構造物の振動における逆問題

竹脇　出（京都大学）

1. 建築構造設計における現況

建築構造設計の実務では，通常，(i)経験や資料に基づく初期計画段階での部材断面サイズの仮定と，(ii)その仮定骨組モデルに設計用外力を作用させたときの構造解析（応答解析）による設計条件の検定という大きな流れの中で，ほぼすべての設計条件が満たされるまで設計者の判断に基づく部材選定が繰り返し行われる。この過程を総称して構造設計と呼ぶことが多い。しかしながら，建築構造物の大規模化，多種多様な新材料の開発が進む状況下では，構造設計者の経験やそれに基づく判断が必ずしも有効に利用できるとは限らず，構造設計過程の一層の数理化・論理化を促進させ，設計条件と設計目標から組織的に部材寸法や部材断面サイズが選定される，本来の意味での構造設計の体系を構築することが強く求められている。

2. 順問題と逆問題

上記のような問題点を解決する一つの方法として逆問題型の方法が存在する。これは，外乱に対する構造物の応答レベル（あるいは拡張して固有振動特性）を性能として分類し，その性能を実現する構造物を試行錯誤的な方法に拠らずに見出す方法を意味している。

応用力学の中の振動分野では，逆問題に関する研究が急速に進展し，それに関する国際専門誌や多くの著書が存在している[1-4]。逆問題という用語の定義は，そもそも相対的な側面を有しており，それまでに順問題と考えられていた問題がどのように構成されていたかに大きく依存する。逆に謂えば，逆問題と呼んでいる問題は，本来，順問題であるのかもしれないのである。これまでの順問題の多くは，構造解析や応答解析などの構造学の初期に発展した分野と密接に関わっている。従って，構造設計者が最終的に決定する部材サイズなどの量は予め与えられている場合が多い。それに対して逆問題では，構造物の応答量（あるいは固有の特性）を順問題を通じて把握しながら，理想とする応答特性（あるいは固有の特性）を呈する構造物の部材サイズなどを決定することとなる。この場合には関数関係を逆に解かなければならないため，一般に順問題よりも難しい取り扱いが要求される。

ここでは，構造物モデルおよび構造物と地盤の連成系モデルの振動における逆問題について考えよう。

まず，構造物の振動における逆問題に関するこれまでの研究の流れについて解説しよう。これまでに，構造物の１次から高次までの固有値を並べた集合（固有値列と呼ばれている）や，境界条件の異なる構造物の１次から高次までの固有値列を与えて，それを実現するモデルの剛性や質量を見い出す「逆固有値問題」に対しては多くの研究が蓄積されている。それらの研究については，文献[1-6]において詳しく解説されている。逆固有値問題の他に，複数の固有モードの組や１次固有値と１次固有モードの組を指定して，それを実現するモデルの剛性や質量を求める「逆固有モード問題」に対しても研究がなされている[3,7-16]。これらの研究は主として，非減衰系に対してなされているが，減衰系に対する研究も最近見られるようになった[17-21]。さらに，広い意味では，システム同定問題も振動における逆問題に入るかもしれない[4]。しかし，ここでは触れない。前述の逆問題に関する国際専門誌の中では，主として逆問題に関する一般理論等が展開されている。建築構造物には特有の性質が存在するため，その性質を十分利用した逆問題の設定が必要となる。

3. 全逆問題

3．1　固有値解析問題

図1に示すような２層剪断型構造物モデルについて考えよう。ここでは，各層の質量および層間剛性は与えられているとする。このモデルの自由振動の支配式は次のように表現できる。

$$k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) + m_1 \ddot{u}_1 = 0 \tag{1}$$

$$k_2(u_2 - u_1) + m_2 \ddot{u}_2 = 0 \tag{2}$$

固有ベクトルを $\mathbf{\Phi} = \{\phi_1 \quad \phi_2\}^T$（ベクトルや行列の転置を上付き T で表す），固有値を $\Omega(=\omega^2)$ として，$u_1 = \phi_1 e^{\mathrm{i}\omega t}$，$u_2 = \phi_2 e^{\mathrm{i}\omega t}$ を(1)，(2)式に代入すると次のような固有値問題の支配式が得られる。

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \Omega \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = (\mathbf{K} - \Omega\mathbf{M})\mathbf{\Phi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

このとき固有値は次の固有値方程式から求められる。

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{K} - \Omega\mathbf{M}\right) &= (k_1 + k_2 - \Omega m_1)(k_2 - \Omega m_2) - {k_2}^2 \\ &= m_1 m_2 \Omega^2 - \{m_1 k_2 + m_2(k_1 + k_2)\}\Omega + k_1 k_2 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

(4)式を解くと，固有値が次のように求められる。

$$\Omega_1, \Omega_2 = \frac{m_1 k_2 + m_2(k_1 + k_2) \mp \sqrt{\{m_1 k_2 + m_2(k_1 + k_2)\}^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2} \tag{5}$$

一方，i 次固有ベクトル $\{\phi_1^{(i)} \quad \phi_2^{(i)}\}^T$ は(5)式の固有値を(3)式の第１式に代入することにより次のように得られる。

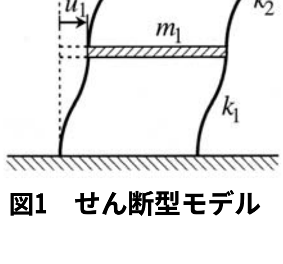

図1　せん断型モデル

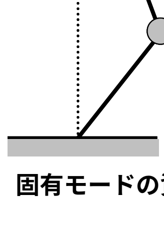
図2　固有モードの資格条件

$$(k_1+k_2-\Omega_i m_1)\phi_1^{(i)}-k_2\phi_2^{(i)}=0 \quad (i=1,2)$$

従って

$$\frac{\phi_2^{(i)}}{\phi_1^{(i)}}=\frac{(k_1+k_2-\Omega_i m_1)}{k_2} \quad (i=1,2) \qquad (6)$$

