\alpha} f_{\alpha}(x) e^{-\omega t} \quad (6.241)$$

其中  $Z_{\alpha}, f_{\alpha}$  是无量纲的,  $f_{\alpha}$  是实函数. 考虑深水情况,  $kh \rightarrow \infty$ ,  $A_{\alpha}(\theta)$  与物体表面势的关系变为

$$A_{\alpha}(\theta) = -\frac{\omega k}{2g} \int_{S_b} dS \left( \phi_{\alpha} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial n} \right) e^{kz} \cdot \exp(-ik \cos \theta - ik y \sin \theta) \quad (6.242)$$

对于杆状的细长体, 吃水深度远小于波长, 在  $S_b$  上,  $ky, kz \ll 1$ ,  $\partial\phi_\alpha/\partial n$  项起主要作用, 所以

$$\mathcal{A}_\alpha(\theta) \cong -\frac{\omega k}{2g} \int_{S_b} dS \left( -\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n} \right) e^{-ikx \cos\theta}$$

根据关系 (6.14), 在物体上

$$dS \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n} = -i\omega f_\alpha n_z dx [(dy)^2 + (dz)^2] = -i\omega f_\alpha dx dy$$

因此

$$\mathcal{A}_\alpha(\theta) \cong -\frac{i}{2} k^2 \int_{-l/2}^{2/l} dx b(x) f_\alpha(x) e^{-ikx \cos\theta} \quad (6.243)$$

为简单起见, 因为端点的影响是次要的, 我们假设  $b(x) = \text{Constant}$ , 取  $X = 2x/l, K = kl/2$ , 上式变成

$$\mathcal{A}_\alpha(\theta) = -\frac{i}{2} K^2 (2b/l) \int_1^1 dX f_\alpha(X) e^{-iKX \cos\theta} \quad (6.244)$$

对于前后对称的物体, 其运动总能分解为  $x$  的奇模式和偶模式. 当  $\alpha$  为偶数时, 令  $f_\alpha$  为偶函数, 于是

$$\mathcal{A}_\alpha(\theta) = -iK^2 (2b/l) \int_0^1 dX f_\alpha(X) \cos(KX \cos\theta) \quad (6.245)$$

是  $\cos\theta$  的偶函数而且是虚数. 类似地, 当  $\alpha$  为奇数时, 令  $f_\alpha$  是  $X$  的奇函数, 则

$$\mathcal{A}_\alpha(\theta) = K^2 (2b/l) \int_0^1 dX f_\alpha(X) \sin(KX \cos\theta) \quad (6.246)$$

是  $\cos\theta$  的奇函数而且是实数. 对于变化的  $b$ , 可以形式上把乘积  $b f_\alpha$  当作有效模式.

由于  $\mathcal{A}_\alpha(\theta)$  有奇偶对称性, 我们可以把吸收宽度也分解为奇偶两部分

$$kW = kW^e + kW^o \quad (6.247)$$

其中

$$kW^e = \frac{-2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left| \sum_\alpha Z_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta) \right|^2 - 4\text{Re} \sum_\alpha [Z_\alpha \mathcal{A}_\alpha^*(\pi)] \quad (6.248)$$

$kW^o$  的表达式与此类似.

为了从筏子的起伏或俯仰运动中抽取能量, 筏子与固定结构在动力学方面要耦合, 而且固定结构要承受很大的波浪力. 为减少结构的造价, 设计中宁愿采用松动的停泊. 于是就不能从  $\alpha = 0, 1$  这些刚性物体的运动模式中吸收能量. 因此

$$kW_0 = \frac{-2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta |Z_0 \mathcal{A}_0(\theta)|^2 - 4\text{Re} \sum_\alpha [Z_0 \mathcal{A}_0^*(\pi)] \quad (6.249)$$

类似地有  $kW_1 = 0$ , 因此,

$$\begin{aligned} kW^e &= \frac{-2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left| \sum_{\alpha=2}^{\infty} Z_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta) \right|^2 - 4\text{Re} \sum_{\alpha=2}^{\infty} [Z_\alpha \mathcal{A}_\alpha^*(\pi)] \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \text{Re} \int_0^{2\pi} Z_0^* \mathcal{A}_0^*(\theta) \sum_{\alpha=2}^{\infty} Z_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta) \end{aligned} \quad (6.250)$$

要注意, 当  $\alpha$  是偶数时,  $\mathcal{A}_\alpha$  是虚的. 对于  $\alpha \geq 2$  的高阶模式的最佳情况, 相位必须使得  $Z_\alpha \mathcal{A}_\alpha^*$  有负值. 把  $\alpha = 0$  当作  $Z_0 = O(2b/l)$  的一个被动模式, 从方程 (6.245) 可知,  $\mathcal{A}_0 = O(2b/l)$ , 根据方程 (6.249) 我们有  $\text{Re}(Z_0^* \mathcal{A}_0^*) = O(2b/l)^2$ , 因此在一阶近似  $O(2b/l)$  下, 我们得到

$$kW^e \cong \frac{-2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left| \sum_{\alpha=2}^{\infty} \{Z_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\theta)\} \right|^2 - 4\text{Re} \sum_{\alpha=2}^{\infty} [Z_\alpha \mathcal{A}_\alpha(\pi)]^* \quad (6.251)$$

对于  $kW^o$  有结果类似.

如果只有一个奇的或者偶的模式, 方程 (6.251) 中的求和号可省略. 达到最佳效率时要求

$$\begin{aligned} Z^e \mathcal{A}^{e*}(\pi) &= -|Z^e| |\mathcal{A}^e(\pi)|, \\ kW^e &= \frac{-2}{\pi} |Z^e|^2 \int_0^{2\pi} d\theta |\mathcal{A}^e(\theta)|^2 + 4|Z^e| |\mathcal{A}^e(\pi)| \end{aligned} \quad (6.252)$$

对奇的模式也有类似的公式. 分别用  $\mathcal{A}^e$  和  $\mathcal{A}^o$  代替方程 (6.229) 中的  $\mathcal{A}_\alpha$ , 则可以达到计算  $(kW^e)_{\text{opt}}$  和  $(kW^o)_{\text{opt}}$  的表达式.

现在考虑一个三段铰接起来的筏子. 两个绞链位于

$$x = \pm al/2, \quad (\text{即 } X = \pm a),$$

它只能有四个独立的横向运动模式, 因此, 除了起伏和俯仰, 只有一个偶的模式、一个奇的模式. 可以证明, 下面的模式是与起伏和俯仰正交的

$$f^e = \begin{cases} 1, & |X| < a \\ 1 - 2(|X| - a)/(1 - a)^2, & a < |X| < 1 \end{cases} \quad (6.253)$$

$$f^o = \begin{cases} a[2 + (a^2 - 3)|X|]/[(2 + a)(1 - a)^2], & a < X < 1 \\ -a[2 + (a^2 - 3)|X|]/[(2 + a)(1 - a)^2], & -1 < X < -a \end{cases} \quad (6.254)$$

相应的最大位移是

$$f_{\text{max}}^e = f(1)^e = \frac{a - 1}{1 + a} \quad (6.255)$$

$$f_{\text{max}}^o = \begin{cases} f^o(a) = a, & a < \sqrt{2} - 1 \\ f^o(1) = \frac{a(1 + a)}{(2 + a)(1 - a)}, & a > \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad (6.256)$$

原则上, 可以对每个模式设计吸能机构. 计算振幅的表达式如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^e &= \frac{2iK^2b}{l} \left\{ \frac{1 + a \sin(K \cos \theta)}{1 - a} \frac{1}{K \cos \theta} + \frac{2}{(1 - a)^2 (K \cos \theta)^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot [\cos(K \cos \theta) - \cos(Ka \cos \theta)] \right\} \end{aligned} \quad (6.257)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^o &= \frac{K^2b}{l} \left\{ \frac{-2a}{(2 + a)(1 - a)^2 K \cos \theta} \left[ 2 \frac{\sin(Ka \cos \theta)}{Ka \cos \theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (a^2 - 3) \frac{\sin(k \cos \theta)}{K \cos \theta} + (1 - a^2) \cos(K \cos \theta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.258)$$

把这些结果代入关系 (6.252), 可以求出最佳吸收宽度. 当  $K \rightarrow 0$  时,  $W/l \rightarrow \infty$ , 这表明对于长波,  $KW$  趋于无穷大,  $Z^e, Z^o$  变为无界, 意味着运动很剧烈. 因此, Newman 进一步提出限制: 铅垂位移不能超过某一极限值, 即

$$\beta = |Z^{o,e}| \frac{b}{l} < 0.2 \quad \text{或} \quad 0.4 \quad (6.259)$$

代入关系 (6.252), 可以得出最佳吸收宽度. 原则上可以用控制阻抗的方法实现这些限制. 总的最佳功率是两个模式的功率之和. Newman 还发现, 在  $a$  的实际范围  $0.2 < a < 0.6$  内, 最佳吸收宽度  $W/l$  对  $a$  不敏感.

$$f_{\max}^o = \begin{cases} f^o(a) = a, & a < \sqrt{2} - 1 \\ f^o(a) = \frac{a(1+a)}{(2+a)(1-a)}, & a > \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad (6.260)$$

### §6.9 漂移力

一个平面行波穿过一个铅垂平面时的动量流的时均值是

$$\overline{M} = \rho \overline{\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz}$$

应用线性化理论容易证明, 准确到波的斜度的二阶量,

$$\overline{M} = EC_g/C + O(kA)^3 \quad (6.261)$$

其中  $E = \rho g A^2/2$ .

现在考虑一个二维的障碍物, 入射波与它正交. 如果所有的波能被物体吸收, 则平均动量也被物体吸收. 也就是说, 物体受到一个不变的力  $EC_g/C$  的作用. 如果物体反射所有的能量, 则反射波带有动量  $EC_g/C$ , 方向与入射波的方向相反. 作用在物体上的恒定力必须等于总的动量改变的速率  $2EC_g/C$ , 类似于一个恒定的射流垂直地冲击在墙壁上. 一般地, 物体的存在使波散射; 物体的运动使波辐射. 设在入射的那一侧往左传播的波的振幅是  $(R + \mathcal{A}_-)A$ , 在透射的那一侧往右传播的波的振幅是  $(T + \mathcal{A}_+)A$ , 对于作用在物体上的  $x$  方向的力, 根据 Longuet-Higgins(1977), 其时均值是

$$\overline{F}_x = \frac{EC_g}{C}(1 + |R + \mathcal{A}_-|^2 - |T + \mathcal{A}_+|^2) \quad (6.262)$$

当  $R, \mathcal{A}_\pm$  由线性化理论求出之后,  $\overline{F}_x$  就很容易计算. 这个力称为漂移力, 在停泊设计中很重要. 考虑到能量守恒,

$$|R + \mathcal{A}_-|^2 + |T + \mathcal{A}_+|^2 + E_{ff} = 1 \quad (6.263)$$

其中  $E_{ff}$  是能量吸收效率, 漂移力也可以写为

$$\overline{F}_x = \frac{EC_g}{C}(E_{ff} + 2|R + \mathcal{A}_-|^2) \quad (6.264)$$

因此, 当  $E_{ff} > 0$  时,  $\overline{F}_x > 0$ , 说明它是沿着入射波传播的方向. 但是如果把足够的能量供给物体, 使得

$$E_{ff} < -2|R + \mathcal{A}_-|^2 \quad (6.265)$$

则  $\overline{F}_x < 0$ , 它是沿着入射波反方向的.

Maruo(1960) 首先导出了三维物体的漂移力的一般公式, 后来 Newman(1967) 进行了推广, 得出了铅垂轴的漂移力矩. Newman 的推导方法是以动量平衡为依据的. 详述如下:

在以  $S$  为边界的运动体积  $V$  内, 对于每一个单位体积的矢量, 存在下面的运动学输运定理,

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{G} dV = \int_V \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} dV + \int_S \mathbf{G} U_n dS \quad (6.266)$$

其中  $U_n$  表示  $S$  的法向速度, 设  $\mathbf{G}$  是单位体积内的线动量  $\rho \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{M}$  是体积  $V$  内总的线动量, 我们有

$$\frac{dM_i}{dt} = \rho \int_V \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \rho \int_S u_i U_n dS \quad (6.267)$$

应用 Euler 方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)$$

再应用 Gauss 定理, 方程 (6.267) 的右端的第一个积分化为面积分

$$\frac{dM_i}{dt} = - \int_S (P + \rho g z \delta_{i3}) n_i dS - \int_S \rho u_i (u_j n_j - U_n) dS \quad (6.268)$$

水平分量是

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = -\rho \int_S \begin{bmatrix} P \\ \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - U_n) \Big] dS \quad (6.269)$$

$\rho g z$  这一项只在铅垂分量中出现. 现在令  $S$  是浸润物面  $S_b$ 、自由面  $S_f$ 、水平海底  $B_o$ 、无穷远处的固定铅垂柱面  $S_\infty$  的组合. 在物面  $S_b$ ,  $S_f$  和  $B_o$  上,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - U_n = 0$ ; 在自由面  $S_f$  上,  $p = 0$ ; 在柱面  $S_\infty$  上,  $U_n = 0$ ; 在水平海底  $B_o$  上,  $n_x = n_y = 0$ . 因此, 为了固定物体所需要的合力是

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} &= \int_{S_b} \begin{bmatrix} P \\ \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = - \int_{S_\infty} P \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} + \\ &+ \rho \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.270)$$

取时间平均, 考虑到有周期性, 右端最后一项消失. 因此漂移力分量写为

$$\begin{bmatrix} \overline{F}_x \\ \overline{F}_y \end{bmatrix} = - \overline{\int_{S_\infty} \begin{bmatrix} P \\ \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})} dS \quad (6.271)$$

考虑到  $S_\infty$  是半径足够大的圆柱面, 用极坐标写出

$$\begin{cases} \overline{F}_x &= - \overline{\int_{S_\infty} [P \cos \theta + \rho u_r (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta)] R d\theta dz} \\ \overline{F}_y &= - \overline{\int_{S_\infty} [P \sin \theta + \rho u_r (u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta)] R d\theta dz} \end{cases} \quad (6.272)$$

下边计算二阶项. 应用 Bernoulli 方程, 我们得到

$$-R \int_0^{2\pi} d\theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \overline{\int_{-h}^{\zeta} P dz} \cong R \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \overline{\rho \int_{-h}^0 dz \left[ \Phi_t + gz + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 \right]} \right. \\ & \left. + \rho \int_0^\zeta \left[ \Phi_t + gz + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 \right] \right\}_{r=R} \end{aligned} \quad (6.273)$$

右端的第一个积分的时间平均可以由直接积分得到. 考虑到时间周期性,  $\overline{\Phi_t}$  项消失, 静水压  $\rho gz$  对于  $\theta$  的积分为零, 剩下的项  $(\nabla\Phi)^2/2$  可以用线性化理论的  $\Phi$  来计算, 误差为  $O[(kA)^3]$ . 第二个积分中含  $(\nabla\Phi)^2/2$  的贡献为  $O[(kA)^3]$ , 可以忽略. 准确到  $O[(KA)^2]$ , 剩下的项容易计算. 考虑到  $\Phi = \text{Re}\{\phi e^{-i\omega t}\}$ , 应用方程 6.124, 我们得到

$$\zeta = -\Phi_t|_{z=0}/g$$

因此

$$\begin{aligned} & \overline{\rho \int_0^\zeta (\Phi_t + gz) dz} = \rho \overline{[\Phi_t|_{z=0}\zeta + g\zeta^2/2]} = -\frac{\rho}{2g} \overline{\Phi_t^2} \\ & = -\frac{\rho}{2g} \overline{(\text{Re}i\omega\phi e^{-i\omega t})^2}_{z=0} = -\frac{\rho}{2g} \overline{\{\omega^2|\phi|^2 \sin^2[\omega t + \delta(t)]\}}_{z=0} \\ & = -\frac{\rho\omega^2}{4g} |\phi|_{z=0}^2 \end{aligned} \quad (6.274)$$

其中  $\delta(t)$  是  $\phi$  的相位, 而且时均值  $\overline{\sin^2[\omega t + \delta(t)]} = 1/2$ .

因此

$$\begin{aligned} & \int_{S_\infty} P \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} R d\theta dz \cong \int_0^{2\pi} R d\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ & \cdot \left\{ \left[ -\int_{-h}^0 dz \overline{\rho(\nabla\Phi)^2/2} \right] + \frac{\rho\omega^2}{4g} |\phi|_{z=0}^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.275)$$

把上式代入关系 (6.272), 得到

$$\begin{aligned} \overline{F_x} &= -\int_0^{2\pi} \rho R d\theta \left\{ \int_{-h}^0 dz \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2} + \frac{1}{R^2} \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2} \right] \cos\theta \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2} \cos\theta - \frac{1}{R} \overline{\frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}} \sin\theta \right\} + \frac{\omega^2}{4g} |\phi|_{z=0}^2 \cos\theta \right\}_{r=R} \end{aligned} \quad (6.276)$$

$$\begin{aligned} \overline{F_y} &= -\int_0^{2\pi} \rho R d\theta \left\{ \int_{-h}^0 dz \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2} + \frac{1}{R^2} \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2} \right] \sin\theta \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2} \sin\theta - \frac{1}{R} \overline{\frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}} \cos\theta \right\} + \frac{\omega^2}{4g} |\phi|_{z=0}^2 \sin\theta \right\}_{r=R} \end{aligned} \quad (6.277)$$

根据速度势的远场近似, 我们有

$$\begin{cases} \Phi &= \text{Re}[(\phi^I + \tilde{\phi})e^{-i\omega t}] \\ \phi^I &= -\frac{igA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{ikr \cos\theta} \\ \tilde{\phi} &= -\frac{igA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} \mathcal{A}(\theta) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - i\pi/4} \end{cases} \quad (6.278)$$

其中  $\tilde{\phi}$  代表散射波和辐射波之和. 方程 (6.276) 和 (6.277) 的二次项中, 只包含  $\phi^I$  的乘积的项没有贡献, 即只有入射波时没有任何漂移力. 当  $R \rightarrow \infty$  时, 乘有  $\frac{1}{R^2}$  的项趋于零. 当只出现  $\phi^I$  和  $\tilde{\phi}$  的交叉乘积时,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sim R^{-3/2}$$

对积分没有贡献. 因此, 方程 (6.276) 和 (6.277) 可以简化为

$$\bar{F}_x = - \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-h}^0 dz \frac{\rho}{2} \cos \theta \left[ \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2} - \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2} \right] + \frac{\omega^2}{4g} |\phi|_{z=0}^2 \cos \theta \right\}_{r=R} R d\theta \quad (6.279)$$

$$\bar{F}_y = - \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-h}^0 dz \frac{\rho}{2} \sin \theta \left[ \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2} - \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2} \right] + \frac{\omega^2}{4g} |\phi|_{z=0}^2 \sin \theta \right\}_{r=R} R d\theta \quad (6.280)$$

应用我们熟悉的驻相法, 得到

$$\bar{F}_x = - \frac{\rho g A^2 C_g}{k C} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta |\mathcal{A}(\theta)|^2 d\theta + 2 \operatorname{Re} \mathcal{A}(0) \right\} \quad (6.281)$$

$$\bar{F}_y = - \frac{\rho g A^2 C_g}{k C} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta |\mathcal{A}(\theta)|^2 d\theta \quad (6.282)$$

应用广义光学定理 (6.216) 消去  $2 \operatorname{Re} \mathcal{A}(0)$ , 式 (6.281) 可改写为

$$\bar{F}_x = \frac{\rho g A^2 C_g}{k C} \left[ \frac{\frac{1}{2} k \bar{E}}{\frac{1}{2} \rho g A^2 C_g} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) |\mathcal{A}(\theta)|^2 d\theta \right] \quad (6.283)$$

其中  $\bar{E}$  是稳态吸收能量的速率, 方括号内的第一项是在宽度为  $\lambda/\pi$  的波阵面内吸收功率的频率, 第二项恒为正, 因此, 当  $\bar{E} \geq 0$  时,  $\bar{F}_x$  恒为正.

波动中, 物体上关于  $z$  轴的力矩定义为

$$T_z = \int_{S_b} P(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_z dS \quad (6.284)$$

作为习题, 读者可以自己证明: (1) 关于  $z$  轴的角动量改变是

$$- \int_S [P(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_z + \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_z(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - U_n)] dS$$

(2) 平均漂移力矩是

$$\begin{aligned} \bar{T}_z &= -\rho \overline{\int_{S_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} R d\theta dz} \\ &= \frac{\rho g A^2 C_g}{k^2 C} \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{d\mathcal{A}^*}{d\theta} \right)_{\theta=0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{A}(\theta) \frac{d\mathcal{A}^*(\theta)}{d\theta} d\theta \right] \end{aligned} \quad (6.285)$$

总之, 漂移力可以从一阶理论的远场公式推导出来. 不规则的波浪可以出生二阶的缓变漂移力, 它的产生因素是: 若存在两个不同的频率  $\omega \pm \Delta\omega/2$ , 则二阶解包括  $e^{\pm 2i\omega t}$  和  $e^{\pm i\Delta\omega t}$  这样的项, 后者有比  $2\pi/\omega$  长得多的时间尺度, 相应的长周期的力可以与固定在浮体上的锚绳的固有模式发生共振, 而产生剧烈的形变.

## 习题

(6.7) 对于二维情况, 由式 (6.271) 证明

$$\bar{F}_x = \left[ \frac{\rho}{2} \int_{-h}^0 (\bar{v}^2 - \bar{u}^2) dz - \frac{\rho\omega^2}{4g} |\phi|_{z=0}^2 \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

然后重新导出方程 (6.262)

(6.8) 对于 Hagen-Cockerell 逆浪吸能器, 如果筏子很细长, 则散射振幅  $A^s(\theta)$  可以略去. 应用辐射波  $A^e$  和  $A^o$  的近似估计 (参看 (6.257) 和 (6.258)), 计算入射方向的漂移力.

## 参考文献

1. J.V. Wehausen, 'The motion of floating bodies,' *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **3**, 237-268(1971).
2. J.N. Newman, 'Absorption of wave energy by elongated bodies,' *Appl. Ocean Res.* **11**, 189-196(1956).

## 第七章 浅水中的非线性长波

### §7.1 近似方程

假设  $k, h, A$  分别是波数, 水深和波波幅, 则浅水线性近似适用的条件, 是长度比值  $kh$  和  $A/h$  很小, 即

$$\mu \equiv kh \ll 1, \quad \epsilon \equiv A/h \ll 1 \quad (7.1)$$

一般地, 对于多数海岸问题, 第二个限制往往不能满足, 因此需要研究浅水波的非线性理论. 历史上出现两种不同的浅水波理论: Airy 理论和 Boussinesq-Korteweg-de Vries 理论. 对于常深度情况下波的破碎问题, 两种理论给出的结论截然相反. 这个矛盾被 Ursell(1953) 解决, 且备 Lin 和 Clark(1959) 进一步澄清. Ursell 特别指出, 以下比值

$$U_r = \frac{A}{h} \frac{1}{(kh)^2} = \frac{kA}{(kh)^3} = \frac{k\lambda^2}{h^3} (2\pi)^2 \quad (7.2)$$

在决定选择哪种近似时起着主导作用, 不同的近似对应于不同的物理图象. 这个比值称为 Ursell 参数, 它应用广泛, 也是有限深度的弱非线性波的 Stokes 理论中的固有参数. 为了描述近似过程, 我们采用针对常深度情况的 Benney(1962) 和 Peregrine(1967) 的表达方式, 而把变深度情况的推广, 留作习题.

