

エネルギー原理およびSQPによるトラス構造物の 材料非線形解析法に関する研究

ANALYSIS OF TRUSSES WITH NONLINEAR MATERIALS BY USING ENERGY PRINCIPLES AND SEQUENTIAL QUADRATIC PROGRAMMING

大久保禎二*・和多田康男**

By Sadaji OHKUBO and Yasuo WATADA

New analytical methods for trusses with nonlinear materials are presented by using energy principles and sequential quadratic programming (SQP) algorithms. The analytical problem of nonlinear truss is formulated as the total potential or complementary energy minimization problem and minimized with respect to the displacements of panel points or member forces respectively by using modified SQP algorithms. The formulations of the energy methods are quite simple and the methods can be applicable for any types of nonlinear material problems. Computational results for 3~31 bar statically indeterminate trusses with several types of nonlinear materials show that convergency and reliability of the method based on the complementary energy minimization is most excellent and the final results of nonlinear truss analyses can be obtained less than 2/3~1/3 of computational efforts compared with the incremental load method.

Keywords: nonlinear analysis, truss, material nonlinearity, energy principles, sequential quadratic programming

1. 緒 言

静荷重を受ける構造物の非線形解析法には(1)材料の応力-ひずみ関係の非線形性を考慮した構造解析法、(2)幾何学的非線形性を考慮した構造解析法、および(3)これらの両者をともに考慮した複合非線形解析法がある。

材料の非線形性を考慮した解析法としては、これまでに主として増分法や反復法に基礎を置く方法が提案されている。また、変形の影響による幾何形状の非線形性を考慮する方法として、幾何剛性マトリックスを用い、変形を変形前の初期形状を参照して表現するLagrange形式による方法、参照形状を変形に応じて更新する移動Lagrange形式による方法などが提案されている^{1)~4)}。これらの方法は、各反復計算過程において、剛性マトリックスを修正しながら構造解析を繰り返し行うことにより解を収束させ、非線形構造解析を行うものであり、このような方法の定式化と計算方法に関する従来の研究の概要については、たとえばStricklinおよびHaislerによ

り文献4)においてまとめられている。

また、Maier⁵⁾、Donato⁶⁾らは、区分線形化された非線形材料を有する構造物の解析方程式をつり合い条件、適合条件、材料の塑性条件および降伏条件を考慮して、線形連立方程式として導入するとともに、この連立方程式は、区分線形化された材料を有する構造物の二次形式で表現される全ポテンシャルエネルギーあるいは全コンプリメンタリーエネルギーの極値問題として導入される連立方程式と一致することを示している。また、佐藤・香月・石川はこの方法を応用して埋設管路⁷⁾等の弾塑性解析を行った例を発表している。

一方、エネルギー最小化に基づく構造物の解析法としては、1965~69年に、Schmit, Bogner, Mallett, Fox, Stantonらにより構造系の全ポテンシャルエネルギーを最急降下法、共役勾配法、可変計量法などを用いて最小化することにより構造物の解析を行う方法について研究がなされている^{8)~12)}。また、有限要素の全ポテンシャルエネルギーの変分によりつり合い条件式を非線形連立方程式として導入し、これを解くことにより連続体の非線形弾性解析を行う方法についてはOdenの著書¹³⁾において述べられている。また、古典的な解法として、山崎・太田・石川¹⁴⁾はコンプリメンタリーエネルギーの停留条件を用いて導入した弾塑性たわみ角式により、曲げを受

* 正会員 工博 愛媛大学教授 工学部土木工学科
(〒790 松山市文京町3番)

** 正会員 工修 宇部興産(株)
(〒755 宇部市西本町1丁目)

けるはり部材よりなる構造物の弾塑性解析法に関する研究を行っている。

ところで、本研究ではエネルギー原理に基づく非線形構造解析法に関する基礎的研究として、材料の非線形性を考慮し、構造物の全ポテンシャルエネルギーあるいは全コンプリメンタリーエネルギーを逐次二次計画法 (SQP) により直接最小化することによってトラス構造物の解析を行う方法について述べ、種々の応力-ひずみ関係を有する材料よりなる 3~31 部材の不静定トラスを解析し、それぞれの解法のアルゴリズム、計算効率、信頼性などの特性を明らかにするとともに、荷重増分法による結果との比較を行い、本研究で提案している方法の有効性について検討を行ったものである。

2. エネルギー原理に基づくトラス構造物の解析法の定式化

エネルギー原理^{たとえは15),16)}には最小ポテンシャルエネルギーの原理および最小コンプリメンタリーエネルギーの原理があるが、本研究ではこれらの2つの原理に着目し、構造物の全ポテンシャルエネルギーあるいは全コンプリメンタリーエネルギーをSQPを用いて最小化することによりトラス構造物の解析を行った。なお本研究では、トラス構造物の解析において、変形による幾何学的な非線形性や座屈の影響は考慮しないものとした。

(1) トラス構造物の全ポテンシャルエネルギーおよび全コンプリメンタリーエネルギー

いま図-1に示すような応力-ひずみ関係を有する材料を考えると、応力 σ はひずみ ϵ の関数として、またひずみ ϵ は応力 σ の関数としてそれぞれ次のように与えられる。

$$\sigma = \sigma(\epsilon), \quad \epsilon = \epsilon(\sigma) \dots\dots\dots (1)$$

このような材料よりなる断面一樣なトラス部材 (図-2) のひずみエネルギー α およびコンプリメンタリーエネルギー β は次式で表わされる。

$$\alpha(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma(\epsilon) V d\epsilon \dots\dots\dots (2)$$

$$\beta(\sigma) = \int_0^\sigma \epsilon(\sigma) V d\sigma \dots\dots\dots (3)$$

あるいは

$$\alpha(\delta) = \int_0^\sigma \sigma(\delta) V d\delta \dots\dots\dots (4)$$

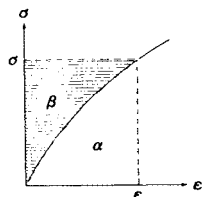


図-1 非線形応力-ひずみ関係

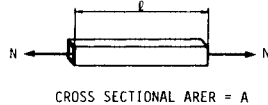


図-2 トラスの部材要素

$$\beta(N) = \int_0^N \epsilon(N) V dN \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\delta = \epsilon l$, $N = \sigma A$, $V = A l$

上式の α および β は、応力-ひずみ関係が直線あるいは折線で表わされる場合には δ あるいは N の二次関数として表現できるが、図-1のような非線形連続関数で表わされる場合には高次の非線形関数となる。

n 個の部材からなるトラス構造物の全ポテンシャルエネルギー Π_p は、式 (4) で表わされる各部材のひずみエネルギー α をすべての部材について加え合わせ、さらに可動節点に作用する外力のポテンシャルエネルギーを加えることにより次式より求められる。

$$\Pi_p(\delta, u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\delta_i) - P^T u \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_n]^T$; 部材の伸び

$u = [u_1, \dots, u_m]^T$; 可動節点変位 (自由度)