３．２ せん断型構造物モデルの逆固有モード問題

前節では, 各層の質量および層間剛性は与えられていると考えた。次に，その逆問題を考えるために，図1のモデルで，層間剛性 k_1, k_2 を設計変数（設計問題における未知数）としよう。各層の質量は与えられているものとする。このモデルの１次固有値（１次固有円振動数の２乗）が $\bar{\Omega}_1$ と一致し，１次固有モードにおける層間変位成分比 $(\phi_2-\phi_1)/\phi_1$ が α と一致するときの k_1, k_2 を求める問題を考える。$(\phi_2-\phi_1)/\phi_1=\alpha$ より ϕ_2 は次のように表現できる。

$$\phi_2=(1+\alpha)\phi_1 \qquad (7)$$

$\Omega=\bar{\Omega}_1$ と(7)式を(3)式に代入し，k_1, k_2 に関する連立方程式に書き換えると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix}=\bar{\Omega}_1\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1+\alpha \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

(8)式より k_1, k_2 が次のように求められる。

$$k_1=\bar{\Omega}_1\{m_1+m_2(1+\alpha)\} \qquad (9)$$

$$k_2=\bar{\Omega}_1 m_2(1+\alpha)/\alpha \qquad (10)$$

ただし，$\mathbf{\Phi}=\{\phi_1 \quad \phi_2\}^T$ が１次固有モードであるための条件として，$\alpha>0$ が必要となる。

逆問題では，解が存在するように問題が述べられていることが重要である。このような条件のことを資格条件という。問題として不適切な場合をill-posedと呼び，適切な場合をwell-posedと呼ぶ。逆問題の分野では，このような資格条件を見出すことが研究の一部となっていると言っても過言ではない。例えば，上記の例で $\alpha=-0.5$ に対応する図2のようなモード形状はどのような層剛性を有するモデルの固有モードでもない。これは，このようなモードについては上部質点の動的な釣合いが満足されないことからも理解される。せん断型質点系の固有モードの資格条件については文献[3]に詳しく述べられている。

一般的な自由度数を有するモデルに対する解は文献[8] を参考にされたい。固有値解析の(3)式は固有値問題を形成しているのに対して, 逆問題の(8)式は非斉次方程式を形成している。つまり両者は数学的に異なる構造を有している。

３．３ 曲げせん断型構造物モデルの逆固有モード問題

次に, 図3に示すような２層曲げせん断型構造物モデルについて考えよう。せん断型構造物モデルは，その剛性行列が３重対角となる近接連成系モデルであるのに対し，曲げせん断型モデルは，その剛性行列がフルマトリックスとなる遠隔連成系モデルの一種である。このようなモデルについても，せん断型構造物モデルについて示した逆固有モード問題に対する理論と同様の理論が展開できることを２層モデルを例として示すことにしよう。

各層の床質量と回転慣性は，m_1, m_2, I_1, I_2 で与えられており，階高も h_1, h_2 で与えられているとする。床面の回転による水平変位成分を含まない正味の層間相対変位（以下剪断変形と呼ぶ）に関する剛性 k_1, k_2（以下せん断剛性と呼ぶ）と，鉛直面内相対床回転角（以下曲げ変形と呼ぶ）に関する剛性 s_1, s_2（以下曲げ剛性と呼ぶ）を設計変数とする。本モデルでは，１次固有モードにおけるせん断変形成分と曲げ変形成分を，それぞれ $\Delta_1, \Delta_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ で表すと，各層せん断力と各層上端曲げモーメントは $k_1\Delta_1, k_2\Delta_2, s_1\Gamma_1, s_2\Gamma_2$ で表現される。ここでは，「モデルの１次固有値が $\bar{\Omega}_1$ に等しく，１次固有モードにおけるせん断変形成分および曲げ変形成分の比が $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ に一致するような構造物の各層剛性を求める問題」を考える。$\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ は１次固有モードにおける成分であるため，その比のみが意味を有する。ここでは正規化条件として $\bar{\Delta}_1$ の値が指定されているものとする。

１次固有モードにおける床の水平変位と回転角を $U_1, U_2, \Theta_1, \Theta_2$ で表すと，$\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ は，１次固有モード変位成分 $U_1, U_2, \Theta_1, \Theta_2$ を用いて次のように表現できる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Gamma}_2 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Gamma}_1 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -h_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ \Theta_2 \\ U_1 \\ \Theta_1 \end{Bmatrix} \qquad (11)$$

(11)式を逆に解くと，$U_1, U_2, \Theta_1, \Theta_2$ は $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ を用いて次のように表現できる。

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ \Theta_2 \\ U_1 \\ \Theta_1 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & h_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Gamma}_2 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Gamma}_1 \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

第i層せん断剛性は, 第i層よりも上層の自由体の水平方向釣合式より次のように求められる。

$$k_1=\frac{\bar{\Omega}_1}{\bar{\Delta}_1}\{m_1\bar{\Delta}_1+m_2(\bar{\Delta}_1+\bar{\Delta}_2+h_2\bar{\Gamma}_1)\} \qquad (13)$$

$$k_2=\frac{\bar{\Omega}_1}{\bar{\Delta}_2}m_2(\bar{\Delta}_1+\bar{\Delta}_2+h_2\bar{\Gamma}_1) \qquad (14)$$

一方，第i層曲げ剛性は，第i層よりも上層の自由体の第i床を通る横面に垂直な水平軸回りのモーメントの釣合より次のように求められる。

$$s_1=\frac{\bar{\Omega}_1}{\bar{\Gamma}_1}\{I_1\bar{\Gamma}_1+I_2(\bar{\Gamma}_1+\bar{\Gamma}_2)+m_2h_2(\bar{\Delta}_1+\bar{\Delta}_2+h_2\bar{\Gamma}_1)\} \quad (15)$$

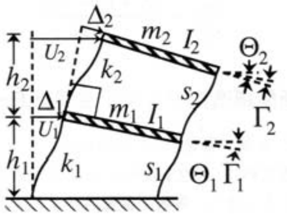

図3　曲げせん断型モデル

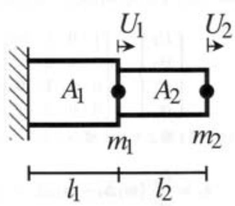

図4　分布質量棒モデル

$$s_2 = \frac{\overline{\Omega}_1}{\overline{\Gamma}_2} I_2(\overline{\Gamma}_1 + \overline{\Gamma}_2) \tag{16}$$