类似于线性化理论, 首先我们对变量进行无量纲化, 采用的尺度如下:

$$\begin{aligned} (x', y') &= k(x, y), \quad z' = z/h, \quad t' = k\sqrt{gh}t \\ \zeta' &= \zeta/A, \quad \Phi' = \frac{\Phi}{\left(\frac{A}{kh}\sqrt{gh}\right)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

速度分量的尺度是

$$\begin{aligned} (u, v) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \Phi = \frac{A}{h} \sqrt{gh} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}\right) \Phi' = \\ &= \frac{A}{h} \sqrt{gh} (u', v') \quad (7.4) \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{kh} \frac{A}{h} \sqrt{gh} \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} = \frac{1}{kh} \frac{A}{h} \sqrt{gh} w' \end{aligned}$$

因此, 无量纲方程是

$$\mu^2 (\Phi'_{x'x'} + \Phi'_{y'y'}) + \Phi'_{z'z'} = 0, \quad z' \in (-1, \epsilon \zeta') \quad (7.5)$$

$$\mu^2 (\zeta'_{t'} + \epsilon \Phi'_{x'} \zeta'_{x'} + \epsilon \Phi'_{y'} \zeta'_{y'}) = \Phi'_{z'}, \quad \text{当 } z' = \epsilon \zeta' \quad (7.6)$$

$$\mu^2 (\Phi'_{t'} + \zeta') + \frac{1}{2} \epsilon [\mu^2 (\Phi'^2_{x'} + \Phi'^2_{y'}) + \Phi'^2_{z'}] = 0, \quad \text{当 } z' = \epsilon \zeta' \quad (7.7)$$

$$\Phi'_{z'} = 0, \quad \text{当 } z' = -1 \quad (7.8)$$

为了方便起见, 以下表达中把撇号去掉. 首先我们假设  $\mu = kh$  是小量,  $\Phi$  是解析函数, 可以展开为  $z$  坐标的幂级数

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n \Phi_n \quad (7.9)$$

其中

$$\Phi_n = \Phi(x, y, t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Phi}{\partial z^n} \Big|_{z=-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

把水平梯度  $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  记为  $\nabla$ , 我们有

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \sum_0^{\infty} (z+1)^n \nabla \Phi_n \\ \nabla^2 \Phi &= \sum_0^{\infty} (z+1)^n \nabla^2 \Phi_n \end{aligned}$$

$\Phi$  对  $z$  的偏导数是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-1} \Phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n (n+1) \Phi_{n+1} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n(z+1)^{n-1} \Phi_{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n (n+1)(n+2) \Phi_{n+2} \end{aligned} \quad (7.10)$$

把这些导数关系代入 Laplace 方程, 得到

$$\mu^2 \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n [\mu^2 \nabla^2 \Phi_n + (n+1)(n+2) \Phi_{n+2}] = 0 \quad (7.11)$$

考虑到  $z \in (-1, \epsilon \zeta)$ , 因此  $(z+1)$  的每一幂次的系数必须为零, 我们得到递推关系

$$\Phi_{n+2} = \frac{-\mu^2 \nabla^2 \Phi_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12)$$

在水底  $z = -1$  上, 应用关系 (7.8), 得到  $\Phi_1 \equiv 0$ . 根据方程 (7.12), 我们得到对于所有奇数  $n$ ,  $\Phi_n$  为零, 即

$$\Phi_1 = \Phi_3 = \Phi_5 = \dots = 0 \quad (7.13)$$

对于偶数  $n$ , 我们有

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{-\mu^2}{2 \cdot 1} \nabla^2 \Phi_0 = \frac{-\mu^2}{2!} \nabla^2 \Phi_0 \\ \Phi_4 &= \frac{-\mu^2}{4 \cdot 3} \nabla^2 \Phi_2 = \frac{-\mu^4}{4!} \nabla^2 \Phi_0 \\ \Phi_6 &= \frac{-\mu^2}{6 \cdot 5} \nabla^2 \Phi_4 = \frac{-\mu^6}{6!} \nabla^2 \Phi_0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.14)$$

考虑到  $\Phi_0 = O(\Phi) = O(1)$ , 可以得出  $\Phi_2 = O(\mu^2)$ ,  $\Phi_4 = O(\mu^4)$  等等. 因此, 误差为  $O(\mu^6)$  时, 速度势为

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{\mu^2}{2} (z+1)^2 \nabla^2 \Phi_0 + \frac{\mu^4}{24} (z+1)^4 \nabla^2 \nabla^2 \Phi_0 + O(\mu^6) \quad (7.15)$$

取总的深度  $H = 1 + \epsilon\zeta$ , 方程 (7.6) 和 (7.7) 表示的自由面条件写为

$$\begin{aligned} & \mu^2 \left[ \frac{H_t}{\epsilon} + \nabla H \cdot \left( \nabla \Phi_0 - \frac{\mu^2}{2} H^2 \nabla^2 \nabla \Phi_0 \right) \right] \\ & = -\mu^2 H \nabla^2 \Phi_0 + \frac{\mu^6}{6} H^3 \nabla^2 \nabla^2 \Phi_0 + O(\mu^6) \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} & \mu^2 \left[ \Phi_{0t} - \frac{\mu^2}{2} H^2 \nabla^2 \Phi_{0t} + \zeta \right] + \frac{1}{2} \epsilon \mu^2 [(\nabla \Phi_0)^2 - \mu^2 H^2 \nabla \Phi_0 \cdot \nabla^2 (\nabla \Phi_0)] \\ & + \frac{1}{2} \epsilon \mu^4 H^2 (\nabla^2 \Phi_0)^2 = O(\mu^6) \end{aligned} \quad (7.17)$$

定义

$$\mathbf{u}_0 = \nabla \Phi_0 \quad (7.18)$$

为底面处的水平速度, 方程 (7.16) 改写为

$$\begin{aligned} & \frac{H_t}{\epsilon} + \nabla H \cdot \left( \mathbf{u}_0 - \frac{\mu^2}{2} H^2 \mathbf{u}_0 \right) + H \nabla \cdot \mathbf{u}_0 \\ & - \frac{\mu^4}{6} H^3 \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = O(\mu^4) \end{aligned} \quad (7.19)$$

对方程 (7.17) 取梯度, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{0t} + \epsilon \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \nabla H / \epsilon + \mu^2 \nabla \left[ -\frac{\epsilon}{2} H^2 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_0 \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon}{2} H^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_0)^2 - \frac{1}{2} H^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{0t} \right] = O(\mu^4) \end{aligned} \quad (7.20)$$

一旦解出  $\zeta$  和  $\mathbf{u}_0$ , 实际的速度分量就可以根据以下式子计算

$$(u, v) = \nabla \Phi = \mathbf{u}_0 - \frac{\mu^2}{2} (z+1)^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) + O(\mu^4) \quad (7.21)$$

$$\begin{cases} w & = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\mu^2 (z+1) \nabla^2 \Phi_0 \\ & = -\mu^2 (z+1) (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) + O(\mu^4) \end{cases} \quad (7.22)$$

压力场可以从 Bernoulli 方程得到, 它的无量纲形式是

$$-P = z + \epsilon \left\{ \Phi_t + \frac{\epsilon}{2} \left[ (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\mu^2} \Phi_z^2 \right] \right\} \quad (7.23)$$

其中  $P$  的单位是  $\rho gh$ . 把方程 (7.21) 和 (7.22) 代入上式, 得到近似的压力场

$$\begin{aligned} -P = z + \epsilon \left\{ \left[ \Phi_{0t} - \frac{\mu^2}{2} (z+1)^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{0t} \right] + \frac{\epsilon}{2} [\mathbf{u}_0^2 - \mu^2 (z+1)^2 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_0 \right. \\ \left. + \mu^2 (z+1)^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_0)^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.24)$$

应用方程 (7.17) 消去  $\Phi_{0t}$ , 得

$$-P = (z - \epsilon\zeta) + \frac{\mu^2}{2} [H^2 - (z+1)^2] \{ \nabla \cdot \mathbf{u}_{0t} \}$$

$$+\epsilon[\mathbf{u}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_0 - (\nabla \cdot \mathbf{u}_0)^2] + O(\mu^4) \quad (7.25)$$

引入深度平均的水平速度  $\bar{\mathbf{u}}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \frac{1}{H} \int_{-1}^{\epsilon\zeta} dz \nabla \Phi = \frac{1}{H} \int_{-1}^{\epsilon\zeta} dz \left( \mathbf{u}_0 - \frac{\mu^2}{2} (z+1)^2 \nabla^2 \mathbf{u}_0 + \dots \right) \\ &= \mathbf{u}_0 - \frac{\mu^2}{6} H^2 \nabla^2 \mathbf{u}_0 + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (7.26)$$

即

$$\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\mu^2}{6} H^2 \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + O(\mu^4) \quad (7.27)$$

把方程 (7.27) 代入 (7.20), 我们有

$$H_t + \epsilon \nabla \cdot H \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (7.28)$$

这恰好是按深度平均得到的连续性方程, 它准确到  $\mu^2$  的所有的阶, 用  $\bar{\mathbf{u}}$  替代  $\mathbf{u}_0$ , 我们得到

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_t + \epsilon \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla H}{\epsilon} + \frac{\mu^2}{6} (H^2 \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_t + \mu^2 \nabla \left\{ -\frac{\epsilon}{3} H^2 \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} \right. \\ \left. + \frac{\epsilon}{2} H^2 (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})^2 - \frac{H^2}{2} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t \right\} = O(\mu^4) \end{aligned} \quad (7.29)$$

到目前为止, 所有的方程对于小的  $\mu^2$  有效. 把方程 (7.28), (7.29) 和 (7.25) 用有量纲变量来表示, 我们有

$$H_t + \nabla \cdot (H \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + g \nabla H + \frac{1}{6} (H^2 \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_t \\ + \nabla \left\{ -\frac{2}{3} H^2 \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \frac{H^2}{2} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})^2 \right. \\ \left. - \frac{H^2}{2} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} P = \rho g (\zeta - z) - \frac{1}{2} [H^2 - (z+h)^2] \{ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t \\ + [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})^2] \} \end{aligned} \quad (7.32)$$

以下考虑几种极限情况.

长波的 Airy 理论:  $\mu \rightarrow 0, \epsilon = O(1)$

Airy 理论是有限振幅的很长的长波的首项近似, 因此, 用有量纲变量表示的方程为

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(\zeta + h) \bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (7.33)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + g \nabla \zeta = 0 \quad (7.34)$$

$$P = \rho g (\zeta - z) \quad (7.35)$$

这些方程对变化的  $h(x, y)$  是有效的, 在形式上压力为静水压, 这是 Airy 理论的特征.

当  $h = \text{Constant}$  时, 我们令  $\hat{\rho} = (\zeta + h)$ ,

$$\hat{p} = \frac{1}{2}g(\zeta + h) = \frac{1}{2}g\hat{\rho}^2,$$

则方程 (7.33) 和 (7.34) 可以改写为

$$\hat{\rho} + \nabla \cdot (\hat{\rho}\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

$$\hat{\rho}[\bar{\mathbf{u}}_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}] = -\hat{p}$$

这两个方程恰好是  $\gamma = 2$  时理想气体的方程. 因此气体动力学的方法和知识, 特别是特征线方法和波要变陡破碎的知识, 可以直接应用到水波的长波理论中去. 这叫做气体动力学类比. 要注意的是, 这只是水平运动尺度远大于铅垂尺度时的一种近似. 尽管在气体动力学中上述方法成功地预测了激波的形成, 但是 Airy 理论对于涌潮的形成基本不合适.

Boussinesq 理论:  $O(\epsilon) = O(\mu^2) \ll 1$

对于浅水中中等程度的长波和弱的非线性, 我们近似地取方程 (7.28), (7.29) 和 (7.27) 中只包含  $O(\epsilon)$  和  $O(\mu^2)$  的项, 得到

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(\epsilon\zeta + 1)\bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (7.36)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \epsilon\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \zeta - \frac{\mu^2}{3}\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t) = 0 \quad (7.37)$$

$$P = \epsilon\zeta - z - \frac{\mu^2}{2}(-z^2 + 2z)\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t \quad (7.38)$$

方程 (7.36) 和 (7.37) 称为 Boussinesq 方程.

我们注意到, 这时压力场不再是静水压了. Airy 理论和 Boussinesq 理论形式上的差别, 在于后者包含有因子  $\mu^2$  的线性项. 为了说明这一项的物理意义, 我们考虑方程 (7.36) 和 (7.37) 的一维线性化形式, 写成有量纲的形式是

$$\zeta_t + h\bar{u}_x = 0 \quad (7.39)$$

$$\bar{u}_t + g\zeta_x - \frac{h^2}{3}\bar{u}_{xxt} = 0 \quad (7.40)$$

考虑一列一维正弦波

$$\zeta = Ae^{ikx - \omega t}; \quad \bar{u} = Ue^{i(kx - \omega t)}; \quad \bar{v} = 0 \quad (7.41)$$

把这些关系应用到方程 (7.39) 和 (7.40), 我们得到

$$-i\omega A + ikhU = 0$$

$$-i\omega U + ikgA - \frac{h^2}{3}(ik)^2(-i\omega)U = 0$$

这是  $A, U$  的齐次方程, 要有非平凡解, 系数行列式必须为零,

$$\begin{vmatrix} -i\omega & ikh \\ igk & -i\omega \left(1 + \frac{k^2 h^2}{2}\right) \end{vmatrix} = 0$$



即

$$\omega^2 = \frac{ghk^2}{1 + k^2h^2/3} = ghk^2 \left( 1 - \frac{k^2h^2}{3} + \dots \right) \quad (7.42)$$

或者

$$\begin{aligned} \text{相速度 } C &\cong \sqrt{gh}(1 + k^2h^2/3)^{-1/2} \\ &\cong \sqrt{gh}(1 - k^2h^2/3)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.43)$$

其中的  $(kh^2)/3$  是由  $h^2u_{xxt}/3$  这一项产生的, 显然, 它代表了频散. 把关系 (7.42) 与任意深度情况下的色散关系

$$\omega^2 = gk \tanh kh$$

的二项展开式作比较, 可以进一步证实这一点.

Boussinesq 方程考虑了一阶的非线性  $\epsilon$  和色散  $\mu^2$  效应. 当  $\epsilon \gg \mu^2$  时, 化为 Airy 方程, 该方程对所有的  $\epsilon$  都有效; 当  $\epsilon \ll \mu^2$  时, 化为弱色散的线性化近似; 当  $\epsilon \rightarrow 0, \mu^2 \rightarrow 0$  时, 得到经典的线性化波动方程.

变深度情况

若深度的水平尺度不大于典型的波长, 则同样的近似步骤可以加以推广. 用无量纲变量写出的底部边界条件是

$$\Phi_z = -h_x \Phi_x - h_y \Phi_y, \quad z = -h(x, y) \quad (7.44)$$

或者写成无量纲形式

$$\Phi_z = -\mu^2(h_x \Phi_x + h_y \Phi_y), \quad z = -h(x, y) \quad (7.45)$$

其中变化的深度用典型深度  $h_0$  来无量纲化. 无量纲变量按照方程 (7.3) 和 (7.4) 来定义. 我们假设

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} [z + h(x, y)]^n \Phi_n(x, y) \quad (7.46)$$

以取代方程 (7.9). 代入 Laplace 方程, 我们可以得出  $\Phi_n$  之间的一组递推关系. 特别地, 对于奇数  $n$ ,  $\Phi_n$  不再是零. 按照类似的推导, 对于二维情况, Peregrine (1967) 给出:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(\zeta + h)\bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (7.47)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + g\nabla\zeta = \frac{h}{2}\nabla[\nabla \cdot (h\bar{\mathbf{u}}_t)] - \frac{h^2}{6}\nabla[\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_t] = 0 \quad (7.48)$$

推导中涉及的代数运算是简单的.

## §7.2 边缘波的次谐波共振

线性化边缘波处理为限制在海滩上的波的自由模式. 假如风暴沿海岸以接近边缘波模式的相速度行进, 就可以直接产生行进的边缘波. 这类边缘波的典型周期是几个小时的量级, 它与风暴的空间范围有关. 周期小于几分钟的较短的边缘波也是有实际意义的波, 它们会诱导港湾振动, 也会诱导退潮流, 而这些是形成海滩嘴的原因.

边缘波能否由始终存在的入射波激励产生呢? 如果海岸线有一个缺口, 那么可能有一个类似于港湾共振的线性共振机制. 设想在直的海岸线上有一个矩形小海湾, 长为  $L$ , 宽为  $B$ , 其底部是斜率为常数  $s$  的海滩. 如果入射波的频率  $\omega$  接近于满足本征值条件

$$\omega^2 = gks(2n+1), \quad k = 2m\pi/B, \quad n, m \text{ 为整数.}$$

且小海湾的长度  $L$  为  $O(2\pi/k)$ , 则小海湾内就自然地激发出一个边缘陷波. 因为  $L$  是有限的, 所有边缘波有辐射阻尼, 且它能够从入射波那里获得能量.

Munk(1949) 和 Tucker(1950) 从观潮计记录中发现了沿直海岸周期为几分钟的激浪拍岸, 并认为它们是由一长串的短浪通过非线性机制产生的. 定量的理论已经由 King 与 Smith(1978) 给出, 但是他们的结论完全依赖于根据经验假设的海底摩擦力, 而海底摩擦力的数值不能可靠地估算出来. 而且, 这些理论对波群作了相当粗略的简化. 对此, Foda 和 Mei(1981) 已经进一步作了工作.

Bowen 和 Inman(1969) 在近海环流研究中发现了驻定边缘波场的迹象, 周期的量级与入射波相当. 放大的边缘波对足够短的, 在近岸处要破碎的入射波产生沿岸调制. 周期性的调制对破碎波波高和辐射应力产生影响, 导致周期性的流动单元, 这些又反过来产生海滩嘴. 在这些有趣现象的推动下, Guza 和 Davis(1974), Guza 和 Bowen(1976) 对非线性次谐波的共振机制作了系统考察. 在次谐波共振中, 频率为  $\omega$  的驻定边缘波可与频率为  $2\omega$  的垂直入射波和反射波辐射共振. Guza 和 Bowen 使用 Airy 浅水近似作为他们的理论基础. 除了边缘波初始不稳定之外, 还发现入射波和反射波由于平方非线性通过辐射漏失能量. 他们计及立方非线性和辐射阻尼, 从而可预测初始的共振增长和最后的平衡振幅. 他们自己作的实验也为他们的发现提供了强有力的证据.

Minzoni 和 Whitham(1977) 进一步推广了 Guza 等人的理论. 他们以比较完善的, 较复杂的关于有限斜率海滩上的正交入射波和反射波的 Friedrichs(1948) 理论为出发点. 因为大部分海滩斜率是小的, 所以我们仿效 Guza 和 Bowen, 用浅水波方程

$$\zeta_t + [(sx + \zeta)\Phi_x]_x + [(sx + \zeta)\Phi_y]_y = 0 \quad (7.49)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + g\zeta = 0 \quad (7.50)$$

然而, 如同 Rockliff(1978) 那样, 这里采用 Minzoni 和 Whitham 的较系统的摄动论证.

从式 (7.49) 和 (7.50) 中消去  $\zeta$ , 可以得到单个  $\Phi$  的非线性方程

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Phi = \Phi_{tt} + sg[(x\Phi_x)_x + x\Phi_{yy}] = & 2(\Phi_x\Phi_{xt} + \Phi_y\Phi_{yt}) \\ & + \Phi_t(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) \\ & + \Phi_x^2\Phi_{xx} + \Phi_y^2\Phi_{yy} + 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} \end{aligned} \quad (7.51)$$

方程 (7.51) 的线性化近似有两个解, 第一个是频率为  $2\omega$  的垂直入射波和反射波

$$\Phi_o = -\frac{igA}{2\omega} J_0(4\omega\sqrt{x/gs})e^{-2i\omega t} + c.c. \quad (7.52)$$

在海岸  $x=0$  处, 上式是有限的;  $\omega$  是任意的. 第二个解是频率为  $\omega$  的边缘波模式. 对于一般的模式, 解表示为 Laguerre 多项式. 但为简单起见, 我们只取最低阶模式 (模式 0), 表示为

$$\Phi_e = -\frac{igB}{\omega} e^{-kx} \cos ky e^{-i\omega t} + c.c. \quad (7.53)$$

$\omega, k$  满足色散关系 (本征值条件)

$$\omega = \sqrt{gks} \quad (7.54)$$

如果初始时刻  $\Phi_o, \Phi_e$  都存在, 则在二阶近似下, 方程 (7.51) 中含  $(\Phi_o, F_e)$  的二次项就产生正比于  $G(x) \cos kye^{-i\omega t}$  的简谐强迫项. 这里,  $G(x)$  是  $x$  的某一函数. 如果  $G(x)$  不是在某种意义上正交于齐次解  $e^{-kx}$ , 边缘波就会发生共振, 增大振幅.

把方程 (7.51) 左端的线性项记作  $\mathcal{L}\phi$ , 把右端的平方项, 立方项写成各种可能的组合, 于是

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi_o \mathcal{L}\phi_e &= (\Phi_e, \Phi_e) + (\Phi_o, \Phi_o) + (\Phi_e, \Phi_o) \\ &+ (\Phi_e, \Phi_e, \Phi_e) + (\Phi_o, \Phi_o, \Phi_o) \\ &+ (\Phi_e, \Phi_e, \Phi_o) + (\Phi_e, \Phi_o, \Phi_o) \end{aligned} \quad (7.55)$$

式 (7.55) 右端的谐波频率分别为

$$\begin{aligned} (0, \pm 2), (0, \pm 4), (\pm 1, \pm 3), (\pm 1, \pm 3), (\pm 2, \pm 6) \\ + (\pm 1, \pm 3, \pm 5), (0, \pm 2, \pm 4) \end{aligned} \quad (7.56)$$

把  $A, B$  的量级记作  $a, b$ , 式 (7.55) 右端各项的量级分别是

$$b^2, a^2, ab, b^3, a^2b, ab^2 \quad (7.57)$$

含一次谐波的项可能是强迫共振项. 因为在共振增长的初始阶段  $b \ll a$ , 方程 (7.55) 右端  $O(ab)$  阶的第三项对  $\Phi_e$  的共振是最重要的. 对这个强迫项作出响应时, 边缘波的振幅  $B$  不再是与时间  $t$  无关的常数. 从  $-\partial^2 \Phi_e / \partial t^2$  的项可以预期有一正比于  $\partial B / \partial t$  的项, 代表  $B$  的常数增长. 由于  $\partial B / \partial t$  必须与  $O(ab)$  阶的主要强迫项相当, 所以共振增长的时间尺度必定是  $O(a^{-1})$ . 因此, 这个问题有两个固有的时间尺度,  $\omega^{-1}$  和  $(\omega ka)^{-1}$ .

当共振进一步发展时, 边缘波与驻波相比较, 不再是小的. 我们假定最后有一个平衡态, 这时有些立方项变得和平方项一样重要. 从 (7.56) 和 (7.57) 可知:  $(\Phi_e, \Phi_o)$  可能被  $(\Phi_e, \Phi_e, \Phi_e)$  或  $(\Phi_e, \Phi_o, \Phi_o)$  平衡, 但只有前一种情况是可能的, 这意味着平衡时  $O(ab) = O(b^3)$  即  $b = O(a^{1/2})$ . 为了说明这种情况, 我们令  $\Phi_e$  是  $O(a^{1/2})$  的量级, 引进时间的慢变量  $T = at$ , 作多重尺度展开

$$\begin{aligned} \Phi &= [a^{1/2}\psi_1(x, y, T) + a^{3/2}\psi_2(x, y, T) + \dots]e^{-i\omega t} + c.c. \\ &+ [a\phi_1(x, T) + a^2\phi_2(x, T) + \dots]e^{-2i\omega t} + c.c. \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$T = at$$

方程 (7.51) 左端变为

$$\begin{aligned} a^{1/2}\{\omega^2\psi_1 + gs[(x\psi_{1x})_x + x\psi_{1yy}]\}e^{-i\omega t} + c.c. \\ a\{4\omega^2\phi_1 + gs(x\phi_{1x})_x\}e^{-2\omega t} + c.c. \\ a^{3/2}\left\{\omega^2\psi_2 + gs[(x\psi_{2x})_x + x\psi_{2yy}]\right\} \end{aligned}$$

$$+2i\omega \frac{\partial \psi_1}{\partial T} \left. \right\} e^{-i\omega t} + c.c. \quad (7.59)$$

方程 (7.51) 的右端可以形式地改写为

$$\begin{aligned} & a(\psi_1, \psi_1)e^{-2i\omega t} + c.c. + a^{3/2}(\psi_1^*, \phi_1)e^{-i\omega t} + c.c. \\ & + a^{3/2}(\psi_1^*, \psi_1, \psi_1)e^{-i\omega t} + c.c. \end{aligned} \quad (7.60)$$

现在我们分别写出各阶的摄动方程.

$O(a^{1/2})$  阶的基本方程是

$$\omega^2 \psi_1 + gs[(x\psi_{1x})_x + x\psi_{1yy}] = 0 \quad (7.61)$$

该方程有齐次解

$$\psi_1 = -\frac{igB}{\omega} e^{-kx} \cos ky, \quad \omega^2 = gks \quad (7.62)$$

是最低阶的边缘波模式. 为了便于应用, 我们记  $F = e^{-kx}$ , 它满足

$$\begin{cases} \omega^2 F + gs[(xF_x)_x - xk^2 F] = 0 \\ xF' = 0, \quad \text{当 } x \rightarrow 0; F \rightarrow 0, \quad \text{当 } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (7.63)$$

$O(a)$  阶的方程是

$$4\omega^2 \phi_1 + gs[(x\phi_{1x})_x] = (\psi_1, \psi_1) \quad (7.64)$$

根据方程 (7.62), 经过一些代数运算, 我们得到上式中的平方强迫项

$$(\psi_1, \psi_1) = 2i \left( \frac{gk}{\omega} \right)^2 B^2 e^{-2kx}$$

方程 (7.64) 的齐次解恰好是驻波

$$\phi_1^h = \frac{-igA}{2\omega} J_0(4\sqrt{kx}) \quad (7.65)$$

其中  $A$  是海岸处的振幅. 特解应在  $x = 0$  处有限, 在无穷远处向外传播, 特解是

$$\phi_1^p = i \frac{2\pi gk}{\omega s} B^2 G(\xi) \quad (7.66)$$

其中  $\xi = kx$ , 而且

$$\begin{aligned} G(\xi) &= -E_2(\xi)J_0(4\sqrt{\xi}) + E_1(\xi)Y_0(4\sqrt{\xi}) \\ &+ (E_1(\infty) - iE_2(\infty))J_0(4\sqrt{\xi}) \end{aligned} \quad (7.67)$$

$$E_1(\xi) = \int_0^\xi e^{-2\xi} J_0(4\sqrt{\xi}) d\xi, \quad E_2(\xi) = \int_0^\xi e^{-2\xi} Y_0(4\sqrt{\xi}) d\xi \quad (7.68)$$

容易验证  $\phi_1^p$  满足辐射条件, 这个特解的求解过程留作习题.

现在我们考察  $O(a^{3/2})$  阶的问题. 容易算出

$$(\psi_1^*, \psi_1, \psi_1) = -3i(g/\omega)^3 k^4 B^2 B^* e^{-3kx} \cos ky \quad (7.69)$$

平方项比较长, 可以写成如下形式:

$$(\psi_1^*, \phi)_1 = e^{-kx} \cos ky \left\{ iAB^* \frac{g^2}{2\omega} \cdot \left( 2k \frac{dJ_0}{dx} + \frac{d^2 J_0}{dx^2} \right) - i \frac{2\pi g^2 k}{\omega s} B^* B^2 \left( 2k \frac{dG}{dx} + \frac{d^2 G}{dx^2} \right) \right\} \quad (7.70)$$

提出公因子  $\cos ky$ ,  $O(a^{3/2})$  阶的方程是

$$\begin{aligned} \omega^2 H + gs[(sH_x)_x - k^2 xH] = & \left[ -2i\omega \frac{\partial B}{\partial T} \right. \\ & + iAB^* \frac{g^2}{2\omega} \left( 2k \frac{dJ_0}{dx} + \frac{d^2 J_0}{dx^2} \right) \\ & \left. - i \frac{2\pi g^2 k}{\omega s} B^* B^2 \left( 2k \frac{dG}{dx} + \frac{d^2 G}{dx^2} \right) \right] e^{-kx} \\ & - 3i \left( \frac{g}{\omega} \right)^2 k^4 B^2 B^* e^{-3kx} \end{aligned} \quad (7.71)$$

其中  $H$  定义为

$$\psi_2 \equiv H(x) \cos ky \quad (7.72)$$

齐次问题 (7.63) 有非平凡解  $F = e^{-kx}$ , 故  $H$  必须满足可解性条件. 这个条件按照通常推导 Green 公式的方法得到, 即方程 (7.71) 乘以  $F$ , 方程 (7.63) 乘以  $H$ , 两式相减后从 0 到  $\infty$  进行积分. 经过分部积分后, 我们得到

$$\int_0^\infty dx e^{-kx} [\text{方程 (7.71) 的右端}] = 0 \quad (7.73)$$

这个正交条件给出  $B$  的微分方程. 作变量代换  $\xi = kx$ , 方程 (7.73) 变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial T} = & \frac{iAB^* gk^2}{2\omega} \alpha - i \frac{2\pi gk^3}{\omega s} B^* B^2 \beta \\ & - i \frac{3}{4} \frac{g^2}{\omega^3} k^4 B^* B^2 \end{aligned} \quad (7.74)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  是定积分

$$\begin{cases} \alpha = \int_0^\infty d\xi e^{-2\xi} \left( 2 \frac{dJ_0}{d\xi} + \frac{d^2 J_0}{d\xi^2} \right) = 8E_1 \infty = (2e^2)^{-1} = 0.06767 \\ \beta = \int_0^\infty d\xi e^{-2\xi} \left( 2 \frac{dG}{d\xi} + \frac{d^2 G}{d\xi^2} \right) = -\frac{1}{\pi} + E_G \end{cases} \quad (7.75)$$

其中

$$\begin{aligned} E_G = & \int_0^\infty d\xi e^{-2\xi} G(\xi) = -i(E_1(\infty))^2 + 2 \int_0^\infty d\xi e^{-2\xi} Y_0(4\sqrt{\xi}) \\ & \cdot \int_0^\infty d\tau e^{-2\tau} J_0(4\sqrt{\tau}) = 0.02862 - 0.0045782i \end{aligned}$$

方程 (7.74) 描述了边缘波振幅的非线性演化, 给定了  $A$  和初始值  $B(0)$ , 就可以进行数值积分. 方程 (7.52) 乘以  $B^*$ , 再加上这一乘积的复共轭, 就可以得到物理意义明显的表达式

$$\frac{\partial |B|^2}{\partial T} = \frac{gk^2}{\omega} \left[ -\alpha A \text{Im} B^{*2} + \frac{4\pi k}{s} |B|^4 \text{Im} \beta \right] \quad (7.76)$$

这是一个能量方程, 说明边缘波的变化是由于它与驻波的相互作用 (右端第一项) 和二次谐波的辐射 (右端第二项) 而引起的.  $\text{Im}\beta$  是负的, 它表示阻尼.