$P = [P_1, \dots, P_m]^T$; 外力ベクトル

n : 部材数, m : 自由度の数

また、トラス構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c は、式 (5) で表わされる各部材のコンプリメンタリーエネルギー β を、すべての部材について加え合わせるにより次式より求められる。

$$\Pi_c(N) = \sum_{i=1}^n \beta_i(N_i) \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $N = [N_1, \dots, N_n]^T$

トラス構造物の各部材要素に使用する材料が異なる場合には、式 (6) および式 (7) の $\alpha_i(\delta_i)$ および $\beta_i(N_i)$ として、各部材に使用する材料の応力-ひずみ関係に対応した関数を用いなければならない。

(2) ポテンシャルエネルギー最小化による解析法の定式化

最小ポテンシャルエネルギーの原理をトラス構造物に適用すれば、部材の伸び δ および可動節点変位 u を未知変数として、変位の適合条件式のもとで全ポテンシャルエネルギーを最小にする δ および u が真の解 δ^* および u^* となる。したがって、 δ^* および u^* を決定する問題は次のような非線形最小化問題として定式化することができる。

$$\begin{aligned} &\text{find} && \delta, u, \text{ such that} \\ &\text{minimize} && \Pi_p(\delta, u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\delta_i) - P^T u \dots\dots\dots (8) \\ &\text{subject to} && \delta = C^T u \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 $C^T (n \times m)$ は u の δ 方向への変換マトリックスである。

上式で表わされる最小化問題は未知変数として δ および u を含むが、適合条件式 (9) により δ を u で表わし、これを式 (8) に代入することにより、未知変数として u のみを含む次のような無制約最小化問題に変

換することができる。

$$\begin{aligned} &\text{find } \mathbf{u}, \text{ such that} \\ &\text{minimize } \Pi_p(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\mathbf{u}) - \mathbf{P}^T \mathbf{u} \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

本研究では、式(10)の無制約最小化問題を解くことによりトラス構造物の非線形構造解析を行った。

(3) コンプリメンタリーエネルギー最小化による解析法の定式化

一方、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理をトラス構造物に適用すれば、軸力 N を未知変数として可動節点における力のつり合い条件式のもとで、全コンプリメンタリーエネルギーを最小にする軸力 N が真の解 N^* となる。したがって、トラス構造物の軸力 N^* を決定する問題は、次のような非線形最小化問題として定式化することができる。

$$\begin{aligned} &\text{find } N, \text{ such that} \\ &\text{minimize } \Pi_c(N) = \sum_{i=1}^n \beta_i(N_i) \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

$$\text{subject to } \mathbf{g} = \mathbf{P} - \mathbf{C}\mathbf{N} = 0 \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1(N), \dots, \mathbf{g}_m(N)]^T$ は各可動節点における力のつり合い方程式、 $\mathbf{C}(m \times n)$ は N の \mathbf{P} 方向への変換マトリックスである。

式(10)あるいは式(11)~(12)で表わされる非線形最小化問題を解く方法として種々の非線形計画法の適用が考えられるが、式(12)の制約条件が変数の一次式であり、かつ式(10)および(11)の目的関数が、応力-ひずみ関係が直線あるいは折線で表わされる場合には、 \mathbf{u} あるいは N の二次関数となること、および、著者らのこれまでの非線形計画法に関する研究から、その信頼性、収束性、計算効率などの優秀性が明らかとなっている逐次二次計画法(SQP)を適用することとした。

3. エネルギー最小化問題のSQPによる解法

(1) SQPの概要^{17)~20)}

SQP(逐次二次計画法)は、非線形計画問題の目的関数を二次形式に、また制約条件を一次形式に近似し近似二次計画問題を導入する。これを勾配射影法²¹⁾などにより解き改良解を求める。次に目的関数の二次の項の係数マトリックスをBFGS公式²¹⁾などにより修正し、改良解に対する新たな近似二次計画問題を作成する。このようにして逐次、近似二次計画問題を作成し、解の改良を繰り返すことにより最適解を決定する手法である。

(2) 全ポテンシャルエネルギー最小化問題の解法

a) $\Pi_p(\mathbf{u})$ の二次形式近似

全ポテンシャルエネルギー最小化問題(式(10))は目的関数 Π_p のみで表わされるので、これを変位 \mathbf{u} に関してTaylor展開し二次近似することにより、 k th stageにおける変位 \mathbf{u}^k の改良のための変化量 $\Delta \mathbf{u}^k$ に関する次

のような無制約の最小化問題を導入することができる。

$$\begin{aligned} &\text{find } \Delta \mathbf{u}^k, \text{ such that} \\ &\text{minimize } Q_p^k = \nabla \Pi_p^{kT} \Delta \mathbf{u}^k + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^{kT} \mathbf{H}_p^k \Delta \mathbf{u}^k \dots\dots(13) \end{aligned}$$

ここに、 $\Delta \mathbf{u}^k = [\Delta u_1^k, \dots, \Delta u_m^k]^T$

$$\nabla \Pi_p^k = \left[\frac{\partial \Pi_p}{\partial u_1^k}, \dots, \frac{\partial \Pi_p}{\partial u_m^k} \right]^T$$

\mathbf{H}_p^k : 正定値係数行列であり、BFGS公式により改良する。

上記の全ポテンシャルエネルギーの偏微係数 $\nabla \Pi_p$ の各要素 $\partial \Pi_p / \partial u_i$ は、 \mathbf{u}_i の微小変化により影響を受ける項が \mathbf{u}_i の節点に接続している部材 S_i のみであるので、次式により計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_p}{\partial u_i^k} &= \sum_{j \in S_i} \frac{\partial \Pi_p}{\partial \delta_j^k} \frac{\partial \delta_j^k}{\partial u_i^k} - P_i \\ &= \sum_{j \in S_i} C_j A_j \sigma(\delta_j^k) - P_i \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

ここに、 S_i : 変位 u_i の節点に接続している部材の集合

P_i : 変位 u_i の節点の u_i 方向に作用する外力

b) 改良のための変化量 $\Delta \mathbf{u}^k$ の決定

式(13)の無制約最小化問題において、 Q_p の最小点までの変化量 $\Delta \mathbf{u}^k$ は改良方向 $\mathbf{d}^k = -\nabla \Pi_p^k$ を用いて次式より求められる。

$$\Delta \mathbf{u}^k = -\frac{\nabla \Pi_p^{kT} \mathbf{d}^k}{\mathbf{d}^{kT} \mathbf{H}_p^k \mathbf{d}^k} \mathbf{d}^k \dots\dots\dots(15)$$

c) 無制約最小化問題の修正

b)で求めた $\Delta \mathbf{u}^k$ を用いて変位 \mathbf{u} を次式により改良する。

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta \mathbf{u}^k \dots\dots\dots(16)$$