(13)-(16)式の表現から，$\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \overline{\Gamma}_1, \overline{\Gamma}_2$ として全て同符号の成分を指定すれば，正の剛性が求められるといえる。

一般的な自由度数を有するモデルに対する解は文献[22]を参考にされたい。

3．4　分布質量棒モデルの軸振動における逆固有モード問題

図4に示すような，２要素からなる段付き棒の軸振動における逆固有モード問題を考えよう。分布質量を考慮するために，線形の形状関数を有する有限要素モデルを用いる。各棒要素の断面積，密度，ヤング係数，材長を，それぞれ A_i, ρ_i，$E_i, l_i\,(i=1,2)$ で表す。また，各節点には集中質量 m_1, m_2 が存在している。このとき，第i要素の要素剛性行列，要素質量行列は次のように表現できる。

$$\mathbf{k}_i = \frac{E_i A_i}{l_i}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{m}_i = \frac{\rho_i A_i l_i}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

ここでは断面積 A_1, A_2 を設計変数としよう。このモデルの１次固有値が $\overline{\Omega}_1$ に一致し，要素内で一様な各要素の１次固有モードにおける軸方向ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の比 $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ が α と一致するときの断面積 A_1, A_2 を求める問題を考える。１次固有モードの節点変位 U_1, U_2 は次のように表現できる。

$$U_1 = \varepsilon_1 l_1 \tag{19}$$

$$U_2 = \varepsilon_1 (l_1 + \alpha l_2) \tag{20}$$

このモデルの１次固有振動の支配式に，$\Omega_1 = \overline{\Omega}_1$ と(19)，(20)式を代入すると次式となる。

$$\left[\frac{E_1 A_1}{l_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{E_2 A_2}{l_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \overline{\Omega}_1\left(\frac{\rho_1 A_1 l_1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho_2 A_2 l_2}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right)\right] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 l_1 \\ \varepsilon_1 (l_1 + \alpha l_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

$\varepsilon_1 \neq 0$ を用いて(21)式を A_1, A_2 に関する連立方程式として書き直すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} E_1 - \dfrac{\overline{\Omega}_1 \rho_1 l_1^{\,2}}{3} & -\alpha E_2 - \dfrac{\overline{\Omega}_1 \rho_2 l_2}{6}(3l_1 + \alpha l_2) \\ 0 & \alpha E_2 - \dfrac{\overline{\Omega}_1 \rho_2 l_2}{6}(3l_1 + 2\alpha l_2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \overline{\Omega}_1 \begin{Bmatrix} m_1 l_1 \\ m_2 (l_1 + \alpha l_2) \end{Bmatrix} \tag{22}$$

(22)式を A_1, A_2 について解けば断面積が得られる。

ただし，U_1, U_2 が１次固有モードであるための条件として，$\alpha > 0$ が必要となる。一般的な分布質量系有限要素モデルに対する解法は文献[23，24，12]を参考にされたい。

4．混合型逆問題

建築の世界で，最適設計理論や逆問題型の設計理論を最初に提示したのは京都大学の中村恒善博士であると思われる（[8，25-27]）。逆問題には前述の全逆問題と混合型の逆問題がある。混合型とは，設計者の判断でデザイン可能な上部構造物と，一般的には設計行為が及ばない地盤などの下部構造から構成される混合型のシステムを対象とすることを意味している。地盤などの非設計領域では解析問題が扱われ，上部構造物の設計領域では設計問題が扱われる。混合型逆問題においては，問題設定によりいくつかの分類が可能であり，それぞれに興味深い定式化が可能となる。

5．スウェイ･ロッキングばねで支持されたせん断型質点系モデルの混合型逆問題

図5に示すような，地盤の剛性を代表する水平ばねと回転ばねで支持された２層せん断型構造物モデルについて考えることにしよう。各層床の質量およびその重心回りの回転慣性は，$m_0, m_1, m_2, I_{R0}, I_{R1}, I_{R2}$ で与えられているものとする。また，階高は h_1, h_2 で与えられているものとする。１次固有モードにおける基礎版の水平変位成分，回転成分を U_F, Θ_F で表し，それらの成分を含まない上層床の水平変位成分を U_1，U_2 で表す。また，１次固有モードにおける基礎版の水平変位成分，回転成分を含まない上層床の層間相対変位成分を Δ_1，Δ_2 で表す。U_F, Θ_F，U_1, U_2，Δ_1, Δ_2 は１次固有モード成分であるのでその比のみが意味を持つ。