在  $B$  远小于  $A$  的初始阶段, 方程 (7.74) 的最后两项正比于  $B^*B^2$ , 可以略去, 剩下

$$\frac{\partial B}{\partial T} = \frac{4igk^2}{\omega} E_1(\infty) AB^* \quad (7.77)$$

微分 (7.77), 得到

$$\frac{\partial^2 B}{\partial T^2} = |A|^2 \left[ \frac{4gk^2}{\omega} E_1(\infty) \right]^2 B \quad (7.78)$$

上式的解是

$$B(T) = B(0) \exp \left[ \pm \frac{4gk^2}{\omega} |A| E_1(\infty) T \right] \quad (7.79)$$

因此振幅增长率正比于  $|A|$ . 因为  $gk^3/\omega = \omega^5/g^2s^2$ , 所以增长率随着频率的增高和海滩倾角的减小而增加. 这一结果与当  $s \rightarrow 0$  时 Minzoni 和 Whitham 的结果完全符合.

现在考虑  $\partial B/\partial T = 0$  的非线性平衡状态, 应用方程 (7.74), (7.75) 和 (7.76), 可以求得边缘波的平衡振幅为

$$|B| = \left[ \frac{4E_1(\infty)s|A|}{k|16\pi E_G - 5/4|} \right]^{1/2} \quad (7.80)$$

对应的爬高 (定义为海岸线的最大偏移) 是

$$\begin{aligned} X_R &= 4|B|/s = 8 \sqrt{\frac{E_1(\infty)}{|16\pi E_G - 5/4|} \left( \frac{|A|}{ks} \right)^{1/2}} \\ &= 3.815 \left( \frac{|A|}{ks} \right)^{1/2} = 3.815 \left( \frac{|A|g}{\omega^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.81)$$

这等价于当  $s \rightarrow 0$  时 Minzoni 和 Whitham (1977, (76) 式) 的极限结果

$$X_R = 5.4(ga_0/\sigma^2)^{1/2} \quad (7.82)$$

其中  $a_0 = 2A$ ,  $\sigma = \omega/2$ , 这也与 Guza 和 Bowen(1976) 的结果一致. Bowen 对海滩倾角  $s = 6^\circ$  和入射波周期  $2\pi/2\omega = 2.7$  秒的情况做了模型试验.  $2A$  从 2cm 变化到 4cm, 测得式 (7.82) 中的系数平均为 4.5, 而不是 5.4, 但是试验中的驻波  $\phi_1$  是很陡的. 此外, 他们的理论所预计的辐射二次谐波也为 Guza 和 Bowen 的实验所证实. 显然, 辐射相对于限制共振振幅增长的阻尼.

### 习题

(7.1) 研究下述情况下的不完全共振 (失调) 的效应. 强迫频率是

$$\omega' = \omega + \kappa A, \text{ 其中 } \omega = (gks)^{1/2}, \kappa = O(1).$$

试证: 当  $\kappa \neq 0$  时, 初始增长率减小, 但最终平衡振幅增大.

## §7.3 永形色散长波

线性波动理论中,  $e^{ik(x-Ct)}$  型的解是最基本的. 在线性波动理论中, 以  $x - Ct$  的组合依赖  $x$ 、 $t$  的解是否可以存在? 这些解代表以常速传播的不变形的波, 称为永形波. 从以前的讨论可知, 非线性使波峰变陡, 而色散则抑制这种趋向, 使不同波长的波弥散开来. 因此, 如果存在永形波, 则必然对应于两种效应处于完全平衡的状态.

首先, 我们写出无量纲的 Boussinesq 方程 (7.36), (7.37) 的一维形式:

$$\zeta_t + \epsilon(\bar{u}\zeta_x + \zeta\bar{u}_x) + \bar{u}_x = 0 \quad (7.83)$$

$$\bar{u}_t + \epsilon\bar{u}\bar{u}_x + \zeta_x = \frac{\mu^2}{3}\bar{u}_{xxt} \quad (7.84)$$

其中  $\epsilon = A/h$  是非线性的度量,  $\mu^2 = (kh)^2$  是色散的度量. 为了简洁起见, 省去了撇号. 把式 (7.83) 对  $t$  求导, 我们有

$$\zeta_{tt} + \bar{u}_{xt} + \epsilon[\bar{u}_t\zeta + \zeta_t\bar{u}]_x = 0$$

应用方程 (7.83) 和 (7.84), 并把上式截断到  $O(\epsilon, \mu^2)$  阶, 得到

$$\zeta_{tt} - \left[ \epsilon\bar{u}\bar{u}_x + \zeta_x + \frac{\mu^2}{3}\zeta_{xxx} \right] + \epsilon[-\zeta\zeta_x - \bar{u}\bar{u}_x]_x = 0$$

即

$$\zeta_{tt} - \zeta_{xxx} = \epsilon \left[ \frac{1}{2}\zeta^2 + \bar{u}^2 \right]_{xx} + \frac{\mu^2}{3}\zeta_{xxxx} \quad (7.85)$$

现在我们寻找如下形式的解

$$\zeta = \zeta(\xi), \quad \bar{u} = \bar{u}(\xi)$$

这里  $\xi = x - Ct$ , 且

$$C = 1 - \epsilon C_1 \quad (7.86)$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -C \frac{\partial}{\partial \xi}$$

方程 (7.85) 变为

$$(C^2 - 1)\zeta'' = \epsilon \left( \frac{1}{2}\zeta^2 + \bar{u}^2 \right)'' + \frac{1}{3}\mu^2\zeta''''$$

其中  $(\quad)' = d/d\xi$ , 积分两次, 并要求其解有界, 可得

$$(C^2 - 1)\zeta + A_1 = \epsilon \left( \frac{1}{2}\zeta^2 + \bar{u}^2 \right) + \frac{1}{3}\mu^2\zeta''$$

且  $A_1 = O(\epsilon, \mu^2)$ . 由方程 (7.83), (7.84) 的首阶项可得

$$C\bar{u} = \zeta + O(\epsilon, \mu^2)$$

在应用方程 (7.86), 得到

$$\bar{u} = \zeta + O(\epsilon, \mu^2)$$

因此

$$(C^2 - 1)\zeta + A_1 = \frac{3}{2}\epsilon\zeta^2 + \frac{1}{3}\mu^2\zeta''$$

乘以  $\zeta'$ , 再积分一次, 我们有

$$-\frac{\epsilon}{2}\zeta^3 + (C^2 - 1)\frac{\zeta^2}{2} + A_1\zeta + A_2 = \frac{\mu^2}{3}\frac{\zeta'^2}{2} \quad (7.87)$$

且  $A_2 = O(\epsilon, \mu^2)$ . 下边讨论对应于不同的  $A_1, A_2$  的两种特殊情况.

### §7.3.1 孤立波

这是由 John Scott Russell 发现的一种单一波峰的波. 当  $\xi \rightarrow \pm\infty$  时, 它的振幅趋于零. 考虑到在无穷远处,  $\zeta, \zeta', \zeta''$  都应该为零, 所以常数  $A_1, A_2$  必须等于零. 方程 (7.87) 写成

$$(\zeta')^2 = 3\zeta^2 \left( \frac{C^2 - 1}{\epsilon} - \zeta \right) \left( \frac{\epsilon}{\mu^2} \right) \quad (7.88)$$

为使上式右端为正, 必须有

$$C > 1, \quad (\text{无量纲形式}) \text{ 或 } C > \sqrt{gh} \quad (\text{有量纲形式})$$

这种波速称为 超临界波速. 还需要

$$\zeta \leq \frac{C^2 - 1}{\epsilon}$$

$(C^2 - 1)/\epsilon$  是孤立波的最大振幅, 根据无量纲化的过程, 它恰好是 1, 即

$$C^2 = 1 + \epsilon \quad (7.89)$$

上式的有量纲形式是

$$C = \sqrt{gh}(1 + A/h)^{1/2} = \sqrt{g(h + A)} \quad (7.90)$$

这个结果是 Tayleigh 首先发现的, 说明波速随振幅而增加.

应用关系 (7.89), 方程 (7.88) 可以写为

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\sqrt{3\epsilon}}{\mu}\zeta\sqrt{1-\zeta}$$

积分得出

$$\frac{\sqrt{\epsilon}}{\mu}\sqrt{3}(\xi - \xi_0) = -2 \tanh^{-1} \sqrt{1-\zeta}$$

即

$$\zeta = \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{3\epsilon}}{2\mu}(\xi - \xi_0) \quad (7.91)$$

相应的波形是顶峰在  $\xi_0$  的孤立山包. 积分常数  $\xi_0$  可以取为零.

用有量纲形式表示, 水面形状是

$$\zeta = A \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{A}{h^3} \right)^{1/2} (x - Ct) \quad (7.92)$$

因此, 波形越窄, 峰值越高. 在长水槽中, 几乎任何一种冲击都容易产生孤立波, 该理论实验证明可参看 Dailey 和 Stephan(1952).



## §7.3.2 椭圆余弦波 (cnoidal waves)

除了刚才讨论的孤立波, 周期性的永形波也是可能的. 我们首先把 (7.87) 写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{\epsilon} (\zeta')^2 &= -\zeta^3 + \frac{C^2 - 1}{\epsilon} \zeta^2 + B_1 \zeta + B_2 \\ &= (\zeta_3 - \zeta)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_1) = P_3 \end{aligned} \quad (7.93)$$

其中  $\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3$  是三次多项式  $P_3$  的三个零点. 因为上式左端是正的, 为了有实数解, 右端也必须正的. 因此  $\zeta$  必须处在  $\zeta_2$  和  $\zeta_3$  之间,  $\zeta_3$  和  $\zeta_2$  分别对应于波峰和波谷的高度, 它们的差就是总的无量纲波高:

$$\zeta_3 - \zeta_2 = H \quad (7.94)$$

方程 (7.93) 的解可以用椭圆积分表示. 首先引进

$$\zeta = \zeta_3 \cos^2 \phi + \zeta_2 \sin^2 \phi \quad (7.95)$$

于是

$$\zeta' = (\zeta_3 - \zeta_2)(-2 \sin \phi \cos \phi) \quad (7.96)$$

把 (7.95) 和 (7.96) 代入 (7.93), 我们得到

$$\begin{aligned} 4(\zeta_3 - \zeta_2)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \phi'^2 &= \frac{3\epsilon}{\mu^2} [\zeta_3(1 - \cos^2 \phi) - \zeta_2 \sin^2 \phi] \\ &\quad \cdot [-\zeta_3 \cos^2 \phi + \zeta_2(1 - \sin^2 \phi)] \cdot [\zeta_1 - \zeta_3(1 - \sin^2 \phi) - \zeta_2 \sin^2 \phi] \\ &= \frac{3\epsilon}{\mu^2} (\zeta_3 - \zeta_2)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi [(\zeta_2 - \zeta_1) - (\zeta_3 - \zeta_2) \sin^2 \phi] \end{aligned} \quad (7.97)$$

因此

$$\phi'^2 = \frac{3}{4} \frac{\epsilon}{\mu^2} (\zeta_3 - \zeta_2) [1 - m \sin^2 \phi] \quad (7.98)$$

且

$$m = (\zeta_3 - \zeta_2) / (\zeta_3 - \zeta_1) \quad (7.99)$$

其中  $m \in (0, 1)$ , 最后可得

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} \equiv F(\phi, m) = \pm \frac{\sqrt{3\epsilon}}{2\mu} \sqrt{\zeta_3 - \zeta_1} (\xi - \xi_0)$$

这是模为  $m$  的第一类不完全椭圆积分的标准形式, 也可以认为  $\phi$  是  $\xi$  的隐函数. 我们更清楚地记

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \text{cn} \left[ \frac{\sqrt{3\epsilon}}{2\mu} \sqrt{\zeta_3 - \zeta_1} (\xi - \xi_0) \right] \\ \sin \phi &= \text{sn} \left[ \frac{\sqrt{3\epsilon}}{2\mu} \sqrt{\zeta_3 - \zeta_1} (\xi - \xi_0) \right] \end{aligned}$$

其中  $\text{cn}$  和  $\text{sn}$  称为椭圆余弦函数和椭圆正弦函数. 应用 (7.95), 我们得到自由面高度

$$\zeta = \zeta_2 + (\zeta_3 - \zeta_2) \text{cn}^2 \left[ \frac{\sqrt{3\epsilon}}{2\mu} \sqrt{\zeta_3 - \zeta_1} (\xi - \xi_0) \right] \quad (7.100)$$

其中  $\zeta_2$  是从平衡位置测量起的波谷的水平高度, 因而是负的, 把 (7.100) 写成有量纲形式

$$\zeta^* = \zeta_2^* + (\zeta_3^* - \zeta_2^*) \operatorname{cn}^2 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{\zeta_3^* - \zeta_1^*}}{h^{3/4}} (x - Ct - x_0) \right] \quad (7.101)$$

方程 (7.100), (7.101) 通称为 椭圆余弦波 (cnoidal wave).

考虑到  $\cos \phi$  的周期为  $2\pi$ , 按照定义  $\operatorname{cn}(z)$  也是  $z$  的周期性函数, 设其周期为  $4K$ , 则

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} \equiv F(\phi, m) = 4K$$

或者

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} \quad (7.102)$$

是第一类完全椭圆积分. 考虑到  $\operatorname{cn}^2$  的周期为  $2K$ , 因此椭圆余弦波的无量纲波长  $\lambda$  满足关系

$$\frac{\sqrt{3\epsilon}}{2\mu} \sqrt{\zeta_3 - \zeta_1} \lambda = 2K(m)$$

即

$$\lambda = \frac{4K(m)\mu}{\sqrt{3(\zeta_3 - \zeta_1)\epsilon}} \quad (7.103)$$

可见波长通过  $m$  依赖于振幅. 应用周期和波长, 方程 (7.100) 变成

$$\zeta = \zeta_2 + (\zeta_3 - \zeta_2) \operatorname{cn}^2 \left[ \frac{2K}{\lambda} (\xi - \xi_0) \right] \quad (7.104)$$

根据多项式的根与多项式系数之间的关系, 由方程 (7.93), 可以看出

$$\frac{C^2 - 1}{\epsilon} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$

说明波速可以表示为

$$C^2 = 1 + \epsilon(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \quad (7.105)$$

椭圆余弦波原则上由三个参数  $\zeta_1, \zeta_2$  和  $\zeta_3$  确定, 或者等价地由  $\zeta_2, \zeta_3$  和波长  $\lambda$  三个参数确定. 但是, 在工程上, 需要把这些参数换算成波长  $\lambda$ , 平均深度和波高 (由波谷垂直地量到波峰). 定义平均深度使在一个波长内流体所占据的净面积为零, 我们有

$$\int_0^\lambda \zeta d\xi = 0$$

代入方程 (7.95), 有

$$\int_0^\pi (\zeta_3 \cos^2 \phi + \zeta_2 \sin^2 \phi) \frac{d\xi}{d\phi} d\phi = 0$$

应用关系 (7.98), (7.99), 丢掉常数因子, 并应用  $\sin^2 \phi$  的  $\pi/2$  对称性, 上式左端改写为

$$\int_0^{\pi/2} d\phi \frac{\zeta_1 + (\zeta_3 - \zeta_1)(1 - m \sin^2 \phi)}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} = 0$$

根据第二类椭圆积分的定义

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \phi} d\phi \quad (7.106)$$

再应用椭圆余弦函数的周期定义 (7.102), 我们有

$$\zeta_1 K(m) + (\zeta_3 - \zeta_1) E(m) = 0 \quad (7.107)$$

即

$$\zeta_1 = -\frac{E}{K}(\zeta_3 - \zeta_1) = -\frac{E}{K} \frac{\zeta_3 - \zeta_2}{m} = -\frac{HE}{mK} \quad (7.108)$$

应用方程 (7.107), 得到

$$\zeta_3 = -\zeta_1 \left( \frac{E}{K} - 1 \right) = \frac{H}{m} \left( 1 - \frac{E}{K} \right) \quad (7.109)$$

最后, 我们得到

$$\zeta_2 = \zeta_3 - H = \frac{H}{m} \left( 1 - m - \frac{E}{K} \right) \quad (7.110)$$

于是三个参数  $\zeta_1, \zeta_2$  和  $\zeta_3$  都用  $H, m$  和平均深度  $h$  表示出来了. 代入 (7.105), 得到无量纲波速

$$C^2 = 1 + \epsilon \frac{H}{m} \left[ -m + 2 - \frac{3E}{K} \right] \quad (7.111)$$

代入 (7.103) 得到无量纲波长

$$\lambda = \frac{4K\mu}{\sqrt{3\epsilon}} \sqrt{\frac{m}{H}} \quad (7.112)$$

最后得到波的无量纲周期

$$T = \frac{\lambda}{C} = \frac{\frac{4\mu}{\sqrt{3\epsilon}} \sqrt{\frac{m}{H}} K}{\left[ 1 + \epsilon \frac{H}{m} \left( -m + 2 - \frac{3E}{K} \right) \right]^{1/2}} \quad (7.113)$$

要回到有量纲变量, 必须用下列变换

$$\begin{aligned} x &\rightarrow kx, & t &\rightarrow k\sqrt{gh}t, & C &\rightarrow \sqrt{gh}C \\ \lambda &\rightarrow k\lambda, & H &\rightarrow H/A \end{aligned}$$

应用定义  $\mu = kh, \epsilon = A/h$ , 我们得到有量纲变量的表达式

$$C^2 = gh \left[ 1 + \frac{H}{h} \frac{1}{m} \left( -m + 2 - \frac{3E}{K} \right) \right] \quad (7.114)$$

$$\lambda = 4Kh \sqrt{\frac{m}{3H/h}} \quad (7.115)$$

$$T = \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{4K \sqrt{\frac{m}{3H/h}}}{\left[ 1 + \frac{H}{h} \frac{1}{m} \left( -m + 2 - \frac{3E}{K} \right) \right]^{1/2}} \quad (7.116)$$

$$\zeta = \zeta_2 + Hcn^2 \left[ \frac{2K}{\lambda} (x - Ct) \right] \quad (7.117)$$

原则上, 参数  $m$  可以从 (7.114), (7.115) 和 (7.116) 式的任何一对方程中消去, 得到  $C = C(T, H)$ ,  $\lambda = \lambda(T, H)$  等形式关系, 但以  $m$  为参数的形式比较简单. 下边看两种极限情况.

(1):  $m \rightarrow 1$  的情况

这时,  $\zeta_2 \rightarrow \zeta_1 \rightarrow 0$ ,  $E_1(1) = 1$ ,  $k(1) \rightarrow \infty$ ; 从而  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\text{cn}^2 u \rightarrow \text{sech}^2 u$ . 根据 (7.112),  $K/\lambda$  趋近于一个有限值, 我们得到

$$\zeta = H \text{sech}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} (H/h^3)^{1/2} (x - Ct)$$

恰好与方程 (7.92) 一致. 因此, 孤立波就是波长为无限长情况下的椭圆余弦波. 保持波长固定, 波形自然变成孤立的尖峰. 波速变为

$$C^2 = gh(1 + H/h)$$

(2):  $m \rightarrow 0$  的情况

这时,  $\zeta_3 - \zeta_2 = H \rightarrow 0$ , 对应于无穷小振幅波情况. 容易证明:

$$C^2 \rightarrow gh, \quad \text{cn}(u, m) \rightarrow \text{cn}(u, 0) \rightarrow \cos u, \quad K = E \rightarrow \pi/2$$

因此

$$\zeta = \zeta_2 + H \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (x - Ct)$$

现在  $\zeta_2 = -a = -H/2$ , 因此

$$\zeta = \frac{1}{2} H \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (x - Ct)$$

这是线性化的正弦波, 波速  $C = \sqrt{gh}$ .

## §7.4 单向色散波 -KdV 方程

根据上一节的讨论, 我们知道永形的色散波以恒稳的形式沿着正  $x$  轴方向运动, 由关系 (7.89), 我们知道这种波依赖于下列变量

$$\xi = x - Ct = x - t + O(\epsilon)t$$

一个以线性化长波速度 (在无量纲情况下为 1) 运动的观测者, 可以观察到一种随时间的缓慢变化, 这种缓慢变化的时间尺度是  $O(1/\epsilon)$ . 这说明, 对于更一般的沿  $x$  方向传播的非线性色散长波的非定常演化, 取以下变量是合适的

$$\sigma = x - t, \quad \tau = \epsilon t \tag{7.118}$$

因此, 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \zeta(x, t) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \zeta(\sigma, \tau) \\ \frac{\partial}{\partial t} \zeta(x, t) = \left( -\frac{\partial}{\partial \sigma} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \zeta(\sigma, \tau) \end{cases}$$

Boussinesq 方程 (7.83), (7.84) 改写为

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial \bar{u} \zeta}{\partial \sigma} = 0 \\ \epsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \epsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = -\frac{\mu^2}{3} \bar{u}_{\sigma\sigma\sigma} + O(\epsilon\mu^2) \end{cases}$$

把两式相加, 并保留  $O(1)$  和  $O(\mu^2/\epsilon)$  项, 我们得到

$$\frac{\partial(\bar{u}\zeta)}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \bar{u} \zeta}{\partial \sigma} + \frac{\mu^2}{3\epsilon} \bar{u}_{\sigma\sigma\sigma} = O(\mu^2) \quad (7.119)$$

应用 Bernoulli 方程的首阶近似

$$\phi_{0t} + \zeta \cong 0$$

来消去方程 (7.119) 中的  $\bar{u}$  或  $\zeta$ . 因为在首阶近似下

$$\phi_{0t} \cong \phi_{0\sigma} = \phi_{0x} = u_0 = \bar{u}$$

因此

$$\bar{u} = \zeta + O(\epsilon, \mu^2)$$

应用这个近似, 方程 (7.119) 变成

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} + \frac{\mu^2}{6\epsilon} \bar{u}_{\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (7.120)$$

或者

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + \frac{\mu^2}{6\epsilon} \zeta_{\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (7.121)$$

在静止的坐标系中, 以有量纲变量表示, 上式变成

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sqrt{gh} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{h} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0 \quad (7.122)$$

在固定坐标系中, 非线性项和色散项分别是  $\epsilon, \mu^2$  阶的小量, 因此可以用  $-\zeta_t$  代替  $\sqrt{gh}\zeta_x$ , 不会影响精度. 因此上式可以写为另外几种等价形式

$$\begin{aligned} \zeta_t + \sqrt{gh}\zeta_x + \frac{3}{2}\sqrt{gh}\frac{\zeta}{h} \begin{bmatrix} \zeta_x \\ -\zeta_t/\sqrt{gh} \end{bmatrix} \\ + \frac{h^2}{6}\sqrt{gh} \begin{bmatrix} \zeta_{xxx} \\ -\zeta_{xxt}/\sqrt{gh} \\ \zeta_{xtt}/gh \\ -\zeta_{ttt}(gh)^{-3/2} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (7.123)$$

容易验证, 到  $O(\epsilon, \mu^2)$  阶近似, 上面任何一种形式不改变线性化色散. 从方程 (7.120), (7.121) 出发, 假设  $\zeta = \zeta(\sigma - Ct)$  或者  $\bar{u} = \bar{u}(\sigma - Ct)$  也可以推导得出永形波 (孤立波和椭圆余弦波), 推导留作习题. 下边是 KdV 方程的解析解问题.

## §7.5 初始脉冲的演化

KdV 方程描写许多物理分支中的非线性色散波, 所以成了近年来广泛研究的课题. Zabusky 和 Kruskal(1965) 对 KdV 方程周期性边界条件进行了广泛的数值研究. 他们指出, 一个初始隆起经过分解组合, 形成多个脉冲, 每一个脉冲都有孤立波的性质. 这些孤立波以不同的速度运动, 它们相遇后保持原形离开, 唯一的效应是相位的改变. 因为这些特性在粒子物理中(电子, 质子等)是常见的, 因此 Zabusky 和 Kruskal 把孤立波叫做孤立子(Soliton).

Gardner, Green, Kruskal 和 Miura(1967) 的工作, 部分地受量子力学中散射反演理论的启发, 开创性地求得了有限区域内有扰动的 KdV 方程初值问题的解析解. 受其影响, 人们在各个物理和工程分支中开展了这方面的研究, 取得了许多成果. 详尽的知识可参阅: Abowitz 和 Segur(1981), Miura(1974) 和 Whitham(1974). 这里我们只作一些概述.

根据 Gardner 等人的习惯, 把 KdV 方程写为:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (7.124)$$

上式是从 (7.121) 出发经过如下变换得到,

$$\zeta \rightarrow -4u, \quad \sigma \rightarrow \frac{\mu}{\sqrt{6\epsilon}}x, \quad \tau \rightarrow \frac{\mu}{\sqrt{6\epsilon}}t$$

方程 (7.124) 的解是

$$u = -\frac{f^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{f}{2}(x - f^2 t) \quad (7.125)$$

振幅为  $f^2/2$  的孤立波.

首先我们考虑似乎无关的 Schrödinger 方程

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0 \quad (7.126)$$

其中  $u = u(x, t)$ ,  $t$  是参数. 在典型的量子力学问题中, 势  $u$  是给定的, 需要求出本征值和本征函数. 我们考虑这样的情况: 在有限区域中当  $u \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$  时  $u$  足够快地趋于零. 这时存在两类本征值问题. 一类是负本征值问题, 出现离散谱,  $\lambda = \lambda_n = -k_n^2, n = 1, 2, 3, \dots$ ; 相应的本征函数在无穷远处为零, 因而叫做束缚态, 它们在无穷远处的特性是

$$\begin{aligned} \psi_n &\sim c_n e^{-k_n x}, \quad x \rightarrow +\infty \\ &\sim d_n e^{k_n x}, \quad x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (7.127)$$

其中  $c_n, d_n$  是归一化常数, 它们的选择, 使得对所有的  $n$  都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx = 1 \quad (7.128)$$

一般地, 所有的  $c_n, d_n, k_n$  都依赖于  $t$ . 另一类是正本征值问题,  $\lambda = k^2 > 0$ , 形成连续谱. 对应于每一个  $k$  的本征函数, 存在下面的渐近状态:

$$\begin{aligned} \psi &\sim a(k, t)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty \\ &\sim e^{-ikx} + b(k, t)e^{ikx}, \quad x \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (7.129)$$

显然, 对于每一个  $k$ ,  $\psi$  描述一个直接的散射问题. 其中  $a$  是透射系数,  $b$  是反射系数, 都依赖于  $t$ .

在关于方程 (7.126) 的散射反演问题中, 人们的兴趣在势  $u$  的寻找. Gelfand 和 Levitan(1955) 的工作表明, 如果散射数据  $c_n(t)$ ,  $b(k, t)$  已知, 则  $u(x, t)$  可以唯一地确定. 具体地说, 我们必须构造积分方程的核

$$B(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, t) e^{ikx} dk + \sum_{n=1}^N c_n^2(t) e^{-k_n x} \quad (7.130)$$

再根据如下的 Gelfand-Levitan 积分方程解出  $K$ ,

$$K(x, y, t) + B(x + y, t) + \int_x^{\infty} B(y + z, t) K(x, z, t) dz = 0 \quad (7.131)$$

于是  $u$  可以由下式给出

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t) \quad (7.132)$$

方程 (7.130)-(7.132) 的基础在数学物理中有说明, 感兴趣的可参看 Lamb(1980).

现在我们寻找本征值及散射量与时间的关系. 首先, 离散本征值是常数, 与时间无关. 证明如下:

根据 (7.126), 有  $u = \lambda + \psi_{xx}/\psi$ , 代入 kdV 方程 (7.124) 整理后得到

$$\lambda_t \psi^2 + [\psi R_x - \psi_x R]_x = 0 \quad (7.133)$$

其中

$$R \equiv \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x$$

对 (7.133) 进行积分, 考虑到当  $|x| \rightarrow \infty$  时, 对应的本征值  $\lambda_n$  的本征函数及其导数消失, 我们得到

$$\lambda_{nt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx = \lambda_{nt} = 1$$

因此,  $\lambda_n = \text{Const.}$  而连续的本征值  $\lambda = k^2$  始终在  $[0, \infty)$  内, 事实上不改变, 因此,  $\lambda$  与时间无关.