改良された \mathbf{u}^{k+1} を新たな初期値として式(14)により $\nabla \Pi_p$ を計算し、新しい無制約最小化問題(式(13))を作成する。この場合、式(13)における $\Delta \mathbf{u}^k$ に関する二次の係数行列 \mathbf{H}_p は次のBFGS公式により修正する。

$$\mathbf{H}_p^{k+1} = \mathbf{H}_p^k - \frac{\mathbf{H}_p^k \Delta \mathbf{u}^k \Delta \mathbf{u}^{kT} \mathbf{H}_p^k}{\Delta \mathbf{u}^{kT} \mathbf{H}_p^k \Delta \mathbf{u}^k} + \frac{\eta \eta^T}{\Delta \mathbf{u}^{kT} \eta} \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k$

$$\eta = \nabla \Pi_p^{k+1} - \nabla \Pi_p^k$$

このようにして、 \mathbf{u}^k が一定値に収束するまで改良を繰り返すことにより最終的な真の変位 \mathbf{u}^* を決定することができる。 \mathbf{u}^* が求められれば、各部材の伸び δ^* は式(9)より求められ、この δ^* および式(1)を用いて各部材に作用する応力および軸力を計算することができる。

上記の方法によりトラス構造物の材料非線形解析を行う方法の概略的な流れ図を図-3に示す。

(3) SQPによる全コンプリメンタリーエネルギーの最小化

a) 近似二次計画問題の導入

全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題(式(11)、(12))では、目的関数 Π_c は軸力 N の非線形関数であるので、 N についてTaylor展開し ΔN の二次形式で近

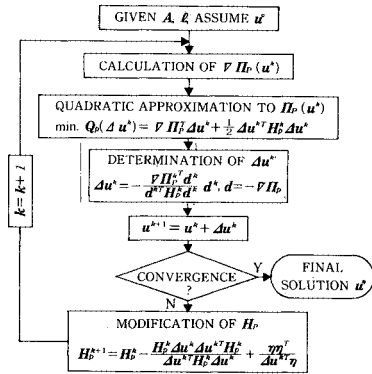


図-3 ポテンシャルエネルギー最小化による構造解析法の流れ図

似するとともに、式 (12) の制約条件を ΔN の一次関数として表現することにより、 k th stage における軸力 N^k の改良のための変化量 ΔN^k を決定する近似二次計画問題を次のように導入することができる。

$$\begin{aligned} &\text{find } \Delta N^k, \text{ such that} \\ &\text{minimize } Q_c^k = \nabla \Pi_c^{kT} \Delta N^k + \frac{1}{2} \Delta N^{kT} H_c^k \Delta N^k \quad (18) \\ &\text{subject to } g_j^k = g_j(N^k) - C_j \Delta N^k = 0 \\ &\quad (j=1, \dots, m) \quad (19) \end{aligned}$$

ここに、 $\Delta N^k = [\Delta N_1^k, \dots, \Delta N_n^k]^T$

$$\nabla \Pi_c^k = \left[\frac{\partial \Pi_c}{\partial N_1^k}, \dots, \frac{\partial \Pi_c}{\partial N_n^k} \right]^T$$

H_c^k : 正定値係数行列であり、BFGS 公式により改良する。

$$C_j = [C_{j1}, \dots, C_{jn}] \quad (j=1, \dots, m)$$

上記の全コンプリメンタリーエネルギーの偏微係数 $\nabla \Pi_c$ の計算において、 N_i の微小変化 ΔN_i により影響を受ける項が部材 i のコンプリメンタリーエネルギー β_i のみであるので、 $\nabla \Pi_c$ の各要素 $\partial \Pi_c / \partial N_i$ は次式により簡単に計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_c}{\partial N_i^k} &\doteq \frac{\Pi_c(N_1^k, \dots, N_i^k + \Delta N_i, \dots, N_n^k) - \Pi_c(N^k)}{\Delta N_i} \\ &\doteq \frac{\beta_i(N_i + \Delta N_i) - \beta_i(N_i)}{\Delta N_i} \doteq \frac{1}{\Delta N_i} \Delta \sigma_i \varepsilon_i A_i l_i = \varepsilon_i l_i \quad (20) \end{aligned}$$

ところで、一般の非線形計画問題では制約条件が不等式 ($g_j \leq 0$) で表わされるのに対して、式 (18), (19) の最小化問題ではすべての制約条件が等式 ($g_j = 0$) であるので、すべて active な制約条件として考慮しなければならない。このような等号制約問題に対して、本研究では以下のようにしてすべての制約条件を満足するような N^k の初期値を決定するとともに、すべての等号制約条件面上で N^k の改良を行った。

b) 初期許容解 (ΔN_0^k) の決定

本研究では、式 (19) の等号線形制約条件をすべて満足する ΔN^k の初期値を LP (線形計画法) の手法を用いて次のように決定した。

まず、式 (18), (19) の近似二次計画問題において、目的関数を ΔN^k に関する一次の項のみで表わし、次のような LP 問題を導入する。

$$\begin{aligned} &\text{find } \Delta N^k, \text{ such that} \\ &\text{minimize } \nabla \Pi_c^{kT} \Delta N^k \quad (21) \\ &\text{subject to } g_j^k = g_j(N^k) - C_j \Delta N^k = 0 \\ &\quad (j=1, \dots, m) \quad (22) \end{aligned}$$

この LP 問題に対して $\Delta N_i (i=1, 2, \dots, n)$ を次のように定義し、

$$\Delta N_i = \Delta N_i^+ - \Delta N_i^- \quad (23)$$

$$\Delta N_i^+ \geq 0, \Delta N_i^- \geq 0 \quad (24)$$

各等号制約条件に対して、実変数 ΔN_i^+ および ΔN_i^- のみを有し、スラック変数を有しないシンプレックス表を作成し、違反度の大きな制約条件から順次制約条件を満足するとともに Q_c^k を最大に減少あるいは最小に増加させるような ΔN_i^+ あるいは ΔN_i^- に対してピボット操作を行う。この場合、ピボット要素の行 r および列 s は次の規準に従って決定した。

行 r の決定

$$g_r = \max. \|g_i\| \quad |j=1, \dots, m| \quad (25)$$

列 s の決定

if $g_r > 0$

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial N_s} = \min. \left\{ \frac{\partial \Pi_c}{\partial N_i} \left| \frac{C_{ri}}{C_{rs}} \right. \quad C_{ri} > 0, i=1, \dots, 2n \right\}$$

if $g_r < 0$

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial N_s} = \max. \left\{ \frac{\partial \Pi_c}{\partial N_i} \left| \frac{C_{ri}}{C_{rs}} \right. \quad C_{ri} < 0, i=1, \dots, 2n \right\} \quad (26)$$

違反しているすべての制約条件について上記のピボット操作を行うことにより、すべての等号制約条件を満足する初期許容解 ΔN_0^k を決定することができる。

c) 改良のための変化量 ΔN^k の決定

b) で述べたピボット操作によりすべての制約条件を満足する初期許容解 ΔN_0^k が決定されると、式 (18) の等号制約条件面に沿った改良方向 d は目的関数 Π_c の最急減少勾配 $-\nabla \Pi_c$ を次式によりすべての等号制約条件面上に射影することにより決定される。

$$d^k = -P_r \cdot \nabla \Pi_c^k \quad (27)$$

$$P_r = I - C^T(C \cdot C)^{-1}C \quad (28)$$

ただし、 $I(n \times n)$ は単位行列である。

式 (28) において、変換マトリックス C が一定であり、かつすべての制約条件が常に active であるので、 P_r は N の反復改良の各 stage において修正する必要はない。