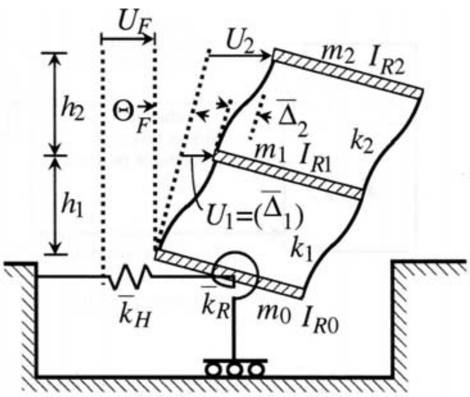

図5　スウェイ・ロッキングモデル

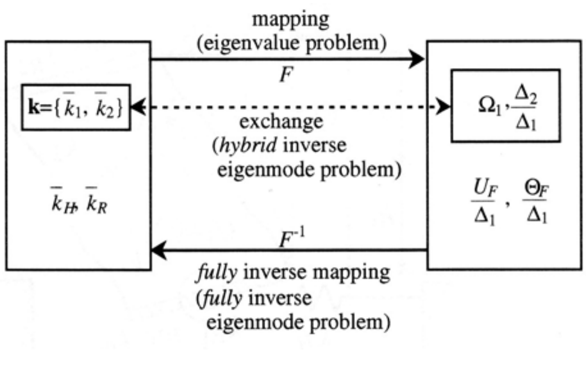

図6　混合型の逆写像

モデルの全ての剛性 $\bar{k}_H, \bar{k}_R, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ が与えられているとき，固有値解析の節で示したように, モデルの１次固有値 Ω_1 と１次固有ベクトル成分比 Δ_2/Δ_1, U_F/Δ_1, Θ_F/Δ_1 は，固有値問題から求められる（図6 参照）。$\bar{k}_H, \bar{k}_R, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ と Ω_1, Δ_2/Δ_1, U_F/Δ_1, Θ_F/Δ_1 の間の写像が一対一写像であるならば， Ω_1, Δ_2/Δ_1, U_F/Δ_1, Θ_F/Δ_1 を指定し， $\bar{k}_H, \bar{k}_R$, $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ を求める逆写像が定義できる（図6参照）。このとき，剛性の一部と Ω_1, Δ_2/Δ_1, U_F/Δ_1, Θ_F/Δ_1 の一部を入れ替えた混合型の逆写像を考えることができる（図6参照）。すなわち，支持ばね剛性 $\bar{k}_H, \bar{k}_R$ と１次固有値 Ω_1 （指定値 $\bar{\Omega}_1$ ），１次固有ベクトル成分比 Δ_2/Δ_1（指定値 $\bar{q}$ ）を指定して，せん断型構造物モデルの層間剛性 k_1, k_2 と残りの１次固有ベクトル成分比 U_F/Δ_1, Θ_F/Δ_1 を求める問題（混合型逆問題）を考えることができる。

このとき，１次固有振動における混合型逆固有モード問題は次のように述べられる。

問題HIPSB

図5のモデルにおいて，階高 h_1, h_2 ，各層床の質量およびその重心回りの回転慣性 $m_0, m_1, m_2, I_{R0}, I_{R1}, I_{R2}$ ，および支持ばね剛性 $\bar{k}_H, \bar{k}_R$ は与えられているものとする。また，$\bar{\omega}_1$ ，$\bar{q}$ を指定値とする。このとき１次固有振動数が $\bar{\omega}_1$ に等しく，１次固有モード層間相対変位成分比 Δ_2/Δ_1 が $\bar{q}$ と一致するようなモデルの上部層間剛性 k_1, k_2 を求めよ。

以下では，１次固有モードの一つの正規化条件として，１層の層間相対変位成分の大きさを指定するものとし，その指定値を $\bar{\Delta}_1$ で表す。また，$\Delta_2 = \bar{q}\bar{\Delta}_1$ を新たに $\bar{\Delta}_2$ と表示する。

混合型逆固有モード問題としての１次固有振動の支配式は次のように表現できる。

$$-\bar{\Omega}_1 m_0 U_F + \bar{k}_H U_F - k_1 U_1 = 0 \tag{23}$$

$$-\bar{\Omega}_1 m_1 (U_F + \Theta_F H_1 + U_1) + k_1 U_1 - k_2 (U_2 - U_1) = 0 \tag{24}$$

$$-\bar{\Omega}_1 m_2 (U_F + \Theta_F H_2 + U_2) + k_2 (U_2 - U_1) = 0 \tag{25}$$

$$-\bar{\Omega}_1 \sum_{i=1}^{2} m_i (U_F + \Theta_F H_i + U_i) H_i - \bar{\Omega}_1 \sum_{i=0}^{2} I_{Ri}\Theta_F + \bar{k}_R \Theta_F = 0 \tag{26}$$

ここで，$\bar{\omega}_1^2 = \bar{\Omega}_1$, $\sum_{j=1}^{i} h_j = H_i$ である。(23)‐(26)式を層間相対変位成分を用いて表現すると次式となる。

$$-\bar{\Omega}_1 m_0 U_F + \bar{k}_H U_F - k_1 \bar{\Delta}_1 = 0 \tag{27}$$

$$-\bar{\Omega}_1 m_1 (U_F + \Theta_F H_1 + \bar{\Delta}_1) + k_1 \bar{\Delta}_1 - k_2 \bar{\Delta}_2 = 0 \tag{28}$$

$$-\bar{\Omega}_1 m_2 (U_F + \Theta_F H_2 + \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2) + k_2 \bar{\Delta}_2 = 0 \tag{29}$$

$$-\bar{\Omega}_1 \sum_{i=1}^{2} m_i (U_F + \Theta_F H_i + \sum_{j=1}^{i} \bar{\Delta}_j) H_i - \bar{\Omega}_1 \sum_{i=0}^{2} I_{Ri}\Theta_F + \bar{k}_R \Theta_F = 0 \tag{30}$$

(27)‐(30)式は k_1, k_2, U_F, Θ_F に関する線形な式である。(27)‐(30)式を直接解いてもよいが，工夫をすることにより，k_1, k_2 と U_F, Θ_F が各々独立に求められる。(27)‐(29)式を辺々加えると上部構造全体の水平方向の釣合式が得られ，次のように未知剛性 k_1, k_2 を含まない式となる。

$$-\bar{\Omega}_1 m_0 U_F - \bar{\Omega}_1 \sum_{i=1}^{2} m_i (U_F + \Theta_F H_i + \sum_{j=1}^{i} \bar{\Delta}_j) + \bar{k}_H U_F = 0 \tag{31}$$

(30)，(31)式を U_F, Θ_F について整理すると次式が得られる。

$$D_1 U_F + D_2 \Theta_F + D_3 = 0 \tag{32}$$

$$D_2 U_F + D_4 \Theta_F + D_5 = 0 \tag{33}$$

ただし， $D_1, \cdots, D_5$ は次の諸量を表す。

$$D_1 = \sum_{i=0}^{2} m_i - \frac{\bar{k}_H}{\bar{\Omega}_1}, D_2 = \sum_{i=1}^{2} m_i H_i, D_3 = \sum_{i=1}^{2} m_i \sum_{j=1}^{i} \bar{\Delta}_j ,$$
$$D_4 = \sum_{i=1}^{2} m_i H_i^2 + \sum_{i=0}^{2} I_{Ri} - \frac{\bar{k}_R}{\bar{\Omega}_1}, D_5 = \sum_{i=1}^{2} m_i H_i \sum_{j=1}^{i} \bar{\Delta}_j \tag{34}$$