根据  $\lambda_t = 0$ , 方程 (7.133) 变成

$$\psi R_{xx} - R \psi_{xx} = 0$$

或者

$$R_{xx} + (\lambda - u)R = 0$$

与方程 (7.126) 完全相同, 说明  $R$  可以用方程 (7.126) 的本征函数来表示

$$R \equiv \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x = C\psi + D\phi \quad (7.134)$$

其中  $C, D$  依赖于  $t$ ,  $\psi$  是 (7.126) 的本征函数, 而

$$\phi = \psi \int_0^x \psi^{-2} dx$$

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\phi$  是指数增长的, 因此在方程 (7.134) 中必须  $D(t) = 0$ . 对方程 (7.134) 乘以  $\psi$ , 积分得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \psi^2 \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\psi \psi_{xx} - 2\psi_x^2 - 3\lambda \psi^2)_x dx$$

$$= C \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx$$

考虑到  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = 1$  以及本征函数的渐近性质, 上式左端积分消失, 因此我们得到  $C(t) = 0$ , 且方程 (7.134) 写为

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x = 0 \quad (7.135)$$

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $u \rightarrow 0$ ,  $\psi$  的渐近性质由方程 (7.127) 给出, 代入方程 (7.135), 我们得到

$$c_{nt} - 4k_n^2 c_n = 0$$

即

$$c_n = c_n(0)e^{4k_n^2 t} \quad (7.136)$$

对于连续谱情况, 我们考虑  $x \rightarrow -\infty$  时的渐近式, 把 (7.129) 代入 (7.134), 我们有

$$a_t + 4ik^3 a = ca + \frac{D}{a} \int_{-\infty}^x e^{2ikx} dx \quad (7.137)$$

因为  $a$  与  $x$  无关, 因此  $D = 0$ , 代入上式, 得到

$$a_t + (4ik^3 - c)a = 0 \quad (7.138)$$

再考虑到  $x \rightarrow \infty$  时的渐近性质, 分离出  $e^{\pm ix}$  的系数之后, 我们得到

$$c = 4ik^3, \quad b_t - 8ik^3 b = 0 \quad (7.139)$$

根据以上两式, 我们有

$$a(k, t) = a(k, 0), \quad b(k, t) = b(k, 0)e^{8ik^3 t} \quad (7.140)$$

把上边的结果代入方程 (7.130), 可以解出  $u(x, t)$ .

对于 KdV 方程初值问题, 解法是先把  $u = u_0(x)$  代入 (7.126) 解出  $k_n, c_n(0), b(k, 0)$ . 然后由方程 (7.140), (7.136) 定出  $c_n(t), b(k, t)$ , 再根据方程 (7.130) 求出方程的核  $B(x + y, t)$ , 应用方程 (7.131) 求出  $K(x, y, t)$ , 最后应用方程 (7.132) 得到我们所要的解.

如果初始势使得反射为零 ( $b(k, t) = 0$ ), 则积分核  $B$  内只出现离散本征值, 这时可以求得 Gelfand-Levitan 积分方程的显式解 (Gardner, 1967; Segur, 1973).

现在我们来考察  $x$  和  $t$  很大时的渐近状态. 考虑到

$$\begin{aligned} B(x + z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, 0)e^{[ik(x+z) - 8ik^3 t]} dk \\ &+ \sum_{n=1}^N c_n^2(0)e^{[8k_n^3 t - k_n(x+z)]} \end{aligned} \quad (7.141)$$

假设离散本征值是按照顺序大小标记的,  $k_1 < k_2 < \dots < k_{N-1} < k_N$ , 对于很大的  $t$ , 且  $x \sim 4k_N^2 t$  的情况, 第  $N$  项在级数的各项中起主要作用, 对式子 (7.131) 中积分的主要贡献来自下限附近, 及  $z = x \sim 4k_N^2 t$  附近, 还可以用驻相法证明方程 (7.141) 中的积分按照  $t^{-1/3}$  随  $t$  增加而趋于零 (Segur, 1973). 因此, 若仅取主要项,  $B$  近似为

$$B(x + z, t) = c_N^2(0)e^{[-k_N(x+z) + 8k_N^3 t]} \quad (7.142)$$



Gelfand-Levitan 方程变为

$$K(x, x, t) + c_N^2(0)e^{[-2k_N x + 8k_N^3 t]} + c_N^2(0)e^{[-k_N x + 8k_N^3 t]} \int_x^\infty e^{-k_N z} K(x, z, t) dz \cong 0 \quad (7.143)$$

只有  $K$  中的第二个变量与积分方程有关, 可假设

$$K(x, z, t) = L(x, t)e^{-k_N z}$$

进行求解, 从而有

$$L + c_N^2(0)e^{[-k_N x + 8k_N^3 t]} + c_N^2(0)e^{8k_N^3 t} L \int_x^\infty e^{-2k_N z} dz = 0$$

因此

$$K(x, x, t) = -\frac{c_N^2(0)e^{[-2k_N x + 8k_N^3 t]}}{1 + \frac{c_N^2(0)}{k_N}e^{[-2k_N x + 8k_N^3 t]}} \quad (7.144)$$

最后, 由方程 (7.132) 得到

$$u(x, t) = -2k_N^2 \operatorname{sech}^2[k_N(x - x_0) - 4k_N^3 t] \quad (7.145)$$

$$2k_N \equiv c_N^2(0)e^{-2k_N x_0}$$

这是振幅为  $2k_N^2$ , 速度为  $4k_N^3$  的孤立波.

如果我们注意  $t$  很大, 且  $x \sim 4k_n^2 t$  的情况, 则  $B$  的主要项是方程 (7.141) 级数项的第  $n$  项. 显然, 我们将看到振幅为  $2k_n^2$ , 速度为  $4k_n^3$  的孤立波. 总之, 初始波包最后分解为  $N$  个孤立波, 每一个孤立波对应于初始势阱的离散本征值. 更仔细地分析方程 (7.141) 的积分项后可知, 在孤立波列之后, 有一个振动的尾波. 但是滞后随时间而增加, 以致于最后孤立波都在它们的前面. 初始波包分解为孤立波列的过程也叫做分裂.

不加证明地, 我们引述 Schrödinger 方程的性质如下:

1. 如果对应一种初始隆起, 满足  $\int u(x, 0) dx < 0$ , 则至少有一个束缚态, 因此有一个孤立子.
2. 设  $u_0, l$  分别是初始隆起的特征高度和特征长度, 则束缚态的数目  $N$  正比于  $u_0^{1/2} l$ .

我们可以举出一个在量子力学中熟知的例子. 这首先由 Zabusky(1968) 用于 KdV 方程的初值问题中. 设初始状态由下式表示

$$u(x, 0) = -p(p+1)\operatorname{sech}^2 x, \quad p > 0 \quad (7.146)$$

Schrödinger 方程可以化为超几何方程, 束缚态本征值为

$$-\lambda_n = +(p-n)^2 = (c-1+N-n)^2 \quad (7.147)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1. \quad \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{N-1}$$

其中  $c$  是  $p+1$  和  $N$  之间的非整数差. 束缚态数目是满足

$$N \leq p+1 \quad (7.148)$$

的最大整数.

Gardner 等人的成功,在一定程度上取决于寻找有常数本征值的合适的线性本征问题. 即使本征问题或者 Gelfand-Levitan 积分方程不能直接求出显式解, 通过适当的渐近分析也能定性地了解时间很大时解的性状. 现在已经有一些简单有效的数值方法, 可以在各种不同的初值和边值条件下, 直接求解 KdV 方程, 获得定量的资料 (例如参看 Zabusky, 1968). Gardner 等人的工作, 激发了人们的兴趣, 通过种种推广 (Lax, 1968; Zakharov & Shabat, 1972; Ablowitz 等人, 1974), 以适用于其它非线性色散波方程.

一般地, 变深度对有限振幅长波的影响, 可以用数值方法研究, 即在合适的初始和边界条件下数值求解偏微分方程 (7.47),(7.48). 对于垂直入射一维地形的情况, Madsen 和 Mei(1969), Madsen, Mei 和 Savage(1970) 把它们表示成一个等价的拟双曲型方程组, 并用特征线方法求解. 一个孤立波从一个常深度传播到另一个较小的常深度时, 分裂成几个不同大小的孤立波加上一个振动的尾波. 这首先在数值计算中发现, 后来为实验所证实. 这种分裂显然与上节的结果有关. 解析的证明和推广, 后来由 Tappert 和 Zabusky(1971), Johnson(1973b) 和 Ono(1974) 给出.

解析理论以变系数的 KdV 方程为基础, 假设深度变化的尺度  $\mathcal{L}$  是  $L\epsilon^{-1}$ , 即远大于方程 (7.47),(7.48) 中固有的波长, 我们进一步求 Boussinesq 方程的近似形式, 经过无量纲化后, 注意到  $h_x = O(\epsilon)$ ,  $h_{xx} = O(\epsilon^2)$  等可得

$$\zeta_t + [(\epsilon\zeta + h)u]_x = 0 \quad (7.149)$$

$$u_t + \epsilon uu_x + \zeta_x - \frac{\mu^2}{3} h^2 u_{xxt} = 0 \quad (7.150)$$

我们引入新的变量

$$X = \epsilon x, \quad \xi = \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X h^{-1/2} dX - t \quad (7.151)$$

这里  $h = h(X)$ , 且当  $X \leq X_0$  时,  $h = 1$ ;  $\xi$  是线性化局部波速运动的坐标. 根据下面的变换

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial X} + h^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (7.152)$$

方程 (7.149) 和 (7.150) 变为

$$-\zeta_\xi + \epsilon h_X u + \epsilon h u_X + \epsilon \zeta h^{-1/2} u + \epsilon \zeta h^{-1/2} u_\xi + h^{1/2} u_\xi = 0$$

$$-h^{1/2} u_\xi + \epsilon u u_\xi + \epsilon h^{1/2} \zeta_X + \zeta_\xi + \frac{\mu^2}{3} h^{3/2} u_{\xi\xi\xi} = 0$$

把上面两式相加, 在首阶近似下, 利用  $u \cong h^{-1/2} \zeta$ , 可得

$$2h^{1/2} \zeta_X + \frac{1}{2} \frac{h_X}{h^{1/2}} \zeta + \frac{3}{h} \zeta \zeta_\xi + \frac{\mu^2}{3\epsilon} h \zeta_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (7.153)$$

这是 Johnson(1973) 和 Katutani(1971) 推出的变系数 KdV 方程. 它可以重新表示为好几种形式, 例如应用下面的变换 (Ono, 1972)

$$\zeta = -4h^2 \psi, \quad \tau = \frac{\mu^2}{6\epsilon} \int_{X_0}^X h^{1/2} dX, \quad \xi = \frac{\mu^2}{6\epsilon} \sigma \quad (7.154)$$

(对  $h$  选择这样的幂次是为了去掉大部分系数) 可得

$$\psi_\tau - 6\psi\psi_\sigma + \psi_{\sigma\sigma\sigma} + \nu(\tau)\pi = 0 \quad (7.155)$$

其中

$$\nu(\tau) = \frac{9}{4} \frac{h_X}{h^{3/2}} \left( \frac{6\epsilon}{\mu^2} \right) \quad (7.156)$$

表示变深度的影响. 显然, 对 KdV 方程设计的任何数值计算方案同样适用于方程 (7.155).

Johnson 和 Ono 沿用了下面的与 WKB 近似一致的直观方法, 把方程 (7.155) 应用于孤立波经过陆架时的分裂. 假设孤立波在越过渡段的时候保持它定性的形状, 两个积分定律给出过渡段末端处脉冲的大小和宽度, 然后把它作为较浅的陆架的初始数据. 可用上节的解来求出最后的孤立波数目.

对于  $\sigma$ , 从  $-\infty$  到  $\infty$  积分方程 (7.155) 得到

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \partial \sigma + (-3\psi^2 + \psi \sigma \sigma)_{-\infty}^{\infty} + \nu(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \psi d\sigma = 0$$

假设  $u$  和它的导数在无穷远处为零, 我们有

$$\left( \exp \int_0^\tau \nu d\tau \right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi d\sigma = \text{Const} \equiv \mathcal{J} \quad (7.157)$$

方程 (7.155) 乘以  $\psi$ , 对  $\sigma$  积分, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2}{2} d\sigma + \left[ -2\psi^3 + \psi \psi \sigma \sigma - \frac{1}{2} \psi \sigma^2 \right]_{-\infty}^{\infty} \\ + 2\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \psi^2 d\sigma = 0 \end{aligned}$$

上式对  $\tau$  积分得

$$\left( \exp^2 \int_0^\tau \nu d\tau \right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi d\sigma = \text{Const} \equiv \mathcal{E} \quad (7.158)$$

式 (7.157) 和 (7.158) 是近似方程 (7.155) 的两个不变量. 由式 (7.156) 可知

$$\exp \int_0^\tau \nu d\tau = h^{+9/4}$$

不变量  $\mathcal{J}$  和  $\mathcal{E}$  可以写为

$$\mathcal{J} = h^{9/4} \int_{-\infty}^{\infty} \psi d\sigma, \quad \mathcal{E} = h^{9/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi d\sigma \quad (7.159)$$

把这些不变量应用于孤立波的爬坡, 孤立波从左侧深度为 1 的海中, 经过一个光滑的过渡段, 到深度较浅 ( $h < 1$ ) 的水平陆架. 选择位置  $X_0$  至少在过渡段前半波长, 选择位置  $X_1$  在过渡段后的远处. 对应的  $\tau$  值为  $\tau = 0, \tau = \tau_1$ . 因为  $L/\mathcal{L} = O(\epsilon)$ , 因此有理由期望入射孤立波波形大致保持不变, 由

$$\psi = -\frac{\sigma^2}{2} \text{sech}^2 \beta(\sigma - C\tau) \quad (7.160)$$

恰当地描述. 参数  $\alpha, \beta$  是局部高度和长度的度量, 当  $\tau = 0$  时为  $\alpha_0, \beta_0$ ; 当  $\tau = \tau_1$  时为  $\alpha_1, \beta_1$ . 把这些值代入式 (7.159) 中, 得到  $\alpha_1, \beta_1$  的代数方程组, 其解可以用  $\alpha_0, \beta_0$  表示:

$$\alpha_1^2 = \alpha_0^2 h^{-9/4}, \quad \beta_1 = \beta_0$$

假设初始脉冲是孤立波, 因此  $\alpha_0 = 2, \beta_0 = 1$ , 则在陆架开始处  $\alpha_1 = 4h^{-9/4}, \beta_1 = 1$ , 即

$$\psi = -2h^{-9/4} \operatorname{sech}^2(\sigma - \text{相位}) \quad (7.161)$$

这不再是一个孤立波了. 从式 (7.154) 注意到峰值振幅按照

$$\zeta_1/\zeta_0 \sim h^{-1/4} \quad (7.162)$$

的规律变化 (Ostrovsky 和 Pelinovskiy 1970), 这和制约线性正弦波的 Green 定律一样.

在陆架开始处的波形是 (7.161), 这个已知的波形可以作为初值问题的初始值. 应用式 (7.146)-(7.148), 可以得出结论: 如果  $N$  是整数, 且

$$N(N+1) > 2h^{-9/4} > (N-1)N$$

即

$$\left[\frac{1}{2}N(N+1)\right]^{-4/9} > h > \left[\frac{1}{2}(N-1)N\right]^{-4/9} \quad (7.163)$$

则必然会产生  $N$  个孤立波. 这一简单的结果是由 Tappert 和 Zabusky(1971), Johnson(1973a) 和 Ono(1974) 发现的. 与 Madsen 和 Mei(1969) 得到的 Boussinesq 方程的数值解一致, 也与 Johnson(1973) 得到的 (7.153) 的数值解一致.

应当注意: 对于比较长的过渡段  $L/\mathcal{L} = O(\epsilon^2)$ , 入射孤立波到达陆架时, 已不再是一个单一的脉冲了. 在这种情况下, 式 (7.155) 的系数  $\nu$  关于  $\tau$  是缓变的 (即  $\nu(\epsilon\tau)$ ), 因此可以应用 WKB 摄动方法. Ko 和 Kuehl(1978) 发现在主要脉冲后面有一个低的陆架尾波. (Kaup 和 Newell, 1978).

对于向右传播的波的有效近似式 (7.155), 不能计算过渡段的反射, 但对反射可按照更完善的 Boussinesq 方程进行分析 (Peregrine, 1967; Madsen & Mei, 1969). Peregrine 特别注意到, 反射波是小的, 可以用线性化的变深度 Airy 方程描述, 用特征线方法作解析处理, 其结果近似地等价于长度为过渡段两倍的海台. 如果过渡段的斜率为  $s$ , 那么, 海台的实际高度是

$$\frac{1}{2}s \left(\frac{1}{3} \frac{A}{h}\right)^{1/2} h,$$

其中  $A$  是入射孤立波的振幅.

Miles(1979) 指出: 不变量  $\mathcal{E}$  意味着能量守恒. 因为在首阶近似下,  $d\sigma \sim h^{-1/2}dx$ ,  $u \cong \zeta h^{-1/2}$ ,

$$\mathcal{E} \sim h^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 d\sigma \sim \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 dx$$

最后一个积分是总势能的两倍, 由于动能势能相等, 此即为总的动能和势能. 不变量  $\mathcal{J}$  可以改写为

$$\mathcal{J} \sim h^{3/4} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta dx$$

它没有直接的物理意义. Miles 进一步注意到方程 (7.155) 使质量不守恒, 即

$$\mathcal{M} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta dx \neq \text{Const}$$

只有计及反射和第二个陆架时, 才能使  $\mathcal{J}$  和  $\mathcal{M}$  都不变, 这自然与 Peregrine(1967) 的较完整的解相符.

已经有人把前面的讨论推广到缓变宽度和深度的情况, 可参阅 Miles(1979,1980) 的文章.

### §7.5.1 在常深度海洋中周期波的演化

人们在实验中早就发现, 在浅水槽中, 要产生波长很长的简谐行波是十分困难的 (Goda, 1967). 即使造波机的振动完全是正弦的, 在沿水槽不同地点记录下来的波却明显地不同于正弦波. 尤其是在线性化理论所确定的一个周期内, 有较小的次级波峰, 其大小和相位随不同的记录点而变化. 这说明沿水槽有非线性效应, 使波谱具有空间的不均匀性或时间的不稳定性.

在完全浸没的矩形截面陆架的实验报告中, Jolas(1960) 报道说: 一个简谐入射波有时会在透射侧产生高次谐波. 在非线性光学中存在着类似的现象. 如果高强度的单色激光透一块石英晶体板, 则透射波包含频率  $\omega$  和  $2\omega$ , 即首次谐波和二次谐波. 在大部分引人注目的情况下, 在透射侧只发现二次谐波, 该现象称为二次谐波发生 (second harmonic generation (SHG)). 一般地, 一种颜色的光经过石英晶体之后, 会显现出不同的颜色. 所有这些现象的理论解释已在物理学家 Amstrong, Bloembergen, Ducuing 和 Pershan(1962) 的文章中给出. 他们指出: 非线性共振相互作用机制起了决定性的作用. 他们的分析, 后来由 Mei 和 üliata(1972) 应用到浅水波, 并由 Bryant 作了推广. 下面将对此作一简述. 要指出的是: 深水波共振相互作用理论是由 Phillips(1960), Benney(1962), Bretherton(1964) 和其他人差不多同时独立地发展起来的.

#### §7.5.1.1 在常深度水中近共振相互作用的初始发展

在常深度的无穷长的均匀水槽的一端, 产生一个正弦长波, 我们考察波向下游传播时的演化.

把 KdV 方程应用于这一情况. 选择下面的形式, 即 (7.123)

$$\zeta_t + \zeta_x - \frac{3}{2}\epsilon\zeta\zeta_t - \frac{\mu^2}{6}\zeta_{ttt} = 0 \quad (7.164)$$

假设特征时间尺度是  $2\pi/\omega$ , 其中  $\omega$  是基本谐波的频率, 特征水平长度为  $\sqrt{gh}/\omega$ , 因此

$$\mu = \omega \sqrt{\frac{h}{g}}$$

$x = 0$  处的自由面位移是

$$\zeta(0, t) = \frac{a}{2}(e^{-it} + e^{it}) \quad (7.165)$$

设  $\epsilon$  是小量,  $\mu^2$  为任意大小. 首先试作关于  $\epsilon$  的幂级数展开

$$\zeta = \zeta_0 + \epsilon\zeta_1 + \dots \quad (7.166)$$

显然,  $\zeta_0$  满足线性色散方程

$$\zeta_{0t} + \zeta_{0x} - \frac{\mu^2}{6}\zeta_{0ttt} = 0 \quad (7.167)$$

如果  $K$  和  $\Omega$  满足色散关系

$$K = \Omega + \frac{\mu^2}{6}\Omega^3 \quad (7.168)$$

则显然  $e^{\pm i(Kx - \Omega t)}$  是方程 (7.167) 的解. 式 (7.168) 的有量纲形式为

$$K' \sqrt{gh} = \Omega' \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{\Omega'^2}{g} \right) \quad (7.169)$$

其中

$$K' = K\omega/\sqrt{gh}, \quad \Omega' = \omega\Omega \quad (7.170)$$

特别地, 如果  $\Omega = n, (\Omega' = n\omega)$ , 则对应的波数是

$$K_n = n + \frac{\mu^2}{6}n^3 \quad (7.171)$$

与 KdV 方程其它形式导出的色散关系相比, 式 (7.168) 更接近于精确的线性色散关系

$$\omega^2 = gk \tanh kh, \quad \text{或} \Omega^2 = \frac{K}{\mu} \tanh K\mu \quad (7.172)$$

甚至对很高的  $\Omega$  和  $K$  都是如此. 为满足条件 (7.165), 取

$$\zeta_0 = \frac{1}{2}a[e^{i(K_1x-t)} + e^{-i(K_1-t)}] = \frac{1}{2}a[e^{i\phi_1} + e^{-i\phi_1}] \quad (7.173)$$

其中

$$\phi_1 = K_1x - t \quad (7.174)$$

$$K_1 = 1 + \frac{1}{6}\mu^2 \quad (7.175)$$

下一阶  $\zeta_1$  满足

$$\zeta_{1t} + \zeta_{1x} - \frac{\mu^2}{6}\zeta_1 t t t = \frac{3}{2}\zeta_0\zeta_{0t} \quad (7.176)$$

非线性强迫项是

$$-\frac{3}{8}a^2[ie^{2i(K_1-t)} + c.c.] = -\frac{3}{8}a^2[ie^{2i\phi_1} + c.c.]$$

由于  $2K_1$  接近于  $K_2$ , 而  $e^{\pm i\phi_2}$  是固有模式, 因此相位失谐 (phase mis-match)

$$\Delta = K_2 - 2K_1 = 2 + \frac{1}{6}\mu^2 \times 2^3 - 2\left(1 + \frac{1}{6}\mu^2\right) = \mu^2 \quad (7.177)$$

很小. 因此, 我们期望二次谐波  $e^{i\phi_2}$  近于受共振激发. 为了更清楚的表述, 我们可以解方程 (7.176), 得到

$$\zeta_1 = \left( \frac{-\frac{3}{8}a^2i(e^{2iK_1x} - e^{iK_2x})}{-2i + 2iK_1 - \frac{\mu^2}{6}(-2i)^3} \right) e^{-2it} + c.c. \quad (7.178)$$

这里加进了齐次解, 以满足边界条件  $\zeta_1(0) = 0$ .  $\epsilon\zeta_1$  可以认为是有周期性缓变振幅的二次谐波

$$\begin{aligned} \epsilon\zeta_1 &= \frac{3}{8}\frac{\epsilon}{\mu^2}a^2[(e^{-i\Delta x} - 1)e^{i\phi_2} + c.c.] \\ &= \frac{3}{8}\frac{\epsilon}{\mu^2}a^2(e^{-i\mu^2x/2}e^{i\phi_2} + c.c.) \cdot (-2i) \sin \frac{\mu^2}{2}x \end{aligned} \quad (7.179)$$

显然,  $\epsilon\zeta_1$  一般是  $O(\epsilon/\mu^2)$  量级, 只有当  $\epsilon \ll \mu^2$  时, 才是小量. 当  $\mu$  变为零时,  $\epsilon\zeta_1$  变为无界. 把 (7.179) 按小参数  $\epsilon x$  展开, 有

$$\epsilon\zeta_1 = -\frac{3}{8}a^2\epsilon x(ie^{i\phi_2} + c.c.) \quad (7.180)$$

所以二次谐波随  $\epsilon x$  线性地共振增长.

如果一次谐波、二次谐波大小相当, 那么它们的乘积也可以共振产生三次谐波  $e^{i\phi_3}$ . 这是因为  $\omega \sim k$  的色散曲线在  $\mu$  很小时接近于直线, 使得  $K_3 - (K_1 + K_2)$  也是小量. 事实上, 如果  $e^{i\phi_1}$ ,  $e^{i\phi_2}$  和  $e^{i\phi_3}$  之间有任何一对在一阶时出现, 则在一阶近似下, 剩下的一个就能共振激发. 一次, 头三次谐波也产生共振相互作用. 然而, 我们注意到

$$K_3 - (K_1 + K_2) \cong 3 + \frac{\mu^2}{6} 3^3 - \left( 1 + \frac{\mu^2}{6} + 2 + \frac{\mu^2}{6} 2^3 \right) = 3\mu^2 \quad (7.181)$$

所以, 失谐大于  $K_2 - 2k_1$ , 三次谐波能达到的振幅只有二次谐波振幅的  $1/3$ . 基于同样的理由, 高次谐波原则上也可以由同样的非线性机制而受共振激发. 特别地,  $n$  次谐波可以由  $(1, n-1)$ ,  $(2, n-2)$ ,  $(3, n-3), \dots$  任何一对共振产生. 最小的相位失谐是

$$K_n - (K_1 + K_{n-1}) = \frac{\mu^2}{6} \{n^3 - [1^3 + (n-1)^3]\} = \frac{\mu^2}{2} n(n-1)$$

这意味着  $n$  次谐波的振幅只有一次谐波振幅的  $\frac{\epsilon}{\mu^2} \frac{2}{n(n-1)}$  倍. 由于对于大的  $n$ , 式 (7.171) 不再是准确的色散关系 (7.172) 的有效近似, 因此, 实际上上面的这个估计值不精确. 但是这一矛盾是不重要的, 因为不管怎样, 受影响最大的高次谐波是小量.

上述简单的摄动法对于  $\epsilon x = O(1)$  的情况显然是不合适的. 如果非线性是弱的, 以致只有头几个谐波是重要的, 那么可以采用多重尺度法 (Mei & Ünlüata 1972). Bryant(1973) 采用了更精确的方法: 把  $\zeta$  假设为一个包含很多谐波的 Fourier 级数, 如下节所述.