また、改良方向 d^k に沿っての ΔN の改良幅 a^k は、二次近似された目的関数 Q_c の最小点までのステップ幅として次式で与えられる。

$$a^k = -\frac{\nabla Q_c^T d^k}{d^{kT} H_c^k d^k} \dots\dots\dots (29)$$

したがって、 N の変化量 ΔN^k は次式で与えられる。

$$\Delta N^k = \Delta N_0^k + a^k d^k \dots\dots\dots (30)$$

d) 近似二次計画問題の修正

c) で求めた ΔN^k を用いて、軸力 N を次式により改良する。

$$N^{k+1} = N^k + \Delta N^k \dots\dots\dots (31)$$

上記の N^{k+1} を新たな初期値として式 (19)、式 (20) により $g_j(N)$ および $\nabla \Pi_c$ をそれぞれ修正し、 N^{k+1} に対する新たな近似二次計画問題を作成する。この場合、式 (18) の二次の係数行列 H_c は式 (18)、(19) の最小化問題のラグランジュ関数

$$L(N^k, \lambda^k) = \Pi_c(N^k) + \lambda^k g(N^k)^T \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $\lambda^k = -\nabla Q_c(\Delta N^k) C^T (CC^T)^{-1}$

の N に関する二次の偏微係数行列の近似とし、次の BFGS 公式を用いて修正する。

$$H_c^{k+1} = H_c^k - \frac{H_c^k \Delta N^k \Delta N^{kT} H_c^k}{\Delta N^{kT} H_c^k \Delta N^k} + \frac{\eta \eta^T}{\Delta N^{kT} \eta} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 $\Delta N^k = N^{k+1} - N^k$

$$\eta = \nabla_N L(N^{k+1}, \lambda^k) - \nabla_N L(N^k, \lambda^k)$$

ただし、 ∇_N は N に関する偏微係数を表す。本研究では、式 (19) が線形等号制約条件であり常に active、すなわち $g_i = 0 (i=1, \dots, n)$ となるので、式 (32) のラグランジュ関数は目的関数そのものとなる。このようにして N が一定値に収束するまで改良を繰り返すことにより最終的な真の軸力 N^* を決定することができる。

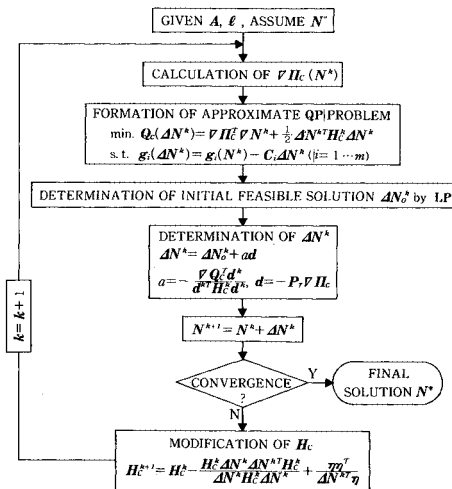


図-4 コンプリメンタリーエネルギー最小化による構造解析法の流れ図

軸力 N^* が求められれば、各可動節点の変位 u^* は、 N^* を用いて式 (1) より計算した各部材の伸び δ^* を式 (9) に代入し、この式を u について解くことにより求めることができる。

上記の方法によりトラス構造物の材料非線形解析を行う方法の概略的な流れ図を図-4 に示す。

4. 解析例

これまで 2. および 3. で述べたエネルギー原理によるトラス構造物の材料の非線形性を考慮した解析法の信頼性、収束性、計算効率などを検討するため、解析モデル

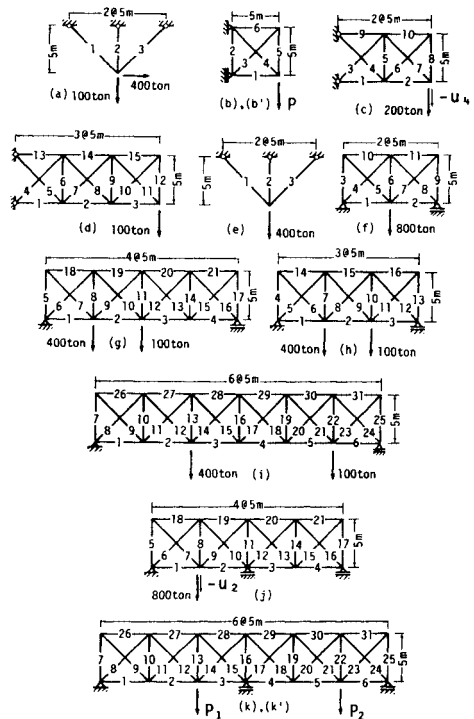


図-5 不静定トラスの解析モデル ((b) : $P=200$ t, (b') : $P=400$ t, (k) : $P_1=400$ t, $P_2=100$ t, (k') : $P_1=800$ t, $P_2=200$ t)

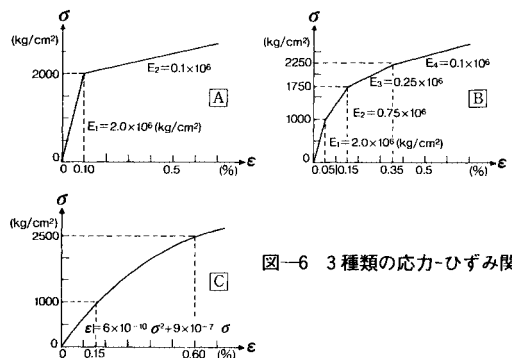


図-6 3種類の応力-ひずみ関係

として図-5に示す3~31部材を有する不静定トラスを考慮し、図-6に示すような応力-ひずみ関係を有する3種類の材料A, B, Cについて解析を行うとともに、荷重増分法との比較を行った。

本章ではこれらの解析例のうち、10部材片持ちトラスおよび21部材2径間連続トラスの解析結果について詳述し、全体的な傾向については次章でまとめることとする。これらの解析モデルにおいて、トラス部材の断面積はすべて100.0 cm²とし、 u および N の初期値は、弾性係数 $E=2.0 \times 10^6$ kg/cm² として線形構造解析を行って得られる解と同符号で同程度のオーダーの適当な数値を仮定した。また、ポテンシャルエネルギー最小化による方法およびコンプリメンタリーエネルギー最小化による方法においては、近似二次計画問題を作成した回数を反復計算回数とし、収束判定規準として、目的関数すなわちトラス構造物の全エネルギーの変化量が1/10000以下で、かつ変位または軸力の変化量が1/1000以下となった時点で解が収束したものと判定した。なお、荷重増分法においては変位法により構造解析を行った回数を反復計算回数としている。

荷重増分法²²⁾では、与えられた荷重を微小な増分荷重に分割し、各増分荷重に対して各部材の応力状態に応じた弾性係数を仮定し、変位法により通常の線形構造解析を行い、軸力および弾性係数を修正しながら軸力が一定値に収束するまで反復解析を行い、各増分荷重ごとに得られた変位および軸力を累加することによって最終的な解を求めている。したがって、最終的な解を得るために必要となる反復解析回数は荷重の分割数に大きく影響され、できるだけ少ない分割数で解を求めることが望まし