(32)，(33)式から U_F, Θ_F を $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$ で表現すると次式となる。

$$U_F = \frac{D_2 D_5 - D_3 D_4}{D_1 D_4 - D_2^2} \tag{35}$$

$$\Theta_F = \frac{D_2 D_3 - D_1 D_5}{D_1 D_4 - D_2^2} \tag{36}$$

(35)，(36)で得られた U_F, Θ_F を(23)，(24)式に代入し，(31)式を用いると上部剛性 k_1, k_2 が次のように求められる。

$$k_1 = \frac{\bar{\Omega}_1}{\bar{\Delta}_1} \sum_{i=1}^{2} m_i (U_F + \Theta_F H_i + \sum_{r=1}^{i} \bar{\Delta}_r) \tag{37}$$

$$k_2 = \frac{\bar{\Omega}_1}{\bar{\Delta}_2} m_2 (U_F + \Theta_F H_2 + \sum_{r=1}^{2} \bar{\Delta}_r) \tag{38}$$

(37)，(38)式の剛性は， $\bar{\Omega}_1$ と， $\bar{\Delta}_1$ と $\bar{\Delta}_2$ の比により表現されている。

この定式化では，(35)，(36)のように１次固有モードの残りの成分を求める固有値問題と，(37)，(38)のように剛性を求める逆問題の両者が混在しており，一つの混合型逆固有モード問題を形成している。一般的な自由度を有するモデルについては，文献[28-31]を参照されたい。

6. 構造物‐地盤連成系モデル

地盤の影響を考慮した逆問題型解法の例を示そう。近年における震害調査から，構造物と地盤の動的相互作用を建築構造物の設計に組み込むことの重要性は度々指摘されており，工学的基盤面で設計用地震動を設定する一層詳細な手順が2000 年に改正された建築基準法にも取り入れられている。

文献[27]は，その先駆的な研究として，工学的基盤面で設計用地震動が規定される Penzien 型のモデルについて，上部骨組の部材端応力に関する制約条件を満足する骨組の部材サイズを見出す設計法を展開している。構造物と地盤の連成系モデルでは，基礎固定モデルに比べて自由度が格段に増加するため，パラメトリック解析に基づく手法では多大な計算労力が必要となる。これに対して，逆問題型の解法[27, 32, 33]では，地盤‐基礎系の非設計領域を順解析的に取り扱い，上

部構造の設計領域を逆問題的に取り扱うため，設計問題に即した取り扱いが可能となる。

図 7 に示すような有限要素地盤と曲げ棒でモデル化される杭系で支持された建築ラーメンについて，部材断面サイズを設計変数とする逆固有モード問題のからくりを示すことにしよう[13，14]。図 8 に示すように，全体系を上部構造物，杭 - 地盤系，両者のインターフェイスに分割する。図 9 のようにインターフェイス直下の断面で上部構造物を切り取り，上部構造物全体の釣合い式を考えることにより，構造物の設計変数を含まない式が誘導できる。この式と杭 - 地盤系における順解析の式を連立させることによりすべての変位が求められる。部材サイズは上部構造における釣合い式から求められる。つまり，このような連成系モデルでは，順解析と逆解析が同時に行われることになる。これらも混合型の逆問題の代表的な例である。

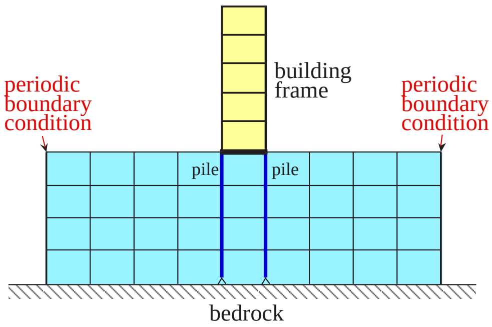

図 7　２次元有限要素地盤 - 杭系で支持された建築骨組

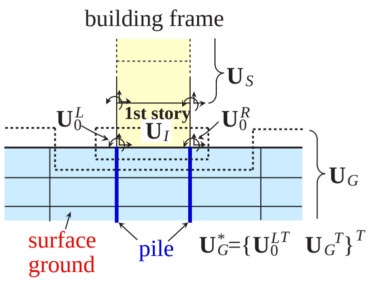

図 8　サブストラクチャーモデリング

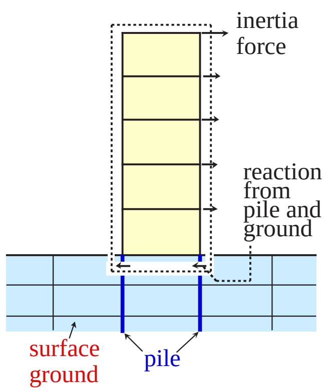

図 9　上部構造物の「全体としての釣合」

7. その他の振動逆問題や感度解析および最適設計

その他の振動逆問題や感度解析，および関連する最適設計関係の文献については文献[34-56]を参照されたい。特に部分構造合成法は，混合型逆問題にも利用可能であり，興味深い展開がいくつか提案されている[57, 58]。部分構造合成法については文献[59-63]を参照されたい。

また，最近では，連結制振関連の逆問題についても研究が行われている[64]。

8. ロバスト性

混合逆問題型設計法では，比較的不確定性が小さいと思われる上部構造と，比較的不確定性が大きいと考えられる基礎・地盤系を扱うため，必然的に設計に関わる不確定因子によるロバスト性の問題がクローズアップされる。また，地震入力については，基礎・地盤系よりも一層大きな不確定性を有しているとも考えられる。（図 10）

最適設計や逆問題型設計は，それ自身，重要な分野を形成しており，構造設計の論理化に大きく寄与するものと期待される。同時に，現実の設計で有効に利用されるには，入力や構造要素が有する不確定性や情報不足についても十分認識しておく必要がある。すなわち，構造設計におけるロバスト性である。この方面の研究で，入力の不確定性に関する研究には，クリティカル外乱法（最悪地震動モデル）という方法が存在する[65]。文献[66-73]は，それを確率論的に取り扱い，また，従来にはない制約を導入することでその解法にブレイクスルーを見出している。特に，地震動による構造物への入力エネルギーをクリティカル性の指標とする場合には，Arias 強度として知られている加速度波形の 2 乗時間積分以外に，速度波形の 2 乗時間積分に制約を設けることで，海溝型や内陸型を含むほとんど全てのタイプの地震動が有する極限性を統一的に説明し得る法則が存在することが明らかとなった（図 11）。この研究は，1935 年に京都大学の棚橋諒先生が提案された「速度・ポテンシャルエネルギー説」（建築雑誌，昭和 10 年）にも通じるところがある。シナリオ地震を用いた防災計画が，防災意識の向上や実際の地震防災活動において大変重要な意味をもつことは事実である。しかしながら，活断層位置や地質特性，地盤特性の不確定性を考えると，災害時に重要な役割を果たすべき構造物や社会的影響が大きい巨大構造物などの設計段階では，「最悪地震動」の考え方も意味があると思われる。