### §7.5.1.2 耦合谐波的基本方程

式 (7.179) 的结果表明, 各次谐波的振幅随  $x$  而变, 所以我们假设解为

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} [A_n(x)e^{n(x-t)} + A_n^*(x)e^{-n(x-t)}] \quad (7.182)$$

为了方便, 这里用了最简单的非色散相函数

$$\psi = x - t \quad (7.183)$$

注意, 我们也可以取

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} [B_n(x)e^{i\phi_n} + B_n^*(x)e^{-\phi_n}] \quad (7.184)$$

且

$$\phi_n = K_n x - nt \quad (7.185)$$

系数  $A_n$ 、 $B_n$  有关系

$$A_n = B_n e^{ix(K_n - n)} = B_n e^{i\frac{1}{6}\mu^2 n^3 x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.186)$$

把式 (7.181) 代入 KdV 方程 (7.164), 我们从它的线性项得到

$$\zeta_t + \zeta_x - \frac{\mu^2}{6} \zeta_{ttt} = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \left[ \left( \frac{dA_n}{dx} - i\frac{\mu^2}{6} n^3 A_n \right) e^{in\psi} + c.c \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \left[ \left( \frac{d}{dx} B_n \right) e^{i\phi_n} + c.c. \right] \quad (7.187)$$

算出方程 (7.164) 的非线性项

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \epsilon (\zeta^2)_t &= \frac{3}{16} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [(A_l e^{il\psi} + A_l^* e^{-il\psi})] \right. \\ &\quad \cdot [(A_m e^{im\psi} + A_m^* e^{-im\psi})] \left. \right\} = \frac{3}{16} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \\ &\cdot \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} A_l^* A_l + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{in\psi} \left( \sum_{l=1}^n \alpha_l A_l A_{n-l} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} A_l^* A_{n+l} \right) \right] + c.c. \right\} \\ &= \frac{3}{16} \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\psi} \left[ \sum_{l=1}^n (-in\alpha_l) A_l A_{n-l} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-2in) \sum_{l=1}^{\infty} A_l^* A_{n+l} \right] + c.c. \right\} \quad (7.188) \end{aligned}$$

式中的级数  $\sum'$ , 对于偶数  $n$ , 在  $n/2$  终止; 对于奇数  $n$ , 在  $(n-1)/2$  终止. 若  $l = 1, 2, 3, \dots, (n-1)/2$ , 则系数  $\alpha_l = 2$ ;

若  $l = n/2$ , 则  $\alpha_l = 1$

详细的推导可见本章附录. 把式 (7.187) 和 (7.188) 代入方程 (7.164), 从  $e^{in\psi}$  的系数得到

$$\begin{aligned} \left( \frac{dA_n}{dx} - i \frac{\mu^2}{6} n^3 A_n \right) &= -i\epsilon \frac{3}{8} \left\{ \sum_{l=1}^n (n\alpha_l) A_l A_{n-l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} 2n A_l^* A_{n+l} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.189) \end{aligned}$$

关于  $e^{-in\psi}$  的系数, 可以得到共轭方程. 方程 (7.189) 是各次谐波耦合的无穷多个方程的非线性常微分方程组. 如果非线性不是太强, 则高次谐波的重要性随着  $n$  的增大而趋于零. 因此, 我们可以在有限项数 (比如说  $N$  项) 后, 截断 Fourier 级数. 对于  $x = x_0$  处给定的初值, 解  $N$  个未知函数  $A_n$  的  $N$  个方程.

如果 Fourier 级数在  $n = 1$  处截断, 则有

$$\frac{dA_1}{dx} - i \frac{\mu^2}{6} A_1 = 0 \quad (7.190)$$

这只在非线性是很弱的情况下才有可能. 假设  $A_2 \ll A_1$ , 可以得到二次谐波的修正

$$\frac{dA_2}{dx} - i\mu^2 \frac{4}{3} A_2 = -i\epsilon \frac{3}{4} A_1^2 \quad (7.191)$$

这可以写为

$$e^{\frac{i4\mu^2}{3}x} \frac{d}{dx} \left( e^{-i\frac{4\mu^2}{3}x} A_2 \right) = -i\epsilon \frac{3}{4} A_1^2 \quad (7.192)$$

容易得到式 (7.190) 和 (7.192) 的解

$$A_1 = a_0 e^{\frac{i\mu^2}{6}x} \quad (7.193)$$



$$A_2 = \frac{3}{4} \frac{\epsilon}{\mu^2} a_0^2 (e^{i\mu^2 \frac{x}{3}} - e^{i\frac{4}{3}\mu^2 x}) \quad (7.194)$$

可以证明, 这对应于式 (7.178) 的  $\epsilon\zeta_1$ .

如果在两项之后截断 Fourier 级数, 即在式 (7.189) 的头两个方程中, 令  $A_3 = A_4 = \dots = 0$  (Mei & Ünlüata, 1972; Bryabt, 1973), 则我们有

$$\frac{dA_1}{dx} - i\frac{\mu^2}{6}A_1 = -i\epsilon\frac{3}{4}A_1^*A_2 \quad (7.195)$$

$$\frac{dA_2}{dx} - i\mu^2\frac{4}{3}A_2 = -i\epsilon\frac{3}{4}A_1^2 \quad (7.196)$$

利用式 (7.186), 我们可以把式 (7.195) 和 (7.196) 改写为

$$\frac{dB_1}{dx} = -i\epsilon\frac{3}{4}B_1^*B_2e^{i\mu^2x} \quad (7.197)$$

$$\frac{dB_2}{dx} = -i\epsilon\frac{3}{4}B_1^2e^{-i\mu^2x} \quad (7.198)$$

这最后两个方程与非线性光学中两个耦合谐波的方程一样, Amstrong, Bloembergen, Decuing 和 Pershan (1962) 用下面的方法求解了这个方程组.

### §7.5.1.3 两个谐波问题的精确解

令

$$B_1 = \rho_1 e^{i\beta_1(x)}, \quad B_2 = \rho_2 e^{i\beta_2(x)} \quad (7.199)$$

所以,  $\rho_1, \rho_2$  是振幅,  $\beta_1, \beta_2$  是相位. 代入到式 (7.197) 和 (7.198) 的共轭方程中, 可得

$$\rho_1' e^{-i\beta_2} - i\beta_1' \rho_1 e^{-i\beta_1} = is\rho_1\rho_2 e^{i(\beta_1 - \beta_2 - \Delta x)} \quad (7.200)$$

$$\rho_2' e^{i\beta_2} + i\beta_2' \rho_2 e^{i\beta_2} = -is\rho_1^2 e^{i(2\beta_1 - \Delta x)} \quad (7.201)$$

其中  $s = \frac{3}{4}\epsilon$ ,  $\Delta = \mu^2$ , 一撇表示导数. 我们引入

$$\theta = 2\beta_1 - \beta_2 - \Delta x \quad (7.202)$$

方程 (7.200), (7.201) 变为

$$\rho_1' - i\beta_1' \rho_1 = is\rho_1\rho_2 e^{i\theta} \quad (7.203)$$

$$\rho_2' + i\beta_2' \rho_2 = -is\rho_1^2 e^{i\theta} \quad (7.204)$$

从上面两个方程的实部得到

$$\rho_1' = -s\rho_1\rho_2 \sin \theta \quad (7.205)$$

$$\rho_2' = s\rho_1^2 \sin \theta \quad (7.206)$$

式 (7.205) 乘以  $\rho_1$ , 式 (7.206) 乘以  $\rho_2$ , 然后两式相加, 得

$$\frac{d}{dx}(\rho_1^2 + \rho_2^2) = 0 \quad (7.207)$$

上式可以积分为

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho_0^2 = \rho_1^2(0) + \rho_2^2(0) \quad (7.208)$$

这个关系在量子学中叫作 Manley-Rowe 关系. 它断言, 一个谐波损失的能量必然等于另一个谐波得到的能量. 从式 (7.203) 和 (7.204) 的虚部得到

$$\beta'_1 = -s\rho_2 \cos \theta, \quad \beta'_2 = -s(\rho_1^2/\rho_2) \cos \theta \quad (7.209)$$

所以

$$\theta' = 2\beta'_1 - \beta'_2 - \Delta = -\Delta - [2\rho_2 s - (\rho_1^2/\rho_2)s] \cos \theta \quad (7.210)$$

从式 (7.206) 中消去  $s$  后, 利用 Manley-Rowe 关系 (7.208), (7.210) 可以改写为

$$\begin{aligned} \theta' &= -\Delta + (-2\rho_2\rho_2'/\rho_1^2 + \rho_2'/\rho_2)\cot\theta \\ &= -\Delta + [2\rho_1'/\rho_1 + \rho_2'/\rho_2]\cot\theta \end{aligned} \quad (7.211)$$

引入无量纲变量

$$u = \rho_1'/\rho_0, \quad v = \rho_2'/\rho_0, \quad \zeta = s\rho_0 x \cot\theta \quad (7.212)$$

方程 (7.205),(7.206),(7.208) 和 (7.211) 变为

$$\frac{du}{d\zeta} = -uv \sin \theta \quad (7.213)$$

$$\frac{dv}{d\zeta} = u^2 \sin \theta \quad (7.214)$$

$$u^2 + v^2 = 1 \quad (7.215)$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\delta + \left( 2\frac{du/\partial\zeta}{u} + \frac{dv/d\zeta}{v} \right) \cot\theta \quad (7.216)$$

因此, 有三个微分方程 (7.213),(7.214) 和 (7.216) 制约三个未知数  $u, v, \theta$ .

两个谐波之间的相位失谐的无量纲参数是

$$\delta = \frac{\Delta}{s\rho_0} = \frac{\mu^2}{\frac{3}{4}\epsilon} = \frac{4}{3} \frac{h}{a_0} (k_1 h)^2 \quad (7.217)$$

它实质上是 Ursell 数的倒数. 式 (7.216) 稍经处理后变成

$$\frac{d}{d\zeta}(u^2 v \cos \theta) = \delta u^2 v \sin \theta$$

与式 (7.214) 的另一种形式

$$\delta \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \delta u^2 v \sin \theta \quad (7.218)$$

联立, 得到

$$\frac{d}{d\zeta}(u^2 v \cos \theta) = \delta \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

这给出另一个积分

$$-\delta \frac{1}{2} v^2 + u^2 v \cos \theta = \text{const} = \Gamma_\delta \quad (7.219)$$

我们用初始数据表示常数  $\Gamma_\delta$

$$\Gamma_\delta = -\frac{1}{2}\delta v^2(0) + u^2(0)v(0) \cos[2\beta_1(0) - \beta_2] = \Gamma_0 - \frac{1}{2}\delta v^2(0) \quad (7.220)$$

其中

$$\Gamma_0 = u^2(0)v(0) \cos[2\beta_1(0) - \beta_2]$$

现在, 式 (7.219) 可以改写为

$$u^2v \cos \theta = \Gamma_0 + \frac{1}{2}\delta[v^2 - v^2(0)] \quad (7.221)$$

三个未知函数  $u, v, \theta$ , 已经有两个积分关系, 只留下一个微分方程需要积分. 如果利用 (7.215) 式, 从 (7.214) 式中消去  $u$ , 则

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \frac{1}{2}v^2 \right) = v(1 - v^2) \sin \theta$$

取式 (7.218) 的平方, 应用式 (7.215) 和 (7.221) 得到

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{1}{2}v^2 \right) \right]^2 &= u^4v^2 \sin^2 \theta = u^4v^2(1 - \cos^2 \theta) \\ &= v^2(1 - v^2) - \left\{ \Gamma_0 + \frac{\delta}{2}[v^2 - v^2(0)] \right\}^2 = Q(v^2) \end{aligned} \quad (7.222)$$

$Q(v^2)$  是一个  $v^2$  的三次多项式. 只有当这个多项式有三个实零点  $v_a^2 < v_b^2 < v_c^2$  时, 才存在有界解. 设

$$Q = (v_c^2 - v^2)(v_b^2 - v^2)(v_a^2 - v^2) \quad (7.223)$$

得到

$$\zeta = \pm \int_{v^2(0)}^{v^2(\zeta)} \frac{dv^2}{2\sqrt{Q(v^2)}} \quad (7.224)$$

与椭圆余弦波的情况一样, 上式可用椭圆积分表示, 结果是

$$v^2 = v_c^2 + (v_b^2 - v_a^2) \operatorname{sn}^2[\sqrt{v_c^2 - v_a^2}(\zeta - \zeta_0), m] \quad (7.225)$$

$$m = \sqrt{\frac{v_b^2 - v_a^2}{v_c^2 - v_a^2}} < 1 \quad (7.226)$$

椭圆正弦函数  $\operatorname{sn}$  的周期是  $4K$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - m^2 \sin^2 \theta} \quad (7.227)$$

所以  $\operatorname{sn}^2$  的周期是  $2K$ , 在无量纲坐标  $\zeta$  中, 波长为

$$\lambda = \frac{2K}{\sqrt{v_c^2 - v_a^2}} \quad (7.228)$$

对于两个谐波都有非零初始值  $u(0) \neq 0, v(0) \neq 0$  的一般情况, 数值计算结果可以在 Armstrong 等人 (1962) 的文章中找到.

我们考虑  $v(0) = 0, u(0) = 1$  的特殊情况. 于是  $\Gamma_0 = 0$

$$Q(v^2) = v^2 \left\{ v^4 - \left[ 2 + \left( \frac{1}{2}\delta^2 \right) \right] v^2 + 1 \right\} \frac{2K}{\sqrt{v_c^2 - v_a^2}}$$

$$= v^2(v^2 - v_b^2)(v^2 - v_c^2) \quad (7.229)$$

其中

$$v_b^2 = \frac{1}{v_c^2} = \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{4}\right)^2} + \frac{\delta}{4} \right)^{-2} \quad (7.230)$$

$v$  的最大调制振幅是  $v_b$ . 由式 (7.226) 可知

$$m^2 = \frac{v_b^2}{v_c^2} = \frac{1}{v_c^4} = \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{4}\right)^2} + \frac{\delta}{4} \right)^{-4} \quad (7.231)$$

当初始振幅  $a_0$  增加或一次谐波波长增加时, Ursell 参数增加, 因此  $\delta$  减少. 由式 (7.230) 和 (7.231) 式知, 当  $m$  和  $K$  都增加时,  $v_b^2$  增加, 因此, 二次谐波最大振幅增加. 因为对于小的  $\delta$ ,

$$m \cong 1 - \delta/2, \quad K \cong \frac{1}{2} \ln \frac{32}{\delta}$$

(Abramowitz 和 Stegun, 1972, 591), 被称做拍长或再现距离的调制空间周期 (在无量纲坐标  $x$  中) 为

$$L \cong \frac{2K}{2s\rho_0} \cong \frac{2\delta}{3\mu^2} \ln \frac{32}{\delta}$$

它随  $\delta$  的减小而减小. 因此, 对于小的  $\delta$ , 在较短距离内一次谐波与二次谐波之间发生较多的能量交换. 但是, 必须记住, 对于足够小的  $\delta$ , 三次谐波或高次谐波已不再能忽略了.

Mei 和 Ünlüata 根据两个谐波的分析, 从 Bozžar-Karakiewicz 的关于  $\delta = O(1)$  的数据中, 为理论找到了实验数据. 数学上更精确的结果由 Bryant 用耦合方程的数值积分得到, 耦合方程是用没有经过浅水近似的精确的方程导出的, 考虑的谐波多达 11 个. 特别注意三次谐波和它的短的拍长. 因此, 当一个周期性的小振幅浪涌向海滩时, 二次谐波首先产生, 然后是三次谐波、四次谐波, 直到深度小到出现许多谐波, 使波破碎, 进而产生更小尺度的脉动.

上面提到的结论对于长度为  $L$  的水下陆架定性地也是合适的. 设频率为  $\omega$  的小振幅谐波从左面传播过来, 打到陆架上后, 如果陆架上的 Ursell 参数不是小量, 那么透射波会有谐波产生. 当  $L$  是拍长或再现距离的一半时, 陆架的另一侧会留下大量的二次谐波. 但是, 当  $L$  接近于拍长时, 在另一侧只能看到很少的二次谐波. 这解释了 Jolas(1960) 对水下沙洲的观察报告.

对于包含有一个沙洲的变深度情况, Lau 和 Barçilon(1972) 已经给出了一个近似理论. 关于缓变深度情况, 式 (7.153) 的数值解是简单的. 如果深度变化与波有同样的长度尺度, 反射不再是可忽略的了, 必须采用 Boussinesq 方程的数值解 (Peregrine, 1967; Madsen, Mei 和 Savage 1970).



## 参考文献

- [1] Ursell, F.(1953). The long wave paradox in the theory of gravity waves. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **49**: 685-694.
- [2] Lin, C.C. & A. Clark Jr.(1959). On the theory of shallow water waves. *Tsing Hua J. of Chinese Studies*, Special I: 54-62.
- [3] Benney, D.J.(1962). Nonlinear gravity wave interaction. *J. Fluid Mech.* **14**: 574-584.
- [4] Peregrine, D.H.(1967). Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.* **27**: 815-827.
- [5] Munk, W.H.(1949). The solitary wave and its application to surf problems. *N.Y. Acad. Sci.* **1**: 367-424.
- [6] Tucker, M.J.(1950). Surf beats: Sea waves of 1 to 5 mi. period. *Proc. R. Soc. Lond. A* **202**: 565-573.
- [7] King, R. & R. Smith(1978). Excitation of low frequency trapped waves. *Proc. 16th Costal Eng. ASCE* **1**: 449-466.
- [8] Mei, C.C. & M.A. Foda(1981) Wave induced responses in a fluid filled poro-elastic solid with a free surface- a boundary layer theory. *Geophy. J. R. Astr. Soc.* **66**: 597-637.
- [9] Bowen, A.J. & D.L. Inman(1969). Rip currents II. Laboratory and field observations. *J. Geophy. Res.* **74**: 5479-5490.
- [10] Guza, R.T. & R.E. Davis(1974). Excitation of edge waves by waves incident on a beach. *J. Geophys. Res.* **79**: 1285-1291.
- [11] Guza, R.T. & A.J. Bowen(1976). Finite amplitude Stokes edge waves. *J. Geophys. Res.* **34**: 269-293.
- [12] Minzoni, A.A. & G.B. Whitham(1977). On the excitation of edge wave on beaches. *J. Fluid Mech.* **79**: 273-287.
- [13] Rockliff, N.(1978). Finite amplitude effects in free and forced edge waves. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **83**: 463-479.
- [14] Dailey, J.W. & S.C. Stephan. Jr. (1952). The solitary wave-its celerity, profile, internal velocities and amplitude attenuation in a horizontal smooth channel. *Proc. 3rd Conf. Costal Eng. ASCE*, 13-30.
- [15] Zabusky, N.J. & M.D. Kruskal(1965). Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* **15**: 240.
- [16] Miura, R.M.(1967). The Korteweg-de Vries equation-a survey of results. *SIAM Rev.* **18**: 412-459.
- [17] Miura, R.M.(1974). The Korteweg-de-Vries equation: a model equation for non-linear dispersive waves. *Non-linear waves*, edited by S. Leibovich and A.R. Seabass, Cornell University Press, Ithaca, New York, 212-234.

- [18] Abowitz, M.J. & H. Segur(1981). *Solitons and the inverse scattering Transform*, Society Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [19] Whitham, G.B.(1974). *Linear and Nonlinear waves*, Wiley-Interscience, New York.
- [20] Lamb, G.L. Jr.(1980). *Elements of Soliton Theory*, Wiley-Interscience, New York.
- [21] Lax, P.D.(1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.* **21**: 467-490.
- [22] Zakharov, V.E. & A.B. Shabat(1972). Exact theory of two-dimensional shelf-focusing and one-dimensional self modulation of waves in non-linear media. *Sov. Phys. JEPT* **34**: 62-69.

## 第八章 深水中的非线性波

### §8.1 引言

对于任意深度  $O(1) = kh < \infty$  的情况, 有限振幅的效应长期为人们注目. 在早期文献中, 对周期性行波和周期性驻波作了相当多的研究. 尤其是 Stokes 关于高阶常数振幅波的贡献, 给近百年的研究奠定了基调. 其后的许多工作是求深度为常数或无限情况的最大波高. 这些经典的工作, 已由 Wehausen 和 Laitone(1960) 作了详细总结.

实践中, 需要更深入地了解海浪谱的发展, 这激发了近年来人们对非线性波的兴趣. Miles(1957) 和 Phillips(1957) 分别提出了关于风生波两种相互补充的理论, 此后不久, Phillips(1960) 阐述了弱非线性共振相互作用的机制, 为非线性深水波的研究奠定了基础. 他指出: 如果四个波列的相位配合得适当, 那么它们之间通过共振缓慢地交换能量. 这开创了考察非线性波瞬态发展的新时期. 现在人们认为这种共振机制是海浪谱形成的最重要的因素. 有关海洋学中这个活跃的领域的权威性叙述, 建议读者参看文献 Phillips(1977).

速度和波长稍有不同的几个波列的共振相互作用是非常令人感兴趣的, 整个过程涉及接近于正弦形状的波的缓慢调制. Stokes 波对缓慢调制的周期性(边带)扰动来说, 是不稳定的. Benjamin 和 Feir(1967) 对于这一事实的论证, 证实并推广了上述机制, 进一步的推广由 Benney 和 Stokes(1969) 作出. 根据 Whitham 给出的一对非线性守恒方程, Lighthill(1967) 研究了一个波包初始稳定阶段之后的非线性演化的早期阶段. Chu 和 Mei(1971) 进一步改进了频散, 修正了 Whitham 方程, 使之具有一致的有效性, 研究了波包在较长时间内的演化. 有人采用另一种有效的近似导出了立方 Schrödinger 方程 (Zakharov, 1968; Benney & Roskes, 1969). Davey (1972) 证明了立方 Schrödinger 方程等价于 Chu & Mei 的守恒方程. Zakharov & Shabat (1972) 解析地求得了立方 Schrödinger 方程的精确解, 从而把理论工作打打地推进了一步. Yuen & Lake 以及他们的同事 (见 Yuen & Lake, 1980) 从数值计算方面和实验方面作出了广泛的贡献, 揭示了深水 Stokes 波许多新的物理奥秘.

另一方面, 借助于新的计算技术, 强非线性波理论已经大有进展. Schwartz(1974) 使用 Padé 近似, 求解得到了常深水中任意陡波 (直至极限高度) 的行波. 数学上异常困难的波浪破碎问题是 Longuet-Higgins 和他的同事们重点攻坚的课题. 通过奇妙的近似, 透彻的局部分析, 整体分析, 稳定性研究和直接的数值积分, 他们正在成功地克服水波理论中的巨大障碍 (即非线性). 这些开创性贡献已经在很多文献中作了综述, 对认真的读者来说, 这些文献是最好的资料来源. (典型的文献是 Longuet-Higgins, 1975, 1978a,b; Longuet-Higgins & Cokelet, 1976, 1978; Longuet-Higgins & Fox, 1977, 1978).

令人感兴趣的工程实践问题包含有深度变化的海底, 结构物, 海岸线等. 然而, 对研究人员来说, 它们与非线性波的相互作用是棘手的问题. 比如, 看上去很简当的, 作用在一个大物体上的二阶力问题, 已经成了争论的中心. 与无界的深海稍有差别的完全非线性问题的处理仍然处于萌芽状态.

限于篇幅, 本章仅述及若干有关的问题, 侧重叙述 Stokes 波的缓慢演化. 首先用多重尺度法导出一般的演化方程, 然后作为特殊情况得到 Stokes 均匀波列, 接着讨论由周期性的边带扰动产生的初始不稳定性. 通过数值计算揭示单向波非线性演化的典型特征. 最后, 讨论有工程实际意义的问题: 稳恒 Stokes 波对细长体的绕射.



## §8.2 缓变调制的弱非线性波的演化方程

这一节的目的,是导出一组适用于基本上是正弦的,单向传播的,缓变表面波的一般方程.我们将采用多重尺度方法达到这个目的.下面的叙述综合了 Benney & Roskes (1969), Chu & Mei (1970), Davey & Stewartson (1974) 等人的成果.

### §8.2.1 有限深度情况

为了简单起见,把海底作为水平的,具有有限深度  $h$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad (8.1)$$

任何一个解析函数  $[f(x, y, z, t)]_{x=s}$  可以在  $z = 0$  附近展开为 Taylor 级数

$$f(x, y, \zeta, t) = [f]_0 + \zeta \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \right]_0 + \frac{\zeta^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right]_0 + \dots$$

其中

$$[f]_0 = f(x, y, 0, t)$$

假设:  $\frac{\partial f}{\partial z} = O(kf)$ , 其中  $k$  是特征波数. 我们看到, 对于小的  $\zeta$ , 展开式中相继的项, 基本上按  $kA$  的幂次增加而逐渐减小. 直到三阶  $O[(kA)^3]$ , 写出边界条件的展开式:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_0 + \zeta \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]_0 \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}^2 \right]_0 + \frac{\zeta^2}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]_0 \\ & + \zeta \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \mathbf{u}^2 \right]_0 + \frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2]_0 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} -g\zeta &= \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_0 + \zeta \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \right]_0 + \left[ \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right]_0 \\ & + \frac{\zeta^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]_0 + \zeta \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right]_0 + \dots \end{aligned} \quad (8.3)$$

记  $x$  为原来的波传播方向, 我们引入下面的变量:

$$\begin{cases} x, & x_1 = \epsilon x, & x_2 = \epsilon^2 x, \dots \\ y, & y_1 = \epsilon y, & y_2 = \epsilon^2 y, \dots \text{ 其中 } \epsilon e = kA \leq 1 \\ t, & t_1 = \epsilon t, & t_2 = \epsilon^2 t, \dots \end{cases} \quad (8.4)$$

假设未知量的摄动展开为

$$\phi = \sum_{n=1} \epsilon^n \phi_n, \quad \zeta = \sum_{n=1} \epsilon^2 \zeta_n \quad (8.5)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_n &= \phi_n(x, x_1, x_2, \dots; y, y_1, y_2, \dots; z; t, t_1, t_2, \dots) \\ \zeta_n &= \zeta_n(x, x_1, x_2, \dots; y, y_1, y_2, \dots; z; t, t_1, t_2, \dots) \end{cases} \quad (8.6)$$

按多重尺度中通常的做法, 原来的导数按下列法则变换

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots \\ \frac{\partial}{\partial y} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial y_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots \\ &\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

把以上格式代入 Laplace 方程, 扰动的自由边界条件 (8.2), (8.3) 和底面条件 (8.1) 中, 头三阶的方程及边界条件列出如下.