い。しかし、荷重の増分量を大きくとりすぎると解が収束しなくなる。そこで本研究では、応力-ひずみ関係が折れ線で表わされる材料AおよびBについては、いずれかの部材の弾性係数が変化する応力増分を与える増分荷重をスケールリングすることによって求めている。また、材料Cにおいては分割数を種々変化させて解析を行い、その中で計算結果の精度が十分であり、かつ最も反復計算回数の少ない解析結果を採用している。

(1) 10部材片持ちトラス

図-5(c)に示す10部材片持ちトラスを、ポテンシャルエネルギー最小化による方法およびコンプリメンタリーエネルギー最小化による方法により、図-6に示す3種類の材料A, B, Cについて解析を行った場合の収束過程をそれぞれ図-7(a), (b), (c)に、解析結果、反復計算回数および計算時間を表-1に示す。

ポテンシャルエネルギー最小化による方法では、最終的な解を得るまでに要した反復計算回数および計算時間は材料によって大きく異なり、材料Aで325回・2.08秒、材料Bで275回・1.89秒、材料Cで117回・1.19秒と、応力-ひずみ関係の勾配の変化がスムーズであるほど少なくなっている。また、ポテンシャルエネルギー最小化による方法では、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法における式(22)のつり合い条件式などのような制約条件を有しないため、その収束状況は非常に緩慢であり、最終的に得られた解の精度は、荷重増分法により得られた結果と比較して、作用軸力が他の部材に比べて非常に小さい部材5を除き、最大4.2%、最小0.0%、平均0.7%程度の誤差が認められる。

一方、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方

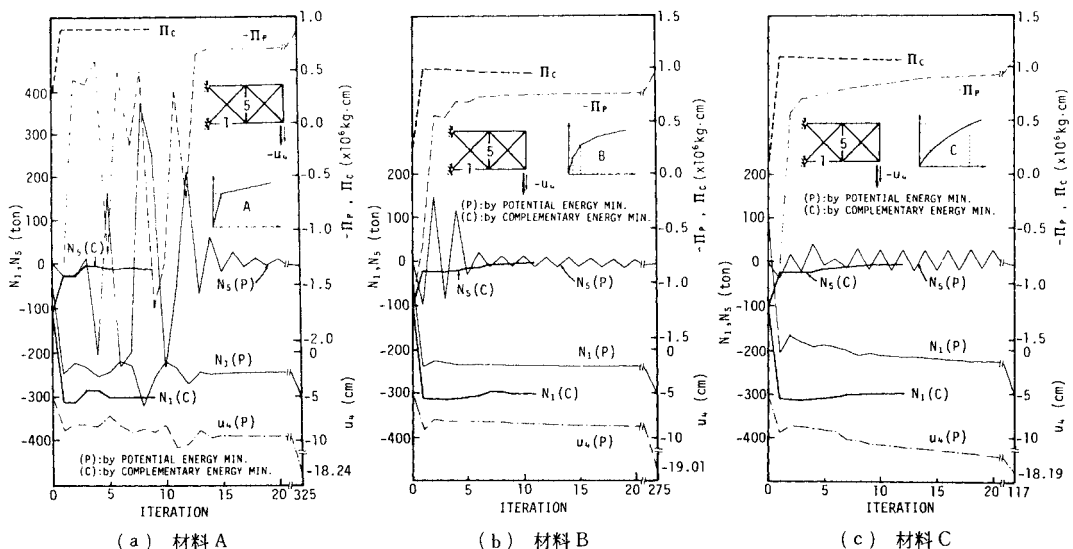


図-7 10部材片持ちトラスの収束過程

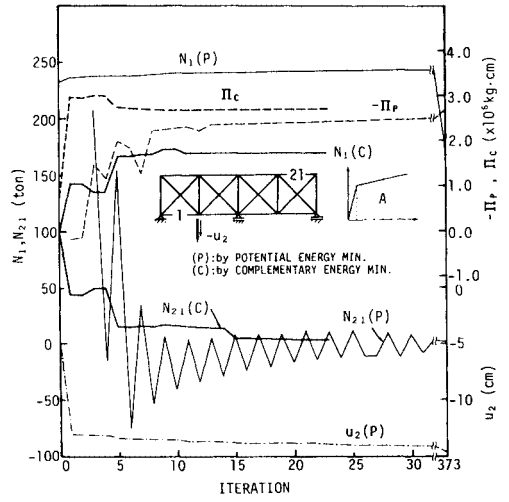
表-1 10部材持ちトラスの解析結果 表-2 21部材2径間連続トラスの解析結果

材 料 番 号	軸力 (×10 ³ kg)			材 料 番 号	軸力 (×10 ³ kg)				
	P ¹⁾	C ²⁾	L ³⁾		P ¹⁾	C ²⁾	L ³⁾		
A	1	300.0	-299.6	-299.8	A	1	169.8	171.3	171.2
	2	110.1	-111.3	-110.4		2	152.1	153.3	153.4
	3	147.7	-142.0	-141.7		6	-242.3	-242.2	-242.1
	4	138.7	140.9	141.1		7	303.5	303.3	303.4
	5	-6.2	-11.9	-10.2		8	353.3	353.0	353.2
	6	-126.6	-124.1	-126.7		9	328.7	328.7	328.5
	7	157.9	158.7	156.1		11	-204.9	-205.7	-204.8
	8	90.7	87.8	89.6		18	-214.7	-214.6	-214.5
	9	299.4	300.4	300.2		19	-203.9	-204.1	-203.7
	10	88.3	87.8	89.6		21	2.7	2.9	2.8
ENE ⁴⁾ -8774. 8776. 8776.				ENE ⁴⁾ -26823. 26823. 26818.					
ITE ⁵⁾ 325 9 9				ITE ⁵⁾ 373 23 25					
CPU ⁶⁾ 2.08 0.34 0.26				CPU ⁶⁾ 8.72 1.09 1.17					
B	1	-300.4	-300.3	-299.9	B	1	168.1	168.7	168.6
	2	-105.0	-104.5	-104.8		2	145.9	146.5	146.4
	3	-145.3	-140.9	-141.5		6	-238.7	-238.5	-238.5
	4	141.0	141.9	141.3		7	298.9	298.7	298.7
	5	-3.0	-4.9	-4.7		8	355.4	355.4	355.3
	6	-135.6	-135.0	-134.6		9	330.4	330.1	330.2
	7	149.7	147.8	148.2		11	-192.3	-192.2	-192.2
	8	95.7	95.5	95.2		18	-211.6	-211.7	-211.2
	9	299.4	299.7	300.1		19	-193.7	-193.2	-193.2
	10	93.9	95.5	95.2		21	3.8	3.8	3.7
ENE ⁴⁾ -9670. 9674. 9672.				ENE ⁴⁾ -30395. 30392. 30396.					
ITE ⁵⁾ 275 11 25				ITE ⁵⁾ 419 30 60					
CPU ⁶⁾ 1.89 0.26 0.54				CPU ⁶⁾ 10.03 1.46 2.60					
C	1	-300.0	-299.7	-299.7	C	1	156.9	158.2	158.2
	2	-106.8	-107.3	-106.9		2	122.7	123.7	123.7
	3	-142.8	-141.9	-141.8		6	-224.4	-223.7	-223.7
	4	141.3	141.0	141.1		7	288.7	288.5	288.5
	5	-6.6	-7.0	-6.6		8	357.9	357.6	357.5
	6	-131.8	-131.2	-131.7		9	337.2	337.2	337.3
	7	151.0	151.7	151.1		11	-216.4	-216.4	-216.4
	8	93.2	92.7	93.1		18	-204.0	-204.0	-204.0
	9	299.6	300.3	300.3		19	-163.1	-162.7	-162.8
	10	92.6	92.7	93.1		21	13.1	13.3	13.2
ENE ⁴⁾ -14544. 14545. 14544.				ENE ⁴⁾ -40341. 40340. 40342.					
ITE ⁵⁾ 117 12 24				ITE ⁵⁾ 131 18 26					
CPU ⁶⁾ 1.19 0.27 0.51				CPU ⁶⁾ 4.57 0.97 1.21					