さらに，構造物 - 地盤連成系のような物理特性や領域の大きさが大きく異なる要素から構成されるモデルを扱う場合には，変形や力に関する検討よりも，エネルギー的な捉え方が有効である場合が多い。文献[70, 71]による振動数領域でのエネルギー評価方法では，入力系と構造系を分離して取り扱うことが可能となり，構造物で消費されるエネルギーと地盤で消費される（あるいは地盤へ逸散する）エネルギーを明確に分離して定義することが可能となった。この方法は，入力系と構造系の不確定性を分離して取り扱う新しい道を開いたといえる。

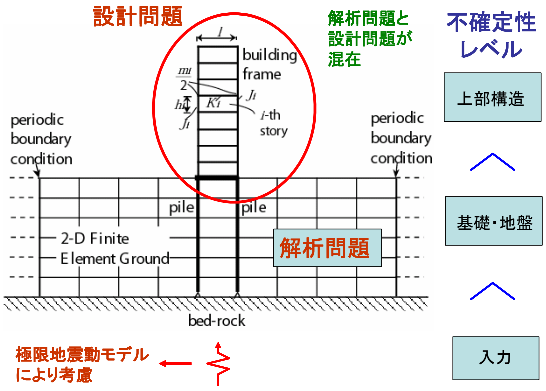

図 10　混合型逆問題の意味

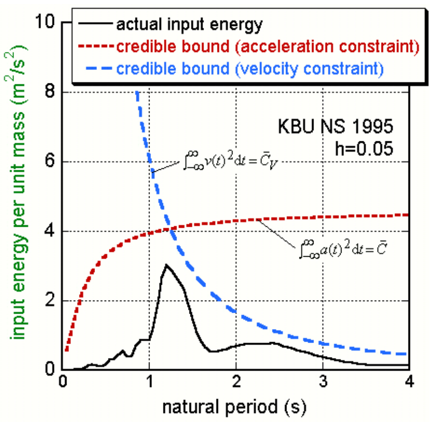

図 11　1995 年兵庫県南部地震において神戸大学で観測された地震動と同じ規模の最悪地震動に対応する地震入力エネルギー

9. システムの合理化とロバスト性

システムの合理化を進めるとロバスト性が低下することがある。しかしこれは必然的ではない。またロバスト性の定義にも依存する。ロバスト性には，構造物の不静定性（不静定次数）を初めとする多くの要因が関係しており，同時にロバスト性を測る尺度も多様である。これまで，ロバスト性という用語は，制震・免震構造の分野を中心として頻繁に用いられている。例えば，免震構造において，積層ゴムの剛性やダンパーの減衰係数のばらつきを考慮して設計を行っているのは，一つのロバスト性を考慮した例であると考えられる。ロバスト性という用語は盛んに用いられているものの，定量的に扱った研究はごく限られている（例えば[74]）。ある研究では，システムの合理化を進めるとロバスト性が増大するという興味深い結果も得られている[74]。システムの合理化とロバスト性の向上は，建築物も含めた全ての構造物の設計における大きなパラダイムを形成する可能性を秘めており，今後の研究が期待される。構造委員会の応用力学運営委員会では，このような要請に応えるために，2005 年度から新しい小委員会をスタートさせている[75-77]。

10. 今後の展望

建築物の安全性評価で対象とする地震の多くは，短いものでも数十年，長い場合には数百年にも及ぶ再現期間を有している。しかも，地震動観測が精力的に行われ始めてからまだ長期間経過していない。このような状況下で，安全性評価を行わなければならないことそのものに大きな問題が存在している。巨大構造物や重要構造物についてはその社会的影響は計り知れない。しかしながら，構造物の設計を行うことは避けて通ることができないため，現時点で考えられ得る最善の方法を投入することが要請されている。

設計用入力地震動が有する不確定性については，断層破壊からサイトへの波動伝播特性，さらには表層地盤における増幅特性など種々の要因が関係している。例えば，断層破壊で生じるエネルギーの特性やモデルを構成するパラメターの変動幅など，物理的な側面から確かな量を設定することは可能である。さらに，この変動幅を科学的に分析した上で必然的な不確定性はそのまま取り込む扱いが望まれているように思われる。このような不確定性の扱いがシステムの合理化とうまくかみ合ったときに，合理的でしかも信頼性の高い構造設計システムが構成できるのではないかと思われる。

参考文献

[1] Int. J. of Inverse Problems, 1985-, Institute of Physics Publishing, UK.

[2] Int. J. of Inverse Problems in Engineering, 1994-, Gordon and Breach Science Publishers.

[3] G.M.L.Gladwell, *Inverse Problems in Vibration*, 1986 (Martinus Nijhoff Publishers); second edition 2004.

[4] 久保司郎，逆問題，培風館，1992.

[5] V.Barcilon, Inverse Problem for a Vibrating Beam, *J. Applied Mathematics and Physics*, Vol.27, pp347-358, 1976.

[6] D.Boley and G.H.Golub, A Survey of Matrix Inverse Eigenvalue Problems, *Inverse Problems*, Vol.3, pp595-622, 1987.

[7] B.Porter, Synthesis of Linear Lumped-Parameter Vibrating Systems by an Inverse Holzer Technique, *J. Mechanical Engineering Science*, Vol.12, No.1, pp17-19, 1970.

[8] T.Nakamura and T.Yamane, Optimum Design and Earthquake-response Constrained Design of Elastic Shear Buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, pp797-815, 1986.
および
T.Nakamura and Y.Nakamura, Stiffness Design of 3-D Shear Buildings for Specified Seismic Drift, *J. Structural Engineering, ASCE*, Vol.119, No.1, pp50-68, 1993.