Laplace 方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_n = F_n, \quad n = 1, 2, 3 \quad (8.7)$$

其中

$$\begin{aligned}F_1 &= 0 \\ F_2 &= -2\phi_{1xx_1} \\ F_3 &= -\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\phi_1 + 2\phi_{1xx_2} + 2\phi_{2xx_1}\right]\end{aligned}$$

自由面边界条件 (8.2):

$$\Gamma\phi_n = G_n, \quad \text{在 } z = 0 \text{ 上} \quad (8.8)$$

其中

$$\begin{aligned}\Gamma &= g\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ G_1 &= 0 \\ G_2 &= -\{\zeta_1\Gamma_z\phi_1 + (\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_t + 2\phi_{1tt_1}\} \\ G_3 &= -\left[\zeta_2\Gamma_2\phi_1 + \zeta_1\Gamma_z\phi_2 + \frac{1}{2}\zeta_1^2\Gamma_{zz}\phi_1 + 2(\phi_{1x}\phi_{2x} + \phi_{1z}\phi_{2z})_t \right. \\ &\quad + \zeta_1(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_{tz} + \frac{1}{2}\left(\phi_{1x}\frac{\partial}{\partial x} + \phi_{1z}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2) \\ &\quad + 2\phi_{2tt_1} + 2\phi_{1z}\phi_{1zt_1} + 2\phi_{1x_1}\phi_{1xt} + 2\phi_{1x}\phi_{1xt_1} \\ &\quad \left. + 2\phi_{1x}\phi_{1tx_1} + 2\zeta_1\phi_{1ztt_1} + 2\phi_{1tt_2} + 2\phi_{1t_1t_2}\right]\end{aligned}$$

自由面上的 Bernoulli 方程:

$$-g\zeta_n = H_n, \quad \text{在 } z = 0 \text{ 上} \quad (8.9)$$

其中

$$\begin{aligned}H_1 &= \phi_{1t} \\ H_2 &= \phi_{2t} + \frac{1}{2}(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2) + \phi_{1t_1} + \zeta_1\phi_{1zt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3 = & \phi_{3t} + \phi_{1x}\phi_{2x} + \phi_{1z}\phi_{2z} + \zeta_1\phi_{2zt} + \zeta_2\phi_{2zt} \\
& + \frac{1}{2}\zeta_1^2\phi_{1zzt} + \frac{1}{2}\zeta_1(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_z \\
& + \phi_{2t_1} + \phi_{1x}\phi_{1x_1} + \phi_{1t_2} + \zeta_1\phi_{1zt_1}
\end{aligned}$$

底面条件:

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -h \quad (8.10)$$

一阶解是通常的线性行波, 自由面上的高阶非线性强迫项表明, 在高阶解中必然出现高次谐波. 所以我们展开

$$\{\phi_n, F_n, G_n\} = \sum_{m=-n}^n e^{-m\psi} \{\phi_{nm}, F_{nm}, G_{nm}\} \quad (8.11)$$

其中

$$\psi = kx - \omega t$$

是相位. 为了使得所得的  $\phi$  是实数, 要求

$$\phi_{n,-m} = (\phi_{nm})^* \quad (8.12)$$

而且振幅依赖于缓变量和  $z$

$$\begin{cases} \phi_{nm} & = \phi_{nm}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots; z; t_1, t_2, \dots) \\ F_{nm} & = F_{nm}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots; z; t_1, t_2, \dots) \\ G_{nm} & = G_{nm}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots; z; t_1, t_2, \dots) \end{cases} \quad (8.13)$$

把 (8.11) 代入 (8.7), (8.8) 和 (8.10), 得到以  $z$  为变量的一阶 ( $n$ ) 每一次谐波 ( $m$ ) 的边值问题

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2k^2\right)\phi_{nm} = F_{nm}, \quad -h < z < 0 \quad (8.14)$$

$$\left(g\frac{\partial}{\partial z} - m^2\omega^2\right)\phi_{nm} = G_{nm}, \quad \text{在 } z = 0 \text{ 上} \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi_{nm} = 0, \quad \text{在 } z = -h \text{ 上} \quad (8.16)$$

我们将相继求解上面的边值问题. 为了方便起见, 采用下面的缩写符号

$$Q = k(z+h), \quad q = kh$$

$$\text{ch}q = \cosh q, \quad \text{sh}q = \sinh q, \quad \text{th}q = \tanh q \quad (8.17)$$

$\mathbf{n} = \mathbf{1}$ :

强迫项是

$$F_1 = G_1 = 0 \quad (8.18)$$

齐次解为

$$\begin{cases} m = 0: & \phi_{10} = \phi_{10}(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2, \dots), \quad \phi_{10} = \phi_{10}^* \\ m = 1: & \phi_{11} = -\frac{g\text{ch}Q}{2\omega\text{ch}q}iA \end{cases} \quad (8.19)$$

$$(8.20)$$

且

$$\omega^2 = gkthkh$$

$$A = A(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2, \dots)$$

总的一阶解为:

$$\phi_1 = \phi_{10} - \frac{gchQ}{2\omega chq} (iAe^{i\psi} + c.c) \quad (8.21)$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(Ae^{i\psi} + c.c) \quad (8.22)$$

到目前为止,  $\phi_{10}$  和  $A$  是缓变量的任意函数.

$\mathbf{n} = 2$ :

当齐次问题有非零解时, 对  $n \geq 2$  的情况, 必须特别注意  $m = 0$  (零次谐波),  $m = 1$  (一次谐波) 情况的可解性条件. 对于  $m = 0$  的情况, 齐次解对变量  $z$  来说是常数,  $\phi_{n0}$  的可解性条件是

$$\frac{1}{g}G_{n0} = \int_{-h}^0 F_{n0} dz \quad (8.23)$$

对于  $m = 1$  的情况, 齐次解正比于  $\cosh k(z+h)$ , 由 Green 公式得到  $\phi_{n1}$  的可解性条件为

$$\frac{1}{g}G_{n1} = \int_{-h}^0 F_{n1} \frac{\text{chk}(z+h)}{\text{chk}h} \quad (8.24)$$

正是由这些条件导得所演化的方程.

对于  $m \geq 2$  的高次谐波, 边值问题不允许有齐次解. 假如有齐次解, 则必有式 (8.20) 的形式, 但要用  $(mk, m\omega)$  代替  $(k, \omega)$ . 但是根据相应的色散关系, 这是不可能的. 因此,  $|m| \geq 2$  的非齐次问题总是可解的.

二阶问题的强迫项是

$$F_{20} = G_{20} = 0 \quad (8.25)$$

$$F_{21} = -\frac{\omega chQ}{shq} \frac{\partial A}{\partial x_1} \quad (8.26)$$

$$G_{21} = \frac{\omega^2 chq}{kshq} \frac{\partial A}{\partial t_1}, \quad G_{22} = \frac{3\omega^3}{4sh^2q} iA^2 \quad (8.27)$$

零次谐波解是

$$\phi_{20} = \phi_{20}(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2, \dots) = \phi_{20}^* \quad (8.28)$$

对于  $m = 1$ , 我们把式 (8.26), (8.27) 代入 (8.24), 得出可解性条件

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0, \quad C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (8.29)$$

其解为

$$\phi_{21} = -\frac{\omega}{2k^2 shq} (QshQ) \frac{\partial A}{\partial x_1} \quad (8.30)$$

立刻可注意到: 当  $kh \rightarrow \infty$  时,  $\phi_{21}$  变成无穷大. 然而, 这是不足为奇的, 因为让  $z \rightarrow \infty$ , 而不违背原来的前提 ( $O(x_1), O(x_2), \dots) > O(h)$ ) 是不可能的. 所以, 我们将对现在的解加以限制:  $kh \leq I(1)$ , 而在以后单独处理无限深度的情况.

对于  $m = 2$  的情况, 非齐次解是简单的

$$\phi_{22} = -\frac{3}{16} \frac{\omega \text{ch} 2Q}{\text{sh}^4 q} i A^2 \quad (8.31)$$

总的二次解是

$$\begin{aligned} \phi_2 = \phi_{20} - \frac{\omega}{2k^2 \text{sh} q} (Q \text{sh} Q) \left( \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\psi} + c.c. \right) \\ - \frac{3}{16} \frac{\omega \text{ch} 2Q}{\text{sh}^4 q} (i A^2 e^{i\psi} + c.c.) \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = \left\{ -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{k}{2 \text{sh} 2q} |A|^2 \right\} + \frac{1}{2\omega} \left( i \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\psi} + c.c. \right) \\ - \frac{q \text{sh} q}{2k \text{ch} q} \left( i \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\psi} + c.c. \right) \\ + \frac{k \text{ch} q (2 \text{ch}^2 q + 1)}{8 \text{sh}^3 q} (A^2 e^{2i\psi} + c.c.) \end{aligned} \quad (8.33)$$

$\mathbf{n} = \mathbf{3}$ :

我们将只引用三阶方程的可解性条件, 而不求出三阶的解. 对  $m = 0$  的情况, 强迫项为

$$F_{30} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \phi_{10} \quad (8.34)$$

$$G_{30} = \frac{\omega^3 \text{ch}^2 q}{2k \text{sh}^2 q} (AA^*)_{x_1} - \frac{\omega^2}{4 \text{sh}^2 q} (AA^*)_{t_1} - \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} \quad (8.35)$$

条件 (8.23) 式要求  $G_{30} = ghF_{30}$ , 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - gh \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \phi_{10} = \frac{\omega^3 \text{ch}^2 q}{2k \text{sh}^2 q} (AA^*)_{x_1} \\ - \frac{\omega^2}{4 \text{sh}^2 q} (AA^*)_{t_1} \end{aligned} \quad (8.36)$$

物理上看来, 式 (8.36) 所描述的波, 是由短波调制产生的长波. 对于  $m = 1$  的情况, 强迫项是

$$\begin{aligned} F_{31} = \frac{\omega}{k \text{sh} q} \left[ Q \text{sh} Q + \frac{1}{2} \text{sh} Q \right] i \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \\ - \frac{\omega \text{ch} Q}{\text{sh} q} \left( \frac{\partial A}{\partial x_2} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial y_1^2} \right) \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\begin{aligned} G_{31} = \frac{1}{16 \text{sh}^5 q} \omega^3 k \text{ch} q (\text{ch} 4q + 8 - 2 \text{th}^2 q) i |A|^2 A \\ - \frac{\omega k}{\text{sh}} 2q \left( \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{2\omega \text{ch}^2 q}{k} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) i A \\ + \frac{\omega \text{ch} q}{2k \text{sh} q} i \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{\omega^2 q}{k^2} i \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial t_1} \\ + \frac{\omega^2 \text{ch} q}{k \text{sh} q} \frac{\partial A}{\partial t_2} \end{aligned} \quad (8.38)$$

利用可解性条件 (8.24), 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} - \frac{C_g}{2k} i \frac{\partial^2 A}{\partial y_1^2} - i \frac{\omega q}{k^2 \text{sh} 2q} \text{ch}^2 q \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \\ & + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{k^2}{2\omega \text{ch}^2 q} \left( \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{2\omega \text{ch}^2 q}{k} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) i A \\ & - \frac{q \text{sh} q}{k \text{ch} q} i \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\omega k^2 (\text{ch} 4q + 8 - 2\text{th}^2 q)}{16 \text{sh}^4 q} i |A|^2 A = 0 \end{aligned} \quad (8.39)$$

利用式 (8.29) 可以给出

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} = C_g^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial t} = C_g \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}$$

最后, 把式 (8.39) 乘以  $\epsilon$ , 加上式 (8.29), 把  $\phi_{10}$ ,  $A$  看成只是  $x_1, y_1, t_1$  的函数, 即

$$\frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}$$

得出

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial}{\partial x_1} \right) A + i\epsilon \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right. \\ & - \frac{C_g}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial y_1^2} + \frac{\omega k^2 (\text{ch} 4q + 8 - 2\text{th}^2 q)}{16 \text{sh}^4 q} |A|^2 A \\ & \left. - \left( \frac{k^2}{2\omega \text{ch}^2 q} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - k \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) A \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.40)$$

其中

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{C_g^2}{2\omega} - \frac{\omega q \text{ch}^2 q}{k^2 \text{sh} 2q} + \frac{q \text{sh} q}{k \text{ch} q} C_g > 0 \quad (8.41)$$

方程 (8.26) 和 (8.40) 首先由 Benney 和 Roskes 得到, 这两个方程耦合在一起, 制约波幅  $A$  和平均流动势  $\phi_{10}$  的缓变演化.

对于二维问题 ( $\frac{\partial}{\partial y_1} = 0$ ) 来说, 利用以群速度运动的坐标系, 可以进一步简化

$$\xi = x_1 - C_g t_1, \quad \tau = \epsilon t_1 \quad (8.42)$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - C_g \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

(8.36) 式可以对  $\xi$  积分一次, 得到

$$\frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi} = S(\tau) - \frac{\omega^2 (2\omega \text{ch}^2 q + k C_g)}{4k \text{sh}^2 q (gh - C_g^2)} |A|^2 + O(\epsilon)$$

其中  $S(\tau)$  是  $\tau$  的任意函数, 把此结果代入 (8.40) 式可得

$$-i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \beta |A|^2 A + \gamma A = 0 \quad (8.43)$$

其中

$$\alpha = -\frac{1}{2} \omega''(k)$$

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\omega k^2}{16\text{sh}^4 q}(\text{ch}4q + 8 - 2\text{th}^2 q) \\ &+ \frac{\omega}{2\text{sh}^2 2q} \frac{(2\omega\text{ch}^2 q + kC_g)^2}{gh - C_g^2} \\ \gamma(\tau) &= \frac{S(\tau)k}{2\omega\text{ch}^2 q}(2\omega\text{ch}^2 q + kC_g)\end{aligned}$$

对于波包的情况, 当  $\xi \rightarrow \infty$  时,  $A$  和  $\partial\phi_{10}/\partial\xi \rightarrow 0$ , 函数  $S(\tau)$  变为零. 否则, 引进

$$A = B \exp\left(-i \int \gamma d\tau\right) \quad (8.44)$$

$\gamma A$  项可以从 (8.43) 式中消去, 得到立方 Schrödinger 方程

$$-iB_\tau + \alpha B_{\xi\xi} + \beta|B|^2 B = 0 \quad (8.45)$$

这首先由 Hashimoto 和 Ono(1972) 对有限深度情况导出, Zakharov(1968) 对无限深度情况导出了类似的方程.

方程 (8.43) 或 (8.45) 可以用实函数表示. 在式 (8.43) 中, 令

$$A = a \exp\left[i\left(\int W d\xi - \int \gamma d\tau\right)\right] \quad (8.46)$$

这等于在式 (I2.45) 中设

$$B = a \exp\left(i \int W d\xi\right)$$

其中  $W = W(\xi, \tau)$ . 分开实部和虚部, 得到

$$\frac{\partial a^2}{\partial \tau} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \xi}(W a^2) = 0 \quad (8.47)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\alpha\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - W^2\right) + \beta a^2\right] = 0$$

这两个方程具有守恒定律

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0$$

的形式, 首先由 Chu 和 Mei (1971) 对深水情况导出. 式 (8.45) 和 (8.47) 之间的联系由 Davey(1972) 指出.

### §8.2.2 无限深度情况

如果我们简单地在式 (8.36) 和 (8.40) 中取  $kh \rightarrow \infty$  的形式极限, 可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\phi_{10} = 0 \quad (8.48)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial}{\partial x_1}\right)A + i\varepsilon\left\{\frac{\omega}{4k^2}\left(\frac{1}{2}A_{x_1 x_2} - A_{y_1 y_2}\right)\right. \\ \left. + \frac{1}{2}\omega k^2|A|^2 A + k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\phi_{10}\right)A\right\} = 0\end{aligned} \quad (8.49)$$

这似乎是相当合理的结果. 根据自由面上总的 (或运动学) 边界条件, 有:

$$\frac{\partial \phi_{10}}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \quad (8.50)$$

$\phi_{10}$  的可能的解是随时间变化的流动  $\frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} = f(t_1)$ ,  $f$  由上游条件确定, 方程 (8.49) 只能决定  $A$ . 正如式 (8.30) 后面所指出的那样, 解  $\phi_{21}$  不再有意义了, 三阶自由面条件也产生了矛盾. 当  $h \rightarrow \infty$  时, 三阶自由面条件为

$$\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} = \frac{\omega}{2k}(AA^*)_{x_1} \quad (8.51)$$

出现了  $A, \phi_{10}$  的超定问题. 为了补救这一点, Roskes(1969) 推论, 一开始假设  $kh \gg 1$  时, 就应该允许在铅垂方向有缓慢调制. 因此, 他引入

$$z_1 = \varepsilon z, \quad z_2 = \varepsilon^2 z, \quad \dots \quad (8.52)$$

但是, 这些坐标应该只出现在大尺度量  $\phi_{10}, \phi_{20}, \dots$  中. 短波势只在自由面下一个波长之内 (因而在  $z_1, z_2, \dots \ll 1$  的区域内) 不等于零. 进行摄动分析后, 发现代替 (8.36) 的是

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \phi_{10} = 0 \quad (8.53)$$

代替式 (8.39) 的是

$$\begin{aligned} & (A_{t_2} + C_g A_{x_2}) + i\varepsilon \left\{ \frac{\omega}{8k^2} (A_{x_1 x_2} - 2A_{y_1 y_2}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \omega k^2 |A|^2 A \right\} + k \left( \frac{\partial \phi_{10}}{\partial z_1} + i \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) A = 0 \end{aligned} \quad (8.54)$$

如果  $h = O(\varepsilon k)^{-1}$ , 底面条件可稍加推广, 成为

$$\frac{\partial \phi_{10}}{\partial n_1} = 0, \quad z_1 = 0, \text{ 和 } -h_1(x_1, y_1), \text{ 且 } h_1 = O(1) \quad (8.55)$$

因此, 大尺度流动的势  $\phi_{10}$  被底面变化所偏移, 通过式 (8.54), 这直接影响短波振幅. 式 (8.51) 被下式所代替

$$g \frac{\partial \phi_{20}}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} + \frac{\omega^3}{2k}(AA^*)_{x_1} \quad (8.56)$$

这提供了  $\phi_{20}$  的边界条件, 从而去掉了  $\phi_{10}$  和  $A$  的超定性.

在  $h = \text{常数}$  的最简单情况下, 解是

$$\frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} = \text{const} = U \quad (8.57)$$

即由无穷远上游条件决定的恒定流动. 注意到该流动的大小是

$$\varepsilon \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x} = \varepsilon^2 \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} = \varepsilon^2 U = O(\varepsilon^2)$$

由方程 (8.54) 加上初始条件和边界条件可解出  $A$ . 利用坐标变换 (8.42), 可进一步把方程 (8.54) 简化为

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + i \left\{ \frac{\omega}{4k^2} \left( \frac{1}{2} A_{\xi\xi} - A_{y_1 y_1} \right) \right\} + kUA$$



$$\left. + \frac{\omega k^2}{2} |A|^2 A \right\} = 0 \quad (8.58)$$

利用  $A = B \exp(-ikU\tau)$ , 可以去掉流动项, 得

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} + i \left\{ \frac{\omega}{8k^2} (B_{\xi\xi} - 2B_{y_1 y_1}) + \frac{\omega k^2}{2} |B|^2 B \right\} = 0 \quad (8.59)$$

这首先由 Zakharov(1968) 导出. 在  $\frac{\partial}{\partial y_1} = 0$  的极限情况下, 式 (8.59) 化为 (8.45), 且对无穷大水深情况有

$$\alpha = \omega/8k^2, \quad \beta = \omega k^2/2 \quad (8.60)$$

### §8.3 均匀 Stokes 波

我们来寻找一个在  $x, y$  方向没有缓慢调制的解, 即  $A, \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1}$  不依赖于  $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$  的解. 从方程 (8.36) 得到

$$\phi_{10} = Ux_1 - gbt_1 \quad (8.61)$$

其中  $U$  和  $b$  是任意常数. 利用式 (8.61), 方程 (8.29) 简化为

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + i\omega_2 |A|^2 A = 0 \quad (8.62)$$

其中

$$\omega_2 = \frac{\omega k^2}{16\text{sh}^4 q} (8 + \text{ch}4q - 2\text{th}^2 q) - \frac{1}{|A|^2} \left( kU + \frac{gk^2 b}{2\omega \text{ch}^2 q} \right) \quad (8.63)$$

此方程的解为

$$A = a_0 \exp(-i\omega_2 a_0^2 t_2) \quad (8.64)$$

其中  $a_0$  为实数且忽略了任意的相位常数.

在首阶近似下, 波形是

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} (a_0 e^{i\tilde{\psi}} + c.c.) \quad (8.65)$$

其中

$$\tilde{\psi} = kx - \tilde{\omega}t$$

是新的相位, 且

$$\tilde{\omega} = \omega + \varepsilon^2 \omega_2 a_0^2 \quad (8.66)$$

是非线性色散关系. 现在相速度还依赖于振幅

$$\tilde{C} = \frac{\omega}{k} + \varepsilon^2 \frac{\omega_2}{k} a_0^2 \quad (8.67)$$

参数  $\varepsilon$  已经起到了它的作用, 现在可以丢掉了.

二阶解是

$$\phi_2 = \phi_{20} - \frac{3}{16} \frac{\omega \text{ch}2Q}{\text{sh}^4 q} (i a_0^2 e^{i2\tilde{\psi}} + c.c.) \quad (8.68)$$

$$\zeta_2 = b - \frac{k}{2\text{sh}2q} a_0^2 + \frac{k \text{ch}q (2\text{ch}^2 q + 1)}{8\text{sh}^3 q} (a_0^2 e^{i2\tilde{\psi}} + c.c.) \quad (8.69)$$

从  $\phi_{40}$  的可解性, 可以证明  $\partial\phi_{20}/\partial z = 0$ , 意味着  $\phi_{20} = \phi_{20}(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots)$ , 所以  $\phi_{20}$  不影响二阶速度场. 因为对  $\tilde{\psi} = 0, \pi, 2\pi, \dots$  而言, 在  $\zeta_2$  中的二次谐波总是正的, 从而抬高了波峰和波谷. 所以总的自由面在波峰处较尖, 在波谷处较平. 另外, 在 (8.69) 的第二项表示平均海平面的下降.

当  $kh \ll 1$  时, 消去  $\epsilon, \zeta_2$  与  $\zeta_1$  的比值的量级是  $ka_0/(kh)^3$ , 因此在浅水中, Stokes 波理论只在

$$ka_0/(kh)^3 \ll 1 \quad (8.70)$$

时才是有效的. 上面的比值就是上一章提到的 Ursell 数, 是频散与非线性之比的度量.

由于  $U$  和  $b$  是任意常数, 所以文献中的 Stokes 波有各种不同的表达式. 例如, 设  $A$  与  $\xi$  无关,  $S$  为常数, 我们可以把方程 (8.43) 积分出来, 得到 (8.64) 式, 其中

$$\omega_2 = \beta a_0^2 + \gamma \quad (8.71)$$

如果

$$\begin{cases} U = S - \frac{\omega(2\omega ch^2 q + kC_g)}{4ksh^2 q(gh - C_g^2)} a_0^2 \\ b = \frac{1}{g} UC_g \end{cases} \quad (8.72)$$

则上述色散关系与 (I3.3) 式一致. 上述 Stokes 波的表达式和 Davey & Stewartson 给出的表示式是等效的.

## §8.4 Stokes 波的边带不稳定性

作为计算波浪力的基础, 均匀 Stokes 波在工程文献中已经应用了许多年. 为了计及全部非线性, 对它的高阶修正作了大量的工作. 然而, 实验室中有一个共同的经验, 即: 在一个长的波槽中维持均匀的陡波是困难的事情. 这个困难首先由 Benjamin 和 Feir(1967) 加以解释. 他们发现 Stokes 波对边带扰动 (即频率与载波的基频稍有差异的波产生的扰动) 是不稳定的.

考虑水深为无穷且没有流动的最简单的情况, 这时  $A$  满足式 (8.58). 把小扰动加到 Stokes 波上. 按照 (8.61) 和 (8.46), 对于 Stokes 波,  $a = a_0, W = 0$ .  $a$  和  $W$  的扰动分别记为  $a'$  和  $W'$ , 则

$$a = a_0 + a', \quad W = W' \quad (8.73)$$

式 (8.47) 的线性化形式为

$$\frac{\partial a'}{\partial \tau} - \alpha a_0 \frac{\partial W'}{\partial \xi} = 0 \quad (8.74)$$

$$\frac{\partial W'}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \alpha \frac{a' \xi \xi}{a_0} + 2\beta a_0 a' \right] = 0 \quad (8.75)$$

因为在色散介质中小的频率改变会产生大尺度的调制, 所以我们假设扰动是缓慢调制的波:

$$\begin{cases} a' = \bar{a}' e^{i(K\xi - Q\tau)} \\ W' = \bar{W}' e^{i(K\xi - Q\tau)} \end{cases} \quad (8.76)$$

于是 (8.74), (8.75) 式给出

$$-iQ\bar{a}' - \alpha a_0 i K \bar{W}' = 0 \quad (8.77)$$

$$\bar{a}' \left[ \frac{\alpha}{a_0} (iK)^3 + 2\beta(iK) \right] - iQ\bar{W}' = 0 \quad (8.78)$$

为了有非平凡解  $\bar{a}'$  和  $\bar{W}'$ , 判别式必须等于零

$$\begin{vmatrix} -iQ & -i\alpha a_0 K \\ iK \left( -\frac{\alpha K^2}{a_0} + 2\beta a_0 \right) & -iQ \end{vmatrix} = 0$$

因而

$$Q = \pm K \sqrt{\alpha^2 K^2 - 2\alpha\beta a_0^2} \quad (8.79)$$

如果  $\alpha\beta < 0$ , 平方根总是实的, 边带扰动完全是正弦波, 因此是中性稳定的. 但是若  $\alpha\beta > 0$ , 当

$$K^2 < 2\beta a_0^2 / \alpha \quad (8.80)$$

时,  $\Omega$  是虚数, 边带扰动随时间  $t$  指数增长, 因而不是不稳定的.

由 (8.60) 式可知, 如果

$$|K/k| < \sqrt{8ka_0} \quad (8.81)$$

Stokes 波是不稳定的. 波越陡, 不稳定边带越宽. 对应于式 (8.79) 的色散关系是

$$\Omega = \pm \omega \left[ \frac{K^2}{8k^2} \left( \frac{K^2}{8k^2} - k^2 a_0^2 \right) \right]^{1/2} \quad (8.82)$$

在  $K = 0$  或  $K = \sqrt{8k}(ka_0)$  时, 不稳定增长率是零, 最大增长率在

$$|K/k| = 2ka_0 \quad (8.83)$$

处出现, 最大的  $\Omega$  为

$$\max \Omega = \pm i \frac{1}{2} \omega (k^2 a_0^2) \quad (8.84)$$

此时  $\bar{a}'$  和  $\bar{W}'$  的相位差是  $\pi/2$ . 一般说来, 不稳定增长率即  $\text{Im}\Omega$  随边带扰动的波长而变.

Lighthill(1978, p.462) 对边带不稳定作了直观的解释. 考虑一个有缓慢波包的 Stokes 波列. 在包络峰附近的波峰比在包络峰两边的波峰运动得快些, 因而有使前面的波变短, 后面的波拉长的趋势. 因为在深水中较长的波的群速度较大, 所以后面输入能量的速率大于前面把能量传走的速率, 因而能量在包络峰处累积起来, 必然使其峰进一步增大. 类似地, 包络的谷的高度将趋于减小, 从而导致不稳定性.

Feir 的实验已经在 Benjamin(1967) 的文章中描述过了. 边带调制由电子程序控制造波机诱导产生. 沿水槽分布的一系列固定的探针可以测得初始增长速率  $d(\ln a)/dx$ , 它与以群速度运动的探针测得的瞬时增长速率  $d(\ln a)/C_g dt$  一样, 正比于  $\text{Im}Q$ . Lake 和 Yuen(1977) 把理论和实验作了比较, 证实了理论结果.

Benney 和 Roskes(1969) 进一步研究了与原来的 Stokes 波斜交的边带扰动. 他们假设

$$(a'W', \phi'_{10}) \propto \exp i(K_1 x_1 + K_2 y_1 - \Omega t)$$

结果表明, 在  $K_1, K_2$  平面上除了  $kh = 0.38$  外, 总有使 Stokes 波不稳定的区域. 该区域的大小随  $kh$  而变, 水较深时, 产生不稳定的可能性较大. 在自然界中, 任何方向的调制都是困难的, 因此 Stokes 波对不稳定总是敏感的.