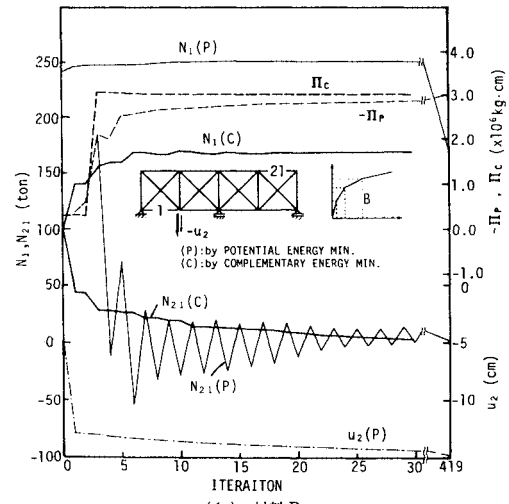
1) : ポテンシャルエネルギー最小化による方法
 2) : コンプレメンタリエネルギー最小化による方法 3) : 荷重増分法
 4) : エネルギー (×10⁷ kg·cm) 5) : 反復計算回数 (回)
 6) : FACOM M180 II ADによる計算時間 (sec)

法では、最終的な解を得るまでに要した反復計算回数および計算時間は、材料 A, B, C に対してそれぞれ 9 回・0.34 秒, 11 回・0.26 秒, 12 回・0.27 秒であり、ポテンシャルエネルギー最小化による方法と比較して反復計算回数はきわめて少なく、かつ計算時間も 1/7 程度で最終的な解を得ており、材料の種類による計算時間等の差もほとんど認められない。特に、3.(3) b) で述べたように、この方法では LP の手法を用いてすべてのつり合い条件式 (式 (22)) を満足する初期許容解を決定したうえで、つり合い条件式の制約面上で軸力の改良を行うため、反復計算 1 回当たりの計算量はポテンシャルエネルギー最小化による方法よりも多く必要となるが、その収束状況はきわめて良好であり、仮定した軸力の初期値に影響されることなく、数回の反復計算で最終的な解の近傍に達し、10 回程度の反復計算で収束している。最終的に得られた解は、つり合い条件式を完全に満足しており、荷重増分法により得られた結果と比較して、部材 5 を除き最大 2.0 %、最小 0.0 %、平均 0.5 % の誤差が認められる。また、計算時間は、荷重増分法と比較して材料 A では、1.3 倍と多く要しているが、材料 B および C ではそれぞれ 0.48 倍および 0.53 倍と 1/2 程度の計算時間で最終的な解を得ている。

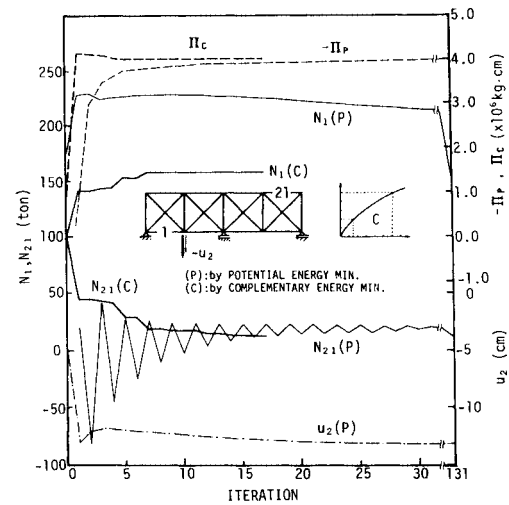
(2) 21 部材 2 径間連続トラス



(a) 材料 A



(b) 材料 B



(c) 材料 C

図-8 21 部材 2 径間連続トラスの収束過程

図-5(j) に示す 21 部材 2 径間連続トラスを上記の 3 種類の材料 A, B, C を用いて解析を行った場合の収束過程をそれぞれ図-8(a), (b), (c) に、解析結果、反復計算回数および計算時間を表-2 に示す。

まず、ポテンシャルエネルギー最小化による方法では、最終的な解を得るまでに要した反復計算回数および計算時間は、10 部材片持ちトラスの場合と同様に材料によって大きく異なり、材料 A で 373 回・8.72 秒、材料 B で 419 回・10.03 秒と同程度であるのに対し、材料 C では 131 回・4.57 秒で極端に少なくなっている。また、解の収束状況は非常に緩慢であり、最終的に得られた解は荷重増分法と比較して、最大 0.8%、最小 0.0%、平均 0.4% 程度の誤差が認められる。

一方、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法では、最終的な解を得るまでに要した反復計算回数および計算時間は、材料 A で 23 回・1.09 秒、材料 B で 30 回・1.46 秒、材料 C で 18 回・0.97 秒と、材料の種類によって若干ばらついているが、収束状況は非常に良好であり、いずれの材料においても 10 回未満の反復計算でほぼ最終的な解の近傍に達し、ポテンシャルエネルギー最小化による方法に比べ 1/5~1/8 の計算時間で最終的な解を得ている。また、得られた解はつり合い条件を完全に満足しており、荷重増分法により得られた結果と比較して最大 0.8%、最小 0.0%、平均 0.2% の誤差が認められる。また、計算時間は、荷重増分法と比較して材料 A では、0.93 倍と同程度計算時間を要しているが、材料 B, C では、それぞれ 0.56 倍および 0.80 倍と効率的に最終的な解を決定している。

5. 各解法の比較

前章で図-5(c) および (j) に示す 10 部材片持ちトラスおよび 21 部材 2 径間連続トラスの収束過程について詳述したが、図-5 に示す他のトラスを解析した場合の収束状況も前章で述べた 2 つのトラスの例とほぼ同じ傾向を示している。図-5 の各解析モデルの構造形式は片持ちトラス、単径間トラスおよび 2 径間連続トラスに大別できるので、それぞれの構造形式別に、ポテンシャルエネルギー最小化による方法では自由度と反復計算回数、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法では不静定次数と反復計算回数の関係をまとめると、図-9 および図-10 のようになる。