[9] Y.M.Ram, Inverse Mode Problems for the Discrete Model of a Vibrating Beam, *J. Sound and Vibration*, Vol.169, No.2, pp.239-252, 1994.

[10] I.Takewaki and T.Nakamura, Hybrid Inverse Mode Problems for FEM-Shear Models, *J. Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.121, No.8, pp873-880, 1995.

[11] I.Takewaki, T.Nakamura and Y.Arita, A Hybrid Inverse Mode Problem for Fixed-Fixed Mass-Spring Models, *J. Vibration and Acoustics, ASME*, Vol.118, No.4, pp641-648, 1996.

[12] I.Takewaki, Optimal Frequency Design of Tower Structures

via an Approximation Concept, *Computers & Structures*, Vol.58, No.3, pp445-452, 1996.
[13] I.Takewaki and T.Nakamura, Hybrid Inverse Mode Problem for Structure-Foundation Systems, *J. Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.123, No.4, pp312-321, 1997.
[14] I.Takewaki, T.Nakamura and K.Hirayama, Seismic Frame Design via Inverse Mode Design of Frame-Ground Systems, *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, 17(3), 153-163, 1998.
[15] I.Takewaki, Hybrid Inverse Eigenmode Problem for a Shear Building Supporting a Finite-Element Subassemblage, *J. Vibration and Control*, Vol.4, No.4, pp347-360, 1998.
[16] I.Takewaki, Hybrid Inverse Eigenmode Problem for Top-Linked Twin Shear Building Models, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.41, No.9, pp1133-1153, 1999.
[17] P.Lancaster and J.Maroulas, Inverse Eigenvalue Problems for Damped Vibrating Systems, *J. Mathematical Analysis and Applications*, Vol.123, No.1, pp238-261, 1987.
[18] D.J.Inman, *Vibration with Control, Measurement, and Stability*, Prentice Hall, 1989.
[19] C.Minas and D.J.Inman, Matching Finite Element Models to Modal Data, *J. Vibration and Acoustics, ASME*, Vol.112, pp84-92, 1990.
[20] I.Takewaki, Efficient Redesign of Damped Structural Systems for Target Transfer Functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.147, No.3/4, pp275-286, 1997.
[21] I.Takewaki and K.Uetani, Efficient Redesign of Damped Large Structural Systems via Domain Decomposition with Exact Dynamic Condensation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.178, Nos.3-4, pp367-382, 1999.
[22] 竹脇　出，中村恒善，弾性支持された曲げ剪断型構造物モデルの混合型逆定式化による地震時変形制約設計，構造工学論文集，Vol.39B，pp105-118，1993.
[23] 中村恒善，林　龍憲，梁の一次固有周期・一次固有モード指定設計法，構造工学論文集，Vol.34B，pp95-104，1988.
[24] I.Takewaki, Semi-Explicit Optimal Frequency Design of Chimneys with Geometrical Constraints, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.23, No.1, pp37-56, 1996.
[25] 中村恒善，建築骨組の最適設計，丸善，1980.
[26] 日本建築学会，応用力学シリーズ第２巻「建築構造物の設計力学と制御動力学」，1994.
[27] 中村恒善，竹脇　出，島野幸弘，混合型逆定式化による建築骨組 - 杭 - 地盤連成系の地震時設計ひずみに対する剛性設計，日本建築学会構造系論文報告集，第 440 号，43-56，1992.
[28] 竹脇　出，弾性地盤により支持された建築構造物の最適設計および地震時応答制約設計，京都大学工学博士学位論文，1991年3月.
[29] 竹脇　出，弾性支持された構造物の設計力学，応用力学シリーズ第２巻「建築構造物の設計力学と制御動力学」第３章，日本建築学会，pp53-88，1994.
[30] 中村恒善，竹脇　出，弾性支持されたせん断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計，構造工学論文集，Vol.31B，pp93-102，1985.
[31] 竹脇　出，中村恒善：構造物 - 基礎システムの１次固有振動における混合型逆問題，日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸)，pp515-516，1992.
[32] 竹脇　出，中村恒善，下部剛性指定せん断型構造物モデルの混合型逆定式化による地震時応答制約剛性設計，日本建築学会構造系論文集，第455号，pp47-59，1994.
[33] 中村恒善，竹脇　出，浅岡泰彦，せん断型地盤で支持されたせん断棒型構造物の指定地震時変形に対する剛性設計，日本建築学会構造系論文集，第470号，pp53-63，1995.
（その他の振動逆問題や感度解析および最適設計関係）
[34] I.Takewaki, Elastic Frame Redesign via a Performance- Based Incremental Inverse Problem, *Computers & Structures*, Vol.63, No.2, pp217-224, 1997.
[35] I.Takewaki, Incremental Inverse Eigenmode Problem for Performance-Based Structural Redesign, *Finite Elements in Analysis and Designn*, Vol.27, No.2, pp175-191, 1997.
[36] I.Takewaki, Efficient Optimal Frequency Design of Elastically-Supported Distributed-Parameter Cantilevers, *Computers & Structures*, Vol.62, No.1, pp107-117, 1997.
[37] K.A.Stetson, Perturbation Method of Structural Design Relevant to Holographic Vibration Analysis, *AIAA J.*, Vol.13, No.4, pp457-459, 1975.
[38] K.A.Stetson and G.E.Palma, Inversion of First-Order Perturbation Theory and Its Application to Structural Design, *AIAA J.*, Vol.14, No.4, pp454-460, 1976.
[39] K.A.Stetson, I.R.Harrison and G.E.Palma, Redesigning Structural Vibration Modes by Inverse Perturbation Subject to Minimal Change Theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.16, pp151-175, 1978.
[40] K.-O.Kim, W.J.Anderson and R.E.Sandstrom, Nonlinear Inverse Perturbation Method in Dynamic Analysis, *AIAA J.*, Vol.21, No.9, pp1310-1316, 1983.
[41] R.L.Fox and M.P.Kapoor, Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, *AIAA J.*, Vol. 6, No.12, pp2426-2429, 1968.
[42] R.L.Fox, *Optimization Methods for Engineering Design*, Addson-Wesley Publishing Company, 1972.
[43] R.B.Nelson, Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives, *AIAA J.*, Vol.14, No.9, pp1201-1205, 1976.
[44] E.Haug and J.S.Arora, *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons, 1979.
[45] U.Kirsch, Optimum Structural Design, 1981（最適構造設計：山田善一，大久保禎二監訳，丸善，1983）
[46] G.N.Vanderplaats, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill, 1984.
[47] 構造システムの最適化　－理論と応用－，土木学会，1988.
[48] T.Nakamura and I.Takewaki, Optimum Building Design for Forced-Mode Compliance, *J. Engineering Mechanics, ASCE*,

Vol.111, No.9, pp1159-1174, 1985.