无限深水中陡波 (直到  $ka \sim 0.4$ ) 的不稳定问题的研究, 进展很快. 对于与原来的波同向或反向的扰动, Longuet-Higgins(1978a,b) 从稳恒行波的精确的数值解出发, 迭加上比原来的波更短 (超谐) 或更长 (次谐) 的扰动, 对它们进行了研究, 其中, 次谐扰动是 Benjamin-Feir 波的推广. 他们发现在  $K/2k$ (纵坐标) 和  $ka_0$ (横坐标) 平面上, 不稳定区域是  $ka_0$  轴上面的一个羽状区域. 我们记得, 对于小的  $K/2k$  和  $ka_0$ , 式 (8.81) 所对应的不稳定区域是直线  $K/2k = \sqrt{2}ka_0$  右边的整个区域. 后来 Dysthe(1979) 指出: Schrödinger 方程中加上四阶修正项就可以用解析方法很好地预测不稳定的羽状区域的左边界. 另一方面, McLean 等人 (1981) 研究了斜向扰动

$$\zeta' = \{\exp i[p(x - ct)] + qy - \omega t\} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in(x-ct)}$$

迭加到原来的波

$$\zeta_0 = \sum_0^{\infty} A_n \cos[2n\pi(x - ct)/x]$$

上的情况. 用数值求解精确的方程可以得出  $A_n, c$  和  $H/\lambda$  ( $H$  = 从波谷到波峰的波高) 之间的关系. 他们发现了新的不稳定区域, 推广了 Benney 和 Roskes(1969) 的弱非线性的结果. Melville(1982) 报道了最近的实验结果.

### 习题

(8.1) 考虑一个在斜率为  $\varepsilon$  的海滩上的最低模式的边缘行波

$$\phi = -\frac{igD}{2\Omega} \exp(-Kx_1) \exp i(Ky_1 - \Omega t_1) + c.c. + \text{高阶项}$$

其中  $x_1 = \varepsilon x > 0$ ,  $y_1 = \varepsilon y$ ,  $t_1 = \varepsilon t$ ,  $\Omega^2 = gK$ . 利用 Airy 长波理论, 假设  $D = D(y_2, y_3, \dots, t_2, t_3, \dots)$ , 证明包络按下列方程演化

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial}{\partial y_2} \right) D = 0$$

$$i \left( \frac{\partial}{\partial t_3} + C_g \frac{\partial}{\partial y_3} \right) D - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial K^2} \frac{\partial^2 D}{\partial y_2^2} - \frac{\Omega K^4}{4} |D|^2 D + \frac{\Omega}{4} D = 0$$

其中  $C_g = g/2\Omega$  是沿海岸边缘波的群速度, 且  $-\partial^2 \Omega / \partial K^2 = g^2/4\Omega^2$ , 证明包络对边带扰动是不稳定的, 但可以有孤立波解.

(8.2) Dyshe(1979) 考虑四阶效应, 推广了深水立方 Schrödinger 方程. 短波包络演化方程的三阶, 四阶项的组合如下:

$$\begin{aligned} & -i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}|A|^2 A \\ & = \varepsilon \left\{ \frac{i}{16} \left( 6\frac{\partial^3 A}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3} \right) - \frac{3}{4}A^2 \frac{\partial A}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + i|A|^2 \frac{\partial A}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \phi_{20}}{\partial \xi} - i\frac{\partial \phi_{20}}{\partial z_1} \right) A \right\}, \quad z = z_1 = 0 \end{aligned}$$

平均流动势  $\phi_{20}$  满足

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \phi_{20} = 0, \quad -h < z_1 < 0$$

以及边界条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{20}}{\partial z_1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} |A|^2, \quad \text{在 } z_1 = 0 \text{ 上} \\ \frac{\partial \phi_{20}}{\partial z_1} &= 0, \quad \text{在 } z_1 = h_1 \text{ 上} \end{aligned}$$

其中  $h_1$  是底部深度, 其量级为  $O(1/k\varepsilon)$  或更大些. 对于小于  $O(\varepsilon)$  的扰动, 把这些方程线性化, 研究倾斜的边带波引起的不稳定性.

### §8.5 深水中的永形包络: 演化方程的非线性解

Benney 和 Newell (1967) 首先指出: 方程 (8.45) 存在永形波包络解. 它们是  $x - Ut$  的函数 (也可参看 Chu 和 Mei, 1971; Hashimoto 和 Ono, 1972; Zakharov 和 Shabat, 1972; Scott, Chu 和 McLaughlin, 1973). 我们用 Scott, Chu 和 McLaughlin (1973) 的深水解作为例子加以说明. 首先把式 (8.59) 无量纲化, 令

$$A' = B/a_0, \quad \xi' = k^2 a_0 \xi, \quad \tau' = \omega(k a_0)^2 \tau \quad (8.85)$$

去掉撇号, 在  $\frac{\partial}{\partial y_1} = 0$  时, 立方 Schrödinger 方程变为

$$-i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}|A|^2 A = 0 \quad (8.86)$$

我们找如下形式的解:

$$A = a e^{ir(\xi - V\tau - \delta)} \quad (8.87)$$

其中  $a = a(\xi - U\tau)$ ,  $r, \delta$  为常数, 它表示包络为  $a$  的载波, 相位  $\delta$  由初始位置决定. 把式 (8.87) 代入 (8.86), 用撇号表示导数, 得

$$\frac{1}{8}a'' - r \left( \frac{1}{8}r + V \right) a + \frac{1}{2}a^3 + i \left( U + \frac{r}{4} \right) a' = 0 \quad (8.88)$$

令虚部等于零, 得

$$r = -4U \quad (8.89)$$

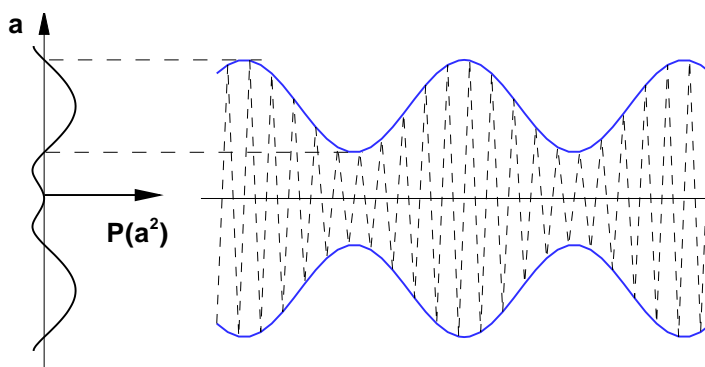


图 8.1: 包络波对应的六次多项式

把上式代入 (8.88) 的实部得到

$$\frac{1}{8}a'' + 4U \left( V - \frac{U}{2} \right) a + \frac{1}{2}a^3 = 0 \quad (8.90)$$

式 (8.90) 乘以  $a'$ , 并积分之, 可得

$$a'^2 + 32U \left( V - \frac{U}{2} \right) a^2 + 2a^4 = C \quad (8.91)$$

其中  $C$  是常数. 式 (8.91) 乘以  $a^2$ , 且定义

$$E = a^2 \quad (8.92)$$

可得

$$E'^2 + 64U(2V - U)E^2 + 8E^3 = 8CE$$

此式可改写为

$$E'^2 = 8(E_{\max} - E)(E - E_{\min})E \equiv P(E) \quad (8.93)$$

注意到

$$8(E_{\max} + E_{\min}) = -64U(2V - U) \quad (8.94)$$

按式 (8.92) 的定义,  $E_{\min} > 0$ , 因此, 必须有

$$U(2V - U) < 0$$

三次多项式  $P(E)$  与  $E$  的图, 如图 8.1 所示. 对应的  $P(a^2)$  是六次多项式, 也画在图中. 仅当  $P$  为正值时, 式 (8.93) 才存在解.

当  $C = 0$  时,  $E_{\min} = 0$ , 式 (8.93) 变为

$$(E')^2 = 8E^2(E_{\max} - E) \quad (8.95)$$

如图 8.5.1 所示, 这时  $P(E)$  有两个零点. 积分之后得

$$E = E_{\max} \operatorname{sech}^2[(2E_{\max})^{1/2}(\xi - U\tau)] \quad (8.96)$$

或即

$$a = a_{\max} \operatorname{sech}[2^{1/2}a_{\max}(\xi - U\tau)] \quad (8.97)$$

这表示一个孤立波包或包络孤立波. 注意  $a_{\max} = \sqrt{E_{\max}}$ ,  $U, V$  满足  $E_{\min} = 0$  时的式 (8.94). 我们取  $U = 0, VU =$  有限常数  $Q, a_{\max} = 1$ , 从而有

$$a = \operatorname{sech}\sqrt{2}\xi, \quad A \operatorname{sech}\sqrt{2}\xi e^{i(4Q\tau - \delta)}$$

更一般的情况是  $C \neq 0, E_{\min} > 0$  (如图 8.5.1 所示). 式 (8.93) 的解可用椭圆余弦函数表示

$$\begin{cases} E = E_{\min} + \Delta E C_n^2 \{ (2\Delta E)^{1/2} \gamma^{-1} (\xi - U\tau) \} \\ \Delta E = E_{\max} - E_{\min} = \text{能量振幅} \\ \gamma = (\Delta E / E_{\max})^{1/2} \end{cases} \quad (8.98)$$

包络的波长是

$$\lambda = \frac{2^{1/2}}{(\Delta E)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{(1 - \gamma^2 \sin^2 u)^{1/2}} \quad (8.99)$$

(参看 Chu 和 Mei, 1971),  $\Delta E, U$  和  $V$  可以独立指定, 但要满足式 (8.94).

对于有限深度情况, 式 (I2.45) 可以按

$$\xi = \alpha \bar{\xi}, \quad \tau = \alpha \bar{\tau}$$

改变尺度, 得到下面的标准形方程

$$-i \frac{\partial B}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial^2 B}{\partial \bar{\xi}^2} + \kappa |B|^2 B = 0 \quad (8.100)$$

其中  $\kappa = \alpha\beta$ . 对于  $\kappa > 0$  (即  $kh > 1.36$ ) 的情况, 容易导出式 (8.97) 的推广形式

$$B = a \exp \left[ -i \frac{U}{2} (\bar{\xi} - V\bar{\tau} - \bar{\xi}_1) \right] \quad (8.101)$$

其中

$$a = a_{\max} \operatorname{sech} \sqrt{\kappa/2} a_{\max} (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0 - U\bar{\tau}) \quad (8.102)$$

且

$$a_{\max} = \frac{2}{\kappa} U \left( \frac{1}{8} U - V \right)$$

孤立波以自由参数  $a_{\max}, U$  和相位  $\xi_0, \xi_1$  为其特征.

对  $\alpha\beta < 0$  的情况, Zakharov 和 Shabat (1973) 发现了集中在中心, 且  $\xi \rightarrow \infty$  时趋于有限常数的孤立波, 其结果是

$$B = \sqrt{\frac{2}{|\kappa|}} \frac{(\lambda - i\nu)^2 + e^{2\nu(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0 - 2\lambda\bar{\tau})}}{1 + e^{2\nu(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0 - 2\lambda\bar{\tau})}} \quad (8.103)$$

其中

$$\nu = \sqrt{1 - \lambda^2} \quad (8.104)$$

经过一些计算可得

$$|B| = \sqrt{\frac{2}{|\kappa|}} [1 - \nu \cdot \operatorname{sech}^2 \nu (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0 - 2\lambda\bar{\tau})]^{1/2} \quad (8.105)$$

因此孤立波以  $\xi_0$  和振幅  $\nu$  为其特征. Hasegawa 和 Tappert(1973) 导出了更一般的解, 这些解现在通称凹  $E$  孤立波 (Concave E-soliton) 或叫作包络洞孤立波 (envelope-hole soliton). 注意: 在  $\nu \rightarrow 1$  的极限情况下,  $\lambda$  减小, 所以较深的 "洞" 运动得更缓慢. 在  $\nu \rightarrow 1$  的极限情况下, 当  $\lambda \rightarrow 0$  时,

$$|B| \rightarrow \sqrt{\frac{2}{|\kappa|}} \tanh(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) \quad (8.106)$$

这叫作相位跳跃, 因为其符号由  $-1(\xi \rightarrow -\infty)$  变到  $+1(\xi \rightarrow +\infty)$ .

Hashimoto 和 Ono(1972) 已经解得了  $\alpha\beta > 0$ , 和  $\alpha\beta < 0$  情况下的周期性永形包络.

### §8.6 深水中一维波包络的瞬态演化

因为经过指数增长的初始阶段之后, 线性化不稳定理论必然失效. 所以对于长时间的演化, 必须使用更完善的非线性理论. Feir(1967) 早期的实验指出: 波包的包络有分裂为连成一串的几群波包的包络的倾向. Chu 和 Mei(1971) 用式 (8.47) 的数值解, 证实了这种倾向. 然而这些尝试都没有进行到足够长的时间来揭示全部的物理图像. Zakharov 和 Shabat(1972) 作出了理论突破, 推广了 Gardner 等人 (1967) 的方法, 当初始数据  $B(\xi, 0)$  只在有限区域为非零时 (即当  $|\xi| \rightarrow \infty$  时,  $B(\xi, 0)$  足够快地趋向于零), 对  $\kappa > 0$ , 和  $\kappa < 0$  的情况, 都精确地解出了式 (8.100). 他们成功的基础是 Lax(1968) 的重要发现: 要解非线性演化方程

$$\frac{\partial B}{\partial \bar{\tau}} + NB \quad (8.107)$$

(其中  $N$  是一个非线性算子), 其关键步骤是找两个线性算子  $L$  和  $M$  ( $L$  和  $M$  只包含对  $\bar{\xi}$  的导数, 并且还包含  $B(\bar{\xi}, \bar{\tau})$ ), 使得

$$L_{\bar{\tau}} = LM - ML \quad (8.108)$$

且

$$-\psi_{\bar{\tau}} = M\psi \quad (8.109)$$

于是下面的问题

$$L\psi = \sigma\psi \quad (8.110)$$

的本征值对所有  $\bar{\tau}$  保持为常数. 这可以由式 (8.110) 对  $\bar{\tau}$  微商再利用式 (8.108), (8.109) 和 (8.108) 导出

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\tau}}\psi &= L_{\bar{\tau}}\psi + (L - \sigma)\psi_{\bar{\tau}} = LM\psi - ML\psi + (L - \sigma)\psi_{\bar{\tau}} \\ &= (L - \sigma)(\psi_{\bar{\tau}} + M\psi) = 0 \end{aligned}$$

正因为有这个不变性, 用初始数据  $B(\bar{\xi}, 0)$  足以求出方程 (8.110) 的本征值  $\sigma$  和本征函数  $\psi(x, 0)$ . 对于局部化的初始数据, 我们预期  $B(\bar{\xi}, \bar{\tau})$  也是局部化的. 算子  $M$  可以这样简化,



使我们根据  $\psi(\pm\infty, 0)$  的知识, 从式 (8.109) 容易解出  $\psi(\pm\infty, \tau)$ . 现在对任何时刻  $\tau$  本征值  $\sigma$  和远场的  $\psi(\pm\infty, \tau)$  都已知了, 把  $\tau$  作为参数, 反演散射理论, 可以用来解所有  $\bar{\xi}$  处的  $B(\bar{\xi}, \tau)$ . 这最后一步数学上很复杂, 需要利用复变函数论的很多知识.

对于立方 Schrödinger 方程 (8.100), Zakharov 和 Shabat 发现本征函数  $\psi$  是两个分量的矢量  $\psi = \psi(\psi_1, \psi_2)$ ,  $L$  和  $M$  是  $2 \times 2$  的矩阵

$$\begin{cases} L &= i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa = 2/1-p^2 \\ M &= -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^2} + \begin{bmatrix} |B|^2/(1+p) & iB_{\bar{\xi}} \\ -iB_{\bar{\xi}}^* & -|B|^2/(1-p) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8.111)$$

一般说来, 研究这些矩阵, 决不是轻而易举的事情, Ablowitz 等人 (1974) 发现了一种系统的处理方法.

以后, Satsuma 和 Yuen (1975) 把 Zakharov 和 Shabat 的理论完善化了, 并得到 Yuen 和 Lake (1975) 从数值方面和实验方面的证实. 对于  $K > 0$  的情况, 这些工作主要的物理特征概述如下:

- 一个任意形状的波包的包络, 最终会演化为有限数目的孤立波加上不重要的按  $t^{-1/2}$  衰减的振动的尾波.
- 第  $j$  个孤立波由下式给出

$$B_j(\bar{\xi}, \tau) = 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} b_j \{ \operatorname{sech} 2b_j (\bar{\xi} - \bar{\xi}_j - 4a_j \tau) \} \cdot \{ \exp[4i(a_j^2 - b_j^2)\tau - 2ia_j \bar{\xi} + i\psi] \} \quad (8.112)$$

其中  $a_j$  和  $b_j$  是式 (8.110) 的离散本征值  $\sigma_j$  的实部和虚部. 因此孤立波有振幅  $2\sqrt{2}b_j/\sqrt{\kappa}$ , 相速度  $4a_j$  和相位  $\bar{\xi}$ 、 $\psi$ , 这些都与散射问题的反射系数有关 (连续本征值谱). 一般说来, 这些复本征值有不同的实部, 因此, 不同的孤立波可以随着时间而分离开来.

- 若初始数据  $B(\bar{\xi}, 0)$  是实的, 且不是关于  $\bar{\xi}$  反对称的, 则离散本征值是纯虚数. 在这种情况下, 所有孤立波固定在一起, 形成所谓的束缚孤立波 (Bounded soliton). 对此稍作推广, 如果初始数据取下面的形式

$$B(\bar{\xi}, 0) = \bar{B}(\bar{\xi}) e^{iV\bar{\xi}}$$

其中  $V$  是实常数,  $\bar{B}(\bar{\xi})$  是函数, 不是关于  $\bar{\xi}$  反对称的, 则所有孤立波有同样的速度  $-2V$  (相对于静止坐标系的群速度). 因为每一个孤立波以周期  $4b_j^2$  振动, 合成的包络展示再现现象, 其频率为  $4(b_i^2 - b_j^2)$ . 再现频率的个数等于  $n_i^2$  和  $n_j^2$  之间的不同的差值的个数. 例如, 如果  $N$  是孤立波的数目, 那么, 对  $N = 2$  的情况, 对  $N = 2$  的情况只有一个再现频率; 对于  $N = 3$  的情况, 有两个再现频率……等等.

- 一开始以不同速度运动的两个孤立波将互相通过, 而不交换能量, 相碰的唯一效应是分离后有一个相位差.

作为特例

$$B(\bar{\xi}, 0) = B_0 \operatorname{sech} \bar{\xi} / \lambda, \quad B_0 \text{ 为实数} \quad (8.113)$$

(8.110) 和 (8.111) 式可化为  $\psi_1$  的超几何方程, 可以得到离散本征值和连续本征值的散射系数 (Satsuma 和 Yajima, 1975), 离散本征值为

$$\sigma_j = i \left( \sqrt{\frac{\kappa}{2}} B_0 \bar{\lambda} - j + \frac{1}{2} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (8.114)$$

要形成  $N$  个孤立波, 初始大小  $B_0 \bar{\lambda}$  必须使

$$\sqrt{\frac{\kappa}{2}} B_0 \bar{\lambda} - N + \frac{1}{2} > 0 \quad (8.115)$$

而且, 当

$$\sqrt{\kappa/2} B_0 \bar{\lambda} = N, \quad N = \text{正整数} \quad (8.116)$$

时, 反射系数为零, 所以散射反演问题可以求得显式解  $B(\bar{\xi}, \tau)$ , 结果只包含  $N$  个束缚孤立波.

把上面的判据应用到式 (8.86), 初始数据为

$$A(\xi, 0) = A_0 \operatorname{sech} \xi / \lambda,$$

必须作下面的变换

$$B_0 \rightarrow A_0, \quad \bar{\lambda} \rightarrow \lambda / \alpha, \quad \kappa \rightarrow \alpha \beta$$

于是判据 (8.115) 和 (8.116) 变为

$$\text{对于 } N \text{ 个孤立波加尾波的情况: } \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}} A_0 \lambda > N - \frac{1}{2} \quad (8.117)$$

$$\text{对于只含 } N \text{ 个孤立波的情况: } \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}} A_0 \lambda = N \quad (8.118)$$

对于深水情况,  $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{2}$ , 式 (8.117) 和 (8.118) 的左端变为  $\sqrt{2} A_0 \lambda$ .

Satsuma 和 Yajima(1975) 从 (8.86) 出发, 对一些情况 (包括束缚孤立波和以不同速度行进的孤立波) 进行了数值计算, 大体上与他们的解析结果符合. 现在有好几种使用起来比较简单的数值方法 (Lake, Yuen, Rungaldier, Ferguson, 1977), 它们能够容易地应用于反演散射理论还不能求解的情况 (例如: 半无穷区域, 周期性边界条件, 两个空间尺度, 非均匀介质的变系数方程等情况). 下面我们引述一个简单的 Crank-Nicolson 型的隐式格式, Yuen (1980) 把它用于下面要讨论的三种情况中的两种. 参考式 (8.86), 设  $\Delta\xi, \Delta\tau$  是  $\xi$  和  $\tau$  轴上的离散小区间, 记

$$A_j^n = A(j\Delta\xi, n\Delta\tau)$$

于是式 (8.86) 近似为

$$\begin{aligned} A_j^{n+1} = & A_j^n - \frac{\Delta\tau}{2} \left\{ \frac{i}{8(\Delta\xi)^2} (A_{j+1}^{n+1} - 2A_j^{n+1} + A_{j-1}^{n+1}) \right. \\ & + \frac{i}{2} |\tilde{A}_j^{n+1}|^2 A_j^{n+1} + \frac{i}{8(\Delta\xi)^2} (A_{j+1}^n - 2A_j^n + A_{j-1}^n) \\ & \left. + \frac{i}{2} |\tilde{A}_j^n|^2 A_j^n \right\} + O(\Delta\tau^3, \Delta\xi^2) \end{aligned} \quad (8.119)$$

在非线性项中,  $\widetilde{A}_j^{n+1}$  是由第  $n$  个时间步长的结果按照 Euler 格式估计的

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_j^{n+1} = A_j^n - \Delta\tau \left\{ \frac{i}{8(\Delta\xi)^2} (A_{j+1}^n - 2A_j^n + A_{j-1}^n) \right. \\ \left. + \frac{i}{2} |A_j^n|^2 A_j^n \right\} + O(\Delta\tau^2, \Delta\xi^2) \end{aligned} \quad (8.120)$$

作为例子, 讨论由下面几种初始数据的结果

1. 单个脉冲;
2. 均匀波列的周期性调制.

在后一种情况下, 初始数据不是局部的, 现在不可能求得解析解.

### §8.6.1 单个脉冲的演化

为了方便起见, 我们把初始数据表示为

$$A(\xi, 0) = \operatorname{sech}(\sqrt{2}\xi/\lambda) \quad (8.121)$$

如果  $\lambda = 1$ ,  $A(\xi, 0)$  就是高度为 1 的孤立波. 首先我们取  $\lambda = 2$ , 对应于长度为等高度孤立波长度的两倍的初始脉冲. 由式 (8.118) 立即可得  $N = 2$ , 所以应该产生两个孤立波. 对于这种情况, Satsuma 和 Yajima(1975, p.300, 作变换  $u \rightarrow NA$ ,  $x \rightarrow \sqrt{2}\xi/N$ ,  $t \rightarrow \tau/2N^2$ ) 已经给出了显式解

$$A(\xi, \tau) = \frac{2\operatorname{ch}\frac{3\xi}{\sqrt{2}} + 3e^{-i\tau/2}\operatorname{ch}(\xi/\sqrt{2})}{\operatorname{ch}2\sqrt{2}\xi + 4\operatorname{ch}\sqrt{2}\xi + 3\cos\frac{\tau}{2}} e^{-i\tau/16} \quad (8.122)$$

该式得到了数值计算的证实. 数值计算得到的再现周期为

$$\tau_0 = 12.6, \quad (\text{理论值为 } 2\pi/(1/2) = 12.566).$$

数值计算得出: 相隔一个再现周期的两个时刻的相位曲线只差一个常数. 因此波数是不变的. 包络有一个波节时, 相位变化激烈, 这意味着在波群的前半部, 频率分布有一个尖锐的谷. 由于对称性, 在波群的后半部, 频率分布有一个尖峰. 这些定性的预测与 Feir 的实验结果一致. 由于时间尺度很长, 在实验室里观察再现现象是困难的, 除非在阻尼很小的宽水槽中做实验.

其次, 我们取  $\lambda = 3$ , 按照式 (8.118), 对应的  $N$  是 3. 这时再现周期不止一个, 包络节点处仍有迅速的相位变化.

### §8.6.2 均匀波列阵面的演化

在 2.4 中已经指出, 突然产生的正弦波列阵面受线性 Schrödinger 方程制约. 包络前进时, 波阵面后边的波动可以用 Fresnel 积分描述. 计及非线性效应, 重新考察这个问题. 要在初始数据

$$A(\xi) = \frac{1}{2}[1 + \theta\xi/\lambda]$$

之下的解方程 (8.86). 波阵面很远处没有扰动, 所以

$$A \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty$$

波阵面后面很远处是均匀的 Stokes 波, 所以

$$A \sim e^{i\tau/2}, \quad \xi \rightarrow -\infty$$

这里  $\xi$  和  $\tau$  由式 (8.85) 定义, 只是略去了撇号. 这意味着较小的  $\varepsilon = ka_0$  对应于较长的有量纲距离和时间. 对于  $\lambda \cong 0$  突然转变的情况, 线性理论和非线性理论之间有矛盾. 有限振幅效应显著地改变了包络阵面, 产生了强的多的波动. 还没有合适的实验可与非线性无粘理论相比较. Yue(1980) 已经考察了其它的  $\lambda$  值, 没有方向定性的新特征.

### §8.6.3 均匀波列的周期性调制: 初始不稳定阶段以后的演化

在初始不稳定阶段以后, 边带扰动增长得非常迅速, 使得式 (8.86) 中全部非线性效应都变重要了. Chu 和 Mei(1971) 从式 (8.47) 出发, 计算了最不稳定情况 ( $K/k = 2ka_0$ ) 的非线性演化. 在出现第一个包络节点 ( $a \approx 0$ ) 后, 这些方程用于数值计算就不太合适了. Yuen 和 Ferguson(1978) 利用式 (8.86) 以及一个调制周期上的周期性要求, 完成了更广的计算工作. 他们发现, 再现是主要特征. 因此在一个调制波长内, 包络周期地由一个峰变为几个峰, 然后再变成一个峰. 相应地, 能量从低次谐波传到高次谐波, 然后又传回低次谐波. 当  $K/k$  减小时, 外形在中期会逐渐变复杂, 通过改变  $K/k$ , Yuen 和 Ferguson 发现了一系列复杂的变化形式. 对于  $2ka_0 < K/k < 2\sqrt{2}ka_0$  的情况, 在 Stokes 波列中, 只有一次谐波对扰动是不稳定的, 其演化是简单的. 但是, 当  $K/k$  稍小于  $2ka_0$  时, 一次谐波和二次谐波都不稳定, Stokes 波的演化相应地变得更复杂.

Stiassnie 和 Kroszynski(1982) 已经给出了近似的解析理论. 他们忽略扰动的高次谐波, 取

$$B = C_0 + C_{-1}e^{-i2\pi\bar{\xi}} + C_1e^{i2\pi\bar{\xi}} \quad (8.123)$$

$C_0(\bar{\tau})$  项对应于载波项,  $C_{\pm}(\bar{\tau})$  对应于边带扰动. 与浅水中产生谐波的情况一样, 可把式 (8.123) 代入 (8.100), 得到  $C_0, C_1$  的两个耦合的非线性常微分方程, 加上初始条件

$$C_0(0) = 1, \quad C_{\pm}(0) = \delta e^{i\theta}, \quad C_{-1} = C_1$$

这两个方程的解可写成椭圆积分表示的显式. 当式 (8.100) 中的系数  $\kappa = \alpha\beta$ , 使得一次谐波不稳定时,  $C_{\pm 1}$  以与  $C_0$  大小相当的振幅振动. 这样得到的调制再现周期与在式 (8.123) 中取很多谐波的计算结果方程符合, 但是近似振幅不能令人满意.