図-9 より明らかなように、ポテンシャルエネルギー最小化による方法では、最終的な解を得るまでに要する反復計算回数は、単径間トラスと片持ちトラスとでは大きく異なり、同程度の自由度のトラスでは片持ちトラスの方が 3~7 倍多くの反復計算回数を必要としている。ただし、単径間トラスと 2 径間連続トラスではそれほど

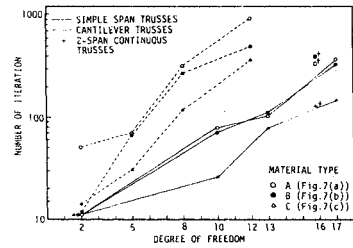


図-9 ポテンシャルエネルギー最小化におけるトラスの自由度と SQP の反復回数の関係

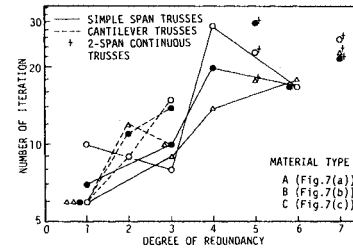


図-10 コンプリメンタリーエネルギー最小化におけるトラスの不静定次数と SQP の反復回数の関係

大きな差は認められなかった。また、単径間トラス、片持ちトラスいずれの場合も自由度が増加するに従い反復計算回数が指数関数的に増加している。また、材料の種類による反復計算回数の差異は、材料 A, B 間では顕著な差は認められないが、応力-ひずみ関係がなめらかな曲線で表わされている材料 C では比較的スムーズに解が収束し、単径間トラス、片持ちトラスいずれも材料 A, B の 1/2 程度の反復計算回数で最終的な解が得られている。

これに対しコンプリメンタリーエネルギー最小化による方法では、図-10 に示すごとく、不静定次数の増加に伴い反復計算回数も多少増加する傾向にあるが、ポテンシャルエネルギー最小化による方法のように、トラス構造物の構造形状や材料の種類によって大きく異なることがなく、最も多くの反復計算回数を要した 21 部材 2 径間連続トラスでも、材料 A で 25 回、B で 30 回、C で 18 回であり、ポテンシャルエネルギー最小化による方法と比較して、きわめてわずかな反復計算回数で確実に最終的な解に収束している。

次に、最終的な解を得るまでに要した計算時間をまとめると表-3 のようになる。ポテンシャルエネルギー最小化による方法では、自由度が増加するに従い計算時間が著しく増加し、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法や荷重増分法と比較して、極端に多くの計算時間が必要となる。

一方、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法の計算時間を荷重増分法と比較すると、材料 A では

表一3 各解析モデルの計算時間¹⁾の比較 (s)

材 料	解析法	片持ちトラス				単径間トラス				2径間連続トラス				
		3部材 (a)	6部材 (b)	6部材 (b')	10部材 (c)	15部材 (d)	3部材 (e)	11部材 (f)	16部材 (g)	21部材 (h)	31部材 (i)	21部材 (j)	31部材 (k)	31部材 (k')
A	最大応力 ²⁾	2853	1707	2870	3002	2500	2039	3588	2446	3302	5123	3532	2080	4273
	POTEN ³⁾	0.24	0.41	0.29	2.08	14.25	0.14	0.74	1.61	10.35	—	8.72	—	—
	COMP ⁴⁾	0.18	0.22	0.22	0.34	0.46	0.21	0.28	0.46	1.39	1.83	1.09	2.08	2.40
	荷重増分法	0.15	0.13	0.21	0.26	0.35	0.13	0.39	0.55	0.96	2.50	1.17	0.79	2.20
B	最大応力 ²⁾	2853	1551	2926	3001	2500	1933	3582	2597	3349	5167	3553	2090	4262
	POTEN ³⁾	0.15	0.40	0.32	1.89	7.45	0.15	0.76	1.83	9.62	—	10.03	—	—
	COMP ⁴⁾	0.18	0.25	0.21	0.26	0.37	0.19	0.28	0.61	1.09	1.91	1.46	1.74	2.40
	荷重増分法	0.21	0.22	0.41	0.54	0.71	0.16	0.81	1.38	2.75	7.51	2.60	2.61	6.33
C	最大応力 ²⁾	2960	1599	3147	3003	2500	2107	3602	2715	3471	5217	3575	2132	4255
	POTEN ³⁾	0.16	0.34	0.26	1.19	7.72	0.16	0.48	1.82	5.84	—	4.57	—	—
	COMP ⁴⁾	0.17	0.22	0.21	0.27	0.30	0.18	0.27	0.48	0.61	1.95	0.97	1.86	2.13
	荷重増分法	0.22	0.21	0.31	0.51	0.86	0.22	0.48	0.76	1.55	2.80	1.21	2.43	2.56

1) : FACOM M180 IIADによる計算時間 2) : kg/cm² 3) : ポテンシャルエネルギー最小化による方法
4) : コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法

ほぼ同等であるが、材料BおよびCのように応力-ひずみ関係が複雑になるほど荷重増分法では計算時間が多く必要となるのに対し、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法では計算時間が材料の応力-ひずみ関係にほとんど影響されないことから、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法の計算時間が相対的に少なくなり、3部材トラスを除き荷重増分法の2/3~1/3程度で最終的な解を得ている。ただし、作用荷重が小さく、部材に生ずる応力度およびひずみ量が小さなトラスで、かつ使用材料の応力-ひずみ関係が材料Aのように単純な場合には、表一3の6部材片持ちトラス(b)あるいは31部材2径間連続トラス(k)の例にみられるように、荷重増分法の方がより少ない計算時間で最終的な解を得る場合もある。これは作用荷重が小さい場合、荷重増分法では荷重分割数が少なくなり、反復計算回数が減少するためである。

以上述べたごとく、材料の応力-ひずみ関係が単純で、かつ部材に生じる応力度およびひずみ量が小さいトラスでは荷重増分法が能率的に最終的な解を決定する場合もあるが、応力-ひずみ関係が複雑となり、かつ部材に作用する応力度およびひずみ量が大きな場合には、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法が最も効率的な解析法となり、荷重増分法と比較して2/3~1/3程度の計算量でトラス構造物の非線形構造解析を行えることが明らかとなった。

6. 結 論

本論文において、構造物の全ポテンシャルエネルギーあるいは全コンプリメンタリーエネルギーをSQPにより直接最小化することにより、材料の非線形性を考慮したトラス構造物の解析を行う方法を提案し、その信頼性、収束性、計算効率などの検討を行った。

本研究により得られた主な結論は次のとおりである。

(1) ポテンシャルエネルギー最小化およびコンプリメンタリーエネルギー最小化による方法により、トラス構造物の材料非線形構造解析を行うための定式化は、各

部材の材料の応力-ひずみ関係の特性式をそのまま用いて、それぞれ式(10)および式(11)、(12)のような非常に単純な形で表現することができる。また、最終的な解を決定するアルゴリズムもきわめて汎用性があり、従来の非線形解析法のように材料の特性によって定式化および解析のアルゴリズムが異なるようなことはない。