[49] T.Nakamura, M.Ohsaki and T.Masui, Inverse Generation of Earthquake-strain Constrained Designs of a Distributed Parameter Structure for a Sequence of Design Strain Functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.98, pp1-21, 1992.

[50] 辻　聖晃，中村恒善，Maxwell型の粘性ダンパーを有するせん断型構造物の地震時指定層間変位に対する剛性設計解列，日本建築学会構造系論文集，No.491，pp55-，1997.

[51] T.Nakamura, M.Tsuji, Inverse damping perturbation for stiffness design of shear buildings. *J Struct Eng ASCE*, Vol.122, 617–25, 1996.

[52] M. Tsuji and T. Nakamura, Optimum viscous dampers for stifness design of shear buildings, *Struct. Design Tall Build.*, Vol.5, 217-234, 1996.

[53] I.Takewaki, Optimal Damper Placement for Minimum Transfer Functions, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.26, No.11, pp1113-1124, 1997.

[54] I.Takewaki, S.Yoshitomi, K.Uetani and M.Tsuji, Non-Monotonic Optimal Damper Placement via Steepest Direction Search, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.28, No.6, pp655-670, 1999.

[55] 井上喜雄，藤川　猛，今西悦二郎，阿部　亨，減衰振動系における感度解析と設計変更後の動特性予測，日本機械学会論文集（C編），50巻452号，pp597-606，1984.

[56] W.C.Gibson and E.M.Austin, Analysis and Design of Damped Structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.14, pp337-351, 1993.

(部分構造合成法を用いた逆問題)

[57] I.Takewaki, Inverse Component-Mode Synthesis Method for Redesign of Large Structural Systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.166, Nos.3-4, pp201-209, 1998.

[58] I.Takewaki and K.Uetani, Inverse Component-mode Synthesis Method for Damped Large Structural Systems, *Computers & Structures*, Vol.78, No.1-3., 415-423, 2000.

および

I.Takewaki, H.Sato and K.Uetani, Reduced-Basis Stiffness Inversion of a Structure- Foundation System via Component-Mode Synthesis, *J. of The Structural Design of Tall Buildings*, Vol.9, pp215-232, 2000.

(部分構造合成法に関する文献)

[59] W.C.Hurty, Vibrations of Structural Systems by Component Mmode Synthesis, *J. Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.86, No.EM4, pp51-69, 1960.

[60] W.C.Hurty, Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes, *AIAA J.*, Vol.3, No.4, pp678-685, 1965.

[61] R.R.Craig, Jr. and M.C.C.Bampton, Coupling of Substructures for Dynamic Analysis, *AIAA J.*, Vol.6, No.7, 1313-1319, 1968.

[62] R.R.Craig, Jr., Substructure Methods in Vibration, *Trans. of the ASME, Special 50th anniversary design issue*, Vol.117, pp207-213, 1995.

[63] 長松昭男，大熊政明，部分構造合成法，培風館，1991.

（連結制振関係の逆問題）

[64] 伊藤　宰，辻　聖晃，吉富信太，竹脇　出，アウトフレーム連結制振構法による既存建物耐震補強の逆問題型アプローチ，日本建築学会構造系論文集, 第 73 巻，第 627 号, pp725-732, 2008.

（極限外乱法関係）

[65] R.F.Drenick, 'Model-Free Design of Aseismic Structures', *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 96(EM4), 483-493, 1970.

[66] 竹脇　出，確率論に基づく新しい critical 外乱法，日本建築学会構造系論文集，第 533 号, pp69-74, 2000.

[67] I.Takewaki, Probabilistic Critical Excitation for MDOF Elastic-plastic Structures on Compliant Ground, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, 30(9), 1345-1360, 2001.

[68] 竹脇　出，変動クリティカル外乱に対するグローバル性能最大化設計，日本建築学会構造系論文集，第 539 号, pp63-69, 2001.

[69] I.Takewaki, Seismic Critical Excitation Method for Robust Design: A Review, *J. Struct. Eng.*, ASCE, 128(5), 665-672, 2002.

[70] 竹脇　出，多様な減衰分布を有する構造物に入力される地震エネルギーの限界値，日本建築学会構造系論文集，第 572 号, pp65-72, 2003.

[71] 竹脇　出，スウェイ・ロッキングモデルに入力される地震エネルギーの限界値，日本建築学会構造系論文集，第 576 号, pp71-78, 2004.

[72] 竹脇　出，大渕邦之，山崎雅弘，構造物 - 杭 - 地盤連成系への地震エネルギー入力, 日本建築学会構造系論文集，第 583 号, pp39-46, 2004.

[73] I.Takewaki, Bound of Earthquake Input Energy, *J. Struct. Eng.*, ASCE, 130(9), 1289-1297, 2004.

[74] 竹脇　出，不確定性を有する構造物のロバスト性の非確率的評価法，日本建築学会構造系論文集，第 581 号, pp55-61, 2004.

（小委員会活動）

[75] 日本建築学会，応用力学運営委員会，構造システム設計力学小委員会, 応用力学シリーズ第 10 巻「建築構造物の創造的数理設計手法の展望」，2002.

[76] 日本建築学会，応用力学運営委員会，構造設計システムの数理化小委員会＋構造物の性能最適化とロバスト性小委員会,「建築構造物の性能最適化とロバスト性に関するセミナー」資料，2005 年 12 月.

[77] 日本建築学会，応用力学運営委員会，構造物の性能最適化とロバスト性小委員会, 2008 年大会 PD「建築構造設計における冗長性と頑強性の役割　―リダンダンシーとロバスト性とは―」