Stokes 波长时间演化的规则表明, 对于不太陡的波, 非线性倾向于产生干涉而不是使波无规则化. 这个事实对风波谱的演化有重要影响 (Lake 和 Yuen, 1978; Mollo-Christensen 和 Pamamonjarisoa, 1978). 对于较陡的波, Lake 等人 (1977) 进一步在实验室中观测到载波频率随着距离增大而趋向于减小, 并且推测: 频谱的峰值随着行程而向下移的原因部分地是由于非线性, 而不全在于风本身. 到目前, 还没有在立方 Schrödinger 方程的解中发现这种性能.

## §8.7 稳恒 Stokes 波被薄楔货稍有倾斜的防波堤的绕射

非线性波在无界海洋中的传播受到较多的注意, 但是关于非线性波与边界侧壁的相互作用却知道得不多. 即使对一直延伸到水底的铅垂壁面所形成的边界, 也必须处理两个水平

坐标. 这里我们讨论非线性波的两个绕射问题. 假设不存在长时间的调制, 无论是入射波还是散射波都是稳恒的.

关于浅水中孤立波斜入射到一个直壁面问题的大量实验已经由 Perroud(1957), Chen(1961) 和 Wiegel(1964) 完成. 实验发现, 入射角  $\theta_i > 45^\circ$  时, 入射波峰, 反射波峰与侧壁的夹角相等, 即镜面反射. 然而, 当入射角减小时 ( $20^\circ < \theta_i < 45^\circ$ ) 出现了与壁面垂直相交的第三个波峰 (称为 Mach 茎), 入射波, 反射波和 Mach 茎相交于离壁面一定距离的某一点. 入射角小于  $20^\circ$  时, 反射波峰消失了, 只剩下入射波峰和 Mach 茎. 因为在几何方面, 这和气体动力学中激波的反射相似, 所以 Wiegel 把浅水波中的这种现象叫做 Mach 茎效应.

在有限深的水中, 类似的周期波斜入射的实验已经由 Nielsen(1962), Berger 和 Kohlhasse(1976) 完成. 波峰的运动与孤立波的情况相同. 实验观测到: 沿着障碍物的波幅和 Mach 茎的高度先是增加, 然后逐渐变平. 在任何位置, 这个波幅随入射角的增加而增大. Mach 茎区的宽度随着沿壁面距离的增加而增大, 随着入射角的减小而增大, 也随着水深的减小而增大. 目前, 已有的实验数据很分散, 据此, 只能作出一些定性的结论.

在浅水中孤立波的 Mach 茎效应的理论, 已经由 Miles(1977) 提出, 他推导出来的结论与 Melville(1980) 的实验进行了比较, 在某些方面存在矛盾. Yue 和 Mei(1980) 完成了较深的水中的 Stokes 波在薄楔上切向入射的非线性研究, 揭示了实验中观测到的 Mach 茎的特性. 这里概述他们的主要结果.

由 4.10 可知, 当

$$L_y/L_x = \varepsilon \ll 1, \quad kL_x \gg 1 \quad (8.124)$$

时, 可以用抛物线近似. 对 Stokes 波, 波的斜度  $kA_0$  在长度尺度  $O(k^3 A_0^2)^{-1}$  内影响相位 (可由式 (8.64) 推得). 因此, 如果物体长度尺度的量级为

$$kL_x = O(kA_0)^{-2} \quad (8.125)$$

就必须计及非线性. 抛物线近似意味着横向长度尺度的量级为

$$kL_y = O(kA_0) = O(\varepsilon) \quad (8.126)$$

由式 (8.125) 和 (8.126) 可知, 只有

$$x_2 = \varepsilon^2 x \equiv X, \quad y_1 = \varepsilon y \equiv Y \quad (8.127)$$

是合适的慢坐标. 再假设所考虑的状态是稳恒的, 则振幅也不依赖于时间. 因此我们可以在式 (8.39) 中令

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} = 0 \quad (8.128)$$

从而得立方 Schrödinger 方程

$$2 \frac{\partial A}{\partial X} - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} + iK'|A|^2 A = 0 \quad (8.129)$$

其中

$$K' = k^2 \Theta \equiv k^3 \frac{C}{C_g} \frac{\text{ch}4q + 8 - 2\text{th}^2 q}{8\text{sh}^4 q} \quad (8.130)$$

总是正的,  $\phi_{10}$  可以取作零.

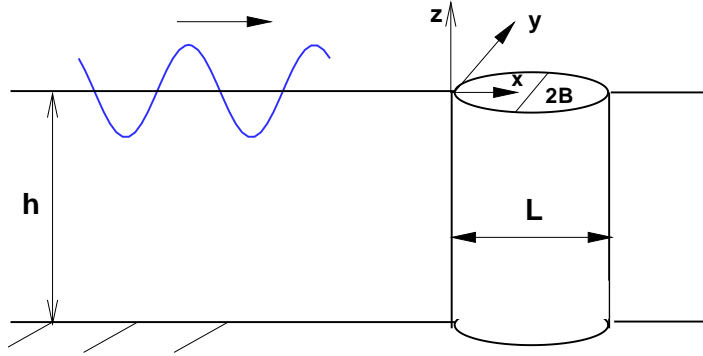


图 8.2: 细长障碍物的逆浪入射

考虑以关于  $x$  轴对称的铅垂壁面为界的物体 (见图 8.2), 物面方程如下:

$$y = \pm y_B(x) \quad (8.131)$$

或者用归一化坐标

$$Y = \pm \varepsilon y_b(X) \quad (8.132)$$

物面上法向速度为零要求

$$\Phi_y = \Phi_x \frac{dy_B}{dx}, \quad \text{在 } y = y_B \text{ 上} \quad (8.133)$$

或者

$$\varepsilon \Phi_y = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \right) \Phi \right] \frac{dy_B}{dx}, \quad \text{在 } Y = \varepsilon y_B \text{ 上} \quad (8.134)$$

在  $y = -y_B$  上成立类似的条件. 把一阶速度势 (8.21) (取  $\Phi_{10}$  为零) 代入上式可得

$$\frac{\partial A}{\partial Y} = ikA \frac{1}{\varepsilon} \frac{dy_B}{dx}, \quad \text{在 } Y = \varepsilon y_B \text{ 上} \quad (8.135)$$

我们可作颇有一般性的假设  $dy_B/dx = O(\varepsilon)$ , 从而有

$$ky_B = O(\varepsilon^{-1}) \quad (8.136)$$

对于楔形,  $y_B = \varepsilon x$ , 方程 (8.135) 变为

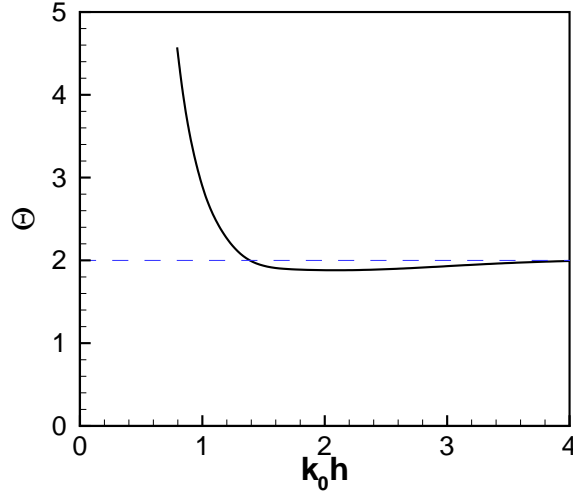
$$\frac{\partial A}{\partial Y} = ikA \quad \text{在 } Y = X \text{ 上} \quad (8.137)$$

其余的边界条件是

$$\begin{cases} A \rightarrow A_0 e^{-iK' A_0^2 X/2}, & Y \rightarrow +\infty \\ A = A_0, & X = 0 \end{cases} \quad (8.138)$$

求  $A$  的问题化简为初边值问题, 可以容易地用数值方法求解, 数值结果用无量纲变量

$$\bar{A} = A/A_0, \quad \bar{X} = kX = \varepsilon^2 kx, \quad \bar{Y} = kY = \varepsilon ky \quad (8.139)$$

图 8.3:  $\Theta$  对  $kh$  的依赖关系

表示. 方程 (8.129) 变为

$$2i \frac{\partial \bar{A}}{\partial X} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial Y^2} - K |\bar{A}|^2 \bar{A} = 0 \quad (8.140)$$

唯一的参数是

$$K = \left( \frac{kA_0}{\varepsilon} \right)^2 \Theta(kh) \quad (8.141)$$

其中  $\Theta$  在式 (8.130) 中定义, 其图画在图 8.3 中, 对于固定的  $kh$ ,  $K$  是相对于楔角  $\varepsilon$  的非线性的度量.

图 8.4 表示包络波高沿壁面的变化. 线性结果 ( $K = 0$ ) 在  $X$  方向振动, 且随  $X$  的增大逐渐减小到 4; 随着非线性程度的增加 ( $K = 4$ ), 包络波高减小, 趋于一常数.

在离楔较远处,  $A^2$  以一般绕射的方式波动. 忽略这些波动, Yue 和 Mei 提出一个解析的激波理论, 给出了高地顶角  $\beta$  和高地区的包络高度  $E_- = A_-^2$  的粗略估计, 结果是

$$E_- = \frac{1}{2K} (2K + 1 + \sqrt{8K + 1}) \quad (8.142)$$

$$\beta = (3 + \sqrt{8K + 1})/4 \quad (8.143)$$

与数值结果相符. 相应的理论预测的 Mach 茎的偏移角是

$$\text{tg} \delta \cong \varepsilon^3 \left( \frac{K}{2} + \frac{3 + \sqrt{8K + 1}}{4} \right) \quad (8.144)$$

$\delta$  是小量, 这意味着 Mach 茎差不多与壁面垂直. 激波近似尽管与数值结果接近, 但是不能揭示楔外的绕射现象.

上面的近似兼有抛物线近似和立方非线性, 分析方法可以推广于绕射不明显改变入射波方向的其它问题. 对于钝头物体, 所有方向的散射同样重要, 需要用更复杂的分析方法处理, 已经得到的结果不很一致, 有兴趣者可参看文献: Charkrabarti, (1972); Yamaguchi 和 Tsuchiya, (1974); Raman 和 Venkatanarasalah, (1976).

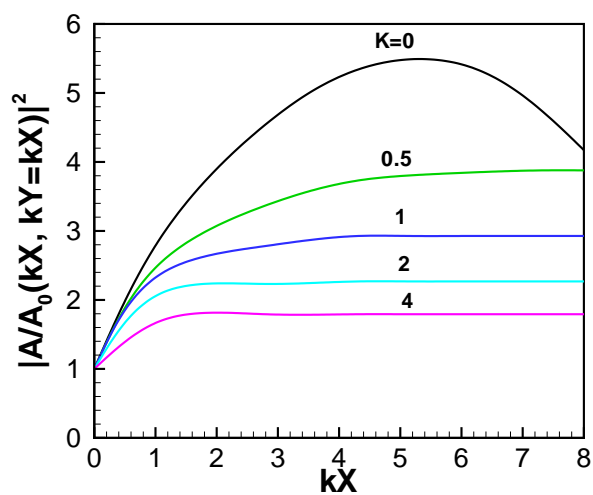


图 8.4: 振幅的平方沿楔壁的变化





## 参考文献

- [1] Wehausen, J.V. & E.V. Laiton(1960). *Handbuch der Physik*, edited by Flugge, vol.9, pp446-778, Springer-Verlag, Berlin.
- [2] Miles, J.W.(1957). On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.* **3** 185-204.
- [3] Phillips, O.M.(1957). On the generation of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.* **2**: 415-417.
- [4] Phillips, O.M.(1977). *Dynamics of the upper ocean*, 2nd ed. Cambridge University Press, London.
- [5] Benjamin, T.B. & J.E. Feir(1867). The disintegration of wave trains on deep water. *J. Fluid Mech.* **27**: 417-430.
- [6] Whitham, G.B.(1967). Nonlinear dispersion of water waves. *J. Fluid Mech.* **27**: 399-412.
- [7] Benney, D.J. & G.J. Roskes(1969). Wave instabilities. *Studies Appl. Math.* **48** 377-385.
- [8] Lighthill, M.J.(1967) Some special cases by the whitham theory. *Proc. R. Soc. Lond. A* **299**: 28-53.
- [9] Chu, V.C. & C.C. Mei(1971). The nonlinear evolution of stokes waves in deep water. *J. Fluid Mech.* **47**: 337-352.
- [10] Davey, A.(1972). The propagation of a weak nonlinear wave. *J. Fluid Mech.* **53**: 769-781.
- [11] Longuet-Higgins, M.S.(1975). Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitudes. *Proc. R. Soc. Lond A* **342**: 157-174.
- [12] Longuet-Higgins, M.S.(1978). The instability of gravity wave of finite amplitude in deep water I. Superharmonics. *Proc. R. Soc. Lond A* **360**: 471-488.
- [13] Longuet-Higgins, M.S.(1978). The instability of gravity wave of finite amplitude in deep water II. Subharmonics. *Proc. R. Soc. Lond A* **360**: 489-505.
- [14] Davey, A. & K. Stewartson(1974) On the three-dimensional packets of surface waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* **338**:101-110.



## 附录一 Neumann 加法定理

首先写出  $e^{i\rho \cos \theta}$  的分波展开式

$$e^{i\rho \cos \theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in(\theta+\pi/2)} J_n(\rho) \quad (1.1)$$

容易由  $\cos n\theta$  的正交性推得

$$J_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho \cos(\theta-\alpha)} d\theta \quad (1.2)$$

其中  $\alpha$  为任意值. 现今

$$\rho \cos \alpha = r' \sin \varphi, \quad \rho \sin \alpha = r - r' \cos \varphi \quad (1.3)$$

因此,

$$\rho = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi]^{1/2} \quad (1.4)$$

式 (1.2) 可以写成

$$\begin{cases} J_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{i(r - r' \cos \varphi) \sin \theta + ir' \sin \varphi \cos \theta\} d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(r) e^{im\theta} \right\} e^{ir' \sin(\varphi-\theta)} d\theta \end{cases} \quad (1.5)$$

其中利用了式 (1.1) (令其中的  $\theta \rightarrow \theta - \pi/2$ ). 交换求和号和积分号, 得到

$$\begin{cases} J_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[m\theta + r' \sin(\varphi-\theta)]} d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r) \int_{-\pi}^{\pi} e^{im(\theta+\varphi)} e^{-ir' \sin \theta} d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} J_m(r) \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta - ir' \sin \theta} d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} J_m(r) J_m(r') \end{cases} \quad (1.6)$$

在进行最后一个积分时, 再次用了式 (1.1). 把具有等值异号指数的成对的项结合起来, 立即得到 Neumann 加法定理的结果

$$J_0(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m J_m(r) J_m(r') \cos \varphi \quad (1.7)$$

其中

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m \neq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$



## 附录二 平面波的分波展开

考虑  $e^{zt/2}$  和  $e^{-z/2t}$  的 Taylor 级数展开式的乘积

$$e^{2(t-t^{-1})/2} = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{zt}{2} \right)^n \right] \cdot \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( -\frac{z}{2t} \right)^m \right] \quad (2.1)$$

相乘并项, 确定  $t^n$  的系数, 得

$$e^{2(t-t^{-1})/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \left[ \frac{(z/2)^n}{n} - \frac{(z/2)^{n+2}}{1(n+1)} + \cdots + (-1)^r \frac{(z/2)^{n+2r}}{r(n+r)} + \cdots \right] \quad (2.2)$$

方括号内正是  $n$  阶 Bessel 函数  $J_n(z)$ , 因此

$$e^{2(t-t^{-1})/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \quad (2.3)$$

作替换

$$t = ie^{i\theta}, \quad 1/t = -ie^{-i\theta}$$

得

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in(\theta+\pi/2)} J_n(z) \quad (2.4)$$

结合  $n$  等值异号的每对项, 利用

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\theta (i)^n J_n(z) \quad (2.5)$$

其中  $\varepsilon_n$  为 Jacobi 符号.

对一平面波, 令 (2.5) 中的  $z = kr$ , 得

$$e^{ikx} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\theta (i)^n J_n(kr) \quad (2.6)$$



### 附录三 矩形港池的源函数

现在我们来推导矩形港池的源函数  $G(x, y; y')$ . 它满足的 Helmholtz 方程和边界条件如下:

$$(\nabla^2 + k^2)G = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad y = 0, B; \quad 0 < x < L \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad x = L; \quad 0 < y < B \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \delta(y - y'), \quad x = 0; \quad 0 < y < B \quad (3.4)$$

因此,  $G$  代表在  $x = 0$  壁上  $y = y'$  处有单位点源时的源函数.

假定解具有如下形式

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cos n\pi y/B \quad (3.5)$$

显然它满足无流量条件 (3.2). 把 (3.5) 代入 (3.1), 得

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + K_n^2 \right) X_n(x) = 0 \quad (3.6)$$

其中

$$K_n^2 = k^2 - (n\pi/B)^2 \quad (3.7)$$

方程 (3.6) 的满足 (3.3) 的解为

$$X_n = A_n \cos K_n(x - L) \quad (3.8)$$

为了确定未知系数  $A_n$ , 先把 (3.8) 代入 (3.5), 利用边界条件 (3.4), 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n K_n \sin K_n L \cos n\pi y/B = \delta(y - y') \quad (3.9)$$

然后在 (3.9) 的两端乘以  $\cos(n\pi y/B)$ , 关于  $y$  从 0 积分到  $B$ , 利用正交性关系

$$\int_0^B \cos(n\pi y/B) \cos(m\pi y/B) dy = B\delta_{mn}/\varepsilon_n \quad (3.10)$$

其中  $\varepsilon_n$  为 Jacobi 符号

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.11)$$

就得到

$$A_n = \frac{\varepsilon_n}{BK_n \sin K_n L} \cos(n\pi y'/B) \quad (3.12)$$

最后得到源函数

$$G(x, y; y') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{BK_n \sin K_n L} \cos K_n(x - L) \cdot \cos n\pi y/B \cos n\pi y'/B \quad (3.13)$$





## 附录四 $\tilde{G}$ 级数的求和

要进行求和的级数是

$$\tilde{G} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n \quad (4.1)$$

其中

$$\tilde{G}_n = \tilde{X}_n(x)Y_n(y)Y_n(y_0) \quad (4.2)$$

$$\tilde{X}_n = -\frac{2}{n\pi}e^{-n\pi x/B} \quad (4.3)$$

$$Y_n = \cos n\pi y/B \quad (4.4)$$

令

$$\xi = \pi x/B, \quad \eta = \pi y/B, \quad \eta_0 = \pi y_0/B \quad (4.5)$$

利用三角恒等式

$$\begin{cases} Y_n(y)Y_n(y_0) &= \cos n\eta \cos n\eta_0 \\ &= \frac{1}{4}\{[e^{-jn(\eta-\eta_0)} + e^{-jn(\eta+\eta_0)}] + c.c.\} \end{cases} \quad (4.6)$$

其中 *c.c.* 表示前项之复共轭. 把 (4.6) 和 (4.3) 代入 (4.2), 得到

$$\tilde{G}_n = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{n}e^{-nZ_s} + \frac{1}{n}e^{-nZ'_s} \right] + c.c. \right\} \quad (4.7)$$

其中

$$Z_s = \xi + j(\eta - \eta_0), \quad Z'_s = \xi + j(\eta + \eta_0) \quad (4.8)$$

把 (4.7) 代入 (4.1), 得到四个无穷级数, 每个级数可用如下公式求和, 得到封闭形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{n} = -\ln(1 - e^{-s}) \quad (4.9)$$

从而得到结果

$$\begin{cases} \tilde{G} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \{ [\ln(1 - e^{-Z_s}) + \ln(1 - e^{-Z'_s})] + c.c. \} \end{cases} \quad (4.10)$$

或即

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi} \ln\{|1 - e^{-Z_s}|^2 |1 - e^{-Z'_s}|^2\} \quad (4.11)$$



## 附录五 一个积分的计算

Carrier(1970) 给出了如下结果

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma e^{-\sigma^2/4K^2}}{\sigma + i\gamma} = -(\operatorname{sgn}\gamma)i\pi e^{\gamma^2/4K^2} [1 - \operatorname{erf}(|\gamma|/2K)] \quad (5.1)$$

这可由周线积分求得 (Risser, 1976). 首先考虑  $\gamma > 0$  的情况, 并引进  $Z = \sigma + i\gamma$ , 从而有

$$J = \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} \frac{dZ}{Z} \exp[-(Z^2 - i2\gamma Z - \gamma^2)/4K^2] \quad (5.2)$$

现在极点在  $Z$  平面的原点, 而积分路径在实  $Z$  轴的上方. 根据 Cauchy 定理, 积分路径可替换成从原点上方绕过原点的实  $Z$  轴, 如图 5.1 所示.

现在把积分分成两部分: 主值积分  $J_\rho$  和沿半圆  $C_\varepsilon$  的积分  $J_\varepsilon$ ,

$$J_\rho = e^{\gamma^2/4K^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dZ}{Z} e^{-(Z^2 - i2\gamma Z)/4K^2} \quad (5.3)$$

$$J_\varepsilon = e^{\gamma^2/4K^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{d\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} = -i\pi e^{\gamma^2/4K^2} \quad (5.4)$$

用  $F$  表示 (5.3) 中的主值积分

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dZ}{Z} e^{-(Z^2 - i2\gamma Z)/4K^2} \quad (5.5)$$

显然

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \gamma} = \frac{i}{2K^2} \int_{-\infty}^{\infty} dZ e^{-(Z^2 - i2\gamma Z)/4K^2} = \frac{i}{2K^2} \int_{-\infty}^{\infty} dZ e^{-(Z - i\gamma)^2/4K^2} e^{-\gamma^2/4K^2} \\ = \frac{i}{2K^2} 2K\sqrt{\pi} e^{-\gamma^2/4K^2} = \frac{i\sqrt{\pi}}{K} e^{-\gamma^2/4K^2} \end{cases} \quad (5.6)$$

因为  $\gamma = 0$  时, (5.3) 中的被积函数是  $Z$  的奇函数, 故

$$F(\gamma = 0) = 0; \quad (5.7)$$

取 (5.6) 的积分, 得

$$\begin{cases} F = \frac{i\sqrt{\pi}}{K} \int_0^\gamma e^{-\gamma^2/4K^2} 4K^2 d\gamma \\ = i\pi \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma/2K} e^{-\sigma^2} d\sigma = i\pi \operatorname{erf}(\gamma/2K) \end{cases} \quad (5.8)$$

把  $J_\rho$  和  $J_\varepsilon$  加起来, 得到

$$J = J_\rho + J_\varepsilon = -i\pi e^{\gamma^2/4K^2} [1 - \operatorname{erf}(\gamma/2K)] \quad (5.9)$$

如果  $\gamma < 0$ , 记  $\gamma = -|\gamma|$ , 这相当于把 (5.1) 中的被积函数里的  $i$  换成  $-i$ , 因而结果等于把 (5.9) 的结果改变符号 (而  $\gamma$  变成  $|\gamma|$ ).

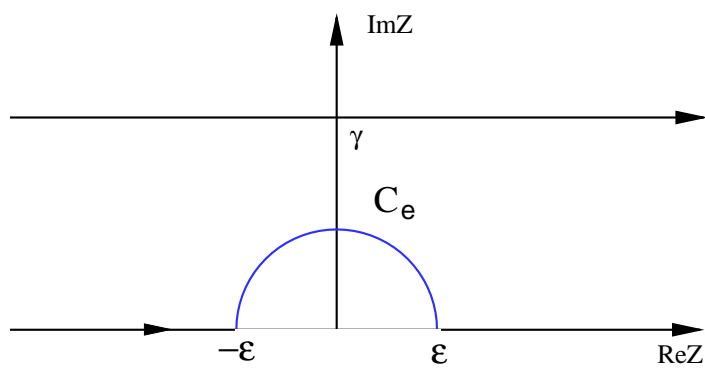


图 5.1: 积分路径

## 附录六 Fourier 级数的平方

我们重新排列下面的乘积

$$\begin{aligned} (\sum)^2 &= \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{il\theta} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\theta} \right) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} A_l A_m e^{(l+m)\theta}, \quad A_0 = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

令  $n = l + m$ , 于是

$$(\sum)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l A_{n-l} \quad (6.2)$$

考虑对  $l$  求和的级数, 利用  $A_0 = 0$  这一事实

$$\begin{aligned} \sum_l &\equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l A_{n-l} = \sum_{l=-\infty}^{-1} A_l A_{n-l} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n-1} A_l A_{n-l} + \sum_{l=n}^{\infty} A_l A_{n-l} \end{aligned} \quad (6.3)$$

在第一个级数中, 我们把  $l$  变为  $-l'$ , 在最后一个级数中, 把  $n-l$  变为  $-l'$ , 两个级数相加, 得出

$$\sum_{l=-\infty}^{-1} A_l A_{n-l} + \sum_{l=n}^{\infty} A_l A_{n-l} = 2 \sum_{l=1}^{\infty} A_{-l} A_{n+l} \quad (6.4)$$

(6.3) 中的第二个级数可依  $n$  的奇偶加以改写. 如果  $n = 2p =$  偶数

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2p-1} A_l A_{2p-l} &= A_1 A_{2p-1} + A_2 A_{2p-2} + \cdots + A_p A_p \\ &\quad + \cdots + A_{2p-2} A_2 + A_{2p-1} A_1 \end{aligned}$$

除了  $A_p A_p$  以外, 上面的项可以成对相加 (例如第一项和最后一项等等), 因此

$$\sum_{l=1}^p \alpha_l A_l A_{2p-l} = \sum_{l=1}^{n/2} \alpha_l A_l A_{n-l} \quad (6.5)$$

其中  $\alpha_l$  定义为

$$\begin{aligned} \alpha_l &= 2, \quad l = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ \alpha_l &= 1, \quad l = \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (6.6)$$

如果  $n = 2p + 1 =$  奇数, 于是

$$\sum_{l=1}^p 2p A_l A_{2p-l} = A_1 A_{2p} + A_2 A_{2p-1} + \cdots + A_p A_{p+1} + A_{p+1} A_p$$

$$+\cdots + A_{2p}A_1 = \sum_{l=1}^p 2A_l A_{2p+1-l} = \sum_{l=1}^{(n-1)/2} \alpha_l A_l A_{n-l} \quad (6.7)$$

我们可把这两种情况写作一个级数, 因此式 (6.3) 右端的第二个级数变为

$$\sum_{l=1}^{l'} \alpha_l A_l A_{n-l} \quad (6.8)$$

其中  $\sum'$  的上限是  $\frac{n}{2}$ , 如果  $n$  为偶数.  
 $(n-1)/2$ , 如果  $n$  为奇数.

最后, 把 (6.4), (6.8) 代入 (6.2), 可得

$$(\sum)^2 = \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} A_{-l}A_l + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} \left[ \sum_{l=1}^{l'} \alpha_l A_l A_{n-l} + \sum_{l=1}^{\infty} 2A_{-l}A_{n+l} \right] \right\} + c.c \quad (6.9)$$