(2) 本論文で提案している方法はいわゆるホロノミック解析法⁵⁾に属し、荷重を分割する必要がないため、作用荷重の大きさに影響されることなく最終的な荷重に対する解を直接求めることができる。

(3) ポテンシャルエネルギー最小化による方法では、式(10)の $H(u)$ を最小化する無制約最小化問題となるため、最小化のアルゴリズムはきわめて単純なものとなるが、収束性が悪く、トラスの自由度が増加するに従い最終的な解を得るために必要とする反復計算回数が指数関数的に増加し、実際に適用することが困難となる。また、最終的な解を得るために必要とする反復計算回数は、トラスの構造形式や材料の応力-ひずみ関係の特性によっても大きく影響される。

(4) 本研究で述べたエネルギー最小化による方法では、最小化の過程においてそれぞれ全ポテンシャルあるいは全コンプリメンタリーエネルギーの変位あるいは軸力に関する偏微係数が必要となるが、これらは式(14)あるいは式(20)により、きわめて簡単に計算することができる。このことは、エネルギー最小化による非線形解析法の大きな長所の1つである。

(5) コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法では、LPの手法を用いてつり合い方程式を満足する初期値を決定し、さらに、すべてのつり合い方程式を常に active な制約条件として軸力の改良を行うため、軸力の初期値に関係なく数回の反復計算で最終的な解の近傍まで到達し、その収束状況はきわめて良好である。また、最終的な解を得るために必要とする反復計算回数は、トラス構造物の不静定次数の増加に従い多少増加する傾向がみられるが、トラスの構造形式、材料の応力-ひずみ関係の特性などにほとんど影響されることなく、3~

31 部材トラスにおいて 6~30 回程程度の反復計算で確実に正確な解を得ることができる。

(6) 材料の応力-ひずみ関係が単純で、かつ部材に生じる応力度およびひずみ量が小さいトラスでは、荷重増分法により能率的に解を決定できる場合もあるが、応力-ひずみ関係が複雑となり、かつ部材に作用する応力度およびひずみ量が大きな場合には、コンプリメンタリーエネルギー最小化による方法が最も効率的な解析法となり、荷重増分法と比較して 2/3~1/3 程度の計算量でトラス構造物の材料の非線形性を考慮した構造解析を行うことができる。

以上の考察の結果、材料の非線形性を考慮したトラス構造物の非線形解析法として、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーをつり合い方程式の等号制約条件のもとで SQP により最小化することにより解く方法は、きわめて信頼性のある能率的かつ実用的な解析法であることが明らかとなった。

最後に、本研究における計算には愛媛大学情報処理センターの電子計算機 FACOM M 180 II-AD を使用し、計算結果の整理および図面の作成には、菅和浩君、藤脇敏夫君をはじめ愛媛大学土木工学部構造工学研究室の学生諸君のご助力を得た。ここに記して謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) 鷲津・宮本・山田・山本・川井 共編：有限要素法ハンドブック II 応用編，pp.128~149，培風館，1983.
- 2) Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T. and Hasegawa, A. : A Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, Proc. of JSCE, No.344/I-1, pp.39~53, 1984.
- 3) 後藤芳顕・長谷川彰夫・西野文雄：平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察，土木学会論文報告集，第 331 号，pp.33~44，1983.3.
- 4) Stricklin, J. A. and Haisler, W. E. : Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis, Computer & Structures, Vol.7, Pergamon Press, pp.125~136, 1977.
- 5) たとえば，Maier, G., Grierson, D. E. and Best, M. J. : Mathematical Programming Methods for Deformation Analysis at Plastic Collapse, Computers & Structures, Vol.7, pp.599~612, 1977.
- 6) Donato, O. D. : Fundamentals of Elastic-Plastic Analysis, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn and Maier, Pergamon Press, pp.325~349, 1979.
- 7) 佐藤紘志・香月 智・石川信隆・強制地盤変形を受ける平面埋設管路の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第 350 号，pp.217~226, 1984.10.
- 8) Bogner, F. K., Mallett, R. H., Minich, M. D. and Schmit, L. A., Jr. : Development and Evaluation of Energy Search Methods of Nonlinear Structural Analysis, Tech. Rep. AFFDL-TR-113, Wright-Patterson AFB, Ohio., 1965.
- 9) Mallett, R. H. and Schmit, L. A., Jr. : Nonlinear Structural Analysis by Energy Search, J. Struct. Div. ASCE, Vol.93, No. ST 3, pp.221~234, 1967.
- 10) Schmit, L. A., Jr., Bogner, F. K. and Fox, R. L. : Finite Deflection Structural Analysis Using Plate and Shell Discrete Elements, AIAA J., Vol.6, No.5, pp.781~791, 1968.
- 11) Fox, R. L. and Stanton, E. L. : Developments in Structural Analysis by Direct Energy Minimization, AIAA Journal, Vol.6, No.6, pp.1036~1042, 1968.
- 12) Schmit, L. A., Jr. and Monforton, G. R. : Finite Deflection Analysis of Sandwich Plates and Cylindrical Shells with Laminated Facings, Proc. 10th AIAA/ASME Struct. Structural Dyn. Mater. Conf., New Orleans, April, 1969.
- 13) Oden, J. T. : Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972 (山田嘉昭 監訳：非線形連続体の有限要素法 2, 培風館, 1980).
- 14) 山崎徳也・太田俊昭・石川信隆：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第 134 号，pp.14~32, 1966.10.
- 15) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Second Edition, Pergamon Press, 1975.
- 16) 鷲津久一郎：エネルギー原理入門，培風館，pp.1~83, 1980.
- 17) Biggs, M. C. : Constrained Minimization Using Recursive Quadratic Programming: some alternative subproblem formulations, Towards Global Optimization, Dixon, L. C. W. and Szego, G. P. eds., pp.341~349, North-Holland Publishing Co. 1975.
- 18) Han, S. P. : Superlinearly Convergent Variable Metric Algorithms for General Nonlinear Programming Problems, Mathematical Programming, Vol.11, pp.263~282, 1976.
- 19) Powell, M. J. D. : A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations, Lecture Notes in Mathematics No.630, Numerical Analysis, Dundee, pp.144~157, 1977.
- 20) 大久保禎二・吉田紀昭・古川浩平：構造設計における Optimizer Subroutine Library の作成，昭和 58 年度科学研究費補助金（試験研究（1））研究成果報告集，pp.87~98, 1984.
- 21) たとえば，今野 浩・山下 浩：非線形計画法，日科技連，1978.
- 22) たとえば，吉澤孝和：トラス構造物の複合非線形解析とテンドンによる静的応答制御に関する基礎的研究，学位論文，pp.10~145, 1980.8.
- 23) 大久保禎二・和多田康男：エネルギー原理に基づく非線形構造解析法の比較について，第 40 回土木学会年次学術講演会概要集，第 1 部，pp.339~340, 1985.9.

(1985.12.13・受付)